F762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

1

TOMUL 20

1968

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAȘ — secretar de redacție.

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134—135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție al revistei pe adresa: Str. Mihail Eminescu nr. 47, București.

F 762

TOM. 20, Nr. 1
1968

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

SUMAR

Pag.

ION MUNTEAN, Sinteza automatelor finite cu număr minim de stări 3

ALEXANDRU NICOLAU, Probleme la limită Riemann şi Hilbert cu singularităţi date şi cu date raţionale pe contur . . . 15

V. OBĂDEANU, Extinderea relaţiei de conjugare pe varietăţile neolonome 25

CONSTANTIN RAISCHI, Relaţia de dominare şi analiza algebrică contextuală 31

RADU ROŞCA, Asupra transformărilor normale infinitezimale şi de dilataţie superficială nulă în spaţiul eliptic 43

MARCEL N. ROŞCULEŢ, Funcţii relativ convexe 55

NICOLAE TELEMAN, Clasificarea spaţiilor riemanniene V_4 omogene de tip relativist 67

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 1, P. 1–126, BUCUREŞTI, 1968

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
1883

SINTEZA AUTOMATELOR FINITE CU NUMĂR MINIM DE STĂRI

DE

ION MUNTEAN

În lucrare se dă o metodă pentru obținerea automatelor cu număr minim de stări echivalente cu un automat dat.

Metoda este aplicabilă şi în probleme de clasificare a elementelor unei mulțimi după o relație dată, în general netranzitivă.

I

1.1. Fie $A(Z, X, Y, \delta, \lambda)$ un automat în care:

Z e mulțimea stărilor automatului

X mulțimea semnalelor de intrare

Y mulțimea semnalelor de ieşire

$\delta = \delta(z, x)$ funcția de tranziție a automatului care aplică mulțimea $Z \times X$ în mulțimea Z.

$\lambda = \lambda(z, x)$ funcția de ieşire a automatului care stabileşte o aplicație a mulțimii $Z \times X$ în mulțimea Y.

1.2. Convenim să scriem un automat sub formă de matrice [1], în care coloanele vor corespunde semnalelor de intrare $x^1, x^2, \ldots, x^r$, iar liniile, stărilor $z_1, z_2, \ldots, z_n$ La intersecția liniei z_i cu coloana x^j vom scrie valorile funcțiilor de tranziție $\delta(z_i, x^j)$ şi de ieşire $\lambda(z_i, x^j)$, ca în tabelă.

1.3. Automatele pentru care funcțiile $\delta(z, x)$, $\lambda(z, x)$ sînt definite pentru toate perechile (z, x), $z \in Z$, $x \in X$, vor fi numite automate complet definite, în timp ce automatele pentru care funcțiile $\delta(z, x)$, $\lambda(z, x)$ sînt definite numai pentru o parte din perechile (z, x), vor fi numite automate incomplet definite sau parțiale [1], [2].

II

2.1. Fie Z_{ij} mulțimea perechilor de stări $[\delta(z_i, x^k), \delta(z_j, x^k)]$ pentru orice k din mulțimea $I_r = \{1, 2, \ldots, r\}$ pentru care atît $\delta(z_i, x^k)$ cît şi $\delta(z_j, x^k)$ sînt definite.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 1, P. 3-13, BUCUREŞTI, 1968

Tabelă

	x^1	$\dots$	x^j	$\dots$	x^r
z_1	$\delta(z_1,x^1),\ \lambda(z_1,x^1)$	$\dots$	$\delta(z_1,\ x^j),\ \lambda(z_1,\ h^j)$	$\dots$	$\delta(z_1,\ x^r),\ \lambda(z_i,\ x^r)$
$\vdots$	$\vdots$				
z_i	$\delta(z_i\ ,x^1),\ \lambda(z_i\ ,x^1)$	$\dots$	$\delta(z_i,\ x^j)\ ,\ \lambda(z_i,\ x^j)$	$\dots$	$\delta(z_i,\ x^r),\ \lambda(z_i,\ x^r)$
$\vdots$	$\vdots$				
z_k	$\delta(z_k,\ x^1),\ \lambda(z_k,\ x^1)$	$\dots$	$\delta(z_k,\ x^j),\ \lambda(z_k,\ x^j)$	$\dots$	$\delta(z_k,\ x^r),\ \lambda(z_k,\ x^r)$
$\vdots$	$\vdots$				
z_n	$\delta(z_n,\ x^1),\ \lambda(z_n,\ x^1)$	$\dots$	$\delta(z_n,\ x^j),\ \lambda(z_n,\ x^j)$	$\dots$	$\delta(z_n\ ,x^r),\ \lambda(z_n,\ x^r)$

Se pot ivi următoarele cazuri :

1) Z_{ij} este mulţimea vidă sau conţine numai perechea $(z_i,\ z_j)$ şi în plus $\lambda(z_i,\ x^k) = \lambda(z_j,\ x^k)$ pentru orice $k \in I_r$. În acest caz starea z_i se zice compatibilă cu z_j şi le vom asocia o variabilă booleană e_{ij}, care să caracterizeze acest lucru.

2) Există cel puţin un $k \in I_r$ astfel încît $\lambda(z_i,\ x^k) \neq \lambda(z_j,\ x^k)$. În acest caz stările z_i şi z_j sînt necompatibile, şi le vom asocia variabila booleană $\bar{e}_{ij}$.

3) Z_{ij} conţine cel puţin o pereche $(z_r,\ z_s) \neq (z_i,\ z_j)$ şi $\lambda(z_i,\ x^k) = \lambda(z_j,\ x^k)$ pentru orice $k \in I_r$.

Atunci există implicaţiile :

$$\prod_{(z_r,\ z_s)\in Z_{ij}} e_{rs} \to e_{ij}\ ,\quad \& \quad \overline{\prod_{(z_r,\ z_s)\in Z_{ij}} e_{rs}} \to \bar{e}_{ij} \tag{2.1}$$

care sînt echivalente cu următoarea expresie booleană :

$$\left(\prod_{(z_r,\ z_s)\in Z_{ij}} e_{rs} \cup \bar{e}_{ij}\right)\left(\overline{\prod_{(z_r,\ z_s)\in Z_{ij}} e_{rs}} \cup e_{ij}\right) = 1 \tag{2.2}$$

2.2. Vom nota cu M mulţimea perechilor $(z_i,\ z_j)$ care se găsesc în cazul 1), cu N mulţimea perechilor $(z_i,\ z_j)$ care se găsesc în cazul 2) şi cu P mulţimea perechilor $(z_i,\ z_j)$ care se găsesc în cazul 3).

Orice pereche $(z_i,\ z_j)$, $z_i,\ z_j \in Z$ se găseşte într-una dintre mulţimile M, N, P şi numai într-una.

Vom asocia automatului $A(Z, X, Y, \delta, \lambda)$, funcţia booleană

$$E(A) = \prod_{(z_i,\, z_j) \in M} e_{ij} \prod_{(z_k,\, z_l) \in N} \overline{e}_{kl} \prod_{(z_m,\, z_n) \in P} \times$$

$$\times \left(\prod_{(z_r,\, z_s) \in Z_{mn}} e_{rs} \cup \overline{e}_{mn} \right) \left(\overline{\prod_{(z_r,\, z_s) \in Z_{mn}} e_{rs}} \cup e_{mn} \right). \tag{2.3}$$

2.3. Lema 1. *În expresia $E(A)$ variabilele sînt separabile, astfel încît se poate scrie:*

$$E(A) = E_M(A) E_N(A) E_P(A),$$

unde $E_M(A)$ conţine numai variabile e_{ij} pentru care $(z_i, z_j) \in M$, $E_N(A)$ conţine variabile e_{kl} pentru care $(z_k, z_l) \in N$ şi $E_P(A)$ conţine variabile e_{mn} pentru care $(z_m, z_n) \in P$.

Demonstraţia rezultă imediat observînd că:

1) Dacă în produsul $\prod_{(z_r,\, z_s) \in Z_{mn}} e_{rs}$ există e_{ij} astfel încît $(z_i, z_j) \in M$, atunci se poate scrie:

$$e_{ij} \left(\prod_{(z_r,\, z_s) \in Z_{mn}} e_{rs} \cup \overline{e}_{mn} \right) \left(\overline{\prod_{(z_r,\, z_s) \in Z_{mn}} e_{rs}} \cup e_{mn} \right) =$$

$$= e_{ij} \left(\prod_{(z_r,\, z_s) \in Z_{mn}}' e_{rs} \cup \overline{e}_{mn} \right) \left(\overline{\prod_{(z_r,\, z_s) \in Z_{mn}}' e_{rs}} \cup e_{mn} \right)$$

unde $\prod_{(z_r,\, z_s) \in Z_{mn}}' e_{rs}$ nu conţine pe e_{ij}.

2) Dacă produsul $\prod_{(z_r,\, z_s) \in Z_{mn}} e_{rs}$ conţine un termen e_{kl} astfel încît $(z_k, z_l) \in N$, atunci

$$\overline{e}_{kl} \left(\prod_{(z_r,\, z_s) \in Z_{mn}} e_{rs} \cup \overline{e}_{mn} \right) \left(\overline{\prod_{(z_r,\, z_s) \in Z_{mn}} e_{rs}} \cup e_{mn} \right) = \overline{e}_{kl}\, \overline{e}_{mn} \tag{2.4}$$

2.4. Lema 2. *În forma normal disjunctivă a expresiei $E(A)$ există un constituent al unităţii care conţine cel mai mare număr de variabile nenegate şi astfel încît variabilele nenegate ale oricărui constituent al unităţii din $E(A)$ se regăsesc printre variabilele nenegate ale acestui constituent.*

Demonstraţie. Să observăm mai întîi că dacă $\prod_{(z_r,\, z_s) \in Z_{mn}} e_{rs}$ conţine numai variabile e_{rs} astfel încît $(z_r, z_s) \in M$, în $E(A)$ există termenul:

$$\prod_{(z_r,\, z_s) \in Z_{mn}} e_{rs} \left(\prod_{(z_r,\, z_s) \in Z_{mn}} e_{rs} \cup \overline{e}_{mn} \right) \left(\overline{\prod_{(z_r,\, z_s) \in Z_{mn}} e_{rs}} \cup e_{mn} \right) = e_{mn} \prod_{(z_r,\, z_s) \in Z_{mn}} e_{rs} \tag{2.5}$$

Dacă toate produsele $\prod_{(z_r,\, z_s) \in Z_{mn}} e_{rs}$ conţin numai variabile e_{rs} astfel încît (z_r, z_s) să fie cuprinse fie în M, fie în N, atunci din (2.4) şi (2.5) rezultă că $E(A)$ se reduce la un singur constituent al unităţii şi deci lema se verifică în acest caz.

Dacă condiţia precedentă nu este îndeplinită, atunci $E_P(A)$ se reduce la un produs de variabile e_{mn}, negate sau nenegate după cum se obţine din (2.4) sau (2.5) înmulţit cu un produs de termeni de forma

$$\left(\prod_{(z_r,\, z_s)\in Z_{mn}} e_{rs}\cup\bar{e}_{mn}\right)\left(\overline{\prod_{(z_r,\, z_s)\in Z_{mn}} e_{rs}}\cup e_{mn}\right) \tag{2.6}$$

unde pentru orice variabilă e_{rs} perechea $(z_r,\, z_s)\in P$.

Întrucît (2.6) este reuniunea a două produse

$$e_{mn}\prod_{(z_r,\, z_s)\in Z_{mn}} e_{rs}\cup\bar{e}_{mn}\,\overline{\prod_{(z_r,\, z_s)\in Z_{mn}} e_{rs}} \tag{2.7}$$

în care unul conţine numai variabile nenegate iar al doilea numai variabile negate, orice produs de termeni de forma (2.7) conţine un constituent al unităţii compus numai din variabile nenegate şi care introdus în $E(A)$ va conduce la un constituent al unităţii cu număr maxim de variabile nenegate. Partea a doua a lemei rezultă din faptul că variabilele negate ale acestui constituent corespund perechilor de stări $(z_k,\, z_l)\in N$ sau sînt de forma 2.4, or, aceste variabile se găsesc în orice constituent al unităţii din $E(A)$.

2.5. DEFINIŢIA 1. *Constituentul unităţii al lui $E(A)$ cu număr maxim de variabile nenegate va fi numit element generator al automatului redus.*

Fie acesta

$$\prod_{\substack{i,\, j=1,\, 2,\, \ldots,\, n\\ i\neq j}} e_{ij}^{\alpha_{ij}} \tag{2.8}$$

unde n este numărul de stări din Z, iar α_{ij} are valoarea 0 sau 1 după cum variabila e_{ij} din elementul generator este negată sau nenegată.

Convenind să luăm $\alpha_{ii}=1$ pentru orice $i=1,2,\ldots,n$, putem să asociem elementului generator o matrice pătrată :

$$\mathfrak{A}=(\alpha_{ij}),\qquad i,\, j=1,\, 2,\, \ldots,\, n \tag{2.9}$$

care se bucură de proprietatea că elementele α_{ij} sînt egale cu 1 pentru toate perechile de stări z_i, z_j compatibile şi egale cu 0 în caz contrar.

2.6. Să observăm că relaţia de compatibilitate astfel definită nu este o relaţie de echivalenţă întrucît nu îndeplineşte axioma tranzitivităţii.

LEMA 3. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca p stări $z_1\; z_2,\ldots,z_p$ să fie echivalente este ca submatricea corespunzătoare acestor stări*

$$(\alpha_{ij})\qquad i,\, i=1,\, 2,\, \ldots,\, p \tag{2.10}$$

să aibă toate elementele α_{ij} egale cu 1.

Într-adevăr, deoarece $\alpha_{ij}=1$ pentru orice $i,\ j=1,2,\ldots,p$, stările $z_1,\ z_2,\ldots,z_p$ sînt compatibile două cîte două şi pentru acelaşi motiv se verifică şi tranzitivitatea.

2.7. *Observaţie.* Din lema 3 se deduce că problema căutării submatricilor pătrate maximale cu toate elementele egale cu 1 ale matricei $\mathfrak{A}$ este echivalentă cu problema căutării submulţimilor maximale de stări echivalente ale mulţimii Z a stărilor.

Ținînd seama de observația precedentă vom da următorul algoritm pentru căutarea submulțimilor maximale de stări echivalente ale lui Z.

1. Dacă $\mathfrak{A}$ are toate elementele α_{ij} egale cu 1, atunci îi asociem mulțimea stărilor Z:

$$\mathfrak{A} \Leftrightarrow Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}.$$

2. Fie $\mathfrak{A}(\alpha_{ii})$ submatricea lui $\mathfrak{A}$ obținută din acesta prin ștergerea liniei și coloanei i și fie $Z_{\alpha_{ii}}$ submulțimea de părți a lui Z care se asociază lui $\mathfrak{A}(\alpha_{ii})$. Dacă elementele liniei și coloanei i a lui $\mathfrak{A}$ sînt egale cu 1, atunci matricei $\mathfrak{A}$ i se asociază submulțimea de părți a lui Z obținută prin reuniunea stării z_i cu mulțimea de părți

$$Z_{\alpha_{ii}} = \{Z^1_{\alpha_{ii}}, Z^2_{\alpha_{ii}}, \ldots, Z^k_{\alpha_{ii}}\}$$

$$\mathfrak{A} \Leftrightarrow \{(z_i, Z^i_{\alpha_{ii}}), (z_i, Z^2_{\alpha_{ii}}), \ldots, (z_i, Z^k_{\alpha_{ii}})\}$$

unde $(z_i, Z^s_{\alpha_{ii}})$ este partea lui Z compusă din z_i și stările din $Z^s_{\alpha_{ii}}$.

Observație. z_i nu se absoarbe în $Z^s_{\alpha_{ii}}$ întrucît submulțimile lui $Z^s_{\alpha_{ii}}$, oricare ar fi s, nu conțin pe z_i.

3. Presupunem că punctul 2 nu e îndeplinit.

Fie $\mathfrak{A}(\alpha^1_{ii})$ submatricea lui $\mathfrak{A}$ intersecție a liniilor și coloanelor care se bucură de proprietatea că au în coloana și respectiv în linia i numai elemente 1 și fie $Z_{\alpha^1_{ii}}$ submulțimea de părți a lui Z care se asociază submatricii $\mathfrak{A}(\alpha^1_{ii})$. Atunci matricii $\mathfrak{A}$ i se asociază mulțimea de părți a lui Z obținută ca reuniune a mulțimilor de părți $Z_{\alpha_{ii}}$, $Z_{\alpha^1_{ii}}$:

$$\mathfrak{A} \Leftrightarrow \{Z_{\alpha_{ii}}, Z_{\alpha^1_{ii}}\}.$$

4. Se aplică punctele 1, 2, 3 submatricilor $\mathfrak{A}(\alpha_{ii})$, $\mathfrak{A}(\alpha^1_{ii})$.

2.8. TEOREMA 1. *Algoritmul descris în aliniatul 2.7 conduce la toate submulțimile maximale de stări echivalente ale lui Z.*

Demonstrație. Presupunem contrariul. Atunci există o submulțime a lui Z, fie $Z_p = \{z_1, z_2, \ldots, z_p\}$, de stări echivalente care nu s-a obținut prin algoritmul din 2.7. Ținînd seama de lema 2, rezultă că în matricea $\mathfrak{A}$ submulțimii Z_p îi corespunde o submatrice $\mathfrak{A}_p$ cu toate elementele egale cu 1. Presupunem că începem algoritmul cu elementele lui Z care nu sînt incluse în Z_p. Atunci după $n-p$ pași vor fi eliminate din $\mathfrak{A}$ toate liniile și coloanele corespunzătoare elementelor din $Z-Z_p$ și matricea $\mathfrak{A}$ se va reduce la $\mathfrak{A}_p$ și conform punctului 1 din algoritm, Z_p va fi inclus în mulțimea de părți asociată lui $\mathfrak{A}$, contrar presupunerii, ceea ce demonstrează teorema.

2.9. Fie $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ toate submulțimile maximale de stări echivalente obținute prin aplicarea algoritmului din aliniatul 2.7. Vom obține o submulțime minimală dintre acestea care acoperă pe Z aplicînd algoritmul lui Petrick [4].

Dacă $H = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_r\}$ este o submulţime minimală care acoperă pe Z, atunci aceasta verifică condiţiile :

1) Stările din fiecare Z_i sînt două cîte două compatibile (lema 3).
2) $\bigcup\limits_i Z_i = Z$.

Pentru ca această submulţime să conducă la un automat redus trebuie în plus să verifice condiţia :

3) Pentru orice intrare x şi fiecare Z_i din H mulţimea

$$\delta^*(Z_i, x) = \{\delta(z, x)/z \in Z_i\} \tag{2.11}$$

este o submulţime a unui Z_j din H, sau este mulţimea vidă.

Observaţie. (2.11) defineşte funcţia de tranziţie a automatului redus, convenind să luăm $\delta^*(Z_i, x) = Z_j$ ori de cîte ori $\delta^*(Z_i, x) \in Z_j$. În general $\delta^*(Z_i, x)$ poate fi inclus în mai mulţi Z_j, aceştia putînd fi aleşi arbitrar. În [1] relaţia (2.11) se limitează la acei $\delta(z, x)$ pentru care există $\lambda(z, x)$.

2.10. LEMA 4. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca condiţia (3) să fie îndeplinită este ca submulţimea H să verifice toate implicaţiile (2.1) respectiv (2.2).*

Într-adevăr, din (2.1) se deduce că dacă perechea de stări $(z_r, z_s) \in Z_{ij}$ se găseşte într-o submulţime din H, atunci şi perechea (z_i, z_j) trebuie să se găsească într-o astfel de submulţime. Şi, în general, din cauza tranzitivităţii, dacă o submulţime de stări $\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ a lui Z se găseşte în aceeaşi submulţime din H, atunci submulţimea corespunzătoare prin implicaţiile (2.1), $\{z_1', z_2', \ldots, z_k'\}$ se va găsi în aceeaşi submulţime din H.

2.11. Sîntem în măsură acum să descriem algoritmul pentru reducerea numărului de stări.

1. Se scrie $E(A)$ dată de (2.3) şi se stabileşte implicantul prim generator al automatului.

2. Se asociază implicantului prim generator matricea $\mathfrak{A}$ dată de relaţia (2.9).

3. Se stabilesc submulţimile de stări echivalente ale lui Z aplicînd algoritmul dat în aliniatul 2.7 şi prin absorbţie se reţin numai cele maximale.

4. Se stabilesc submulţimile minimale dintre cele de la punctul 3 care acoperă pe Z aplicînd algoritmul lui Petrick.

5. Se verifică dacă submulţimile obţinute la punctul 4 satisfac implicaţiile (2.1), şi dacă este cazul se înlătură unele stări din unele submulţimi.

6. Se calculează funcţiile de tranziţie

$$\delta^*(Z_i, x) = \{\delta(z, x)/z \in Z_i\}$$

şi de ieşiri

$$\lambda^*(Z_i, x) = \lambda(z, x)$$

pentru un z oarecare din Z_i,

Exemplul 1. Să se reducă numărul de stări pentru automatul cu matricea :

	x^1	x^2
z_1		z_3 0
z_2	z_3 0	z_7 0
z_3	z_4 0	
z_4	z_5 1	z_3 0
z_5		z_6 0
z_6		1

$$1)\ E(A) = (e_{35} \cup \overline{e}_{12})\, (\overline{e}_{35} \cup e_{12})\, e_{13}\, e_{14}\, (e_{36} \cup \overline{e}_{15})\, (\overline{e}_{36} \cup e_{15})\, \overline{e}_{16}\, (e_{34} \cup \overline{e}_{23})$$
$$(\overline{e}_{34} \cup e_{23})\, \overline{e}_{24}\, (e_{56} \cup \overline{e}_{25})\, (\overline{e}_{56} \cup e_{25})\, \overline{e}_{26}\, \overline{e}_{34}\, e_{35}\, e_{36}\, (e_{36} \cup \overline{e}_{45})$$
$$(\overline{e}_{36} \cup e_{45})\, \overline{e}_{46}\, \overline{e}_{56} = e_{12}\, e_{13}\, e_{14}\, e_{15}\, \overline{e}_{16}\, \overline{e}_{23}\, \overline{e}_{24}\, \overline{e}_{25}\, \overline{e}_{26}\, \overline{e}_{34}$$
$$= e_{35}\, e_{36}\, e_{45}\, \overline{e}_{46}\, \overline{e}_{56}$$

$$2)\quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&0 \\ 1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&1&0&1&1 \\ 1&0&0&1&1&0 \\ 1&0&1&1&1&0 \\ 0&0&1&0&0&1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1 \\ 1&1&0&0&0 \\ 1&0&1&0&1 \\ 1&0&0&1&1 \\ 1&0&1&1&1 \end{pmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\ \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&1 \\ 0&0&1&1&0 \\ 0&1&1&1&0 \\ 0&1&0&0&1 \end{pmatrix} \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left[P_1, \begin{array}{c} 2\ 3\ 4\ 5 \\ \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&1 \\ 0&0&1&1 \\ 0&1&1&1 \end{pmatrix} \end{array} \right], \{P_2\}, \begin{array}{c} 3\ 4\ 5\ 6 \\ \begin{pmatrix} 1&0&1&1 \\ 0&1&1&0 \\ 1&1&1&0 \\ 1&0&0&1 \end{pmatrix} \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\{P_1,\ P_2\}, \left[P_1, \begin{array}{c} 3\ 4\ 5 \\ \begin{pmatrix} 1&0&1 \\ 0&1&1 \\ 1&1&1 \end{pmatrix} \end{array} \right], \{P_2\}, \begin{array}{c} 3\ 5\ 6 \\ \begin{pmatrix} 1&1&1 \\ 1&1&0 \\ 1&0&1 \end{pmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} 4\ 5\ 6 \\ \begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 1&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ (P_1,\ P_2) \left| P_1, \begin{array}{c} 3\ 5 \\ \begin{pmatrix} 1&1 \\ 1&1 \end{pmatrix} \end{array} \right|, \left[P_1, \begin{array}{c} 4\ 5 \\ \begin{pmatrix} 1&1 \\ 1&1 \end{pmatrix} \end{array} \right], \{P_2\}, \left[P_3, \begin{array}{c} 5\ 6 \\ \begin{pmatrix} 1&0 \\ 0&1 \end{pmatrix} \end{array} \right|, \begin{array}{c} 4\ 5 \\ \begin{pmatrix} 1&1 \\ 1&1 \end{pmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} 5\ 6 \\ \begin{pmatrix} 1&0 \\ 0&1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{(P_1,\ P_2),\ (P_1,\ P_3,\ P_5),\ (P_1,\ P_4,\ P_5),\ (P_2),\ (P_3,\ P_5),\ (P_3,\ P_6),\ (P_4,\ P_5),\ P_5,\ P_6)\}.$$

3) Dacă se fac absorbţiile necesare se obţine:

$$\{(P_1,\ P_2),\ (P_1,\ P_3,\ P_5),\ (P_1,\ P_4,\ P_5),\ (P_3,\ P_6)\}.$$

4) Notînd $A = (P_1,\ P_2)$, $B = (P_1,\ P_3,\ P_5)$, $C = (P_1,\ P_4,\ P_5)$, $D = (P_3,\ P_6)$ şi aplicînd algoritmul lui Petrick se obţine:

$$(A + B + C)A(B + D)\ C(B + C)\ D = ACD$$

adică submulţimea minimală care acoperă pe Z este:

$$A = (P_1,\ P_2),\ C = (P_1,\ P_4,\ P_5),\ D = (P_3,\ P_6).$$

5) Verificînd implicaţiile se vede că nu se verifică

$$\overline{e}_{35} \rightarrow \overline{e}_{12}.$$

E nevoie să înlăturăm pe P_1 din A şi se obţin stările automatului redus

$$A' = (P_2),\ C = (P_1,\ P_4,\ P_5),\ D = (P_3,\ P_6)$$

6) $\delta^*(A',\ x^1) = \{z_3\} \in D,$ $\lambda^*(A',\ x^1) = 0$

$\delta^*(A',\ x^2) = \{z_5\} \in C,$ $\lambda^*(A',\ x^2) = 0$

$\delta^*(C,\ x^1) = \{z_5\} \in C,$ $\lambda^*(C,\ x^1) = 1$

$\delta^*(C,\ x^2) = (z_3,\ z_6) \in D,$ $\lambda^*(C,\ x^2) = 0$

$\delta^*(D,\ x^1) = \{z_4\} \in C,$ $\lambda^*(D,\ x^1) = 0$

$\delta^*(D,\ x^2) = -$ $\lambda^*(D,\ x^2) = 1$

Automatul redus va fi:

	x^1		x^2	
A'	D	0	C	0
C	C	1	D	0
D	C	0		1

Observaţie. Dacă doream să obţinem toate soluţiile minimale puteam înainte de a trece la pasul 3 să alegem o variantă a algoritmului care constă din căutarea acoperirii minimale a lui Z înainte de efectuarea absorbţiilor. În exemplul de mai sus dacă notăm:

$$A = \{P_1,\ P_2\},\ B = \{P_1,\ P_3,\ P_5\},\ C = \{P_1,\ P_4,\ P_5\},\ D = \{P_3,\ P_6\},$$

$$A' = \{P_2\},\ E = \{P_3,\ P_5\},\ F = \{P_4,\ P_5\},\ G = \{P_5,\ P_6\}.$$

Acoperirea minimală va fi dată de

$$(A + B + C)\,(A + A')\,(B + D + E)\,(C + F)\,(B + C + E + F + G)\,(D + G) = ACD + AFD + A'CD + A'BFD + ACBG + AFBG + A'CBG + A'BFG + ACEG + AFEG + A'CEG$$

care ne conduce la 3 soluții, din care ACD constituie soluția precedentă nemodificată, $A'CD$ soluția modificată iar AFD nu constituie soluție deoarece nu verifică implicațiile

$$e_{36} \to e_{15} \,\&\, \overline{e}_{35} \to \overline{e}_{12}.$$

Ținînd seama de aceasta se poate obține soluția adăugînd implicația e_{15} și distrugînd implicația e_{12} care revine la eliminarea lui z_1 din A și adăugarea acestuia în F, ceea ce ne conduce la soluția precedentă $A'CD$, care este soluție unică.

3.1. În capitolul precedent am folosit noțiunile de compatibilitate a două stări și de echivalență a stărilor dintr-o submulțime a lui Z, fiind vorba, în general, de automate incomplet definite pentru care nu se poate da o definiție a echivalenței a două stări care să îndeplinească axioma tranzitivității.

Am numit compatibile două stări p, q pentru care variabila e_{pq} apare nenegată în elementul generator al automatului redus. Vom arăta mai departe că această noțiune, pentru automatele complet definite, este o relație de echivalență.

LEMA 5. *Condiția necesară și suficientă pentru ca două stări* p, q *ale automatului complet definit* A *să fie echivalente este ca* e_{pq} *să apară nenegată în elementul generator al automatului redus,* $E_G(A)$.

Demonstrație. Dacă e_{pq} apare nenegată în $E_G(A)$, atunci stările p și q sînt compatibile. Rămîne să arătăm că se verifică tranzitivitatea. Adică din e_{pq} și e_{qr} incluse în $E_G(A)$ se deduce că și e_{pr} e inclus în $E_G(A)$.

Presupunem contrariul. Atunci există un cuvînt de intrare $J = x^1\, x^2 \ldots x^k$ pentru care

$$\lambda(p_i,\ x^i) = \lambda(r_i,\ x^i), \quad i = 1,2, \ldots, k-1 \tag{3.1}$$

$$\lambda(p_k,\ x^k) \neq \lambda(r_k,\ x^k).$$

Automatul fiind complet definit, cuvîntul J se poate aplica și stării q și datorită presupunerii vom avea :

$$\lambda(p_i,\ x^i) = \lambda(q_i,\ x^i), \quad i = 1,2, \ldots, k \tag{3.2}$$

$$\lambda(q_i,\ x^i) = \lambda(r_i,\ x^i)$$

și întrucît relațiile (3.2) contrazic relațiile (3.1), presupunerea este absurdă, ceea ce trebuia demonstrat.

Am notat $p = p_1$, $q = q_1$, $r = r_1$, $\delta(p_i,\ x^i) = p_{i+1}$ $\delta(q_i,\ x^i) = q_{i+1}, \delta(r_i,\ x^i)\ r_{i+1}$.

Lema 5 ne conduce la următoarea definiție a echivalenței stărilor pentru automate complet definite.

DEFINIŢIA 2. *Două stări p şi q ale unui automat complet definit sînt echivalente dacă variabila booleană asociată e_{pq} apare în $E_G(A)$ nenegată.*

3.2. În [1] şi [2] se dă următoarea definiţie a echivalenţei stărilor în automatele complet definite.

DEFINIŢIA 3. *Două stări p şi q ale unui automat complet definit sînt echivalente dacă pentru orice cuvînt de intrare J există egalitatea*

$$\lambda(p, J) = \lambda(q, J),$$

TEOREMA 2. *Definiţiile 2 şi 3 sînt echivalente.*

Demonstraţie. Presupunem că se verifică definiţia 3. Atunci, folosind notaţiile de mai sus, pentru orice cuvînt de intrare $J = x^1 x^2 \ldots x^k$ şi două stări p şi q echivalente

$$\lambda(p\ J,) = \lambda(q, J)$$

şi în plus există implicaţiile

$$e_{p_i q_i} \to e_{p_{i-1} q_{i-1}} \ \& \ \overline{e}_{p_i q_i} \to \overline{e}_{p_{i-1} q_{i-1}}, \quad i = 1,2, \ldots, k \tag{3.3}$$

ceea ce este echivalent cu expresia booleană :

$$\prod_{i=2,3,\ldots,k} (e_{p_i q_i} e_{p_{i-1} q_{i-1}} \cup \overline{e}_{p_i q_i} \overline{e}_{p_{i-1} q_{i-1}}) = \tag{3.4}$$

$$= \prod_{i=1,2,\ldots,k} e_{p_i q_i} \cup \prod_{i=1,2,\ldots,k} \overline{e}_{p_i q_i} = 1$$

de unde rezultă că orice variabilă $e_{p_i q_i}$, corespunzătoare stărilor p_i, q_i obţinute din p şi respectiv q, prin aplicarea unui cuvînt arbitrar J de intrare, apare în $E_G(A)$ nenegată.

Presupunem acum că se verifică definiţia 2. Dacă e_{pq} apare în $E_G(A)$ nenegată, atunci pentru orice cuvînt de intrare J avem :

$$\lambda(p, J) = \lambda(q, J).$$

Într-adevăr, dacă nu se verifică, ar exista un $J = x^1 x^2 \ldots x^k$ astfel încît :

$$\lambda(p_i, x^i) = \lambda(q_i, x^i), \quad i = 1,2, \ldots, k-1 \tag{3.5}$$

$$\lambda(p_k, x^k) \neq \lambda(q_k, x^k)$$

adică în $E_G(A)$ apare $\overline{e}_{p_k q_k}$ şi datorită relaţiei

$$\overline{e}_{p_k q_k} \left(\prod_{i=1,2,\ldots,k} e_{p_i q_i} \cup \prod_{i=1,2,\ldots,k} \overline{e}_{p_i q_i} \right) = \tag{3.6}$$

$$= \overline{e}_{p_1 q_1} \overline{e}_{p_2 q_2} \ldots \overline{e}_{p_k q_k}$$

în $E_G(A)$ ar apare $\overline{e}_{pq} = \overline{e}_{p_1 q_1}$ în loc de e_{pq}, contrar presupunerii.

3.3. În ceea ce priveşte automatele incomplet definite, metoda de reducere a numărului de stări dată în această lucrare înlătură dificultăţile semnalate în [1].

Observaţie. În [1] este dată următoarea definiţie a compatibilităţii: stările p şi q dintr-un automat incomplet definit sînt compatibile dacă $\lambda(p, J) = \lambda(p, J)$ pentru orice cuvînt de intrare aplicabil atît lui p cît şi lui q. Înţelegînd prin cuvînt aplicabil unei stări p, un cuvînt $J = x^1x^2 \dots x^k$ astfel încît în

$$\lambda(p, x^1 x^2 \dots x^k) = \lambda(p_1, x^1)\, \lambda(p_2, x^2) \dots \lambda(p_k, x^k)$$

$$\text{unde } p = p_1,\ \delta(p_i, x^i) = p_{i+1}$$

fiecare $\lambda(p_i, x^i)$ să fie definit.

O consecinţă a acestei definiţii este că stările $\delta(p, x)$ pentru care $\lambda(p, x)$ nu este definită pot fi luate arbitrar. Astfel automatul cu matricea

	x^1	x^2
z_1	z_2	z_3 0
z_2	z_3 0	z_5 0
z_3	z_4 0	z_6 0
z_4	z_5 1	z_3 0
z_5		z_6 0
z_6	z_2	1

conduce la acelaşi automat minimal redus ca şi automatul din exemplul 1, după cum se arată în [1].

Metoda de reducere a stărilor dată în această lucrare conduce la aceleaşi rezultate ca metoda din [1] dacă se elimină toate stările $\delta(p, x)$ pentru care $\lambda(p, x)$ nu este definită.

Primită la redacţie la 22 iunie 1967

Comitetul de Stat al Planificării

BIBLIOGRAFIE

1. Seymour Ginsburg, *An introduction to mathematical machine theory.* Addison — Wesley Publishing Company, INC. Reading, Massachusetts, Palo Alto, London, 1962.
2. V. M. Giuşcov, *Abstraktnaia teoria automatov,* Uspehi matematiceskih nauk, **XVI**, vip. *5* (1961)
3. Gr. C. Moisil, *Teoria algebrică a mecanismelor automate,* Ed. tehnică, Bucureşti, 1959.
4. S. R. Petrick, *A direct decomposition of the irredundant forms of a Boolean function from the set of prime — implicants.* Techn. reports Air Force Cambridge Research Center, 1956, p. 56—110.

PROBLEME LA LIMITĂ RIEMANN ŞI HILBERT CU SINGULARITĂŢI DATE ŞI CU DATE RAŢIONALE PE CONTUR

DE

ALEXANDRU NICOLAU

În [1] acad. Caius Iacob tratează, printre altele, problema lui Dirichlet pentru cerc cu date raţionale şi continue pe frontieră, arătînd că soluţia se obţine prin operaţii algebrice elementare din datele problemei şi este raţională. În cartea lui F.D. Gahov [3] se consideră problema lui Riemann cu date raţionale pe frontiera unui domeniu simplu conex şi se obţine soluţia, ca şi în cazul general sub forma unei integrale de tip Cauchy. În lucrarea de faţă se extinde rezultatul obţinut în [1] la problemele lui Riemann şi Hilbert (adică se arată că în cazul datelor raţionale soluţia problemelor lui Riemann şi Hilbert este raţională şi se obţine prin operaţii algebrice elementare) şi se trag consecinţe pentru ecuaţia integrală singulară caracteristică cu nucleu Cauchy. Pentru mai multă generalitate se consideră cazul problemelor la limită ale lui Riemann şi Hilbert cu singularităţi date şi cu coeficienţi raţionali. Aceste probleme cu singularităţi date, au fost puse de acad. C. Iacob în [2] care arată că ele nu introduc noi cuadraturi faţă de problemele lui Riemann şi Hilbert fără singularităţi. Problema lui Riemann cu coeficienţii funcţii care se anulează şi cu singularităţi polare, logaritmice etc. într-un număr finit de puncte de pe frontieră a fost considerat de L.A. Cikin [4] şi de F.D. Gahov în [3]. Pentru simplitatea calculelor şi a raţionamentului considerăm numai cazul coeficienţilor continui diferiţi de zero pe frontieră (şi raţionali).

1. Fie C conturul simplu închis (cu tangentă continuă), la distanţă finită, parcurs în sens pozitiv care limitează domeniul interior simplu conex D^+ şi domeniul exterior D^-.

Problema lui Riemann cu singularităţi date şi cu date raţionale pe frontieră, constă în a determina o funcţie olomorfă pe porţiuni cu excepţia polurilor $z_j \in D^+$ de ordine $\lambda_j (j = 1, 2, \ldots, n_1)$ şi a polurilor $z_k \in D^-$ de ordine $\lambda_k (k = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2)$ şi polul $z_0 = \infty$ de ordin λ_0 (adică două funcţii $F^+(z)$ olomorfă în $D^+ - \{z_1, \dots, z_{n_1}\}$ şi $F^-(z)$ olomorfă în $D^- - \{z_0, z_{n_1+1}, \dots, z_{n_1+n_2}\}$ astfel încît :

1) Suma părţilor principale ale dezvoltării lui $F^+(z)$ în vecinătatea polilor z_j $(j = 1, 2, \dots, n_1)$ este dată :

$$N^+(z) = \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{\lambda j} \frac{A_k^{(j)}}{(z - z_j)^k} \tag{1}$$

iar suma părţilor principale ale dezvoltării lui $F^-(z)$ în vecinătatea polilor z_k $(k = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2)$ şi a lui $z_0 = \infty$ este dată :

$$N^-(z) = \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \sum_{k=1}^{\lambda j} \frac{B_k^{(j)}}{(z - z_j)^k} + B_{\lambda 0} z^{\lambda 0} + \dots + B_1 z + B_0 \tag{2}$$

2) Pe C este îndeplinită condiţia :

$$F^+(\zeta) = G(\zeta) F^-(\zeta) + g(\zeta), \tag{3}$$

unde $G(\zeta)$ şi $g(\zeta)$ sînt funcţii complexe, raţionale, care pot fi puse sub forma :

$$\begin{cases} G(\zeta) = \dfrac{p_+(\zeta) p_-(\zeta)}{q_+(\zeta) \cdot q_-(\zeta)} \\ g(\zeta) = \dfrac{r(\zeta)}{s_+(\zeta) s_-(\zeta)} \end{cases} \tag{4}$$

unde $p_+(\zeta)$, $q_+(\zeta)$ sînt polinoame de grad m_+ şi respectiv n_+ cu toate zerourile în D^+ ; $p_-(\zeta)$, $q_-(\zeta)$ sînt polinoame de grad m_- şi respectiv n_- cu toate zerourile în D^- ; $r(\zeta)$ polinom cu zerouri în D^+ şi D^- ; $s_+(\zeta)$ şi $s_-(\zeta)$ sînt polinoame cu zerouri respectiv în D^+ şi D^-. Fie întregul

$$\chi = \operatorname{Ind} G(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \operatorname*{var}_{\zeta \in C} [\arg G(\zeta)] = m_+ - n_+ = n_- - m_- \tag{5}$$

Fie funcţia olomorfă în D^+, inclusiv în z_j $(j = 1, 2, \dots, n_1)$:

$$\Phi^+(z) = F^+(z) - N^+(z) \tag{6}$$

şi funcţia olomorfă în D^-, inclusiv în z_k $(k = 0, n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2)$ şi constantă la infinit (s-a considerat B_0 arbitrar în (2))

$$\Phi^-(z) = F^-(z) - N^-(z), \tag{7}$$

atunci condiţia (3) devine :

$$\Phi^+(\zeta) = G(\zeta) \Phi^-(\zeta) + N^-(\zeta) G(\zeta) - N^+(\zeta) + g(\zeta) \tag{3'}$$

introducînd (4) în (3′) pe care o scriem sub forma :

$$\frac{q_-(\zeta)}{p_-(\zeta)} \Phi^+(\zeta) = \frac{p_+(\zeta)}{q_+(\zeta)} \Phi^-(\zeta) + M(\zeta), \tag{3''}$$

unde :

$$M(\zeta) = N^-(\zeta) \frac{p_+(\zeta)}{q_+(\zeta)} - N^+(\zeta) \frac{q_-(\zeta)}{p_-(\zeta)} + \frac{q_-(\zeta) r(\zeta)}{p_-(\zeta) s_+(\zeta) s_-(\zeta)} \tag{8}$$

adică o funcție rațională de ζ, continuă pe C, cu poli în D^+ și D^- care se poate descompune, prin operații algebrice elementare, în :

$$(8') \qquad M(\zeta) = M_0^+(\zeta) + M_0^-(\zeta)$$

unde $M_0^+(\zeta)$ are poli numai în D^+ și $M_0^-(\zeta)$ are poli numai în D^-. Introducînd (8′) în (3″) pe care o scriem sub forma :

$$(3''') \qquad \frac{q_-(\zeta)}{p_-(\zeta)} \Phi^+(\zeta) - M_0^-(\zeta) = \frac{p_+(\zeta)}{q_+(\zeta)} \Phi^-(\zeta) + M_0^+(\zeta)$$

obținem că pe C funcția olomorfă în D^+, continuă pe C din primul membru (în care ζ s-a înlocuit cu z) și funcția olomorfă în D^-, continuă pe C din membrul al doilea (în care ζ s-a înlocuit cu z) avînd la infinit ordinul χ (ținînd seama de (5)) au aceleași valori. După teorema de prelungire analitică și teorema generalizată a lui Liouville, ambii membri se reduc la un polinom de grad x cu coeficienți complecși arbitrari dacă $\chi > 0$, la o constantă complexă arbitrară dacă $\chi = 0$ și la zero dacă $\chi < 0$. În cazul $\chi > 0$ ținînd seama de (6) și (7) soluția devine :

$$(9) \qquad F^+(z) = N^+(z) + \frac{p_-(z)}{q_-(z)} [M_0^-(z) + P_\chi(z)]$$

$$(10) \qquad F^-(z) = N^-(z) + \frac{q_+(z)}{p_+(z)} [- M_0^+(z) + P_\chi(z)]$$

unde $M_0^{\pm}(z)$ este dat de (8)′ și (8).

Se observă că singularitățile lui $F^{\pm}(z)$ sînt date de $N^{\pm}(z)$, pentru că ultimii doi termeni din (9) și (10) sînt olomorfi respectiv $D^{\pm}$ și ultimii doi termeni din (10) sînt nuli la ∞ după (5).

În cazul $\chi < 0$ soluția se obține înlocuind în (9) și (10) pe $P_\chi(z)$ cu zero. Pentru a obține la infinit un pol de ordin λ_0 cu partea principală conținută în $N^-(z)$, trebuie ca al doilea termen din (10) să se anuleze la infinit ca $1/z$, adică primii $-\chi$ coeficienți din dezvoltarea lui $M_0^+(z)$ în vecinătatea punctului de la infinit să fie nuli, ceea ce constituie condițiile de rezolvare a problemei Riemann în acest caz. Ținînd seama de (8′), (8) și notînd cu a'_j zerourile de ordin b'_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ ale polinomului $s_+(z)$ iar a_j zerouri de ordin b_j $(j = 1, 2, \ldots, q)$ cu $\sum\limits_{j=1}^{q} b_j = n_+$ ale polinomului $q_+(z)$, atunci :

$$(11) \qquad M_0^+(z) = \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{b_j} \frac{\alpha_k^{(j)}}{(z - a_j)^k} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{b'_j} \frac{\beta_k^{(j)}}{(z - a'_j)^k} - \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{\lambda_j} \frac{\gamma_k^{(j)}}{(z - z_j)^k}$$

iar condițiile de rezolvare devin :

$$(12) \qquad \sum_{p=1}^{k} C_{k-1}^{p-1} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{k-p} \alpha_p^{(j)} + \sum_{j=1}^{n} a'^{\,k-p}_j \beta_p^{(j)} - \sum_{j=1}^{n_1} z_j^{k-p} \gamma_p^{(j)} \right) = 0,$$

unde $k = 1,2, \ldots, (-\chi)$ şi prin convenţie combinările $C_0^0 = 1$. S-au obţinut prin operaţii algebrice elementare în toate cazurile soluţia problemei Riemann (3) şi condiţiile de rezolvare (11) (în cazul $\chi \leqslant 0$). Soluţia e funcţie raţională şi după cum se verifică uşor satisface condiţiile impuse.

2. Problema Hilbert cu singularităţi pentru $D^+ : |z| < 1$ şi cu date raţionale constă în a determina funcţia $F^+(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ olomorfă în D^+, cu excepţia polilor $z_j \neq 0$ de ordine $\lambda_j (j = 1,2, \ldots, n_1)$ continuă pe C, astfel încît :

1) suma părţilor principale ale dezvoltării lui $N^+(z)$ în vecinătatea polilor $z_j (j = 1, 2, \ldots n_1)$ este dată de (1) ;

2) pe C este îndeplinită condiţia :

$$a(x, y)\, u(x, y) + b(x, y)\, v(x, y) = c(x, y), \tag{13}$$

unde $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ sînt funcţii reale, raţionale şi continui pe C astfel încît $a(x, y) \pm ib(x, y)$ au zerouri de diferite ordine în $D^\pm$, adică :

$$a(x, y) + ib(x, y)|_C = \left.\frac{a_1(x, y)}{a_2(x, y)}\right|_C + i\left.\frac{b_1(x, y)}{b_2(x, y)}\right|_C = \frac{a_1(\zeta)}{a_2(\zeta)} + i\frac{b_1(\zeta)}{b_2(\zeta)} = \frac{p_+(\zeta)\, p_-(\zeta)}{\zeta^{\gamma - (p_2 + q_2)} A(\zeta)}$$

$$a(x, y) - ib(x, y)|_C = \left.\frac{a_1(x, y)}{a_2(x, y)}\right|_C + i\left.\frac{b_1(x, y)}{b_2(x, y)}\right|_C = \frac{a_1(\zeta)}{a_2(\zeta)} - i\frac{b_1(\zeta)}{b_2(\zeta)} = \frac{q^+(\zeta)\, q_-(\zeta)}{\zeta^{\gamma - (p_2 + q_2)} A(\zeta)}$$

$$c(x, y)|_C = \left.\frac{c_1(x, y)}{c_2(x, y)}\right|_C = \zeta^{q-p}\frac{c_1(\zeta)}{c_2(\zeta)} \tag{14}$$

deoarece pe C, $\zeta = e^{i\theta}$ şi

$$\begin{cases} x = \cos\ \theta = \dfrac{1}{2}\left(\zeta + \dfrac{1}{\zeta}\right) \\ y = \sin\ \theta = \dfrac{1}{2i}\left(\zeta - \dfrac{1}{\zeta}\right) \end{cases} \tag{15}$$

iar

$$a_1(x, y) = \sum_{l,k=0}^{m^{(1)}, n^{(1)}} a_{l,k}^{(1)} x^l y^k |_C = \frac{1}{\zeta^{p_1}} \sum_{k=0}^{2p_1} \alpha_k^{(1)} \zeta^{2k} \qquad (p_1 = m^{(1)} + n^{(1)})$$

$$a_2(x, y) = \sum_{l,k=0}^{m^{(2)}, n^{(2)}} a_{l,k}^{(2)} x^l y^k |_C = \frac{1}{\zeta^{p_2}} \sum_{k=0}^{2p_2} \alpha_k^{(2)} \zeta^{2k} \qquad (p_2 = m^{(2)} + n^{(2)})$$

$$b_1(x, y) = \sum_{l,k=0}^{r^{(1)}, s^{(1)}} b_{l,k}^{(1)} x^l y^k |_C = \frac{1}{\zeta^{q_1}} \sum_{k=0}^{2q_1} \beta_k^{(1)} \zeta^{2k} \qquad (q_1 = r^{(1)} + s^{(1)})$$

$$b_2(x, y) = \sum_{l,k=0}^{r^{(2)}, s^{(2)}} b_{l,k}^{(2)} x^l y^k |_C = \frac{1}{\zeta^{q_2}} \sum_{k=0}^{2q_2} \beta_k^{(2)} \zeta^{2k} \qquad (q_2 = r^{(2)} + s^{(2)})$$

$$C_1(x, y) = \sum_{l,k=0}^{m^{(3)}, n^{(3)}} c_{l,k}^{(1)} x^l y^k |_C = \frac{1}{\zeta^{p}} \sum_{k=0}^{2p} \gamma_k^{(1)} \zeta^{2k} \qquad (p = m^{(3)} + n^{(3)})$$

$$C_2(x, y) = \sum_{l,k=0}^{r^{(3)}, s^{(3)}} c_{l,k}^{(2)} x^l y^k |_C = \frac{1}{\zeta^{q}} \sum_{k=0}^{2q} \gamma_k^{(2)} \zeta^{2k} \qquad (q = r^{(3)} + s^{(3)}).$$

Polinoamele $p_\pm(\zeta)$, $q_\pm(\zeta)$ de grad $m_\pm$ şi respectiv $n_\pm$ au semnificaţia de la paragraful 1, iar $A(\zeta) = \zeta^{p_2+q_2} a_2(\zeta)\, b_2(\zeta)$ este polinom cu zerourile în $D^\pm$. Se observă $m_+ + m_- = n_+ + n_-$ şi $\gamma = \max(p_1 + q_2, p_2 + q_1)$. Se aplică procedeul lui Mushelişvili de reducere a problemei Hilbert la o problemă Riemann [5].

Fie funcţia olomorfă în D^+ şi continuă pe C :

$$\Phi^+(z) = F^+(z) - N^+(z) \tag{16}$$

care se prelungeşte prin simetrie în D^-

$$\Phi^-(z) = F^-(z) - N^-(z), \tag{17}$$

unde

$$\Phi^-(z) = \overline{\Phi^+\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}, \quad F^-(z) = \overline{F^+\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}, \quad N^-(z) = \overline{N^+\left(\frac{1}{z}\right)}. \tag{18}$$

Deci $\Phi^-(z)$ este olomorfă în D^- (inclusiv în z_j ($j = 1,2, \ldots, n_1$)), constantă la infinit : $\Phi^-(\infty) = \overline{\Phi^+(0)}$ şi e continuă pe C.

Pe C : $\zeta\overline{\zeta} = 1$ şi relaţiile (18) devin :

$$\Phi^-(\zeta) = \overline{\Phi^+(\zeta)}, \quad F^-(\zeta) = \overline{F^+(\zeta)}, \quad N^-(\zeta) = \overline{N^+(\zeta)}. \tag{18'}$$

Condiţia la limită (13) după transformarea (15), ţinînd seama de (16), (17), devine pe C

$$2\mathrm{Re}\{[a(\zeta) - ib(\zeta)]\,\Phi^+(\zeta)\} = 2c(\zeta) - 2\mathrm{Re}\,\{[a(\zeta) - ib(\zeta)]N^+(\zeta)\} \tag{13'}$$

sau ţinînd seama de (18') obţinem :

$$\begin{aligned}\Phi^+(\zeta) = &- \frac{a(\zeta) + ib(\zeta)}{a(\zeta) - ib(\zeta)}\,\Phi^-(\zeta) + \\ &+ \frac{2c(\zeta) - (a(\zeta) - ib(\zeta))\,N^+(\zeta) - (a(\zeta) + ib(\zeta))\,N^-(\zeta)}{a(\zeta) - ib(\zeta)}.\end{aligned} \tag{13''}$$

Dacă $\Phi(z)$ este soluţia olomorfă pe porţiuni a problemei Riemann (13'') pentru $D^\pm$ ($|z| \lesseqgtr 1$) continuă pe C, verificînd condiţia suplimentară : prima relaţie din (18') şi cu :

$$\chi = \mathrm{Ind}\left[-\frac{a(\zeta) + ib(\zeta)}{a(\zeta) - ib(\zeta)}\right] = m_+ - n_+, \tag{19}$$

atunci se poate arăta la fel ca în cazul general, că funcţia olomorfă pe porţiuni, continuă pe C,

$$\Psi(z) = \frac{1}{2}\left[\Phi(z) + \overline{\Phi\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}\right] \tag{20}$$

verifică condiţia (13'') şi satisface automat condiţia suplimentară : prima relaţie din (18'), deci problema Hilbert (13) se reduce la problema Riemann (13'') pentru funcţia $\Psi(z)$ fără condiţie suplimentară. Ţinînd seama de (16),

(17) în care $\Phi(z)$ trebuie înlocuit cu $\Psi(z)$, de (18) și că dacă $z \in D^{\pm}$, atunci $1/\bar{z} \in D^{\mp}$, soluția problemei Hilbert pentru $D^{\pm}$ $(|z| \lessgtr 1)$ va fi :

$$F^{+}(z) = N^{+}(z) + \frac{1}{2}\left[\Phi^{+}(z) + \overline{\Phi^{-}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}\right] \tag{21}$$

$$F^{-}(z) = N^{-}(z) + \frac{1}{2}\left[\Phi^{-}(z) + \overline{\Phi^{+}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}\right]. \tag{22}$$

Rezolvînd problema Riemann (13″) după ce în prealabil am introdus (14) (adică aplicînd (9) și (10)), obținem în cazul $\chi > 0$:

$$\begin{aligned} F^{+}(z) = N^{+}(z) &+ \frac{1}{2}\left\{\frac{p_{-}(z)}{q_{-}(z)} M_0^{-}(z) + \frac{\bar{q}_{+}\left(\frac{1}{z}\right)}{\bar{p}_{+}\left(\frac{1}{z}\right)} M_0^{+}\left(\frac{1}{z}\right)\right\} + \\ &+ \frac{1}{2}\left\{\frac{p_{-}(z)}{q_{-}(z)} P_{\chi}(z) - \frac{\bar{q}_{+}\left(\frac{1}{z}\right)}{\bar{p}_{+}\left(\frac{1}{z}\right)} \overline{P}_{\chi}\left(\frac{1}{z}\right)\right\} \end{aligned} \tag{21'}$$

$$\begin{aligned} F^{-}(z) = N^{-}(z) &+ \frac{1}{2}\left\{\frac{q_{+}(z)}{p_{+}(z)} M_0^{+}(z) + \frac{\bar{p}_{-}\left(\frac{1}{z}\right)}{\bar{q}_{-}\left(\frac{1}{z}\right)} \overline{M}_0^{-}\left(\frac{1}{z}\right)\right\} + \\ &+ \frac{1}{2}\left\{\frac{q_{+}(z)}{p_{+}(z)} P_{\chi}(z) - \frac{\bar{p}_{-}\left(\frac{1}{z}\right)}{\bar{q}_{-}\left(\frac{1}{z}\right)} \overline{P}_{\chi}\left(\frac{1}{z}\right)\right\}, \end{aligned} \tag{22'}$$

unde

$$M(z) = \frac{2z^{\alpha} C_1(z) A(z)}{q_{+}(z) q_{-}(z) C_2(z)} - \frac{q_{-}(z)}{p_{-}(z)} N^{+}(z) - \frac{p_{+}(z)}{q_{+}(z)} N^{-}(z) \tag{23}$$

cu (8′), cu $\alpha = r + q - (p_2 + q_2 + p)$ și cu notația $\bar{p}\left(\frac{1}{z}\right) = \overline{p\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$ etc. Din forma soluției (22′) și (21′) se vede că este o funcție rațională obținută din datele problemei prin operații algebrice elementare cu poli în z_j și $1/z_j$ $(j=1,2, \ldots, n_1)$ cu părți principale $N^{+}(z)$ și respectiv $N^{-}(z)$, continuă pe C.

În cazul $\chi \leqslant 0$, soluția se obține din (22′) și (21′) prin înlocuirea lui $P_{\chi}(z)$ cu zero și există numai dacă sînt îndeplinite condițiile (12), considerînd dezvoltarea lui $M_0^{+}(z)$ din (23) dată de (11), unde am notat de data aceasta prin a'_j zerourile de ordin b'_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ ale lui $C_2(z)$ și coeficienții din (11) sînt calculați pentru $M_0^{+}(z)$ provenit din (23) și nu din (8).

3. Soluţia problemei Dirichlet cu singularităţi date în $|z| < 1$ şi cu date raţionale continue pe $C \, |z| = 1$ se obţine din (21) (pentru problema Dirichlet interioară) şi din (22′) (pentru problema Dirichlet exterioară) în care : $a = 1$, $b = 0$, deci $\chi = 0$, $p_+ = q_+ = p_- = q_- = 1$. Funcţia raţională $c(x, y)$ prin (15) devine o funcţie raţională $C(3)$, reală şi continuă pe C, deci cu poluri în puncte simetrice faţă de C [1].

Din (23) rezultă :

$$M(z) = 2C(z) - N^+(z) - N^-(z)\,; \quad M_0^+(z) = 2C_0^+(z) - N^+(z)$$

$$M_0^-(z) = 2C_0^-(z) - N^-(z),$$

unde datorită modului de prelungire (abstracţie făcînd de o constantă) avem a treia relaţie din (18) şi datorită simetriei polilor lui $C(\zeta)$ [1] avem (abstracţie făcînd de o constantă) :

$$C_0^-(z) = C_0^+\left(\frac{1}{\bar z}\right); \quad C_0^+(z) = \overline{C_0^-\left(\frac{1}{\bar z}\right)}$$

şi după (21′), (22′) :

$$F^+(z) = N^+(z) + \frac{1}{2}\left\{2C_0^-(z) - N^-(z) + \overline{2C_0^+\left(\frac{1}{\bar z}\right)} - \overline{N^+\left(\frac{1}{\bar z}\right)}\right\} + \frac{1}{2}(\alpha_0 - \bar\alpha_0) =$$

$$= 2C_0^-(z) + N^+(z) - N^-(z) + i\alpha,$$

$$F^-(z) = N^-(z) + \frac{1}{2}\left\{2C_0^+(z) - N^+(z) + \overline{2C_0^-\left(\frac{1}{\bar z}\right)} - \overline{N^-\left(\frac{1}{\bar z}\right)}\right\} - \frac{1}{2}(\alpha_0 - \bar\alpha_0) =$$

$$= 2C_0^+(z) + N^-(z) - N^+(z) - i\alpha$$

cu $\alpha_0 = \alpha + i\beta$ constantă.

Considerînd că $N^-(z)$ este definit abstracţie făcînd de o constantă complexă, s-a obţinut rezultatul din [1] dacă se ţine seama de teorema cercului (Milne—Thompson).

4. Să aplicăm rezultatele din paragraful 1 la cazul ecuaţiei integrale singulare caracteristice cu coeficienţi raţionali :

$$a(\zeta)\,\varphi(\zeta) + \frac{b(\zeta)}{\pi i}\int_C \frac{\varphi(t)}{t-\zeta}\,dt = c(\zeta), \tag{24}$$

unde $a(\zeta)$, $b(\zeta)$, $c(\zeta)$ sînt funcţii raţionale complexe şi continui pe C :

$$a(\zeta) = \frac{a_1(\zeta)}{a_2(\zeta)}, \quad b(\zeta) = \frac{b_1(\zeta)}{b_2(\zeta)}, \quad c(\zeta) = \frac{C_1(\zeta)}{C_2(\zeta)}$$

astfel că $a(\zeta) \pm b(\zeta)$ este continuă, diferită de zero pe C cu zerouri în D^+ şi D^-, adică :

$$a(\zeta) + b(\zeta) = \frac{q_+(\zeta)\,q_-(\zeta)}{a_2(\zeta)\,b_2(\zeta)} \tag{25}$$

$$a(\zeta) - b(\zeta) = \frac{p_+(\zeta)\,p_-(\zeta)}{a_2(\zeta),\ b_2(\zeta)},$$

unde $p_\pm(\zeta)$, $q_\pm(\zeta)$, la fel ca la paragraful 1, sînt polinoame de grade respectiv $m_\pm$, $n_\pm$ cu toate zerourile în $D^\pm$. Aplicînd procedeul obișnuit de reducere a ecuației integrale (24) la o problemă Riemann echivalentă, adică căutînd soluția ecuației în clasa funcțiilor hölderiene pe C, să introducem funcția olomorfă pe porțiuni :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(t)}{t-z}\,\mathrm{d}t \qquad (\Phi^-(\infty) = 0). \tag{26}$$

Aplicînd formulele lui Plemelj :

$$\begin{aligned} &\Phi^+(\zeta) - \Phi^-(\zeta) = \varphi(\zeta) \\ &\Phi^+(\zeta) + \Phi^-(\zeta) = \frac{1}{\pi i}\int_C \frac{\varphi(t)}{t-\zeta}\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{27}$$

și ținînd seama de (25), (24), se reduce la problema Riemann cu date raționale :

$$\Phi^+(\zeta) = \frac{p_+(\zeta)\,p_-(\zeta)}{q_+(\zeta)\,q_-(\zeta)}\,\Phi^-(\zeta) + \frac{\gamma(\zeta)}{q_+(\zeta),\, q_-(\zeta)\,C_2(\zeta)} \tag{28}$$

cu $\chi = m_+ - n_+$ și $\gamma(\zeta) = C_1(\zeta)\;a_2(\zeta)\;b_2(\zeta)$. Soluția problemei Riemann care se anulează la ∞ în cazul $\chi > 0$ se obține din (9) și (10) în care $P_\chi(z)$ se înlocuiește cu $P_{\chi-1}(z)$; $N^\pm(z) = 0$ și unde

$$M(\zeta) = \frac{\gamma(\zeta)}{q_+(\zeta)\;p_-(\zeta)\;C_2(\zeta)}. \tag{29}$$

Soluția lui (24) este după prima relație din (27) în cazul $\chi > 0$.

$$\varphi(\zeta) = \frac{p_-(\zeta)}{q_-(\zeta)}\,M_0^-(\zeta) - \frac{q_+(\zeta)}{q_+(\zeta)}\,M_0^+(\zeta) + \left[\frac{p_-(\zeta)}{q_-(\zeta)} - \frac{q_+(\zeta)}{p_+(\zeta)}\right]P_{\chi-1}(\zeta). \tag{30}$$

Să observăm că dacă $c(\zeta) = 0$, atunci $M(\zeta) = 0$ și deci soluțiile liniar independente ale ecuației integrale singulare caracteristice omogene vor fi :

$$\varphi_k(\zeta) = \zeta^{k-1}\left[\frac{p_-(\zeta)}{q_-(\zeta)} - \frac{q_+(\zeta)}{p_+(\zeta)}\right] \qquad (k = 1, 2, \ldots, \chi)$$

iar soluția (30) devine :

$$\varphi(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + \sum_{k=1}^{\chi} C_k\,\varphi_k(\zeta), \tag{30$'$}$$

unde

$$\varphi_0(\zeta) = \frac{p_-(\zeta)}{q_-(\zeta)}\,M_0^-(\zeta) - \frac{q_+(\zeta)}{p_+(\zeta)}\,M_0^+(z).$$

În cazul $\chi \leqslant 0$ soluția ecuației neomogene se obține înlocuind în (30) pe $P_{\chi-1}(z)$ cu zero și există numai dacă sînt îndeplinite condițiile de rezolvabilitate ale problemei Riemann :

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{p=1}^{k} C_{k-1}^{p-1} a_j^{k-p} \alpha_p^{(j)} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, (-\chi)$$

cu convenția $C_0^0 = 1$, iar a_j sînt zerouri de ordin b_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ ale produsului $q_+(z)\, C_2(z)$ iar :

$$M_0^+(z) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{b_j} \frac{\alpha_k^{(j)}}{(z - a_j)^k}.$$

Pe forma (30)′ a soluției, se verifică teoremele lui Noether cu precizarea că soluția ecuației (24) este rațională și se obține prin operații algebrice elementare. În cazul particular $a = 0$, $b = 1$, atunci $\chi = 0$, $p_+ = p_- = q_+ = q_- = 1$, $M_1(\zeta) = C(\zeta) = C_0^+(\zeta) + C_0^-(\zeta)$ și după (30) obținem :

$$\varphi(\zeta) = C_0^-(\zeta) - C_0^+(\zeta)$$

care constituie formula de inversare a integralei Cauchy în cazul datelor raționale.

Primită la redacție la 7 iunie 1967

Institutul de Construcții București

BIBLIOGRAFIE

1. C. Iacob, *Rezolvarea problemei lui Dirichlet pentru cerc în unele cazuri particulare.* Comunicările Academiei R. P. R., **XII**, *4* (1962).
2. C. Iacob, *Asupra soluțiilor cu singularități date ale problemelor Riemann și Hilbert.* St. cerc. mat. **X**, *2* (1959).
3. F. D. Gahov, *Краевые задачи.* Москва, 1963.
4. Cikin, *Особые случаи краевой зедачи Римана и сингулярных уравнений.* Уч. зап. Казанск. ун- та. **113**, 10—152.
5. N. T. Mushelisvili *Ecuații integrale singulare,* Partea I—II, Ed. tehnică, București, 1955.

EXTINDEREA RELAȚIEI DE CONJUGARE PE VARIETĂȚILE NEOLONOME

DE

V. OBĂDEANU

Se definește relația de conjugare în spațiul tangent într-un punct al unei varietăți neolonome dintr-un spațiu euclidian. Se pune problema existenței șirurilor periodice de drepte conjugate succesiv și se dau ca aplicație cazurile varietăților neolonome $V_{n,n-1}$ și $V_{3,2}$.

După cum se știe, ideea de a studia proprietățile geometrice ale curbelor definite printr-o ecuație Pfaff neintegrabilă este dată de către Voss [17] în anul 1880. Studiul varietăților neolonome însă, considerate ca soluții ale unui sistem de ecuații Pfaff neintegrabile definite într-un spațiu cu mai multe dimensiuni, a fost inițiat și dezvoltat sub o formă sistematică de către acad. G. Vrănceanu [19] în anul 1926. În această lucrare domnia sa a introdus conceptul general de varietate neolonomă liniară, și, totodată, a dat și o metodă specială de lucru, metoda congruențelor.

Studiul proprietăților proiective ale varietăților neolonome apare ceva mai tîrziu, totuși unele probleme de natură proiectivă pot fi găsite și în lucrări mai vechi ca cele ale lui Voss (1884) și Dall'Acqua (1901). De asemenea relația de conjugare este întîlnită la F. Knoll [6] unde se face extinderea naturală la varietățile neolonome, a relației clasice de conjugare definită în planele tangente ale suprafețelor din spațiul cu trei dimensiuni.

Este știut că [16] relația de conjugare din spațiul tangent al unei suprafețe (varietate diferențiabilă) din spațiul obișnuit (spațiul omogen cu grup liniar) este reciprocă. Pe o varietate neolonomă însă, această proprietate nu mai are loc și anume : dacă tangenta δ este conjugată tangentei d, în general tangenta d nu va mai fi conjugată tangentei δ. Prin urmare, studiul relației de conjugare prezintă, din acest punct de vedere, un interes deosebit.

Datorită proprietății de nereciprocitate a relației de conjugare, pe varietățile neolonome $V_{3.2}$, în general unei direcții d_0 îi corespunde drept conjugată direcția d_1, acesteia prin repetarea procedeului îi corespunde

ST. CERC. MAT., TOM. 20, Nr. 1, P. 25–32, BUCUREȘTI, 1968

direcția d_2 și așa mai departe ; cu fiecare direcție d_0 se asociază planului tangent un șir de direcții din el. Cu referire la acest șir, prof. Gh. Th. Gheorghiu [5] a pus problema periodicității lui și a arătat proprietatea că dacă acest șir este periodic și are perioada 3, atunci varietatea respectivă posedă proprietatea de a avea raportul curburii totale către curbura lui Gauss constant și egal cu 3/4. După cum rezultă de aici, această clasă de varietăți neolonome formează un caz special de varietăți neolonome (V) considerate de către domnia sa în [3] și numite varietăți neolonome Țițeica de clasa (c). Proprietatea de mai sus este regăsită și în [4] pentru varietățile neolonome Țițeica de tipul ($\mathcal{T}_{12}$).

În cele ce urmează (punctul 1), ne propunem să dăm, pentru varietățile neolonome, o extindere a relației de conjugare și, în special, a proprietății de periodicitate. Vom considera însă numai varietățile neolonome date într-un spațiu euclidian, iar ca metodă de lucru vom folosi metoda congruențelor. Asupra aplicațiilor pe care le indicăm (punctele 2 și 3) pe varietățile $V_{n,n-1}$ și $V_{3,2}$, vom insista mai puțin, ele fiind date în altă parte [9]—[13].

1. *Relația de conjugare pe o varietate neolonomă* $V_{n,p}$. Să considerăm spațiul euclidian E_n, raportat la un sistem de coordonate χ_0 și în el o distribuție diferențiabilă Δ_p, caracterizată într-o hartă locală prin baza $\{X_1, \ldots, X_p\}$ formată din p cîmpuri X_α ($\alpha = 1, \ldots, p$) diferențiabile. Se numește varietate neolonomă $V_{n,p}$ ansamblul tuturor subvarietăților din E_n pentru care imaginea spațiului tangent în fiecare punct, prin scufundare, aparține spațiului liniar asociat punctului respectiv prin distribuția Δ_p. Vom presupune în cele ce urmează că distribuția este, în general, neinvolutivă.

Darea cîmpurilor X_α este echivalentă cu darea în sistemul de coordonate χ_0 și în harta respectivă, a ansamblului de forme Pfaff, liniar independente :

$$\mathrm{d}s^a = \lambda^a_i \,\mathrm{d}x^i, \qquad (a = p + 1, \ldots, n\,;\ i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Pentru studiu vom completa acest sistem cu sistemul de ecuații (considerate în aceeași hartă locală) :

$$\mathrm{d}s^\alpha = \lambda^\alpha_i \,\mathrm{d}x^i, \qquad (\alpha = 1, \ldots, p\,;\ |\lambda^i_j| \neq 0). \tag{2}$$

În felul acesta am raportat un anumit domeniu al spațiului E_n la un sistem de n congruențe dintre care p sînt situate pe varietatea neolonomă dată.

Să luăm pe varietate o curbă c care să treacă printr-un punct M al varietății și care să aibă în acest punct tangenta $d_0(\mathrm{d}x^i = \underset{\circ}{A}{}^i\,\mathrm{d}t) \in E_p$ dată. Punctului $M(x) \in c$ îi asociem spațiul liniar $E_p\ T\ V_{n,p}$, iar unui punct $M' = M(x^i + \mathrm{d}x^i)$ vecin lui M pe curbă, spațiul liniar E'_p. Intersecția acestora ne dă la limită cînd M' tinde pe curbă să se confunde cu M, spațiul liniar $\pi(d_0) = E_{p_1}$ și ale cărui ecuații sînt :

$$\lambda^a_i(X^i - x^i) = 0, \quad \mathrm{d}\lambda^a_i(X^i - x^i) = 0, \quad (i=1, \ldots, n\,;\ a=p+1, \ldots, n) \tag{3}$$

Spațiul liniar E_{p_1}, numit conjugatul lui d_0, este dat în E_p prin ecuațiile

$$D^a_{\alpha\beta}\, \underset{\circ}{A}{}^\beta\, \delta s^\alpha = 0, \qquad (a = p + 1, \ldots, n) \tag{4}$$

în care

$$D^a_{\alpha\beta} = \frac{\partial \lambda^a_i}{\partial x^j} \mu^i_\alpha \mu^j_\beta, \quad (\mu^i_\alpha \lambda^k_i = \delta^k_\alpha)\,; \tag{4'}$$

prin urmare, $p_1 = 2p - n$. Spațiului E_{p_1} i se asociază, prin repetarea procedeului, un spațiu liniar E_{p_2} (intersecția tuturor spațiilor conjugate dreptelor din E_{p_1}) etc. Obținem astfel șirul de spații :

$$E_1 = d_0,\ E_{p_1},\ E_{p_2}, \ldots, E_{p_k}, \ldots \tag{5}$$

finit sau infinit. Să alăturăm acestuia șirul de numere naturale

$$p_0 = 1,\ p_1,\ p_2, \ldots, p_k, \ldots \tag{6}$$

Fiecare spațiu E_{p_k} al șirului (5) este dat în E_p prin $n_k = p - p_k$ ecuații. Numerele n_k putînd fi determinate prin relațiile de recurență :

$$n_k + (n - p)\, n_{k-1} - p\,(n - p) = 0, \tag{7}$$

iar numerele p_k respectiv prin

$$p_k = p + (-1)^k (n - p)^k + p \sum_{\varepsilon=1}^{k-1} (-1)^\varepsilon (n - p)^\varepsilon, \quad (\geqslant 0). \tag{8}$$

Acum putem să ne punem următoarea problemă : *fiind date numerele n și p, există vre-un indice k, în așa fel încît $p_k = p - n_k = 1$?* În caz afirmativ, spațiul $E_{p_k} = d_1$ va fi numit tangentă conjugată tangentei d_0. Repetînd acum procedeul, se poate forma în acest caz șirul de tangente

$$d_0,\ d_1,\ d_2, \ldots, \underset{m}{d_m(A^\alpha)}, \ldots \tag{9}$$

care la rîndul său poate să fie periodic sau nu.

Vom încerca să dăm un răspuns la această problemă sub formă reciprocă și anume : fiind dat k, ce relație trebuie să satisfacă n și p, astfel ca $p_k = 1$; rezultatele obținute de noi sînt următoarele :

a) *pentru $k = 1$ trebuie să avem $2\,p - 1 = n$* ;
b) *pentru $k = 2$ este necesar ca $p + 1 = n$* ;
c) *pentru $k = 3$ și $k = 4$ nu avem soluții reale.*

Aceste exemple sînt suficiente pentru a observa că problema relației de conjugare, definită în sensul de mai sus, nu poate fi rezolvată pozitiv în toate cazurile.

2. *Relația de conjugare pe hipervarietățile neolonome.* Ca o primă aplicație a celor de mai sus, să considerăm acum cazul b) al hipervarietăților neolonome, adică acela în care $k = 2$, $p = n - 1$. Studiul special al acestui caz este făcut în [12] și [13], motiv pentru care, în cele ce urmează, nu vom da demonstrații, ci numai unele rezultate din lucrările mai sus citate. Cu ajutorul acestora regăsim unele cazuri speciale de varietăți neolonome cunoscute.

În acest caz sistemul (1) se reduce la singura formă $\mathrm{d}s = \lambda_i\, \mathrm{d}x^i$, iar coeficienții (4') vor fi $D_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial \lambda_i}{\partial x^j} \mu^i_\alpha \mu^j_\beta$ [2].

Unei congruențe $(c) \subset V_{n,n-1}$ dată, în harta respectivă, prin

$$ds^{\alpha} = A^{\alpha}\,dt, \qquad (\alpha = 1, \ldots, n-1), \tag{10}$$

i se asociază, drept configurație conjugată, varietatea neolonomă $V_{n,n-2}$ de ecuație

$$B_{\alpha}\,\delta s^{\alpha} = 0 \quad \text{cu} \quad B_{\alpha} = D_{\alpha\beta}\,A^{\beta}. \tag{11}$$

Varietății $V_{n,n-2}$, dată prin ecuațiile (11), îi corespunde pe $V_{n,n-1}$ o congruență (Γ) ortogonală primeia, de ecuație :

$$\partial s^{\alpha} = \beta^{\alpha}\,dt, \quad \text{cu} \quad B^{\alpha} = D^{\alpha}_{\cdot\beta}\,A^{\beta}, \tag{12}$$

deci, unei congruențe $(c) \subset V_{n,n-1}$ îi corespunde prin (12) o congruență (Γ) numită *reprezentarea sferică* a congruenței (c) (aceasta extinde proprietatea cunoscută a reprezentării sferice de a fi perpendiculară pe conjugată).

Cu ajutorul considerațiilor de mai sus obținem următoarele rezultate [13] :

1. Tangenta d_1, conjugată a tangentei d_0, este dată prin $\underset{1}{A}{}^{\alpha}\,dt$ cu

$$\underset{1}{A}{}^{\alpha} = \Delta^{\alpha}_{\cdot\beta}\,\underset{\circ}{A}{}^{\beta}, \text{ unde } \Delta^{\alpha}_{\cdot\beta} = \frac{\partial \ln D}{\partial D_{\alpha\gamma}}\,D_{\gamma\beta}, \qquad D = \det\,(D_{\alpha\beta}) \neq 0.$$

2. Tangenta d_m, conjugata de ordinul m a tangentei d_0, este dată prin

$$\underset{m}{A}{}^{\alpha} = \underset{m}{H}{}^{\alpha}_{\cdot\alpha_m}\,\underset{\circ}{A}{}^{\alpha_m}, \text{ unde } \underset{m}{H}{}^{\alpha}_{\cdot\alpha_m} = \Delta^{\alpha}_{\cdot\alpha_1}\,\Delta^{\alpha_1}_{\cdot\alpha_2} \ldots \Delta^{\alpha_{m-1}}_{\cdot\alpha_m}.$$

3. Condiția necesară și suficientă ca șirul (9) să fie periodic și să aibe perioada m este ca

$$\underset{m}{H}{}^{\alpha}_{\cdot\beta} = h^{m}\,\delta^{\alpha}_{\beta}, \qquad (h = \det\,(\Delta^{\alpha}_{\cdot\beta})).$$

4. Reprezentarea sferică ∂_1 a tangentei d_0 este dată prin

$$\underset{1}{A}{}^{\alpha} = D^{\alpha}_{\cdot\beta}\,\underset{\circ}{A}{}^{\beta}.$$

5. Formînd cu reprezentarea sferică șirul d_0, d_1', d_2', ..., d_m', ... direcția d_m' va fi dată, în funcție de d_0, prin

$$\underset{m}{A}{}^{\alpha} = \underset{m}{K}{}^{\alpha}_{\cdot\alpha_m}\,\underset{\smile}{A}{}^{\alpha_m}, \text{ unde } \underset{m}{K}{}^{\alpha}_{\cdot\alpha_m} = D^{\alpha}_{\cdot\alpha_1}\,D^{\alpha_1}_{\cdot\alpha_2} \ldots . D^{\alpha_{m-1}}_{\cdot\alpha_m}.$$

6. Tangenta d_m' coincide cu tangenta d_0 dacă

$$\underset{m}{K}{}^{\alpha}_{\cdot\beta} = k^{m}\,\delta^{\alpha}_{\beta}, \qquad (k = \det\,(D^{\alpha}_{\cdot\beta})).$$

Ca urmare a considerațiilor de mai sus pot fi făcute observațiile :

a) Curbele asimptotice se obțin prin condiția de autoconjugare.

b) Varietățile $V_{n,n-1}$ pentru care toate tangentele sînt autoconjugate sînt hiperplane neolonome [8].

c) Dacă șirul (9) este staționar, varietatea $V_{n,n-1}$ este olonomă ; ecuația $ds = 0$ este complet integrabilă.

d) Curbele ale căror tangente d coincid cu reprezentarea sferică ∂ sînt liniile de curbură.

e) Varietățile $V_{n,n-1}$ ale căror tangente sînt toate tangente de curbură sînt hipersferele neolonome [8].

f) Prin extinderea relației de conjugare în care plecăm de la un element plan E_p în locul unei tangente d_0 se obțin sistemele conjugate care extind la varietățile neolonome, sistemele conjugate de pe o varietate diferențiabilă dintr-un spațiu omogen cu grup liniar [15].

3. *Relația de conjugare pe varietăți neolonome* $V_{3,2}$. Ca o a doua aplicație a considerațiilor de la punctul 1 să luăm acum cazul a) citat, și mai particular, varietățile neolonome corespunzătoare ambelor cazuri a) și b), adică $V_{3,2}$. Menționăm că rezultatele pe care le cităm mai jos sînt date în [9], [10] și [11], unde trimitem pentru demonstrații.

Din studiul relației de conjugare și în special al condiției de periodicitate a șirurilor de tangente conjugate și corespondente prin reprezentarea sferică, se deduc următoarele rezultate :

a) Șirului (9) al tangentelor conjugate i se asociază șirul de polinoame

$$U_0, U_1, \ldots, U_n = U_n(T_m, K_g)$$

în care

$$U_{n-1} = \frac{1}{2}(T_m^2 - K_g)^{-1/2}[((T_m^2 - K_g)^{1/2} - T_m)^n - (-(T_m^2 - K_g)^{1/2} - T_m)^n]$$

iar $2T_m = D_{12} - D_{21}$ și $K_g = D_{11}D_{22} - D_{12}D_{21}$ sînt respectiv dublul torsiunii medii și curbura lui Gauss ale varietății.

b) TEOREMA I. *Condiția necesară și suficientă pentru ca o varietate neolonomă* $V_{3,2}$, *dată într-o hartă locală printr-o ecuație de forma* $\mathrm{d}s = \lambda_i \mathrm{d}x^i = 0$, *să fie periodică față de relația de conjugare și să aibe perioada* n, *este ca* $U_{n-1} = 0$ [9].

c) O teoremă analoagă precedenteia se poate enunța și în cazul relației de reprezentare sferică.

d) TEOREMA II. *Condiția necesară ca o varietate neolonomă* $V_{3,2}$ *să fie, într-un domeniu* $\mathcal{D}$, *periodică față de relația de conjugare și de perioadă* n *este ca* $K_t : K_g = \sin^2 \frac{h\pi}{n}$ $(h = 1, 2, \ldots n-1)$, unde K_t este curbura totală a varietății [9].

e) TEOREMA III. *Condiția necesară ca o varietate neolonomă* $V_{3,2}$ *să fie periodică și cu perioada* n, *față de relația de reprezentare sferică, este ca* $T_t : K_g = \sin^2 \frac{h\pi}{n}$, *aici* T_t *este torsiunea totală a varietății neolonome date* [9].

f) TEOREMA IV. *Raportul anarmonic* $r = (T_m - \sqrt{-K_t})/(T_m + \sqrt{-K_t})$ *format cu o tangentă* d_0, *conjugata ei* d_1 *și cele două tangente asimptotice* d' *și* d'' *este egal cu o rădăcină de ordinul* n *a unității, dacă* $V_{3,2}$ *este periodică și cu perioada* n *față de relația de conjugare, și reciproc* [10].

g) TEOREMA V. *Condiția necesară și suficientă ca o varietate neolonomă* $V_{3,2}$ *să fie periodică față de relația de conjugare și să aibe perioada* n *este ca* *suma razelor de curbură normală luate de-a lungul a n tangente conjugate succesiv, să nu depindă de aceste tangente* (respectiv de tangenta inițială). *Această sumă este dată prin relația* [11]:

$$\sum_{h=1}^{n} R_h = \frac{2K_m}{K_g} \sum_{\alpha=0}^{n-2} \frac{U_\alpha^2}{K_g^\alpha}.$$

Primită la redacție la 4 aprilie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. E. Bortolotti, *Superficie anolonome complementari.* Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari. Pavia, **XIV**, 553—576 (1936).
2. A. Dobrescu, *Asupra suprafețelor neolonome.* Lucrările consfătuirii de geometrie diferențială din 9—12 iunie 1955. Acad. R. P. R., Baza de cercetări științifice Timișoara, 1955, p. 169—188.
3. Gh. Th. Gheorghiu, *Sur les variétés non holonomes de l'espace S_3.* Revue de math. pures et appliquées, **II**, 501—508 (1957).
4. Gh. Th. Gheorghiu, *Asupra varietăților neolonome Țițeica.* Studia Univ. Babes-Bolyai. Cluj. Ser. Math-Phys. fasc. 1, 45—60 (1962).
5. Gh. Th. Gheorghiu și V. Domilescu, *Asupra liniilor conjugate ale unor varietăți neolonome.* Lucr. științ. Inst. Pedag. Timișoara. Mat.-Fiz., 1960, p. 61—64.
6. J. Knoll, *Die Differentialgeometrie des räumlichen Vektorenfeldes, I. Ein Beitrag zur Differentialgeometrie der Kurvenkomplexe.* Sitzungsberichte. Akad. Wiss, Wien, Abt II a, **135**, 487—505 (1926).
7. T. Mihăilescu, *Cercetările lui Al. Pantazi și varietățile neolonome liniare proiective.* Lucrările consfătuirii de geometrie diferențială din 9—12 iunie 1955. Acad. R. P. R., Baza de cercetări științifice Timișoara, 1955 p. 63—68.
8. Gr. C. Moisil, *Sur les propriétés affines et conformes des variétés non holonomes.* Bul. Fac. de Științe din Cernăuți, *IV*, fasc. 1, 15—21 (1930).
9. V. Obădeanu, *Asupra unor varietăți neolonome.* Lucr. științ. ale Inst. Pedag. Timișoara, Mat. Fiz., 1961, p. 131—138.
10. V. Obădeanu, *Asupra unor varietăți neolonome (II).* Lucr. științ. ale Inst. Pedag. Timișoara, Mat.-Fiz., 1962, p. 129—135.
11. V. Obădeanu, *O proprietate caracteristică a varietăților neolonome care au șirul direcțiilor conjugate periodic.* Lucr. științ. ale Inst. Pedag. Timișoara. Mat. Fiz., 1962, p. 137—142.
12. V. Obădeanu, *Asupra varietăților neolonome V_4^3 din E_4* Analele Univ. din Timișoara, Ser. St. Mat.-Fiz. **II**, 157—166 (1964).
13. V. Obădeanu, *Asupra relației de conjugare pe hipervarietățile neolonome dintr-un spațiu euclidian cu n dimensiuni.* Anal. Univ. din Timișoara, Ser. St. Mat.-Fiz., 167—176 (1964).
14. Chr. Panc, *Extension aux variétés non holonomes V_n^{n-1} de quelques propriétés des surfaces et des V_3^2.* Rendiconti della R. Accad. Nazion dei Lincei, **XXVII**, Serie 6, fasc. 4, 155—165 (1938).
15. В. В. Рыжков, *Сопряженные системы на многомерных поверхностях.* Труды Московского математического общества, **7**, 179—226 (1958).
16. Gh. Țițeica, *Geometrie diferențială proiectivă a rețelelor.* Edit. Acad. R.P.R., București, 1956.
17. A. Voss, *Geometrische Interpretation der Differentialgleichung $Pdx + Qdy + Rdz = 0$.* Mathematische Annalen, **XVI**, 556—559 (1880).
18. A. Voss, *Theorie der rationalen Algebraischen Punkt Ebenen-System.* Mathematische Annalen, **XXIII**, 359—411 (1884).
19. G. Vrănceanu, *Sur les espaces non holonomes.* C. R. Acad. Sci. Paris, **183**, 852—854, (1926).
20. G. Vrănceanu, *Sur le calcul différentiel absolu pour les variétés non holonomes.* C. R. Acad. Sci. Paris, 183 p. 1083—1085 (1927).
21. G. Vrănceanu, *Etude des espaces non holonomes.* Journal de Math., 113—174 (1934).
22. G. Vrănceanu, *Les espaces non holonomes.* Mémorial des sciences mathématiques. **LXXVI** (1936).
23. G. Vrănceanu, *Geometrie analitică proiectivă și diferențială.* București, 1961.
24. G. Vrănceanu, *Lecții de geometrie diferențială,* vol. I, București, 1962.

RELAŢIA DE DOMINARE ŞI ANALIZA ALGEBRICĂ CONTEXTUALĂ

DE

CONSTANTIN T. RAISCHI

Sînt continuate cercetările din [8] şi [15].

INTRODUCERE

Legătura stabilită de S. Marcus, în [8], între categoriile lui Dobruşin [1], [2], închiderile lui Sestier [14] şi vecinătăţile lui Sakai [13] ne-a sugerat ideea introducerii unei relaţii între contexte — relaţia de dominare contextuală — analoge relaţiei de dominare între fraze şi stabilirii pentru contexte, a analogului noţiunilor de familie, mulţime iniţială, mulţime normală, produs saturat, categorie gramaticală elementară, categorie gramaticală, definite pentru fraze în [7].

Introducerea relaţiei de dominare contextuală, împreună cu rezultatele obţinute de Eleonora Toma Marcu în [15] ne-au permis stabilirea unei legături între operatorii α şi α^{-1}, respectiv φ şi ψ, în sensul următor : orice proprietate a operatorului α, respectiv a operatorului φ, independentă de proprietăţile şi structura frazei este valabilă şi pentru operatorul α^{-1}, respectiv, operatorul ψ (vezi propoziţiile 3, 4, 5, 6 şi 7).

În baza legăturilor pe care le vom stabili între categoria contextuală K şi închiderea ψ (vezi propoziţiile 9, 10 şi 11), se poate spune că raportul în care se află categoria contextuală faţă de închiderea ψ, este aceeaşi cu raportul în care se află categoria gramaticală faţă de închiderea φ. (Pentru noţiunea algebrică de categorie gramaticală (vezi [3], [4], [5] şi capitolul V din [6]).

În cele ce urmează se va stabili că pentru orice frază f, $\alpha(f)$ este o reuniune de familii contextuale, iar pentru orice context x, $\alpha^{-1}(x)$ este o reuniune de familii de fraze (vezi propoziţiile 13 şi 13′).

O reprezentare a operatorului φ, respectiv ψ, cu ajutorul operatorilor α, α^{-1}, G, K, se va da în propoziţiile 16 şi 16′.

O condiţie necesară şi suficientă pentru ca un limbaj să fie cu un număr finit de stări se va da în propoziţia 20.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, Nr. 1, P. 31–41, BUCUREŞTI, 1968

În încheiere, se definește o funcție u de la $\mathcal{F}_L$ la $\mathcal{K}_L$, unde $\mathcal{F}_L$ este mulțimea tuturor familiilor de fraze peste un limbaj L, iar $\mathcal{K}_L$ este mulțimea tuturor familiilor contextuale peste L. Organizînd mulțimile $\mathcal{F}_L$ și $\mathcal{K}_L$ ca două categorii, se va arăta că, în cazul cînd funcția u este definită pe întreaga mulțime $\mathcal{F}_L$, funcția u este un functor și chiar mai mult, u este un izomorfism de categorii.

DEFINIȚII, NOTAȚII ȘI REZULTATE ANTERIOARE

Considerăm o mulțime finită și nevidă V (vocabularul) ale cărui elemente sînt numite cuvinte. O frază peste V este un șir finit de elemente din V. Fraza vidă va fi notată prin O. Orice mulțime de fraze peste V este un limbaj. Compunerea frazelor este o operație asociativă și necomutativă. Mulțimea tuturor frazelor peste V o vom nota prin V^*.

Fiind dat un limbaj L peste V și două fraze a și b, vom spune că a domină b și vom scrie $a \rightarrow b$, dacă pentru orice context $\langle u, v \rangle$ (pereche ordonată de fraze), astfel încît $uav \in L$ avem $ubv \in L$ [6]. Relația de dominare între fraze depinde de limbajul L. Atunci cînd vrem să marcăm această dependență, vom scrie : $a \underset{L}{\rightarrow} b$. Relația de dominare între fraze este o generalizare a relației de dominare între cuvinte [1] și [2]. Dacă avem în același timp $a \rightarrow b$ și $b \rightarrow a$, vom scrie $a \leftrightarrow b$. Mulțimea frazelor b astfel încît $a \leftrightarrow b$ este, prin definiție, familia $S(a)$ a frazei a. Relația „ $\rightarrow$ ” este reflexivă și tranzitivă în V, iar „ $\leftrightarrow$ ” este o relație de echivalență în V. Familiile de fraze sînt clase de echivalență în raport cu „ $\leftrightarrow$ ”.

Fie $A \subseteq V^*$ și $B \subseteq V^*$. Vom spune că A domină B și vom scrie $A \rightarrow B$ dacă pentru fiecare $a \in A$ și pentru fiecare $b \in B$, avem $a \rightarrow b$. O mulțime de fraze este inițială, dacă pentru fiecare frază x astfel încît $x \rightarrow A$ avem $x \in A$ ([1], [2], [3], [4], [5], [6]).

Fie $A \subseteq V^*$ o mulțime inițială. Vom nota prin $\hat{A}$, mulțimea tuturor cuvintelor x astfel încît $A \rightarrow x$. Mulțimea $\hat{A}$ se numește produs saturat. Reuniunea $G(A) = A \cup \hat{A}$ este, prin definiție, categoria gramaticală (pe scurt : c.g) generată de A ([3], [4], [5], [6]).

În cazul particular, cînd A este o familie de fraze, mulțimea $G(A)$ este, prin definiție, o categorie gramaticală elementară (pe scurt : c.g.e.) ([1], [2], [3], [4], [5], [6]).

O mulțime de fraze care este o reuniune de familii de fraze, este, prin definiție, o mulțime normală ([3], [4], [5], [6]).

Fiind dat un limbaj L peste V și o frază a, vom spune că contextul $\langle f, g \rangle$ acceptă fraza a (sau că a este acceptată de $\langle f, g \rangle$) în raport cu L, dacă $fag \in L$ [14], [13].

Vom nota prin $\alpha(a)$, mulțimea tuturor contextelor peste V, care acceptă fraza $a \in V^*$, în raport cu același limbaj L.

Pentru orice mulțime $A \subset V^*$, vom pune :

$$\alpha\,[A] = \bigcap_{a \in A} \alpha\,(a).$$

Fiind dat un context $x = \langle f, g \rangle$ vom nota prin $\alpha^{-1}(x)$ mulțimea tuturor frazelor acceptate de x, [14].

Pentru orice mulțime X de contexte vom pune:

$$\alpha^{-1}[X] = \bigcap_{x \in X} \alpha^{-1}(x).$$

Mulțimea:

$$\varphi[A] = \alpha^{-1}[\alpha(A)]$$

este, prin definiție, închiderea lui $A \subset V^*$, [14].

Mulțimea:

$$\psi[X] = \alpha[\alpha^{-1}(X)]$$

este, prin definiție, închiderea lui X, [14].

Operatorii: α, α^{-1}, φ, ψ, depind de limbajul L. Atunci cînd vrem să marcăm această dependență, vom scrie:

$$\alpha_L,\ \alpha_L^{-1},\ \varphi_L,\ \psi_L.$$

Două contexte sînt echivalente, dacă mulțimea frazelor admise de primul context coincide cu mulțimea frazelor admise de cel de-al doilea context, [13].

Vecinătatea totală a unei fraze este, prin definiție, mulțimea tuturor contextelor care admit acea frază [13].

Vecinătatea totală a unei fraze este elementară, dacă orice două contexte din vecinătate sînt echivalente [13].

RELAȚIA DE DOMINARE ÎNTRE CONTEXTE

Fie V un vocabular și V^* mulțimea tuturor frazelor peste V (adică semigrupul liber generat de V). Considerăm produsul cartezian $\Sigma = V^* \times V^*$. Un element al mulțimii Σ este, prin definiție, un context peste V. (Pentru analiza contextuală vezi [7] și capitolul I din [6]). Fie $L \subset V^*$, un limbaj peste V. Vom introduce în mulțimea Σ, în raport cu limbajul L, o relație binară, numită relația de dominare contextuală. Această relație este reflexivă și tranzitivă, dar nu este simetrică.

DEFINIȚIA 1. *Fie* x, $y \in \Sigma$. *Vom spune că contextul* x *domină în raport cu* L *contextul* y *și vom scrie* $x \underset{L}{\rightarrow} y$, *dacă orice frază* f *din* V, *din faptul că contextul* x *acceptă fraza* f, *rezultă că contextul* y *acceptă fraza* f.

În cele ce urmează vom scrie $x \rightarrow y$ în loc de $x \underset{L}{\rightarrow} y$, dacă nu este pericol de confuzie.

Fie X și Y două mulțimi de contexte (sau mulțimi contextuale). *Vom spune că mulțimea* X *domină în raport cu* L *mulțimea* Y *și vom scrie* $X \underset{L}{\rightarrow} Y$ (*sau* $X \rightarrow Y$) *dacă pentru orice context* $x \in X$ *și orice context* $y \in Y$ *avem* $x \rightarrow y$.

Două contexte care se domină reciproc sînt, prin definiție, *echivalente*.

Fiind dat un context x, mulţimea tuturor contextelor echivalente cu x se numeşte *familia contextului* x (sau *familia contextuală* a lui x) şi se notează cu $S_c(x)$.

O mulţime contextuală se numeşte *normală*, dacă este o reuniune de familii contextuale.

O mulţime contextuală X se numeşte *iniţială*, dacă orice context x, astfel încît $x \rightarrow X$ avem $x \in X$.

Fiind dată o mulţime contextuală X, vom nota prin $\hat{X}$, mulţimea acelor contexte x, pentru care $X \rightarrow x$. $\hat{X}$ se numeşte *produsul saturat* al lui X.

Reuniunea $K(X) = X \cup \hat{X}$ este, prin definiţie, *categoria contextuală generată de* X (pe scurt c. k.).

Dacă X este o familie contextuală, mulţimea $K(X)$ este, prin definiţie, *categoria contextuală elementară* generată de X (pe scurt c. k. e.).

PROPOZIŢIA 1. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca contextul* x *să domine contextul* y *este ca mulţimea* $\alpha^{-1}(x)$ *să fie inclusă în mulţimea* $\alpha^{-1}(y)$.

Aceasta rezultă din definiţia 1.

CONSECINŢĂ. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca mulţimea contextuală* X *să domine mulţimea contextuală* Y *este* : $\alpha^{-1}(X) \subset \alpha^{-1}(Y)$.

PROPOZIŢIA 2. *Condiţia necesară şi suficientă pentu ca două contexte* x *şi* y *să se domine reciproc este* : $\alpha^{-1}(x) = \alpha^{-1}(y)$.

CONSECINŢĂ. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca două mulţimi contextuale* X *şi* Y *să se domine reciproc este* : $\alpha^{-1}(X) = \alpha^{-1}(Y)$.

În baza propoziţiei 1 se poate demonstra că relaţia de dominare contextuală este reflexivă şi tranzitivă, dar nu este simetrică.

În baza propoziţiei 2 rezultă că echivalenţa a două contexte în sensul lui Sakai [13] coincide cu echivalenţa de mai sus, iar noţiunea de familie contextuală coincide cu noţiunea de vecinătate totală elementară, introdusă de I. Sakai în [13].

Din definiţia 1 rezultă că relaţia de dominare contextuală are aceleaşi proprietăţi cu relaţia de dominare între fraze. Aceasta se explică prin faptul că cele două relaţii sînt două modele concrete ale noţiunii de relaţie de preordine definită pe o mulţime oarecare.

Introducerea relaţiei de dominare între contexte permite o studiere mai profundă a legăturilor intime dintre fraze şi contexte. Astfel, noţiunilor definite pe mulţimea tuturor frazelor peste V, le corespund noţiuni analoge, definite pe mulţimea tuturor contextelor peste V.

De exemplu : noţiunea de familie a unei fraze are drept corespondent noţiunea de familie contextuală, noţiunii de produs saturat al unei fraze (sau mulţimi de fraze) îi corespunde noţiunea de produs saturat al unui context (sau mulţimi contextuale), noţiunii de mulţime iniţială de fraze îi corespunde noţiunea de mulţime contextuală iniţială, noţiunea de categorie gramaticală generată de o mulţime de fraze are drept corespondent noţiunea de categorie contextuală generată de o mulţime contextuală, noţiunea de categorie gramaticală elementară, generată de o familie de fraze, are drept corespondent noţiunea de categorie contextuală elementară generată de o familie contextuală etc.

Noțiunea de categorie gramaticală și noțiunea de categorie contextuală sînt două noțiuni strîns legate una de cealaltă. Cele două noțiuni reprezintă două modele ale aceluiași concept — conceptul de clan — noțiune fundamentală în teoria clanurilor inițiată de B. H. Mayoh în [9], [10] și dezvoltată în [11] și [12]. Proprietățile clanurilor sînt proprietăți generale ale categoriilor gramaticale și ale categoriilor contextuale. De asemenea, proprietățile categoriilor gramaticale care nu depind de structura și proprietățile frazei rămîn valabile și pentru categoriile contextuale.

Operatorul α definit pe mulțimea V^* cu valori în mulțimea Σ are ca dual operatorul α^{-1} definit pe mulțimea Σ cu valori în mulțimea V^*. După cum a fost demonstrat în [9], proprietăți ale operatorului α se regăsesc la operatorul α^{-1}. Se poate spune chiar mai mult. Toate proprietățile operatorului α, care nu depind de structura și proprietățile frazei rămîn valabile pentru operatorul α^{-1}.

Operatorul de închidere φ, pentru fraze, definit pe mulțimea V^* cu valori în V^* are ca dual operatorul de închidere ψ, pentru contexte, definit pe mulțimea Σ cu valori în Σ. Toate proprietățile operatorului φ, independente de structura și proprietățile frazei, rămîn valabile pentru operatorul ψ. Astfel, toate proprietățile operatorului φ, demonstrate în [15] se transpun pentru operatorul ψ :

PROPOZIȚIA 3. *Fie* $X, Y \subset \Sigma$. *Dacă* $X \subseteq Y$, *atunci* $\psi(X) \subseteq \psi(Y)$.

PROPOZIȚIA 4. *Fie* $X, Y \subset \Sigma$. *Avem* : $\psi(X \cap Y) \subseteq \psi(X) \cap \psi(Y)$.

PROPOZIȚIA 5. *Fie* $X, Y \subset \Sigma$. Avem : $\psi(X) \cup \psi(Y) \subseteq \psi(X \cup Y)$.

PROPOZIȚIA 6. *Fie* $X, Y \subset \Sigma$. *Avem* : $\psi(X) = \psi(Y)$, *dacă și numai dacă* $\alpha^{-1}(X) = \alpha^{-1}(Y)$.

PROPOZIȚIA 7. *Fie* $X, Y \subset \Sigma$. *Avem* : $\alpha^{-1}[\psi(X)] = \alpha^{-1}(X)$.

Propozițiile de mai sus demonstrează faptul că operatorul ψ prezintă un fenomen de regularitate, analog fenomenului de regularitate prezentat de operatorul φ, fenomen observat în [15].

Propoziția următoare stabilește o altă proprietate a operatorului φ.

PROPOZIȚIA 8. *Fie* $a, b \in V^*$. *Dacă* $\alpha(a) \subset \alpha(b)$, *atunci* $\varphi(a) \supset \varphi(b)$.

Demonstrație. Fie $d \in \varphi(b)$. Atunci orice context x din $\alpha(b)$ acceptă fraza d. Deoarece $\alpha(a) \subset \alpha(b)$, rezultă că fraza d este acceptată de orice context din $\alpha(a)$ și deci $\varphi(a) \supset \varphi(b)$.

Acest rezultat se poate obține și ca o consecință a lemelor 1 și 2 din [15].

CONSECINȚĂ. *Fie* $A, B \subset V^*$. *Dacă* $\alpha(A) \subset \alpha(B)$, *atunci* $\varphi(A) \supset \varphi(B)$.

Observație. În baza propoziției 8 se poate spune că dacă fraza *a* domină fraza *b*, atunci închiderea lui *a* conține închiderea lui *b*.

Analogul propoziției 8 pentru operatorul ψ este :

PROPOZIȚIA 8′. Fie $x, y \in \Sigma$. *Dacă* $\alpha^{-1}(x) \subset \alpha^{-1}(y)$, *atunci* $\psi(x) \supset \psi(y)$.

CONSECINȚĂ. *Fie* $X, Y \subset \Sigma$. *Dacă* $\alpha^{-1}(X) \subset \alpha^{-1}(Y)$, *atunci* $\psi(X) \supset \psi(Y)$.

Observație. În baza propoziției 8′ se poate spune că dacă contextul x domină contextul y, atunci închiderea lui x conține închiderea lui y.

Anumite legături între categoria contextuală și operatorul ψ sînt stabilite de următoarele propoziții :

PROPOZIȚIA 9. *Categoria contextuală generată de o parte X a lui Σ este conținută în închiderea lui X; altfel spus, avem :*

$$K(X) \subseteq \psi(X).$$

Demonstrația acestei afirmații este în esență cea a propoziției 1 din [8].

PROPOZIȚIA 10. *Există cazuri, în care incluziunea afirmată în propoziția 9 este strictă; altfel spus, avem : $K(X) \neq \psi(X)$.*

Demonstrație. Fie $V = \{a, b, c, d\}$, $L = \{aab, acb, bad, bcd, bbd, cad, ccd, cdd\}$, $X = \{\langle a, b\rangle, \langle b, d\rangle\}$. Avem : $\alpha^{-1}(\langle a, b\rangle) = \{a, c\}$, $\alpha^{-1}(\langle b, d\rangle) = \{a, c, b\}$, $\alpha^{-1}(\langle c, d\rangle) = \{a, c, d\}$, $K(X) = \{\langle a, b\rangle, \langle b, d\rangle\}$, $\alpha^{-1}(X) = \alpha^{-1}(\langle a, b\rangle) \cap \alpha^{-1}(\langle b, d\rangle) = \{a, c\}$, $\psi(X) = \alpha(a) \cap \alpha(c) = \{\langle a, b\rangle, \langle b, d\rangle, \langle o, ab\rangle, \langle o, cb\rangle, \langle c, d\rangle\} \cap \{\langle a, b\rangle, \langle b, d\rangle, \langle o, ad\rangle, \langle c, d\rangle, \langle o, cd\rangle, \langle o, dd\rangle\} = \{\langle a, b\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, d\rangle$, deci $K(X) \neq \psi(X)$.

PROPOZIȚIA 11. *Categoria contextuală elementară generată de o familie contextuală coincide cu închiderea familiei.*

În esență, demonstrația acestei propoziții este cea a propoziției 3 din [8].

Următorul exemplu ilustrează propoziția 11.

Fie $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $L = \{acb, afb, agb, bed, bfd, ced, cfd, cgd\}$ și $x = \langle a, b\rangle$. Avem : $\alpha^{-1}(\langle a, b\rangle) = \{e, f, g\}$, $\alpha^{-1}(\langle c, d\rangle) = \{e, f, g\}$, $\alpha^{-1}(\langle b, d\rangle) = \{e, f\}$, $S_c(x) = \{\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\}$, $K(S_c(x)) = \{\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\}$, $\alpha^{-1}(S_c(x)) = \alpha^{-1}(\langle a, b\rangle) \cap \alpha^{-1}(\langle c, d\rangle) = \{e, f, g\}$, $\psi(S_c(x)) = \alpha(e) \cap \alpha(f) \cap \alpha(g) = \{\langle a, b\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, d\rangle\} \cap \{\langle a, b\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, d\rangle\} \cap \{\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\} = \{\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\}$, deci $K(S_c(x)) = \psi(S_c(x))$.

Propozițiile de mai sus demonstrează faptul că raportul în care se află categoria contextuală față de închiderea ψ este același cu raportul în care se află categoria gramaticală față de închiderea φ.

Următoarele propoziții stabilesc noi legături între fraze și contexte.

PROPOZIȚIA 12. *Fie o frază f. Dacă contextul x aparține lui $\alpha(f)$, atunci familia contextuală a lui x este conținută în $\alpha(f)$, adică : $S_c(x) \subset \alpha(f)$.*

Demonstrație. Fie $y \in S_c(x)$. Rezultă $\alpha^{-1}(x) = \alpha^{-1}(y)$, în baza propoziției 2. Deoarece $x \in \alpha(f)$, rezultă că $f \in \alpha^{-1}(x)$, adică $f \in \alpha^{-1}(y)$. Deci $y \in \alpha(f)$ și propoziția este demonstrată.

Propoziția duală pentru contexte este :

PROPOZIȚIA 12′. *Fie un context x. Dacă fraza f aparține lui $\alpha^{-1}(x)$, atunci familia lui f este conținută în $\alpha^{-1}(x)$, adică : $S(f) \subset \alpha^{-1}(x)$.*

PROPOZIȚIA 13. *Pentru orice frază f avem :*

$$\alpha(f) = \bigcup_{x} S_c(x),$$

unde intersecția $S_c(x) \cap \alpha(f)$ este nevidă.

Demonstrația rezultă imediat, în baza propoziției 12.

Propoziția duală pentru context este :

PROPOZIȚIA 13'. *Pentru orice context* x *avem* :

$$\alpha^{-1}(x) = \bigcup_{f} S(f),$$

unde intersecția $S(f) \cap \alpha^{-1}(x)$ *este nevidă.*

În baza propozițiilor 13 și 13' se poate spune că $\alpha(f)$ și $\alpha^{-1}(x)$ sînt mulțimi normale, pentru orice frază f și orice context x.

PROPOZIȚIA 14. *Pentru orice* $A \subset V^*$ *avem* : $\alpha(A) \subseteq \alpha(\hat{A})$.

Demonstrație. Fie $a \in \hat{A}$. Rezultă $\alpha(A) \subset \alpha(a)$, deoarece $A \rightarrow a$. Deoarece $\alpha(\hat{A})$ coincide cu $\bigcap_{a \in \hat{A}} \alpha(a)$, rezultă că mulțimea $\alpha(A)$ este inclusă în $\alpha(\hat{A})$.

CONSECINȚĂ. *Dacă* $A \subset V^*$ *este o familie, atunci* $\alpha(A) = \alpha(\hat{A})$.

Demonstrație. Deoarece A este familie, rezultă $A \subset \hat{A}$. Fie $a \in A \cap \hat{A}$. Atunci $\alpha(a) = \alpha(A)$ și deci $\alpha(\hat{A}) = \bigcap_{b \in \hat{A}} \alpha(b) = \alpha(A)$.

Pentru a ilustra această consecință utilizăm limbajul folosit în ilustrarea propoziției 11.

Considerăm $A = \{g\}$. Evident, A este familie. Deci $\alpha(A) = \alpha(g)$. Avem : $A \rightarrow e$ și $A \rightarrow f$, deci $\hat{A} = \{e, f, g\}$ și $\alpha(\hat{A}) = \alpha(e) \cap \alpha(f) \cap \alpha(g) = \alpha(g) = \alpha(A)$.

Propoziția duală pentru contexte este :

PROPOZIȚIA 14'. *Pentru orice* $X \subset \Sigma$, *avem* : $\alpha^{-1}(X) \subseteq \alpha^{-1}(\hat{X})$.

CONSECINȚĂ. *Dacă* $X \subset \Sigma$ *este o familie contextuală, atunci* $\alpha^{-1}(X) = \alpha^{-1}(\hat{X})$.

PROPOZIȚIA 15. *Pentru orice* $A \subset V^*$ *avem* :

$$\alpha(G(A)) = \alpha(A).$$

Demonstrație. $\alpha(G(A)) = \alpha(A \cup \hat{A}) = \alpha(A) \cap \alpha(\hat{A}) = \alpha(A)$, deoarece $\alpha(A) \subseteq \alpha(\hat{A})$, în baza propoziției 14.

PROPOZIȚIA 15'. *Pentru orice* $X \subset \Sigma$ avem :

$$\alpha^{-1}(K(X)) = \alpha^{-1}(X).$$

Această propoziție este transpunerea propoziției 15 pentru categorii contextuale.

PROPOZIȚIA 16. *Pentru orice* $A \subset V^*$ *avem* :

$$\alpha^{-1}[K(\alpha(A))] = \varphi(A).$$

Demonstrație. În baza propoziției 15' rezultă :

$$\alpha^{-1}[K(\alpha(A))] = \alpha^{-1}(\alpha(A)) = \varphi(A).$$

Propoziția duală pentru context este :

PROPOZIȚIA 16'. *Pentru orice* $X \subset \Sigma$ *avem* :

$$\alpha[G(\alpha^{-1}(X))] = \psi(X).$$

PROPOZIŢIA 17. *Pentru orice* $A \subset V^*$ *şi orice* $X \subset \Sigma$ *avem* :

$$\alpha[\varphi(A)] = \varphi[\alpha(A)]$$

$$\alpha^{-1}[\psi(X)] = \varphi[\alpha^{-1}(X)].$$

Demonstratie. $\alpha[\varphi(A)] = \alpha[\alpha^{-1}(\alpha\ (A))] = \psi[\alpha(A)]$ şi $\alpha^{-1}[\psi(X)] = \alpha^{-1}[\alpha(\alpha^{-1}(X))] = \varphi[\alpha^{-1}(X)]$.

PROPOZIŢIA 18. *Pentru orice familie de fraze* A *şi orice familie contextuală* X *avem* :

$$\varphi^{n}(A) = \varphi(A) \tag{3}$$

$$\psi^{n}(X) = \psi(X) \tag{4}$$

unde n *este un număr natural finit. (Prin* $\varphi^{n}(A)$ *se înţelege* : $\varphi[\varphi(\ldots(\varphi(A))\ldots)]$, *adică aplicarea închiderii* φ *lui* A *de* n *ori succesiv).*

Demonstraţie. Vom demonstra prin inducţie relativă la n, relaţia (3). Fie $n=2$. În acest caz, relaţia (3) devine : $\varphi\ [\varphi(A)] = \alpha^{-1}[\alpha(\alpha^{-1}(\alpha(A)))] = \alpha^{-1}[\psi(\alpha(A))]$ şi în baza propoziţiei 18, rezultă : $\varphi[\varphi(A)] = \alpha^{-1}[\alpha(A)] = \varphi(A)$. Presupunem relaţia (3) adevărată pentru n şi să o demonstrăm pentru $n+1$. Fie : $\varphi^{n+1}(A) = \varphi[\varphi^{n}(A)]$. În baza ipotezei de inducţie rezultă :

$$\varphi^{n+1}(A) = \varphi[\varphi(A)] = \varphi(A).$$

Relaţia (4) este duala relaţiei (3) şi se demonstrează în mod analog.

Pentru a pune în evidenţă noi relaţii între fraze şi contexte, considerăm factorizarea mulţimii V^* în raport cu relaţia de dominare între fraze, pe care o vom nota prin $\mathcal{F}_L$ şi factorizarea mulţimii Σ în raport cu relaţia de dominare contextuală, pe care o vom nota prin $\mathcal{H}_L$. Indicele L ne indică faptul că cele două mulţimi factor depind de limbajul L, în raport cu care au fost definite cele două relaţii de dominare. (Anumite legături între limbajul L şi mulţimea $\mathcal{F}_L$ au fost stabilite în [12]).

PROPOZIŢIA 19. *Card* $\mathcal{F}_L$ *este finit, dacă şi numai dacă Card* $\mathcal{H}_L$ *este finit.*

Demonstraţie. Presupunem Card $\mathcal{F}_L$ finit. Fie $S_c(x) \in \mathcal{H}_L$. Familia contextuală $S_c(x)$ este unic determinată de mulţimea $\alpha^{-1}(x)$. În baza propoziţiei 13′ rezultă că $\alpha^{-1}(x)$ este o reuniune finită de familii de fraze. Rezultă că numărul familiilor contextuale nu depăşeşte $2^{\mathcal{F}_L}$, care este un număr finit.

Reciproca se demonstrează în mod analog.

CONSECINŢĂ. *Un limbaj* L *este cu un număr finit de stări, dacă şi numai dacă Card* $\mathcal{H}_L$ *este finit.*

În continuare, vom defini o funcţie u, de la $\mathcal{F}_L$ la $\mathcal{H}_L$ şi o funcţie u', de la $\mathcal{H}_L$ la şi $\mathcal{F}_L$.

DEFINIŢIA 2. *Vom spune că familiei* $S(f) \in \mathcal{F}_L$ *îi corespunde prin funcţia contextuală* $S_c(x) \in \mathcal{K}_L$ *şi vom scrie* $u[S(f)] = S_c(x)$, *dacă şi numai dacă sînt îndeplinite următoarele condiţii :*

$$\text{a. } \varphi_L[S(f)] = \alpha_L^{-1}[S_c(x)]$$

$$\text{b. } \psi_L[S_c(x)] = \alpha_L[S(f)]$$

(indicele L marchează faptul că operatorii φ, ψ, α, α^{-1} sînt definiţi în raport cu limbajul L).

Observaţie. Condiţiile a şi b din definiţia funcţiei u sînt echivalente, în baza propoziţiilor 3 şi 3' din [8], cu :

$$\text{a}'.\ \varphi_L(f) = \alpha^{-1}_L(x) \quad \text{sau a}''.\ G(f) = \alpha^{-1}_L(x),$$

$$\text{b}'.\ \psi_L(x) = \alpha_L(f) \quad \text{sau b}''.\ K(x) = \alpha_L(f),$$

unde f este o frază arbitrară din familia $S(f)$, iar x este un context arbitrar din $S_c(x)$.

În baza observaţiei de mai sus, rezultă că definiţia funcţiei u este independentă de reprezentanţii familiilor, adică funcţia u este bine definită.

DEFINIŢIA 2'. *Vom spune că familiei contextuale* $S_c(x) \in \mathcal{K}_L$ *îi corespunde prin funcţia* u' *familia* $S(f) \in \mathcal{F}_L$ *şi vom scrie* $u'[S_c(x)] = S(f)$, *dacă şi numai dacă sînt îndeplinite condiţiile a şi b de mai sus.*

Pentru a ilustra modul cum acţionează funcţia u şi u' considerăm exemplul de la propoziţia 11.

Avem : $S(g) = \{g\}$, $G(g) = \{e, f, g\}$. Deoarece : $G(g) = \alpha^{-1}_L(\langle a, b \rangle)$ şi $K(\langle a, b \rangle) = \alpha_L(g)$, rezultă că : $u[S(g)] = S_c(\langle a, b\rangle)$ şi $u'[S_c(\langle a, b\rangle)] = S(g)$.

În general, pentru un limbaj oarecare, funcţiile u şi u' nu sînt definite pe întreaga mulţime $\mathcal{F}_L$, respectiv $\mathcal{K}_L$. Astfel, funcţia u este definită pe o submulţime a lui $\mathcal{F}_L$, iar funcţia u' pe o submulţime a lui $\mathcal{K}_L$.

Funcţia u realizează o corespondenţă biunivocă între domeniul său de definiţie şi codomeniul său. O observaţie analogă se poate face despre funcţia u'.

Dacă compunem funcţia u cu funcţia u', obţinem :

$$u \circ u' = 1_{\mathcal{F}_L} \text{ şi } u' \circ u = 1_{\mathcal{K}_L}$$

adică, u este un izomorfism. De fapt, $u \equiv u'$.

PROPOZIŢIA 20. *Dacă funcţia u este definită pe toată mulţimea* $\mathcal{F}_L$, *atunci :*

Card $\mathcal{F}_L$ = *Card* $\mathcal{K}_L$.

Aceasta rezultă din faptul că funcţia u realizează o corespondenţă biunivocă între mulţimea $\mathcal{F}_L$ şi $\mathcal{K}_L$.

Următoarele propoziţii stabilesc anumite proprietăţi ale funcţiei u.

PROPOZIŢIA 21. *Fie* $S_c(x) = u[S(f)]$ *şi* $S_c(y) = u[S(g)]$. *Dacă* $f \to g$, *atunci* $y \to x$.

Demonstrație. Dacă $f \to g$, atunci $\alpha_L(f) = \alpha_L[S(f)] \subset \alpha_L(g) = \alpha_L[S(g)]$. În baza propoziției 8 rezultă : $\varphi_L[S(f)] \supset \varphi_L[S(g)]$. (5)

Deoarece : $S_c(x) = u[S(f)]$, rezultă $\varphi_L[S(f)] = \alpha^{-1}_L[S_c(x)]$. (6)

Deoarece : $S_c(y) = u[S(g)]$, rezultă $\varphi_L[S(g)] = \alpha^{-1}_L[S\ (y)]$. (7)

Din (5), (6) și (7), rezultă că $\alpha^{-1}_L[S_c(x)] \supset \alpha^{-1}_L[S_c(y)]$, adică $S_c(y) \to S_c(x)$. Deci $y \to x$ și propoziția este demonstrată.

PROPOZIȚIA 22. *Fie* $S_c(x) = u[S(f)]$, $S_c(y) = u[S(g)]$ și $S_c(x) = u(S(h)]$. *Dacă* $S(f) \to S(g)$ *și* $S(g) \to S(h)$, *atunci* $S_c(x) \to S_c(y)$ *și* $S_c(y) \to S_c(x)$.

Aceasta rezultă în baza propoziției 22.

DEFINIȚIA 3. *Fie* $S(f)$, $S(g) \in \mathcal{F}_L$. *Dacă* $S_c(x) = u[S(f)]$ *și* $S_c(y) = u[S(g)]$, *atunci* $u[S(f) \cup S(g)] = u[S(f)] \cup u[S(g)]$.

Observație. Această definiție se poate extinde pentru o reuniune finită de familii de fraze, astfel :

$$u\left[\bigcup_{i=1}^{n} S(f_i)\right] = \bigcup_{i=1}^{n} u\ (S(f_i)$$

cu condiția ca $u[(S(f_i)]$ să aibe sens, pentru orice i.

Dacă funcția u este definită pe toată mulțimea $\mathcal{F}_L$, atunci, în baza definiției 3, orice mulțime normală din $\mathcal{F}_L$ este izomorfă cu o anumită mulțime normală din $\mathcal{H}_L$.

CATEGORIA $\mathcal{F}_L$ ȘI CATEGORIA $\mathcal{H}_L$

Fiind dat un vocabular V și un limbaj L peste V, putem atașa limbajului L două mulțimi : $\mathcal{F}_L$ și $\mathcal{H}_L$, pe baza relației de dominare între fraze și a relației de dominare contextuală. $\mathcal{F}_L$ este mulțimea tuturor familiilor de fraze peste V, iar $\mathcal{H}_L$ este mulțimea tuturor familiilor contextuale peste V.

Mulțimea $\mathcal{F}_L$ poate fi prezentată ca o categorie, pe care o notăm tot cu $\mathcal{F}_L$, astfel :

Obiectele categoriei $\mathcal{F}_L$ sînt familiile de fraze, iar mulțimea morfismelor $\mathrm{Hom}(S(f), S(g))$, unde $S(f)$ și $S(g)$ aparțin lui $\mathcal{F}_L$, este mulțimea vidă, dacă $S(f)$ nu domină $S(g)$ și este mulțimea formată dintr-un singur element, dacă $S(f)$ domină $S(g)$.

Deoarece relația de dominare între familiile de fraze este reflexivă și tranzitivă, axiomele definiției unei categorii sînt îndeplinite.

Analog, mulțimea $\mathcal{H}_L$ poate fi prezentată ca o categorie, pe care o notăm tot cu $\mathcal{H}_L$.

Un alt mod de a demonstra că mulțimea $\mathcal{F}_L$ poate fi prezentată ca o categorie este următorul : atașăm mulțimii $\mathcal{F}_L$ un graf reflexiv și tranzitiv G^*. În [12] s-a demonstrat că un graf reflexiv și tranzitiv se poate prezenta ca o categorie. Deci mulțimea $\mathcal{F}_L$ poate fi prezentată ca o categorie. (Graful G^* a fost studiat în [12].)

Dacă funcția u este definită pe întreaga mulțime $\mathcal{F}_L$, atunci, în baza definiției 2 și a propoziției 22, se poate spune că funcția $u : \mathcal{F}_L \to \mathcal{H}_L$ este un functor de la categoria $\mathcal{F}_L$ la categoria $\mathcal{H}_L$.

Acest functor este contravariant, în baza propoziției 23.

Deoarece $u \circ u' = i_{\mathfrak{F}_L}$ și $u' \circ u = l_{\mathfrak{K}_L}$, rezultă că functorul u este un izomorfism de categorii.

Primită la redacție la 12 iunie 1967

Facultatea de matematică și
mecanică a Universității din București,
str. Academiei nr. 14

BIBLIOGRAFIE

1. Р. Л. Добрушин, *Элементарная грамматическая категория*. Бюлл. Объединения по проблемам машинного перевода, *5*, 19–21, (1957).
2. Р. Л. Добрушин, *Опыт определения понятия грамматической категории*, Тезисы Конференц. по машинному переводу. (15–21 мая 1958 года), Москва, 1958, p. 87.
3. S. Marcus, *Sur un modèle logique de la catégorie grammaticale élémentaire.* I. Rev. Roum. de mathém. pures et appl., **7**, *1*, 91–107 (1962).
4. S. Marcus, *Sur un modèle logique de la catégorie grammaticale élémentaire.* II. Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, **8**, *3–4*, 323–329 (1962).
5. С. Маркус, *Об одной логической модели элементарной грамматической категории. III*. Rev. Roumaine math. pures et appl. **7**, *4*, 683–691 (1962).
6. S. Marcus, *Introduction mathématique à la linguistique structurale.* Dunod, Paris, 1967.
7. — *Analyse contextuelle.* Zeitschrift für Phonetik Sprachwissenschaft und Kommunikationsforschung, **18**, *3*, 301–313 (1965).
8. — *Catégories de Dobrušin, fermetures de Sestier et voisinages de Sakai.* Glossa, **1**, 1 (1967).
9. B. H. Mayoh, *Simple structures refined on a transitive and reflexive graph.* Rev. Roum. de math. pures et appl., **11**, *1* (1966).
10. — *Grammatical categories.* Rev. Roum. Mathém. Pures et Appl., **11** (1966).
11. C. T. Raischi, *Asupra unui model algebric al categoriilor gramaticale.* I. St. cerc. mat., **19**, *4* (1967).
12. — *Asupra unui model algebric al categoriilor gramaticale.* II. St. cerc. mat., **19**, *5* (1967).
13. I. Sakai, *Some mathematical aspects of syntactic description.* International Conference of Computational Linguistics, New York, 1965, nr. 21, 49 p.
14. A. Sestier, *Contribution à une théorie ensembliste des classifications linguistiques.* Actes du Premier Congres de l'AFCAL, 1960, Paris, p. 293–305.
15. E. Toma Marcu, *Proprietăți ale închiderilor Sestier din teoria algebrică a gramaticii.* St. cerc. mat., **XIX** (1967).

ASUPRA TRANSFORMĂRILOR NORMALE INFINITEZIMALE ŞI DE DILATAŢIE SUPERFICIALĂ NULĂ ÎN SPAŢIUL ELIPTIC

DE

RADU ROŞCA

Într-un articol recent [1] am extins spaţiului eliptic Σ_3 unele noţiuni din teoria cîmpurilor din spaţiul euclidian metric E_3. Printre cazurile de divorţ dintre cele două spaţii se situează şi *transformările infinitezimale normale de dilataţie superficială nulă.*

Acest tip de transformări din Σ_3 care în spaţiul E_3 sînt imposibile sau nedeterminate, după cum este vorba de o suprafaţă obişnuită sau o suprafaţă minimală [2], fac obiectul actualei Note.

I. Fie $\mathbf{M}_0(u^i)$ şi $\mathbf{C}(u^i)$, $(i = 1, 2)$, două puncte (normate) din spaţiul Σ_3 (a cărui curbură am redus-o printr-o *omotetie* prealabilă la unitate) şi ε o constantă infinitezimală al cărei pătrat poate fi neglijat. Notînd cu $T(\mathbf{M}_0, \mathbf{C})$ transformarea infinitezimală ce înlocuieşte orice punct $\mathbf{M}_0$ cu punctul $\mathbf{M}'$ dat de :

$$f\mathbf{M}' = \mathbf{M}_0 + \varepsilon\,\mathbf{C}, \quad (f = \text{factor de normare}),$$

vom spune că $(\mathbf{C})$ este *suprafaţa transformatoare*, $(\mathbf{M}')$ *suprafaţa transformată* şi $\mathbf{M}_0\mathbf{C}$ *directoarea* transformării $T(\mathbf{M}_0, \mathbf{C})$. Dacă g_{ik} este tensorul metric al suprafeţei $(\mathbf{M}_0)$, dilataţia superficială σ a acestei suprafeţe este [1]

$$\sigma \underset{\text{def}}{=} \nabla(\mathbf{M}_0, \mathbf{C}), \tag{1}$$

unde ∇ reprezintă parametrul diferenţial mixt al lui Beltrami relativ la tensorul g_{ik}.

Vom presupune diferitele mărimi geometrice sau scalare de o clasă suficient de mare pentru a justifica calculele şi notînd cu $\mathbf{M}_3$ *copunctul* lui $\mathbf{M}_0$ (adică punctul ce descrie suprafaţa *suplimentară* sau *duală* a lui $(\mathbf{M}_0)$) transformarea $T(\mathbf{M}_0, \mathbf{C})$ va fi normală şi de dilataţie superficială nulă dacă sînt satisfăcute condiţiile

$$\mathbf{C} \in \mathbf{M}_0\mathbf{M}_3, \quad \nabla(\mathbf{M}_0, \mathbf{C}) = 0.$$

ST. CERC. MAT., TOM. 20, Nr. 1, P. 43–53, BUCUREŞTI, 1968

Fie acum $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ două puncte care împreună cu $\mathbf{M}_0$ şi $\mathbf{M}_3$ formează un tetraedru *autodual* τ.

Ecuaţiile deplasării infinitezimale ale lui $\tau \equiv \{\mathbf{M}_k\}$ sînt [4]

$$\text{(2)} \qquad d\mathbf{M}_i = (\omega_i^j)\,\mathbf{M}_j, \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3),$$

unde ω_i^j sînt forme Pfaff în raport cu variabilele u^1, u^2 iar (ω_i^j) este matricea lui Cartan

$$\text{(3)} \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0^1 & \omega_0^2 & 0 \\ -\omega_0^1 & 0 & \omega_1^2 & -\omega_3^1 \\ -\omega_0^2 & -\omega_1^2 & 0 & \omega_2^3 \\ 0 & \omega_3^1 & -\omega_2^3 & 0 \end{pmatrix}$$

care după cum se ştie satisface ecuaţiile

$\Omega + \Omega^T = 0$, $d\Omega = \Omega^2$ (ecuaţia de structură).

Tetraedrul $\{\mathbf{M}_k\}$ putîndu-se fixa astfel ca să fie *canonic* [adică focarele $\mathbf{F}_l$ şi $\mathbf{F}_k$, $(l = 1, 2;\ k = 3, 4)$ să fie respectiv *armonice* punctelor $\mathbf{M}_0$, $\mathbf{M}_3$ şi $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$] putem scrie în virtutea teoremei lui Cartan

$$\text{(4)} \qquad \omega_2^3 = \lambda_1 \omega_0^2, \quad \omega_3^1 = -\lambda_2\, \omega_0^1$$

şi deducem pentru curbura mijlocie H, [5], a lui $(\mathbf{M}_0)$ valoarea

$$\text{(5)} \qquad H = \frac{[\omega_0^1\, \omega_2^3] + [\omega_0^2 \omega_3^1]}{2\,[\omega_0^1 \omega_0^2]} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}.$$

Pe de altă parte, conform ipotezei făcute, punctul $\mathbf{C}$ va fi de forma

$$\text{(6)} \qquad \mathbf{C} = \mathbf{M}_0 \cos\delta + \mathbf{M}_3 \sin\delta$$

unde δ este o funcţie derivabilă oarecare de u^1, u^2.

Notînd cu $\mathbf{C}^*$ rectangularul lui $\mathbf{C}$ pe normala $\mathbf{M}_0\mathbf{M}_3$ $(\mathbf{C}^* = -\cos\delta\mathbf{M}_3 + \sin\delta\mathbf{M}_0)$ obţinem din (6) cu ajutorul lui (3) şi (4)

$$\text{(7)} \qquad d\mathbf{C} = \mathbf{C}^*\, d\delta + (\cos\delta - \lambda_2 \sin\delta)\, \omega_0^1\, \mathbf{M}_1 + (\cos\delta - \lambda_1 \sin\delta)\, \omega_0^2\, \mathbf{M}_2.$$

Utilizînd acum derivata *covariantă* în raport cu pfaffieni invarianţi ω_0^1, ω_0^2 putem scrie

$$\text{(8)} \qquad \begin{aligned} d\delta &= \delta_{;1}\, \omega_0^1 + \delta_{;2}\, \omega_0^2 \\ \mathbf{M}_{0;1} &= \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_{0;2} &= \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{C}_{;1} &= \delta_{;1}\mathbf{C}^* + (\cos\delta - \lambda_2 \sin\delta)\mathbf{M}_1 \\ \mathbf{C}_{;2} &= \delta_{;2}\mathbf{C}^* + (\cos\delta - \lambda_1 \sin\delta)\mathbf{M}_2 \end{aligned}$$

şi introducînd în (1) găsim pentru σ expresia simplă

$$\text{(9)} \qquad \sigma = \lambda \cos\delta - (\lambda_1 + \lambda_2) \sin\delta$$

ce permite pentru $\sigma = 0$ să enunţăm următorul prim rezultat : ***În spaţiul Σ_3 transformările infinitezimale normale şi de dilataţie superficială nulă există pentru orice suprafaţă $(\mathbf{M}_0)$. Punctul $\mathbf{C}$ care defineşte transformarea***

$T(\mathbf{M}_0, \mathbf{C})$ *considerată este bine determinat pe normală la* $\mathbf{M}_0$, *cotangenta distanței sale la* $\mathbf{M}_0$ *fiind egală cu curbura mijlocie a lui* $(\mathbf{M}_0)$ *în* $\mathbf{M}_0$.

Presupunînd acum că distanța $\delta(u^i)$ este o funcție oarecare de tensorul metric g_{ik} al lui $(\mathbf{M}_0)$ precum și de derivatele acestui tensor, acest rezultat se poate lega de *deformarea continuă* a lui $(\mathbf{M}_0)$ în felul următor.

Dacă b_{ik} este tensorul *formei simetrice* a lui $(\mathbf{M}_0)$, relația (9) egalată cu zero se mai poate scrie

$$g^{ik} b_{ik} = 2 \operatorname{ctg} \delta. \tag{10}$$

Cu alte cuvinte este o relație *liniară* în b_{ik} avînd coeficienții funcție de g_{ik}. Or, dintre problemele de deformare *continuă* $\mathcal{D}_c$, a unei suprafețe S, cele izvorîte dintr-o relație de acest tip, pot fi considerate ca cele mai interesante.

Rețeaua (u^i) trasată pe S (și pe toate deformatele sale) care corespunde unei deformări $\mathcal{D}_c$ devine în cazul nostru

$$g_{ik}\, du^i\, du^k = 0, \tag{11}$$

adică este rețeaua *liniilor izotrope*. Cum prin ipoteză suprafața $(\mathbf{M}_0)$ nu este minimală $\left(\delta \neq \frac{\pi}{2}\right)$ și

$$\det |g_{ik}| \neq 0,$$

putem spune cu Vincensini [3] că rețeaua (11) este rețeaua *cinematic conjugată* în rostogolirea uneia pe cealaltă a două suprafețe oarecare din șirul $[(\mathbf{M}_0)]$ a deformatelor lui $(\mathbf{M}_0)$.

Rezultă din toate acestea, faptul important că *studiul transformărilor* $T(\mathbf{M}_0, \mathbf{C})$ *normale și de dilatație superficială nulă din* Σ_3 *este legat de deformările cu rețea izotropă cinematic conjugată.* Utilizînd tot derivatele covariante, și introducînd punctele nenormate

$$\mathbf{P}_{ik} = [\mathbf{M}_0\ \mathbf{M}_{0:i}\ \mathbf{M}_{0:k}],$$

unde paranteza [ ] înseamnă *produsul exterior* a trei puncte, vom numi [1] *rotaționalul cîmpului* $(\mathbf{M}_0, \mathbf{C})$ pe suprafața $(\mathbf{M}_0)$, mărimea geometrică

$$\mathbf{R} \underset{\text{def}}{=} g^{ik} \mathbf{P}_{ik}. \tag{12}$$

Făcînd calculul pentru expresiile $\mathbf{P}_{ik}$ cu ajutorul lui (8) și a regulei de permutare [4] a vîrfurilor tetraedrului $\{\mathbf{M}_k\}$ și introducînd în (12) se găsește

$$\mathbf{R} = (\delta_{:2}\, \mathbf{M}_{0:1} - \delta_{:1}\, \mathbf{M}_{0:2}) \cos \delta. \tag{12'}$$

Vom nota de aici înainte cu T_n^0 o transformare infinitezimală normală și de dilatație superficială nulă din Σ_3 și raportîndu-ne la expresia (12) putem formula următoarea proprietate :

Rotaționalul cîmpului determinat de o transformare $T_n^0(\mathbf{M}_0, \mathbf{C})$ *este un punct (nenormat) bine determinat situat pe duala normalei în* $\mathbf{M}_0$ *la* $(\mathbf{M}_0)$. O primă observație care se poate face imediat de aici este că rotația în planul tangent a deplasării lui $\mathbf{M}_0$ care are ca expresie $\langle \mathbf{R}\ \mathbf{M}_0 \rangle$ ($\langle\ \rangle$ = produs interior), este nulă, și acest lucru era aproape evident *a priori*.

II. Expresia (10) ce determină suprafața transformatoare (C) a transformării $T_n^0(\mathbf{M}_0, \mathbf{C})$ duce în mod natural la considerarea cazului cînd $(\mathbf{M}_0)$ este o suprafață de curbură mijlocie constantă. În acest caz deducem imediat din (7) și din (10) (care se mai poate scrie $\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \operatorname{ctg} \delta$) :

$$(13) \qquad d\mathbf{C} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\omega_0^2 \mathbf{M}_2 - \omega_0^1 \mathbf{M}_1) \frac{\sin \delta}{2}$$

de unde

$$\langle d\mathbf{C}\, d\mathbf{C} \rangle = (\lambda_2 - \lambda_1)^2 \frac{\sin^2 \delta}{2} \{(\omega_0^2)^2 + (\omega_0^1)^2\}$$

ceea ce exprimă că suprafețele $(\mathbf{M}_0)$ și (C) sînt în *corespondență conformă*. Reciproca rezultă imediat și ea din egalitatea (7) iar formula (12′) permite să spunem că *pentru o suprafață de curbură mijlocie constantă cîmpul* $(\mathbf{M}_0, \mathbf{C})$ *corespunzător unei transformări* $T_n^0(\mathbf{M}_0, \mathbf{C})$ *este irotațional.*

Să arătăm acum faptul remarcabil că suprafețele $(\mathbf{M}_0)$ și (C) care determină cîmpul $(\mathbf{M}_0, \mathbf{C})$ sînt în poziția teoremei relative la cuplurile Bonnet din spațiul obișnuit.

În primul rînd δ fiind constant, suprafața (C) este cum se știe *paralelă* lui $(\mathbf{M}_0)$ și admite ca duală pe (C*). Cu ajutorul matricei Ω dată de (3) obținem, prin diferențierea lui C*,

$$(14) \qquad d\mathbf{C}^* = \omega_0^1 (\lambda_2 \cos \delta + \sin \delta)\, \mathbf{M}_1 + \omega_0^2 (\lambda_1 \cos \delta + \sin \delta)\, \mathbf{M}_2$$

la care trebuie să alăturăm expresia (13) a lui dC :

$$(15) \qquad d\mathbf{C} = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{2} (\omega_0^2 \mathbf{M}_2 - \omega_0^1 M_1 \sin \delta).$$

Or este vizibil că tetraedrul $\tau_c = \{\mathbf{C}\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{C}^*\}$ este și el autodual (el se obține prin rotația eliptică de amplitudine δ a lui $\{\mathbf{M}_k\}$ în jurul axei $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$) și prin urmare deoarece (C) și (C*) sînt duale una față de alta, formele

$$(16) \qquad \sigma_0^1 = -\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{2} \omega_0^1 \sin \delta, \quad \sigma_0^2 = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{2} \omega_0^2 \sin \delta$$

$$(17) \quad \sigma_2^3 = -(\lambda_1 \cos \delta + \sin \delta), \quad \omega_0^2, \; \sigma_3^1 = (\lambda_2 \cos \delta + \sin \delta)\, \omega_0^1$$

sînt pfaffieni principali ai deplasării lui τ_c.

Calculînd acum curbura mijlocie H_c a lui (C) după formula (5) unde s-a înlocuit ω_k^i cu σ_k^i, se găsește

$$H_c = H = \operatorname{ctg} \delta.$$

Cu alte cuvinte, suprafețele $(\mathbf{M}_0)$ și (C) *formează un cuplu Bonnet din* Σ_3. Este ușor de văzut că un cuplu Bonnet din Σ_3 determină *două* [1]) suprafețe de curbură relativă constantă duale una față de alta. Într-adevăr, l fiind o constantă, cele două puncte

$$\mathbf{L} = \cos l\, \mathbf{M}_0 + \sin l\, \mathbf{M}_3, \quad \mathbf{L}^* = \sin l\, \mathbf{M}_0 - \cos l\, \mathbf{M}_3$$

---

[1]) Se știe că în spațiul obișnuit există o singură suprafață de curbură gaussiană constantă, paralelă celor două suprafețe ale unui cuplu Bonnet.

descriu două suprafeţe duale care sînt ambele paralele lui (**C**) şi (**C***) şi printr-un calcul analog cu cel precedent, se găseşte că pfaffienii principali ai deplasării lui $\tau_L \equiv \{\mathbf{L}\,\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{L}^*\}$ sînt

$$\overline{\sigma}_0^1 = (\cos l - \lambda_2 \sin l)\,\omega_0^1, \qquad \overline{\sigma}_0^2 = (\cos l - \lambda_1 \sin l)\,\omega_0^2$$

$$\overline{\sigma}_2^3 = -\,(\sin l + \lambda_1 \cos l)\,\omega_0^2, \; \overline{\sigma}_1^3 = (\sin l + \lambda_2 \cos l)\,\omega_0^1.$$

Notînd cu K curbura relativă a lui (**L**) avem

$$K = \frac{[\overline{\sigma}_0^1\,\overline{\sigma}_0^2]}{[\overline{\sigma}_1^3\,\overline{\sigma}_2^3]} = \frac{(\cos l - \lambda_2 \sin l)\,(\cos l - \lambda_1 \sin l)}{(\sin l + \lambda_2 \cos l)\,(\sin l + \lambda_1 \cos l)}. \tag{18}$$

Dar reiese imediat din (18) că pentru ctg $2l =$ ctg δ, curbura K are ca valoare

$$K = \mathrm{tg}^2\,\delta$$

şi cum curbura K^* a lui (**L***) este inversa lui K, aserţiunea făcută este confirmată. Să punem acum în evidenţă numărul de funcţii arbitrare de care depinde un asemenea cuplu Bonnet din Σ_3. Vom avea în primul rînd ecuaţiile liniare

$$\omega_2^3 = \lambda_1\omega_0^2, \; \omega_3^1 = -\,\lambda_2\omega_0^1, \; \omega_1^2 = p\,\omega_0^1 + q\omega_0^2. \tag{19}$$

unde p şi q sînt doi multiplicatori. Prin diferenţierea exterioară a lui (19) şi cu ajutorul ecuaţiilor de structură

$$D\omega_k^i = [\omega_k^h\omega_h^i] \tag{20}$$

ale spaţiului Σ_3 (vezi şi [6]), obţinem ecuaţiile pătratice distincte

$$\begin{aligned} &[\mathrm{d}\lambda_1\omega_0^2] = (\lambda_1 - \lambda_2)q\,[\omega_0^2\omega_0^1] \\ &[\mathrm{d}\lambda_2\omega_0^1] = -\,(\lambda_1 - \lambda_2)p\,[\omega_0^2\omega_0^1] \\ &[\mathrm{d}p\;\omega_0^1] + [\mathrm{d}q\omega_0^2] = (1 + p^2 + q^2 + \lambda_1\lambda_2)\,[\omega_0^2\omega_0^1]. \end{aligned} \tag{21}$$

Numerele caracteristice ale sistemului (20), (21) fiind $r = 6$, $s_0 = 3$, $s_1 = 3$, acest sistem este, conform teoriei generale, în *involuţie* şi depinde de trei funcţii arbitrare de un argument. Putem deci enunţa următorul rezultat : *În spaţiul Σ_3 cele două suprafeţe* (**M**$_0$) *şi* (**C**) *ale cîmpului* (**M**$_0$, **C**) *determinat de o transformare infinitezimală normală, irotaţională şi de dilataţie superficială nulă, formează un cuplu Bonnet şi un asemenea cuplu depinde de 3 funcţii arbitrare de un argument.*

III. Observînd că

$$\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{4}\sin^2\delta = \cos^2\delta - \lambda_1\lambda_2\sin^2\delta$$

deducem imediat din (13) că condiţia

$$\lambda_1\lambda_2 = -\,1 \tag{22}$$

ce exprimă, cum se ştia, că (**M**$_0$) este o suprafaţă $\mathcal{B}$ [2]), face ca corespondenţa între (**M**$_0$) şi (**C**) să fie o *izometrie*.

---

[2]) Suprafeţele $\mathcal{B}$ au fost considerate prima dată de Bianchi [4] şi prin faptul că *curbura lor riemanniană* (sau *absolută*) este nulă, ele joacă un rol important în spaţiul Σ_3.

Să stabilim în primul rînd existenţa suprafeţelor $\mathcal{B}$ a căror curbură medie este constantă. Rezultă imediat din ipoteza

$$(23) \qquad \lambda_1 = \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}, \quad \lambda_2 = -\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\cdot$$

şi în acest caz ecuaţiile (21) dau

$$p = o = q$$

astfel încît suprafeţele de tipul considerat şi pe care le vom nota $\mathcal{B}_c$ sînt determinate de sistemul liniar (S) :

$$(24) \qquad \omega_2^3 = \lambda_1\omega_0^2, \quad \omega_3^1 = -\lambda_2\omega_0^1, \quad \omega_1^2 = 0.$$

Diferenţierea exterioară a ecuaţiilor (24) neantrenînd nici o ecuaţie nouă, sistemul (S) este complet integrabil şi prin urmare suprafeţele există şi depind de *trei constante arbitrare.*

Vom arăta acum că aceste suprafeţe constituie în spaţiu o generalizare a *ciclicilor lui Dupin* din spaţiul obişnuit. În primul rînd punctele centrale $\mathbf{F}_i$, $(i = 1, 2)$, pe normala $\mathbf{M}_0\mathbf{M}_3$ sînt de forma

$$\mathbf{F}_i = \cos\psi\,\mathbf{M}_0 + \sin\psi\,\mathbf{M}_3$$

iar funcţia ψ satisface, cum se ştie [4], ecuaţia

$$[\omega_0^1\omega_0^2]\cos^2\psi - \{[\omega_0^1\omega_2^3] + [\omega_0^2\omega_3^1]\}\cos\psi\sin\psi + [\omega_0^2\omega_3^1]\sin^2\psi = 0.$$

Ţinînd seama de (24) se găseşte

$$(25) \qquad F_1 = \cos\frac{\delta}{2}\,\mathbf{M}_0 + \sin\delta\,\mathbf{M}_3, \quad \mathbf{F}_2 = \sin\frac{\delta}{2}\,\mathbf{M}_0 - \cos\frac{\delta}{2}\,\mathbf{M}_3$$

şi relaţia

$$\langle\mathbf{F}_1\,\mathbf{F}_2\rangle = 0$$

verifică proprietatea caracteristică a suprafeţelor $\mathcal{B}$ (vezi şi [7]) de a avea punctele centrale rectangulare.

Cu ajutorul lui (3) deducem prin diferenţierea lui (25)

$$(26) \qquad \mathrm{d}\mathbf{F}_1 = \frac{\omega_0^1}{\cos\frac{\delta}{2}}\,\mathbf{M}_1, \quad \mathrm{d}\mathbf{F}_2 = \frac{\omega_0^2}{\sin\frac{\delta}{2}}\,\mathbf{M}_2$$

ceea ce arată imediat că evoluta suprafeţei $(\mathbf{M}_0)$ degenerează în *două curbe*.

Pe de altă parte, ecuaţia liniior de curbură

$$\omega_0^1\omega_2^3 + \omega_0^2\omega_3^1 = 0$$

ale lui $(\mathbf{M}_0)$ devine în cazul nostru

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\;\omega_0^1\omega_0^2 = 0$$

şi din ecuaţiile de structură şi (24) rezultă imediat că putem scrie

$$(27) \qquad \omega_0^1 = p_1\,\mathrm{d}u^1, \quad \omega_0^2 = p_2\,\mathrm{d}u^2,$$

unde

$$p_1 = p_1(u^1),\ p_2 = p_2(u^2). \tag{27'}$$

Avem deci

$$\langle \mathrm{d}\mathbf{M}_0 \mathrm{d}\mathbf{M}_0 \rangle = (\mathrm{d}u^1,\ \mathrm{d}u^2)\begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}u^1 \\ \mathrm{d}u^2 \end{pmatrix}$$

şi în virtutea unei teoreme bine cunoscute, liniile de curbură sînt geodezice şi *deci plane*. Accentul însemnînd o derivare în raport cu u^1, *curbura eliptică* [8], ρ_1 a curbelor $u^2 = 0$ este dată de

$$\operatorname{ctg}^2 \rho_1 = \frac{[\mathbf{M}_0\mathbf{M}_0'\mathbf{M}_0'']^2}{\langle \mathbf{M}_0'\mathbf{M}_0' \rangle^2} = \lambda_2^2$$

şi prin urmare aceste curbe sînt *cercuri eliptice*. Un calcul analog arată că şi curbele u^1 sînt cercuri şi prin urmare toate liniile de curbură ale suprafeţei $(\mathbf{M}_0)$ fiind *circulare*, această proprietate şi cea precedentă confirmă aserţiunea făcută mai sus.

În plus suprafaţa $(\mathbf{M}_3)$ fiind duală lui $(\mathbf{M}_0)$, curbura sa relativă este cum se ştie inversa celei lui $(\mathbf{M}_0)$, iar curbura sa mijlocie are în cazul general ca expresie

$$H_3 = \frac{[\omega_0^1\omega_2^3] + [\omega_0^2\omega_3^1]}{[\omega_2^3\omega_3^1]}.$$

Făcînd calculele în cazul de care ne ocupăm se găseşte

$$H_3 = -H$$

şi prin urmare $(\mathbf{M}_3)$ fiind o suprafaţă $\mathcal{B}$ de curbură medie constantă, *este şi ea o suprafaţă* $\mathcal{B}_c$.

Printr-un calcul care nu prezintă nici o dificultate se constată de altfel că suprafaţa $(\mathbf{M}_3)$ este congruentă lui $(\mathbf{C}^*)$ (duala lui $(\mathbf{C})$). Putem deci spune că prin dualitate faţă de cuadrica absolut

$$\mathcal{D} : \mathbf{M}_0 \to \mathbf{M}_3,\ \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$$

cîmpul $(\mathbf{M}_0, \mathbf{C})$ se transformă în cîmpul $(\mathbf{M}_0, \mathbf{C}^*)$, cele două cîmpuri avînd în punctele omoloage aceeaşi directoare şi anume normala comună celor 4 suprafeţe în joc. Această proprietate permite să se vadă că orice *suprafaţă ortogonală congruenţei normale* $[\mathbf{M}_0\ \mathbf{M}_3]$ *este o suprafaţă* $\mathcal{B}_c$. Pe de altă parte, matricea deplasării tetraedrului $\{\mathbf{M}_k\}$ în cazul care ne interesează fiind

$$\Omega_c = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0^1 & \omega_0^2 & 0 \\ -\omega_0^1 & 0 & 0 & -\omega_3^1 \\ -\omega_0^2 & 0 & 0 & \omega_2^3 \\ 0 & \omega_3^1 & -\omega_2^3 & 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

ecuaţiile (24), (27) şi (27′) arată imediat că $\mathbf{M}_1$ şi $\mathbf{M}_2$ descriu fiecare cîte o curbă, iar ecuaţiile (26) exprimă că aceste puncte sînt punctele centrale ale congruenţei $[\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2]$.

Din toate aceste considerații și din faptul cunoscut că prin dualitatea

$$\mathcal{D}:\ [\mathbf{M}_0\mathbf{M}_3] \rightarrow [\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2]$$

caracterul normal al congruenței $[\mathbf{M}_0\ \mathbf{M}_3]$ se conservă, concludem că suprafețele ortogonale congruenței $[\mathbf{M}_1\ \mathbf{M}_2]$ sînt și ele suprafețe $\mathcal{B}_c$.

Aceasta fiind, să considerăm cele două suprafețe $\mathcal{B}_c$ duale :

$$\begin{aligned} \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_0 &= \cos\frac{\delta}{2}\mathbf{M}_1 + \sin\frac{\delta}{2}\mathbf{M}_2 \\ \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_3 &= \sin\frac{\delta}{2}\mathbf{M}_1 - \cos\frac{\delta}{2}\mathbf{M}_2 \end{aligned} \tag{29}$$

și punînd

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_1 = \mathbf{M}_0, \quad \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_2 = \mathbf{M}_3 \tag{29'}$$

obținem un tetraedru autodual $\{\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_k\}$ care se deduce din $\{\mathbf{M}_k\}$ prin rotația eliptică de amplitudine $\frac{\delta}{2}$ și ale cărui vîrfuri descriu toate suprafețe $\mathcal{B}_c$.

Prin diferențierea lui (29) cu ajutorul lui (28), obținem, pentru pfaffienii matricei Ω_c corespunzătoare deplasării infinitezimale ale lui $\{\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_k\}$ următoarele expresii :

$$\begin{aligned} \overset{\mathrm{I}}{\omega}{}_0^1 &= -\ \omega_0^1\cos\frac{\delta}{2} + \omega_0^2\sin\frac{\delta}{2} \\ \overset{\mathrm{I}}{\omega}{}_0^2 &= -\ \omega_3^1\cos\frac{\delta}{2} + \omega_2^3\sin\frac{\delta}{2} \\ \overset{\mathrm{I}}{\omega}{}_2^3 &= \quad\ \omega_2^3\cos\frac{\delta}{2} + \omega_3^1\sin\frac{\delta}{2} \\ \overset{\mathrm{I}}{\omega}{}_3^1 &= \quad\ \omega_0^2\cos\frac{\delta}{2} - \omega_0^1\sin\frac{\delta}{2}\,. \end{aligned} \tag{30}$$

Pentru considerațiile care vor urma, convine să reamintim următoarele : Un punct din spațiul Σ_3 (a cărui curbură a fost prealabil redusă la unitate) poate fi asimilat unui *cuaternion* $\mathbf{Q}$ *de normă* unitate și notînd cu $\widetilde{\mathbf{Q}}$ cuaternionul conjugat, vectori-unitari *dextrorsum* $\mathbf{r}'_i$ corespunzători muchiilor lui $\{\mathbf{M}_k\}$ sînt determinați de produsele cuaternionice [4] date de tabloul :

(31)

	$\widetilde{\mathbf{M}}_0$	$\widetilde{\mathbf{M}}_1$	$\widetilde{\mathbf{M}}_2$	$\widetilde{\mathbf{M}}_3$
$\mathbf{M}_0$	1	$-\mathbf{r}'_1$	$-\mathbf{r}'_2$	$-\mathbf{r}'_3$
$\mathbf{M}_1$	$\mathbf{r}'_1$	1	$-\mathbf{r}'_3$	$\mathbf{r}'_2$
$\mathbf{M}_2$	$\mathbf{r}'_2$	$\mathbf{r}'_3$	1	$-\mathbf{r}'_1$
$\mathbf{M}_3$	$\mathbf{r}'_3$	$-\mathbf{r}'_2$	$\mathbf{r}'_1$	1

În aceste condiţii, notînd cu $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{r}}{}'_k$, $(k = 1, 2, 3)$ vectorii unitari dextrorsum ai muchiilor tetraedrului $\{\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_k\}$, putem scrie, conform teoriei generale,

$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{r}}{}'_1 = \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_1 \diamond \overset{\mathrm{I}}{\widetilde{\mathbf{M}}}_0 = \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_3 \diamond \overset{\mathrm{I}}{\widetilde{\mathbf{M}}}_2$ ($\diamond$ = simbolul produsului cuaternionic).

Dar, în virtutea lui (29) şi (29′) avem

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{r}}{}'_1 = \mathbf{M}_0 \diamond \left(\widetilde{\mathbf{M}}_1 \cos\frac{\delta}{2} + \widetilde{\mathbf{M}}_2 \sin\frac{\delta}{2} \right)$$

şi cu ajutorul tabloului (31) obţinem

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{r}}{}'_1 = -\cos\frac{\delta}{2}\,\mathbf{r}'_1 - \sin\frac{\delta}{2}\,\mathbf{r}'_2. \tag{32}$$

Pe de altă parte, dacă introducem pfaffienii

$$\varpi'_1 = \omega_2^3 + \omega_0^1, \quad \varpi'_2 = \omega_3^1 + \omega_0^2$$

se deduce prin diferenţierea lui $\mathbf{r}'_1$ şi $\mathbf{r}'_2$ daţi de tabloul (31)

$$d\mathbf{r}'_1 = -\varpi'_2\mathbf{r}'_3, \; d\mathbf{r}'_2 = \varpi'_1\mathbf{r}'_3.$$

Diferenţiind pe (32) şi ţinînd seama de (23) şi (24) găsim

$$d\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{r}}{}'_1 = \left(\lambda_1 \sin\frac{\delta}{2} - \cos\frac{\delta}{2}\right)\omega_0^2 + \left(\lambda_2 \cos\frac{\delta}{2} + \sin\frac{\delta}{2}\right)\omega_0^1 \equiv 0.$$

Aşadar, tetraedrul $\{\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_k\}$ se bucură de proprietatea remarcabilă ca două din muchiile sale (duale una faţă de alta) să descrie congruenţe *paratactice dextrorsum.*

Această proprietate adăugată la faptul că punctele $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_1$ şi $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_2$ sînt distante de un cadran ne permite să deducem, în virtutea unei propoziţii cunoscute a lui Bianchi, că suprafeţele $(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_0)$ şi $(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_1)$ sînt *congruente* şi se obţin una din alta printr-o alunecare eliptică $\left(\text{de amplitudine } \frac{\pi}{2}\right)$ dextrorsum. Aceleaşi consideraţii arată că şi suprafeţele $(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_2)$ şi $(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_3)$ sînt congruente tot printr-o alunecare eliptică dextrorsum. Făcînd calculele şi pentru ceilalţi doi vectori dextrorsum $\mathbf{r}'_2$, $\mathbf{r}'_3$ ai tetraedrului $\{\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_k\}$ găsim că matricea R' a transformării

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{r}}{}'_k = R'\mathbf{r}'_k$$

are ca expresie

$$R' = \begin{pmatrix} -\cos\frac{\delta}{2} & -\sin\frac{\delta}{2} & 0 \\ -\sin\frac{\delta}{2} & \cos\frac{\delta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{33}$$

şi cu ajutorul tabloului corespunzător vectorilor *sinistrorsum* ai lui $\{\mathbf{M}_k\}$

	$\mathbf{M}_0$	$\mathbf{M}_1$	$\mathbf{M}_2$	$\mathbf{M}_3$
$\widetilde{\mathbf{M}}_0$	1	$\mathbf{r}_1$	$\mathbf{r}_2$	$\mathbf{r}_3$
$\widetilde{\mathbf{M}}_1$	$-\mathbf{r}_1$	1	$-\mathbf{r}_3$	$\mathbf{r}_2$
$\widetilde{\mathbf{M}}_2$	$-\mathbf{r}_2$	$\mathbf{r}_3$	1	$-\mathbf{r}_1$
$\widetilde{\mathbf{M}}_3$	$-\mathbf{r}_3$	$-\mathbf{r}_2$	$\mathbf{r}_1$	1

găsim pentru matricea R a transformării

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{r}}_k = R\,\mathbf{r}_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

expresia

$$R = \begin{pmatrix} -\cos\frac{\delta}{2} & -\sin\frac{\delta}{2} & 0 \\ -\sin\frac{\delta}{2} & \cos\frac{\delta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

În virtutea unei proprietăţi bine cunoscute a matricilor ortogonale de determinant-1 (vezi şi [9]) putem deci spune că rotaţiei eliptice considerate

$$\mathcal{R} : \{\mathbf{M}_k\} \to \{\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_k\}$$

îi corespunde în spaţiul euclidian F_3 două *reîntoarceri*.

Dar ceea ce este mai important, este faptul că congruenţa $[\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2] \equiv \equiv [\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_0\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_3]$ fiind de acelaşi tip ca şi $[\mathbf{M}_0\mathbf{M}_3]$ (normala la două suprafeţe $\mathcal{B}_c$), există două cîmpuri $(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_0, \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{C}})$ şi $(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_3, \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{C}}{}^*)$ care sînt în aceeaşi poziţie reciprocă ca şi $(\mathbf{M}_0, \mathbf{C})$ şi $(\mathbf{M}_3, \mathbf{C}^*)$ şi posedă aceleaşi proprietăţi. Cu alte cuvinte, directoarea comună a cîmpurilor $(\mathbf{M}_0, \mathbf{C})$, $(\mathbf{M}_3, \mathbf{C}^*)$ se transformă prin dualitatea

$$\mathcal{D} : \mathbf{M}_0\mathbf{M}_3 \to \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_0\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_3$$

în directoarea comună a cîmpurilor $(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_0, \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{C}})$, $(\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_3, \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{C}}{}^*)$ de acelaşi tip cu cele precedente. Observăm de altfel că datorită izometriei dintre suprafeţele $(\mathbf{M})$ şi suprafeţele transformatoare corespunzătoare $(\mathbf{C})$, tetraedrul $\{\mathbf{C}\,\mathbf{C}^*\,\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{C}}\,\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{C}}{}^*\}$ (care se deduce din $\{\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_k\}$ printr-o mişcare în *şurub eliptică* de amplitudine δ) posedă toate calităţile tetraedrului $\{\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{M}}_k\}$.

În final putem deci enunţa următorul rezultat general. *Transformările* $T_n^0(\mathbf{M}_0, \mathbf{C})$ (*transformări infinitezimate normale, de dilataţie superficială nulă şi irotaţionale*) *astfel ca cele două suprafeţe* $(\mathbf{M}_0)$, $(\mathbf{C})$ *ale cîmpului* $(\mathbf{M}, \mathbf{C})$ *să fie izometrice, există şi depind de 3 constante arbitrare, ele fiind* *determinate de un sistem liniar al lui Pfaff complet integrabil. În acest caz, suprafeţele în joc sînt suprafeţe* $\mathcal{B}$ *de curbură medie constante (suprafeţe* $\mathcal{B}_c$*) şi constituie în spaţiul* Σ_3 *o generalizare a ciclidelor lui Dupin. Fiecărei suprafeţe* $\mathcal{B}_c$ *i se poate ataşa un tetraedru autodual* τ_c*, astfel ca toate vîrfurile lui* τ_c *să descrie suprafeţe* B_c*, iar două muchii duale ale lui* τ_c *să descrie congruenţe paratactice (de acelaşi sens) şi alte două muchii duale congruenţe normale. Aceste ultime două congruenţe sînt descrise de directoarele a patru cîmpuri corespunzătoare unor transformări* T_n^0 *de tipul considerat.*

Primită la redacţie la 3 iulie 1967

Institutul de matematică al Academiei Republicii
Socialiste România, str. M. Eminescu nr. 47,
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. R. R. Roşca, *Asupra transformărilor infinitezimale de dilataţie superficială nulă din spaţiu eliptic.* St. cerc. mat., **19**, *2* (1967).
2. P. Vincensini, *Sur le problème des transformations équivalentes infinitésimales d'une surface et ses relations avec la théorie des congruences de sphères.* Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 2ème série, **79** (1962).
3. — *Sur la déformation des réseaux cinématiquement conjugués.* Journal de Math., **XLII** (1963).
4. W. Blaschke, *Sulle congruenze rettilinee nello spazio ellittico.* Ann. Mat. pura appl., **IV**, ser. 48 (1959).
5. — *Nicht-euklidische Geometrie und Mechanik, I, II, III.* Hamburger mathematische Einzelschriften, *34* (1942).
6. E. Cartan, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques.* Herman, Paris, 1945, p. 185.
7. W. Blaschke, *Kinematik und Quaternionen.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960.
8. R. Garnier, *Géométrie et cinématique Cayleyennes.* Gauthier-Villars, Paris, 1951.
9. F. Cartan, *Theory of Spinors.* Herman, Paris, 1967.
10. L. Bianchi, *Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica.* Ann. di Matem., **(2)** (1896).

FUNCȚII RELATIV CONVEXE

DE

MARCEL N. ROȘCULEȚ

Se studiază proprietăți ale funcțiilor $\varphi(x;\alpha,\beta)$ definite pe R^3 care îndeplinesc condițiile 1.1, 1.2 și 1.3. Se definește φ — convexitatea pe un interval I, a unei funcții f și se prezintă o seamă de proprietăți care se pot pune în paralel cu ale funcțiilor convexe. În ultima parte a lucrării se cere ca $\varphi(x;\alpha,\beta)\in C^{(2)}$.

I. FUNCȚII φ-CONVEXE

1.1. Fie $\varphi(x;\alpha,\beta)$ o funcție reală definită pe R^3 cu următoarele proprietăți :

(1.1) Există o singură soluție $(\alpha,\beta)\subset R^2$ astfel încît

$$\varphi(x_1;\alpha,\beta)=a_1,\ \varphi(x_2;\alpha,\beta)=a_2$$

pentru orice $x_1\neq x_2$, și $a_1\neq a_2$.

(1.2) Dacă

$$\varphi(x_1;\alpha,\beta)=\varphi(x_2;\alpha,\beta)$$

pentru $x_1\neq x_2$, atunci

$$\varphi(x;\alpha,\beta)=\text{const.},\ x\in R.$$

(1.3) Pentru (α,β) determinați de condiția (1.1), funcția φ este strict monotonă pe R.

Fie $M_1(x_1,a_1)$, $M_2(x_2,a_2)$ două puncte din R^2; funcția φ care trece prin aceste puncte $(x_1\neq x_2)$ este complet determinată. Arcul M_1M_2 îl vom nota $G_\varphi(x_1,x_2)$ iar cu

$$y=\varphi(x;x_1,x_2),\qquad x\in[x_1,x_2]$$

vom nota ecuația grafului $G_\varphi(x_1,x_2)$.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, Nr. 1, P. 55–66, BUCUREȘTI, 1968

LEMA 1.1.1. *Fie $G_\varphi(x_1, x_2)$ şi (x_3, a_3) un punct $M_3 \notin G_\varphi(x_1, x_2)$ cu $x_1 < x_3 < x_2$. Graficele*

$$G_\varphi(x_1, x_3), \quad G_\varphi(x_3, x_2)$$

nu au comun cu graficul $G_\varphi(x_1, x_2)$ decît punctele M_1, M_2 respectiv.

Demonstraţie. Dacă graficele $G_\varphi(x_1, x_2)$, $G_\varphi(x_1, x_3)$ ar avea încă un punct comun pe $[x_1, x_3]$, conform proprietăţii (11) ar coincide ceea ce nu se poate deoarece $M_3 \notin G_\varphi(x_1, x_2)$.

Dacă $\Gamma_\varphi(x_1, x_2)$, $\Gamma_\varphi(x_1, x_3)$ sînt graficele funcţiilor :

$$y = \varphi(x; x_1, x_2), \qquad x \in R$$

$$y = \varphi(x; x_1, x_3), \qquad x \in R$$

din lema 1.1.1 şi proprietatea (1.2) rezultă că ele sau coincid sau au comun numai punctul $(x_1, \varphi(x_1; x_1, x_2))$

DEFINIŢIA 1.1.1. Fie $f(x)$ o funcţie reală definită pe un interval compact $I \subset R$. Spunem că f este φ-convexă (φ-concavă) pe I dacă oricare ar fi $x_1 < x < x_2$ din I avem

$$f(x) \leqslant \varphi(x; x_1, x_2), \quad (\geqslant \varphi(x; x_1, x_2)) \tag{1.4}$$

cu

$$f(x_1) = \varphi(x_1; x_1, x_2), \quad f(x_2) = \varphi(x_2; x_1, x_2). \tag{1.5}$$

Deoarece $x = tx_1 + (1 - t) x_2 \in [x_1, x_2]$ dacă $t \in [0,1]$, condiţia (1.4) din definiţie este echivalentă cu

$$f(tx_1 + (1 - t)x_2) \leqslant \varphi(tx_1 + (1 - t) x_2), \quad (\geqslant \varphi(tx_1 + (1 - t) x_2) \tag{1.6}$$

pentru orice $x_1 < x_2 \in I$ şi orice $t \in [0, 1]$.

1.2. Dacă $\varphi(x; \alpha, \beta) = \varphi(\alpha x + \beta)$, ţinînd seamă că φ este strict monotonă pe R (dacă nu se reduce la o constantă), urmează că este inversabilă. Dacă punem, pentru $x_1 < x < x_2$,

$$x = tx_1 + (1 - t) x_2, \ t \in [0, 1], \tag{1.7}$$

deci relaţia (1.6) se scrie

$$f(tx_1 + (1 - t) x_2) \leqslant \varphi[t\varphi^{-1}(f(x_1)) + (1 - t) \varphi^{-1}(f(x_2))], \ t \in [0,1]. \tag{1.8}$$

Pentru $\varphi(ax + b) = ax + b$, (1.8) devine relaţia cunoscută

$$f(tx_1 + (1 - t) x_2) \leqslant tf(x_1) + (1 - t)f(x_2), \ t \in [0,1]. \tag{1.9}$$

Pentru $\varphi(ax + b) = e^{ax+b}$, (1.8) devine

$$f(tx_1 + (1 - t) x_2) \leqslant [f(x_1)]^t [f(x_2)]^{1-t}, \ t \in [0,1], \tag{1.10}$$

iar $f(t)$ trebuie definit pe R_+.

Pentru $\varphi(ax + b) = [ax + b)^{2n+1}$, n întreg $\geqslant 0$, (1.8) devine

$$f(tx_1 + (1 - t) x_2) \leqslant [t(f(x_1))^{\frac{1}{2n+1}} + (1 - t)(f(x_2))^{\frac{1}{2n+1}}]^{2n+1}, \ t \in [0,1]. \tag{1.11}$$

1.3. TEOREMA 1.3.1. *Dacă f este φ-convexă pe $[x_1, x_2]$ și dacă în relația*

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant \varphi(tx_1 + (1-t)x_2; x_1, x_2)$$

egalitatea are loc pentru un singur $t \in (0,1)$, atunci are loc pentru orice $t \in (0, 1)$.

Demonstrație. Fie M_1, M_2 punctele de abscise x_1, x_2 de pe arcul $G_\varphi(x_1, x_2)$ și N un punct diferit de M_1, M_2, care de asemenea se află atît pe arcul $G_\varphi(x_1, x_2)$ cît și pe arcul $G_f(x_1, x_2)$. Să presupunem că un punct $S \neq N$, M_1, M_2 care se găsește pe arcul $G_f(x_1, x_2)$, s-ar afla strict sub arcul $G_\varphi(x_1, x_2)$. Dacă ξ este abscisa lui S avem $x_1 < \xi < x_2$. Arcele

$$G_\varphi(x_1, \xi), \quad G_\varphi(\xi, x_2)$$

conform lemei 1.1 au toate punctele (cu excepția lui M_1 sau M_2) strict sub arcul $G_\varphi(x_1, x_2)$. Funcția f fiind φ-convexă are toate punctele fie sub arcul $G_\varphi(x_1, \xi)$ fie sub arcul $G_\varphi(\xi, x_2)$, ceea ce este în contradicție cu faptul că N care se găsește pe arcul $G_f(x_1, x_2)$ se găsește și pe arcul $G_\varphi(x_1, x_2)$. Teorema este demonstrată. Din demonstrația teoremei de mai sus rezultă și

TEOREMA 3.2. *Dacă funcția f este φ-convexă pe un interval I, atunci este φ-convexă pe orice interval $J \subset I$.*

TEOREMA 3.3. *Dacă ψ este o funcție φ și dacă ψ este o funcție φ-concavă pe un interval I, atunci o funcție f, φ-convexă pe I este și ψ-convexă pe I.*

1.4. Avem

TEOREMA 1.4.1. *Dacă o funcție reală f definită pe un interval $I \subset R$ este φ-convexă pe I, atunci pentru orice $x_1 < x_3 < x_2$ din I avem relația*

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \varphi(x_1; x_1, x_2) \\ 1 & x_2 & \varphi(x_2; x_1, x_2) \\ 1 & x_3 & \varphi(x_3; x_1, x_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}} \geqslant 0 \tag{1.12}$$

Demonstrație. Pentru $x_1 < x_3 < x_2$ determinantul de la numitor este negativ. Avem de asemenea și

$$\varphi(x_1; x_1, x_2) = f(x_1), \quad \varphi(x_2; x_1, x_2) = f(x_2)$$

deci relația (1.12) este echivalentă cu

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 1 & x_2 & 0 \\ 1 & x_3 & f(x_3) - \varphi(x_3; x_1, x_2) \end{vmatrix} \leqslant 0$$

sau

$$(x_2 - x_1)(f(x_3) - \varphi(x_3; x_1, x_2)) \leqslant 0, \tag{1.13}$$

şi pentru că prin ipoteză $x_2 - x_1 > 0$, urmează imediat

$$f(x_3) \leqslant \varphi(x_3\,;\, x_1,\, x_2), \qquad x_3 \in (x_1,\, x_2) \tag{1.14}$$

Urmînd calea întoarsă, plecînd de la (1.13) se ajunge la (1.12). Teorema este demonstrată.

1.5. Fie $f(x)$ o funcţie definită pe intervalul $[x_1, x_2]$ şi $\varphi(x\,;\, x_1, x_2)$ o funcţie φ definită pe acelaşi interval. Fie N şi P două puncte de aceeaşi abscisă ξ situate pe $G_f(x_1, x_2)$, $G_\varphi(x_1, x_2)$ respectiv cu $x_1 < \xi < x_2$.

Dacă M_1 este punctul de coordonate $(x_1, f(x_1))$ şi M_2 este punctul de coordonate $(x_2, f(x_2))$ vom nota pantele dreptelor M_1N, M_1P, cu $\pi_f(x_1, \xi)$, $\pi_\varphi(x_1, \xi)$ iar pantele dreptelor NM_2, PM_2, cu $\pi_f(\xi, x_2)$, $\pi_\varphi(\xi, x_2)$.

TEOREMA 1.5.1. *O funcţie reală f definită pe un interval I este φ-convexă pe I dacă pentru orice* $x_1 < x < x_2$, $[x_1, x_2] \subset I$ *avem relaţia*

$$\pi_f(x_1, x) \leqslant \pi_\varphi(x_1, x). \tag{1.15}$$

Demonstraţie. Avem

$$\pi_f(x_1, x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

$$\pi_\varphi(x_1, x) = \frac{\varphi(x\,;\, x_1, x_2) - \varphi(x_1\,;\, x_1, x_2)}{x - x_1}$$

deci relaţia (1.15) se scrie

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} - \frac{\varphi(x\,;\, x_1, x_2) - \varphi(x_1\,;\, x_1, x_2)}{x - x_1} \leqslant 0$$

sau

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \tag{1.16}$$

$$- \left[\frac{\varphi(x\,;\, x_1, x_2) - \varphi(x_1\,;\, x_1, x_2)}{x - x_1} - \frac{\varphi(x_2\,;\, x_1, x_2) - \varphi(x_1\,;\, x_1, x_2)}{x_2 - x_1}\right] \leqslant 0$$

deoarece $\pi_f(x_1, x_2) = \pi_\varphi(x_1, x_2)$. Însă relaţia (1.16) este echivalentă cu relaţia (1.12). Reciproc, relaţia (1.12) conduce la (1.15). Teorema este demonstrată. În mod analog se demonstrează :

TEOREMA 1.5.2. *O funcţie reală f definită pe un interval I este φ-convexă pe I dacă pentru orice* $x_1 < x < x_2$, $[x_1, x_2] \subset I$ *avem relaţia*

$$\pi_f(x, x_2) \geqslant \pi_\varphi(x, x_2).$$

1.6. Să considerăm mulţimea Φ a tuturor funcţiilor f, definite pe un interval I, φ-convexe pe I. Deoarece $\varphi \leqslant \varphi$, rezultă că $\varphi \in \Phi$. Să presupunem că există o operaţie $*$ definită pe Φ cu următoarele proprietăţi :

a) $\varphi(x\,;\, \alpha', \beta') * \varphi(x\,;\, \alpha'', \beta'') = \varphi(x\,;\, \alpha, \beta)$
b) pentru $f \in \Phi$, $g \in \Phi$,

$$f(x) \leqslant \varphi(x\,;\, \alpha, \beta) \Rightarrow \begin{cases} g(x) * f(x) \leqslant g(x) * \varphi(x\,;\, \alpha, \beta) \\ f(x) * g(x) \leqslant \varphi(x\,;\, \alpha, \beta) * g(x). \end{cases}$$

Pentru $\varphi(x;\ \alpha, \beta) = \alpha x + \beta$, operaţia $*$ este operaţia de adunare; pentru $\varphi(x;\ \alpha, \beta) = \exp(\alpha x + \beta)$, operaţia $*$ este operaţia de înmulţire.

TEOREMA 1.6.1. *Dacă f şi g sînt două funcţii φ-convexe pe un interval I, atunci funcţia $f * g$ este φ-convexă pe I.*

Demonstraţie. Avem

$$g(x) \leqslant \varphi(x;\ \alpha', \beta'),$$
$$f(x) \leqslant \varphi(x;\ \alpha'', \beta'');$$

conform proprietăţii b) urmează că

$$f(x) * g(x) \leqslant f(x) * \varphi(x;\ \alpha', \beta')$$

cît şi

$$f(x) * \varphi(x;\ \alpha', \beta') \leqslant \varphi(x;\ \alpha'', \beta'') * \varphi(x;\ \alpha', \beta')$$

de unde obţinem

$$f(x) * g(x) \leqslant \varphi(x;\ \alpha'', \beta'') * \varphi(x;\ \alpha', \beta');$$

proprietatea a) conduce imediat la

$$f(x) * g(x) \leqslant \varphi(x;\ \alpha, \beta),\ x \in I.$$

Teorema este demonstrată. În particular avem

TEOREMA 1.6.2. *Dacă f este o funcţie φ-convexă pe I, atunci şi funcţia $f * \varphi$ este o funcţie φ-convexă pe I.*

1.7. Fie f o funcţie φ-convexă pe $I = [a, b]$. Dacă notăm

$$g(x) = f(x) - \varphi(x;\ a, b),\ x \in [a, b],$$

atunci relaţia (1.12) se scrie

$$\text{(1.17)} \qquad \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & g(a) \\ 1 & x & g(x) \\ 1 & b & g(b) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix}} \geqslant 0$$

prin urmare g este convexă pe $[a, b]$. Conform unui rezultat cunoscut [1]1), g este continuă pe $[a, b]$, prin urmare în orice punct $x_0 \in [a, b]$ avem relaţia

$$\text{(1.18)} \quad f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) = \varphi(x_0 + 0;\ a, b) - \varphi(x_0 - 0;\ a, b).$$

Deoarece $\varphi(x;\ a, b)$ este în raport cu x monotonă pe R pentru orice $(a, b) \in R^2$, urmează că φ nu are în raport cu x decît discontinuităţi de prima speţă. Am demonstrat:

TEOREMA 1.7.1. *O funcţie f definită pe un interval I, φ-convexă pe I nu are decît discontinuităţi de prima speţă pe I. Dacă φ este continuă, atunci f este continuă.*

---

1) Pag. 254.

TEOREMA 1.7.2. *O funcție f, definită pe un interval I, φ-convexă pe I, într-un punct* $x_0 \in \text{int } I$, *de discontinuitate al funcției φ, este discontinuă iar saltul funcției f în acest punct este egal cu saltul funcției φ.*

Să observăm că relația (1.18) este adevărată dacă înlocuim pe $a < b$ cu $x_1 < x_2$, $[x_1, x_2] \subset [a, b]$, deci (1.18) rămîne adevărată pentru $\varphi(x; x_1, x_2)$, $x \in [x_1, x_2]$ oricare ar fi $[x_1, x_2] \subset [a, b]$.

TEOREMA 1.7.3. *Dacă funcția* $\varphi(x; a, b)$ *are în punctul* $x_0 \in (a, b)$ *o discontinuitate, atunci funcțiile* $\varphi(x; \alpha, b)$, $x \in [\alpha, \beta] \subset [a, b]$, $x_0 \in (\alpha, \beta)$, *sînt de asemenea discontinue în punctul* x_0; *saltul funcțiilor φ în punctul* x_0 *este independent de α și β și este același pentru toate funcțiile* $\varphi(x; \alpha, \beta)$.

Dacă $\varphi(x; a, b)$ este continuă în punctul x_0, toate funcțiile $\varphi(x; \alpha, \beta)$ sînt continue în punctul $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset [a, b]$.

II. $\varphi \in C^2$

2.1. O funcție $\varphi(x; \alpha, \beta)$, $x \in R$, depinde de doi parametri, prin urmare, dacă are derivate de ordinul întîi și doi, continue în raport cu x, atunci φ este soluția unei ecuații diferențiale de ordinul doi

$$F(x, y, y', y'') = 0. \tag{2.1}$$

Vom presupune că într-un interval $I \subset R$, φ este soluție a problemei lui Cauchy, prin urmare, φ depinde de parametrii y, y' și este unic determinată pentru orice $x \in I$, deci, punînd în evidență punctul x_0 și panta $\varphi'(x_0)$, vom scrie

$$\varphi(x; \alpha, \beta) = \varphi(x; x_0, \varphi'(x_0)), \quad x_0 \in \text{int } I. \tag{2.2}$$

În acest capitol vom considera funcții φ care îndeplinesc și condițiile (2.1) + (2.2) în afară de cele enunțate la capitolul precedent. Mai exact, restricția lui φ la intervalul I îndeplinește aceste condiții, deoarece conform lui (1.1)φ este definită pe R.

LEMA 2.1.1. *Fie* φ_1, φ_2 *două funcții φ definite pe același interval* $I = [a, b)$. *Dacă*

$$\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$$

și

$$\varphi_1'(a) \leqslant \varphi_2'(a)$$

atunci arcul $y = \varphi_1(x)$, $x \in I$, *este sub arcul* $y = \varphi_2(x)$, $x \in I$.

LEMA 2.1.2. *Fie* φ_1, φ_2 *două funcții φ definite pe același interval* $I = (a, b]$. *Dacă*

$$\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$$

și

$$\varphi_1'(b) \leqslant \varphi_2'(b)$$

atunci arcul $y = \varphi_1(x)$, $x \in I$ *este deasupra arcului* $y = \varphi_2(x)$, $x \in I$.

Demonstrație. Vom da demonstrația lemei 2.1.1, deoarece pentru lema 2.1.2 este analogă. Dacă $\varphi_1'(a) = \varphi_2'(a)$, atunci $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, $x \in I$ și lema este demonstrată. Dacă $\varphi_1'(a) < \varphi_2'(a)$, să presupunem că ar exista un punct $(x^*, \varphi_1(x^*))$, $x^* > a$, situat deasupra arcului $y = \varphi_2(x)$. Deoarece în punctul $(a, \varphi_1(a))$, $\varphi_1'(a) < \varphi_2'(a)$, urmează că în intervalul (a, x^*) există un punct ξ astfel încît $\varphi_1(\xi) = \varphi_2(\xi)$, deoarece cele două arce $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ se intersectează în (a, x^*). Avînd două puncte comune conform condiției (1.1), funcțiile φ_1 și φ_2 sînt identice pe I, ceea ce este în contrazicere cu ipoteza $\varphi_1'(a) < \varphi_2'(a)$. Lema este demonstrată.

LEMA 2.1.3. *Fie $f(x)$ o funcție φ-convexă pe un interval I și $x_0 < x_1 < x_2$ trei puncte din I. Avem*

$$\varphi'(x_0; x_0, x_1) \leqslant \varphi'(x_0; x_0, x_2). \tag{2.3}$$

Demonstrație. Să presupunem că $\varphi'(x_0; x_0, x_1) > \varphi'(x_0; x_0, x_2)$; în această situație, conform lemei 2.1.1, arcul $G_\varphi(x_0, x_2)$ ar fi sub arcul $G_\varphi(x_0, x_1)$ și fiind continuu, nu ar putea să treacă prin punctul de abscisă x_2 de pe arcul $G_f(x_0, x_2)$ decît traversînd arcul $G_\varphi(x_0, x_1)$, ceea ce nu se poate, deoarece cele două arce, avînd două puncte comune, ar coincide. Lema este demonstrată.

Folosind lema 2.1.2 se poate arăta și:

LEMA 2.1.4. *Fie $f(x)$ o funcție φ-convexă pe un interval I și $x_1 < x_2 < x_0$ trei puncte din I. Avem*

$$\varphi'(x_0; x_0, x_1) \leqslant \varphi'(x_0; x_0, x_2)$$

2.2. Avem

TEOREMA 2.2.1. *Fie f o funcție φ-convexă pe $I = [a, b]$. Dacă există două puncte, $\xi_1 < \xi_2$, $[\xi_1, \xi_2] \subset (a, b)$ astfel încît să avem relația*

$$f(x) \leqslant \varphi(x; \xi_1, \xi_2), \; x \in I,$$

atunci

$$f(x) = \varphi(x; a, b), \; x \in I.$$

Demonstrație. Să considerăm arcele $G_\varphi(x_1, x_2)$ și $G_\varphi(\xi_1, \xi_2)$ cu $[\xi_1, \xi_2] \subset \subset (a, b)$, definite pe I. Deoarece

$$f(\xi_1) \leqslant \varphi(\xi_1; a, b), \; f(\xi_2) \leqslant \varphi(\xi_2; a, b)$$

rezultă că arcul $G_\varphi(\xi_1, \xi_2)$ este sub arcul $G_\varphi(a, b)$ însă trebuie să traverseze arcul $G_\varphi(a, b)$ în două puncte deoarece

$$f(a) = \varphi(a; a, b), \qquad f(b) = \varphi(b; a, b)$$

iar φ este o funcție continuă, deci arcele $G_\varphi(a, b)$, $G_\varphi(\xi_1, \xi_2)$ coincid; prin urmare, funcția $\varphi(x; a, b)$ are cu $f(x)$ comun și punctele de abscise ξ_1, ξ_2. Conform teoremei 1.3.1 rezultă $f(x) = \varphi(x; a, b)$, $x \in I$, și teorema este demonstrată.

TEOREMA 2.2.2. *Pentru o funcție f, φ-convexă pe $I = [a, b]$ nu există două puncte ξ_1, ξ_2, $[\xi_1, \xi_2] \subset (a, b)$ astfel încît să existe relația*

$$f(x) < \varphi(x; \xi_1, \xi_2), \; x \in I - \{\xi_1, \xi_2\}.$$

Demonstrație. Pentru orice $x \in (a, b)$ avem

$$f(x) \leqslant \varphi(x; a, b)$$

deci

$$f(\xi_1) \leqslant \varphi(\xi_1; a, b), \qquad f(\xi_2) \leqslant \varphi(\xi_2; a, b)$$

prin urmare

$$\varphi(\xi_1;\ \xi_1,\ \xi_2) \leqslant \varphi(\xi_1;\ a,\ b),\quad \varphi(\xi_2;\ \xi_1,\ \xi_2) \leqslant \varphi(\xi_2;\ a,\ b)$$

însă $G_f(a, b)$, $G_\varphi(a, b)$ au comune capetele intervalului (a, b) prin urmare arcul $G_\varphi(\xi_1, \xi_2)$ în virtutea relației din enunț trebuie să traverseze arcul $G_\varphi(a,b)$ în două puncte de abscise $\eta_1 < \eta_2$ cu $[\eta_1, \eta_2] \subset [a, b]$. Arcele $G_\varphi(a, b)$ și $G_\varphi(\xi_1, \xi_2)$ avînd două puncte comune coincid; funcția f fiind φ-convexă pe $[a, b]$ și pentru că $f(\xi_i) = \varphi(\xi_i;\ \xi_1, \xi_2) = \varphi(\xi_i, a, b)$, $i = 1,2$ conform lemei 1.3.1, $f(x) = \varphi(x;\ a,\ b) = \varphi(x;\ \xi_1, \xi_2)$ și teorema este demonstrată.

În mod asemănător, se poate demonstra și

TEOREMA 2.2.3. *Pentru o funcție f, φ-convexă pe $[a, b]$, nu există un punct $\xi \in (a, b)$ astfel încît*

$$f(x) < \varphi(x;\ \xi,\ b), \qquad x \in (a,\ \xi)$$

sau

$$f(x) < \varphi(x;\ a,\ \xi), \quad x \in (\xi,\ b).$$

Aceste rezultate arată că pentru o funcție f, φ-convexă pe $[a, b]$ în punctele x_1, x_2, $[x_1, x_2] \subset (a, b)$, graficul $G_\varphi(x_1, x_2)$ traversează graficul $G_f(x_1, x_2)$ sau cele două grafice coincid.

2.3. Putem acum să demonstrăm

TEOREMA 2.3.1. *Fie f o funcție φ-convexă pe un interval I. Pentru orice $x_0 \in I$ și orice $x_1 < x_2$ din I avem relația*

$$\varphi'(x_0;\ x_0, x_1) \leqslant \varphi'(x_0;\ x_0, x_2). \tag{2.4}$$

Demonstrație. Dacă $x_0 \in I - [x_1,\ x_2]$, rezultă din teorema 2.2.3. Rămîne să ne mai ocupăm de cazul cînd $x_0 \in [x_1, x_2]$. Să presupunem că $\varphi'(x_0;\ x_0, x_1) > \varphi'(x_0;\ x_0, x_2)$; asta înseamnă că pe intervalul (x_0, x_2), $\varphi(x;\ x_0, x_1) > \varphi(x;\ x_0, x_2)$ deci

$$f(x) < \varphi(x;\ x_0, x_1), \quad x \in (x_0, x_2)$$

însă f este φ-convexă pe I deci

$$f(x) \leqslant \varphi(x;\ x_0, x_1), \quad x \in (x_0, x_1);$$

aceste două inegalități sînt în contradicție cu lema 2.2.3. Teorema este demonstrată. Această teoremă poate fi enunțată și astfel:

TEOREMA 2.3.2. *Fie f o funcție φ-convexă pe un interval I. Funcția*

$$\varphi'(x_0;\ x_0, x), \quad x \in I,$$

este crescătoare pe I pentru orice x_0 din I.

2.4. Fie f o funcție definită pe un interval I. Vom spune că funcția f are în punctul $x_0 \in \operatorname{int} I$ un arc φ de sprijin dacă exista o funcție φ care trece prin punctul $(x_0, f(x_0))$ definită pe I, astfel încît graficul funcției φ, G_φ, să fie situat sub graficul funcției f, G_f, pe I.

TEOREMA 2.4.1. *O functie f, φ-convexă pe un interval $I = [a, b]$ are în fiecare punct $x_0 \in \operatorname{int} I$ un arc φ de sprijin.*

Demonstrație. Fie γ un număr care îndeplinește condiția

$$\gamma(x_0, x_0 - 0) \leqslant \gamma \leqslant \gamma(x_0, x_0 + 0),$$

unde

$$\gamma(x_0, x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\gamma(x_0, x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

graficul funcției $\varphi(x\,;\, x_0, \gamma)$, $x \in I$, este un arc φ de sprijin pentru graficul G_f. Conform lemei 2.2.1 este suficient să arătăm că graficul G_φ^* al funcției φ definită pe $[x_0, b]$ de $(x_0, \gamma(x_0, x_0 + 0))$ este un grafic de sprijin pe $[x_0, b]$ pentru f. Să presupunem că G_φ^* nu ar fi un grafic de sprijin, atunci ar exista cel puțin un punct $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ cu $0 < h < b - x_0$, care să fie strict sub G_φ^*. Fie $\varphi(x\,;\, x_0, x_0 + h)$ funcția φ definită de aceste două puncte. Avem

$$\text{(2.3)} \qquad \varphi'(x_0\,;\, x_0, x + h) > \varphi'(x_0\,;\, x_0, x_0 + 0) = \gamma(x_\theta, x_0 + 0)$$

conform teoremei 2.3.2; graficul $G_\varphi(x_0, x_0 + h)$ însă trebuie să fie sub graficul G_φ^*; conform ipotezei făcute, deci

$$\text{(2.4)} \qquad \varphi(x_0\,;\, x_0, x_0 + 0) \geqslant \varphi'(x_0\,;\, x_0, x_0 + h)$$

ceea ce este în contrazicere cu (2.3). Am arătat astfel că G_φ^* este un grafic de sprijin pe $[x_0, b]$. În mod asemănător se arată că graficul G_φ^{**} al funcției φ definită pe $[a, x_0]$ de $(x_0, \gamma(x_0, x_0 - 0))$ este un grafic de sprijin pe $[a, x_0]$ pentru f. Aplicînd lemele 2.1.1 și 2.1.2 rezultă că graficul G_φ al funcției $\varphi(x\,;\, x_0, \gamma)$, $x \in I$, este un grafic de sprijin pentru funcția f pe I. Teorema este demonstrată.

TEOREMA 2.4.2. *Dacă f este strict φ-convexă într-un interval I, atunci este inferior mărginită în I.*

Demonstrație. Dacă nu este adevărat, atunci există un punct $\xi \in \bar{I}$ astfel încît $\min_f(\xi) = -\infty$. Fie $x_l < x_2$ două puncte din $\bar{I}$ și $\xi < x_1$. Deoarece $\varphi(x\,;\, x_l, x_2)$ este definită și strict monotonă pe R, rezultă că există o vecinătate a punctului ξ, $V(\xi)$, exterioară intervalului $[x_1, x_2]$, astfel încît pentru orice $x_0 \in V(\xi) \cap I$,

$$f(x_0) < \varphi(x_0\,;\, x_1, x_2)$$

sau, conform lemei 2.1.2,

$$\varphi'(x_0\,;\, x_0, x_1) > \varphi'(x_0\,;\, x_0, x_2)$$

ceea ce este în contradicție cu strict convexitatea —φ, conform teoremei 2.3.2. Teorema este demonstrată.

2.5. LEMA 2.5.1. *Fie f o funcție φ-convexă pe $[a, b]$. Dacă $a^* > f(a)$, $b^* > f(b)$, atunci funcția $\varphi(x\,;\, \alpha, \beta)$ cu α, β definite de relațiile*

$$\varphi(a\,;\, \alpha, \beta) = a^*, \qquad \varphi(b\,;\, \alpha, \beta) = b^*$$

are proprietatea

$$\text{(2.5)} \qquad \varphi(x\,;\, \alpha, \beta) > f(x), \qquad x \in [a, b].$$

Demonstrație. Să considerăm și funcția $\varphi(x; a, b)$; deoarece φ este continuă și $\varphi(a; \alpha, \beta) > \varphi(a; a, b)$, $\varphi(b; \alpha, \beta) > \varphi(b; a, b)$ cele două funcții φ sau nu se întîlnesc pe $[a, b]$ sau au cel puțin două puncte comune (distincte sau confundate). În acest ultim caz însă cele două funcții ar fi identice pe $[a, b]$ ceea ce este imposibil, din cauza neegalităților pe care le satisfac cele două numere a^*, b^*; f fiind φ-convexă, rezultă neegalitatea strictă din enunț. Lema este demonstrată.

Fie $G_f(a, b)$ graficul funcției $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ și fie $M_0, M_1, \ldots, M_n$ o diviziune a graficului G_f cu $M_k(x_k, f(x_k))$ și

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Să definim funcțiile $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ astfel

$$\varphi_{k+1}(x) = \begin{cases} \varphi(x; x_k, x_{k+1}), & x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0 \quad , & x \in [a, b] - [x_k, x_{k+1}]; \end{cases}$$

în ipoteza că f este φ-convexă pe $[a, b]$ avem

TEOREMA 2.5.1. *Funcția*

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x), \qquad x \in [a, b] \tag{2.7}$$

este φ-convexă pe $[a, b]$.

Demonstrație. Fie N și N' două puncte de abscise ξ și ξ', $\xi < \xi'$, situate pe φ_k și φ_h respectiv. Dacă N și N' sînt situate pe o aceeași curbă $\varphi_k(x)$, deci $h = k$, atunci

$$\varphi_k(x) = \varphi(x; \xi, \xi'), \qquad x \in [x_k, x_{k+1}]$$

și graficul $G_\varphi(\xi, \xi')$ este graficul unei funcții φ. Trebuie deci să considerăm cazurile diferite de situația de mai sus. Să presupunem că N și N' sînt astfel încît $\xi \in [x_k, x_{k+1})$ și $\xi' \in (x_h, x_{h+1}]$, $k < h$. În această situație există un punct M_i al diviziunii de abscisă $x_i \in (\xi, \xi')$, iar conform lemei 2.5.1 avem

$$f(x_i) \leqslant \varphi(x_i; \xi, \xi') \tag{2.8}$$

egalitatea putînd avea de asemenea loc. Graficul funcției $y = \varphi^*(x; \xi, \xi')$, $x \in R$, a cărei restricție la $[\xi, \xi']$ este $y = \varphi(x; \xi, \xi')$ întîlnește graficul curbei $y = \varphi(x; x_i, x_{i+1})$, $x \in R$, a cărei restricție la $[x_i, x_{i+1}]$ este $y = \varphi_i(x)$, în nici un punct sau într-un număr par de puncte (între care se află, eventual, N sau N') pe $[x_i, x_{i+1}]$, aceasta din cauza relației (2.8).
Dacă nu se întîlnesc în nici un punct, atunci avem

$$\varphi_i(x) < \varphi(x; \xi, \xi'), \qquad x \in [x_i, x_{i+1}] \cap [\xi, \xi'],$$

conform lemei 2.5.1, iar dacă se întîlnesc

$$\varphi_i(x) = \varphi(x; \xi, \xi'), \qquad x \in [x_i, x_{i+1}] \cap [\xi, \xi']$$

ambele relații dovedind φ-convexitatea funcției Φ. Teorema este demonstrată.

2.6. Fie f o funcție φ-convexă pe un interval $I = [a, b]$ și două puncte M_1, M_2 de pe graficul G_f, de abscise $x_1 < x_2$.

LEMA 2.6.1. *Dacă* $y = \varphi_1(x;\, x_1,\, \varphi_1'(x_1))$, $y = \varphi_2(x;\, x_2,\, \varphi_2'(x_2))$, $x \in [a, b]$ *sînt două funcţii* φ *ale căror grafice sînt grafice de sprijin pentru funcţia* f *pe* $[a, b]$, *există un punct* N *de abscisă* $\xi \in [x_1, x_2]$, *comun graficelor celor două funcţii* φ_1, φ_2.

Demonstraţie. Funcţiile φ_1, φ_2 sînt definite pe R şi au în $[a, b]$ toate punctele sub graficul G_f. Punctul $M_1 \in G_{\varphi_1}$, însă $M_1 \in G_{\varphi}$, deci M_1 este deasupra graficului G_{φ_2}. Punctul $M_2 \in G_{\varphi_2}$ este de asemenea deasupra graficului G_{φ_1} din acelaşi motiv. Dacă toate punctele graficului G_{φ_1} ar fi deasupra graficului G_{φ_2} pe $[a, b]$, urmează că $M_2 \in G_{\varphi_1}$ deci lema este adevărată în acest caz. Dacă nu toate punctele graficului G_{φ_1} sînt deasupra graficului G_{φ_2}, cele două grafice fiind continue se intersectează într-un punct N de abscisă $\xi \in [x_1, x_2]$. Lema este demonstrată.

Fie G_f (a, b) graficul funcţiei $y = f(x), x \in I = [a, b]$ şi fie M_0, $M_1, \ldots, M_n$ o diviziune a graficului G_f cu M_k $(x_k, f(x_k))$, unde

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Fie $\varphi_k^*(x)$ o funcţie φ ce trece prin punctul M_k, al cărei grafic este un grafic de sprijin pentru funcţia f pe $[a, b]$.

Dacă $\varphi_{k+1}^*(x)$ este de asemenea o astfel de funcţie ce trece prin punctul M_{k+1}, să notăm cu N_k punctul comun al graficelor $G_{\varphi_k^*}$, $G_{\varphi_{k+1}^*}$ punct de abscisă $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$.

Să definim funcţiile

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \varphi_0^*(x), & x \in [a, \xi_0], \\ 0\ , & x \in (\xi_0, b], \end{cases}$$

$$\psi_k^*(x) = \begin{cases} \varphi_k^*(x), & x \in [\xi_{k-1}, \xi_k] \\ 0\ , & x \in I - [\xi_{k-1}, \xi_k], \end{cases} \tag{2.9}$$

unde $k = 1, 2, \ldots, n-1$, şi

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \varphi_n^*(x), & x \in [\xi_{n-1}, b] \\ 0\ , & x \in [a, \xi_{n-1}). \end{cases}$$

Să considerăm funcţia $\varphi(x;\, x_k,\, \varphi'(x_k))$, $x \in [a, b]$ a cărei restricţie la $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ este funcţia $\psi_k(x)$. Avem

LEMA 2.6.2. *Graficul* G_φ *al funcţiei* $\varphi(x;\, x_k,\, \varphi'(x_k))$, $x \in [a, b]$ *este un grafic de sprijin pentru funcţia*

$$\Psi_n(x) = \sum_{h=0}^{n} \psi_h(x), \qquad x \in [a, b]. \tag{2.10}$$

Demonstraţie. Dacă $k \neq n$ luăm $j = k + 1$, dacă $k = n$ luăm $j = k - 1$. Fie $\psi_j(x)$, $x \in [\xi_{j-1}, \xi_j]$, $M_j \in G_f$ şi $M_j \in G_{\psi_j}$, însă

$$\psi_j(x_j) = f(x_j) \geqslant \varphi(x_j;\, x_k,\, \varphi'(x_k))$$

de unde rezultă, conform lemei 2.6.1, că pentru orice $x \in [\xi_{j-1}, \xi_j]$ avem $\psi_j(x) \geqslant \varphi(x;\, x_k,\, \varphi'(x_k))$ deci pe acelaşi interval şi

$$\Psi_n(x) \geqslant \varphi(x;\, x_k,\, \varphi'(x_k));$$

prin iteraţie, rezultatul este adevărat pentru orice j. Lema este demonstrată.

TEOREMA 2.6.1. *Funcţia*

$$\Psi_n(x) = \sum_{h=0}^{n} \psi_h(x),\ x \in [a, b]$$

este φ*-convexă pe* $[a, b]$.

Demonstraţie. Fie P, P' două puncte situate pe graficele curbelor ψ_h, ψ_k, de abscise η, η', deci $\eta \in [\xi_{h-1}, \xi_h]$, $\eta' \in [\xi_{k-1}, \xi_k]$. Dacă $h = k$, teorema rezultă din lema 2.6.2.

Dacă $h < k$, fie $\varphi(x; \eta, \eta')$ funcţia φ definită de punctele P, P'. Există un punct $N_i \in G_{\psi_i}$ cu $\xi_i \in (\eta, \eta')$. Conform lemei 2.6.2 avem

$$\varphi(\xi_i; \eta, \eta') \geqslant \psi_i(\xi_i) = \Psi_n(\xi_i) \tag{2.11}$$

însă

$$\varphi(\eta; \eta, \eta') = \varphi(\eta; \xi_{h-1}, \xi_h) \geqslant \varphi(\xi_h; \xi_h, \xi_{h+1}) \tag{2.12}$$

tot conform lemei precedente. Deoarece avem şi $i = h + 1$, neegalităţile (2.11) şi (2.12), conform lemei 2.5.1, arată că

$$\begin{aligned} &\varphi(x; \eta, \eta') \geqslant \psi_h(x), && x \in [\eta, \xi_h], \\ &\varphi(x; \eta, \eta') \geqslant \psi_{h+1}(x), && x \in [\xi_h, \xi_{h+1}]; \end{aligned} \tag{2.13}$$

în modul acesta se arată neegalitatea (2.13) pentru $h + 2, \ldots, k$. Teorema este demonstrată.

Din modul cum sînt construite funcţiile Φ_n şi Ψ_n, rezultă că pentru orice $x \in [a, b]$ şi orice n natural avem neegalităţile

$$\Psi_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \Phi_n(x).$$

Despre convergenţa şirului (Φ_n) sau (Ψ_n) către f pe $[a, b]$ ne vom ocupa într-o altă lucrare.

Primită la redacţie la 7 martie 1967.

Institutul de matematică al Academiei Republicii
Socialiste România str. M. Eminescu nr. 47,
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. MIRON NICOLESCU, *Analiza Matematică*, vol. II. Ed. tehnică, Bucureşti, 1958.

CLASIFICAREA SPAŢIILOR RIEMANNIENE V_4 OMOGENE DE TIP RELATIVIST

DE

NICOLAE TELEMAN

În lucrarea de faţă clasificăm spaţiile riemanniene V_4 omogene de tip relativist utilizînd metoda acad. prof. Gh. Vrănceanu. Metoda [5] constă în determinarea unui grup tranzitiv de mişcări pe spaţiul riemannian şi apoi construirea metricei pe tot spaţiul, dacă ne-am fixat-o într-un punct x_0.

Pentru determinarea algebrei grupului tranzitiv se porneşte de la algebra grupului de stabilitate al punctului x_0 care apoi se completează cu operatori de tranzitivitate.

Pentru determinarea grupului complet de mişcări ale spaţiului astfel obţinut nu integrăm ecuaţiile lui Killing, ci cercetăm dacă algebra grupului poate fi completată cu noi operatori de stabilitate.

Problema ne-a fost pusă de acad. prof. Gh. Vrănceanu.

CAPITOLUL I

CONSIDERAŢII GENERALE

Fie M o varietate cu conexiune afină şi G_{n+r} un grup Lie tranzitiv, efectiv, de difeomorfisme ce păstrează această conexiune. Fie $x_0 \in M$ un punct fixat în M şi fie $H \subset G$ subgrupul de stabilitate al punctului x_0. Fie $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ un sistem de coordonate locale într-o vecinătate a punctului x_0.

Fie $X_h (h = 1, \ldots, n)$ un sistem de cîmpuri pe M, definite de acţiunea grupului G, liniar independente în punctul x_0. Fie $X_h = \xi_h^k \dfrac{\partial}{\partial x^k}$; putem alege cîmpurile X_h aşa fel încît $X_h(x_0) = \dfrac{\partial}{\partial x^k}$.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, Nr. 1, P. 67–125, BUCUREŞTI, 1968

Fie $X_\alpha = \xi^k_\alpha \frac{\partial}{\partial x^k}$, $\alpha = n + 1, \ldots, n + r$ o bază în spațiul vectorial al cîmpurilor de mișcări ce păstrează punctul x_0 fix; vom avea deci $X_\alpha(x_0) = 0$.

Vom nota $\frac{\partial}{\partial x^k}(\xi^h_\alpha)_{x=x_0} = a^h_{k\alpha}$

Dar atunci avem [5][1]:

$$[X_k, X_\beta] = a^h_{k\beta} X_h + C^\alpha_{k\beta} X_\alpha. \tag{1}$$

Să presupunem acuma că structura de conexiune afină este dată de o metrică riemanniană de tensor fundamental a_{ij}.

Vom particulariza sistemul de coordonate presupunîndu-l normal în punctul x_0.

Oricare ar fi cîmpul $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ indus pe M de acțiunea lui G, condiția necesară și suficientă ca X să genereze un grup de mișcări al metricii a_{ij} este verificarea ecuațiilor lui Killing:

$$\xi^k \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} + a_{ik} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} + a_{kj} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} = 0 \tag{2}$$

Sistemul de coordonate fiind normal în x_0, vom avea:

$$a_{ij}(x_0) = \delta_{ij}\,\varepsilon_i \quad (\varepsilon_i = \pm 1)$$

$$\left(\frac{a_{ij}}{\partial x^k}\right)_{x_0} = 0 \tag{3}$$

Ecuațiile (2) vor fi deci în punctul x_0, [5][2]:

$$\varepsilon_j \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}\right)_{x=x_0} + \varepsilon_i \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right)_{x=x_0} = 0, \text{ (fără sumare).} \tag{4}$$

Relațiile (4) scrise pentru cîmpurile X ale grupului de stabilitate devin:

$$\varepsilon_j a^j_{i\alpha}(x_0) + \varepsilon_i a^i_{j\alpha}(x_0) = 0, \text{ (fără sumare).} \tag*{5)}$$

Fie $\varepsilon_i = +1$ $(i = 1, \ldots, n',\ n' < n)$, $\varepsilon_{n'+j} = -1$ $(j = 1, \ldots, n - n')$ și X_{ij} cîmpurile definite pe vecinătatea de coordonate prin relațiile:

$$\underset{(i<j)}{X_{ij}} = x^i \frac{\partial}{\partial x^j} - \varepsilon_i \varepsilon_j x^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \text{ (fără sumare).} \tag{6}$$

Operatorii grupului de stabilitate X induc transformări liniare în spațiul tangent la varietate în punctul x_0. Aceste transformări liniare depind numai de coeficienții $a^i_{j\alpha}$ și invariază produsul scalar definit de metrica riemanniană în spațiul tangent.

---

[1] Pag. 166.

[2] Pag. 255.

Rezultă deci că orice operator al grupului de stabilitate poate fi scris sub forma

$$X_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a^i_{j\alpha} X_{ij} + \overline{X}_\alpha$$

unde $\overline{X}_\alpha$ e un cîmp definit pe vecinătatea de coordonate, nul în x_0 împreună cu derivatele de primul ordin ale componentelor lui. Pe de altă parte, cum transformările liniare definite de X în spațiul vectorial tangent la M în x_0 depind numai de $a^i_{j\alpha}$ și cum cîmpurile X generează grupul H de stabilitate, rezultă că cîmpurile $\frac{1}{2} \Sigma a^i_{i\alpha} X_{ij}$ $(\alpha = n+1, \ldots, n+r)$ determină un grup de transformări liniare în $R^n(\eta^1, \ldots, \eta^n)$ ce invariază forma pătratică

$$\sum_{i=1}^{n'} (\eta^i)^2 - \sum_{i=n'+1}^{n} (\eta^i)^2$$

In cazul spațiilor riemanniene V_4 omogene de tip relativist vom avea $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ și $\varepsilon_4 = -1$.

Pentru a determina spațiile riemanniene V_4, omogene de tip relativist, vom determina deci în primul rînd subgrupurile grupului lui Lorentz $SO(3.1)$.

CAPITOLUL II

SUBGRUPURILE GRUPULUI SO (3.1)

Se știe că grupul $SO(3,1)$ este izomorf cu $SL(2,C)$ [6] și fie $\varphi : SL(2,C) \to SO(3,1)$ izomorfismul descris în [6]. Acest izomorfism va induce izomorfismul $\overline{\varphi} : sl(2,C) \to so(3,1)$3) între algebrele Lie ale acestor grupuri :

Elementele $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}$ din $sl(2,C)$ formează o bază reală în această algebră.

Printr-un calcul direct găsim imaginea elementelor acestei baze prin $\overline{\varphi}$, și anume :

$$\overline{\varphi}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2X_{34}, \qquad \overline{\varphi}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = -2X_{12}$$

$$\overline{\varphi}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(-X_{13} + X_{14}), \quad \overline{\varphi}\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(-X_{23} + X_{24}) \tag{7}$$

$$\overline{\varphi}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2(X_{13} + X_{14}), \qquad \overline{\varphi}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix} = -2(X_{23} + X_{24}).$$

Pentru a determina subalgebrele algebrei $so(3.1)$, vom determina subalgebrele algebrei $sl(2, C)$ și apoi cu ajutorul izomorfismului $\overline{\varphi}$ le vom transporta în so (3.1).

---

3) Algebrele Lie le notăm cu inițiale minuscule.

SUBGRUPURI DE DIMENSIUNE 1

Fie $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \neq 0$ un vector tangent în elementul unitate, la un subgrup de dimensiune *1* al grupului $sl(2,C)$.

Printr-un automorfism interior putem aduce acest vector la una din formele canonice Jordan :

$$(g_1) : \begin{pmatrix} \widetilde{a} & 0 \\ 0 & -\widetilde{a} \end{pmatrix} ; \quad (g_2) : \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (a \neq 0)$$

Putem lua în locul elementului $\begin{pmatrix} \widetilde{a} & 0 \\ 0 & -\widetilde{a} \end{pmatrix}$ elementul $\begin{pmatrix} \dfrac{-\widetilde{a}}{|\widetilde{a}|} & 0 \\ 0 & \dfrac{\widetilde{a}}{|\widetilde{a}|} \end{pmatrix}$ şi deci putem considera $|\widetilde{a}| = 1$.

Ţinînd seama şi de (7) rezultă următoarea teoremă :

TEOREMA 1. *Orice subgrup conex al grupului SO(3.1), de dimensiune 1 este conjugat cu unul din subgrupurile conexe generate de elementele algebrei Lie* :

$$(g_1) : \cos\theta \; X_{34} - \sin\theta \; X_{12}$$

$$(g_2) : X_{13} - X_{14}.$$

SUBGRUPURI DE DIMENSIUNE 2

Printr-un calcul direct constatăm că două elemente U, $V \in sl(2,C)$ comută ($[U, V] = 0$), dacă şi numai dacă sînt liniar dependente peste corpul complex.

De aici rezultă că orice subgrup conex, abelian de dimensiune 2, este conjugat cu unul dintre grupurile conexe ce au ca baze ale algebrei Lie, elementele :

$$(g_3) : \begin{pmatrix} e^{ia} & 0 \\ 0 & -e^{ia} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{ib} & 0 \\ 0 & -e^{ib} \end{pmatrix}, (e^{i(a-b)} \notin R)$$

$$(g_4) : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se ştie că orice algebră Lie de dimensiune 2, neabeliană admite o bază U, V aşa încît $[U, V] = U$.

Printr-un automorfism interior putem aduce vectorul U la forma canonică (g_1) sau (g_2).

Constatăm însă că nu există elemente V astfel încît să avem $[U, V) = U$, dacă $U = \begin{pmatrix} \widetilde{a} & 0 \\ 0 & -\widetilde{a} \end{pmatrix}$ $(\widetilde{a} \neq 0)$.

Fie deci $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Singurele elemente V pentru care $[U, V] = U$ sînt $V = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \beta \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\beta \in C$.

În locul bazei U, V, putem lua baza U, $V - \mathrm{Re}\beta . U$, adică putem considera totdeauna că β este pur imaginar.

Înseamnă deci că orice element dintr-o astfel de algebră poate fi scris sub forma :

$$v = \mu U + \lambda V = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{2} & \mu + \lambda a i \\ 0 & \frac{\lambda}{2} \end{pmatrix} \text{cu } \lambda, \mu \in R,$$

λ, μ fiind un sistem de coordonate în algebră.

Vom considera automorfismul interior definit de elementul $A = \begin{pmatrix} 1 & -ai \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2,C)$. Prin acest automorfism elementul v se transformă în elementul :

$$\tilde{v} = Av\,A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{2} & \mu \\ 0 & \frac{\lambda}{2} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vedem deci că printr-un automorfism interior orice subalgebră neabeliană de dimensiune 2, admite ca bază elementele U, V cu $\beta = 0$.

Am obținut următoarea teoremă :

TEOREMA 2*i*. *Orice subgrup conex, abelian, de dimensiune 2 din* $SO(3.1)$ *este conjugat cu unul dintre subgrupurile conexe avînd ca bază a algebrei Lie elementele* :

$$(\bar{g}_3) : \begin{cases} U = X_{12} \\ V = X_{34} \end{cases} \quad (\bar{g}_4) : \begin{cases} U = X_{13} - X_{14} \\ V = X_{23} - X_{24}. \end{cases}$$

ii. *Orice subgrup conex, neabelian, de dimensiune 2, din $SO(3.1)$ este conjugat cu subgrupul conex ce are ca bază a algebrei Lie elementele* :

$$(\bar{g}_5) : \begin{cases} U = X_{13} - X_{14} \\ V = X_{34} \end{cases}$$

SUBGRUPURI DE DIMENSIUNE 3

Pentru determinarea subgrupurilor de dimensiune 3 ale grupului lui Lorentz vom utiliza clasificarea lui Bianchi a algebrelor Lie reale de dimensiune 3 :[1] ; aceste algebre sînt :

1° $[U_1, U_2] = 0, \quad [U_1, U_3] = 0, \quad [U_2, U_3] = 0$

2° $[U_1, U_2] = 0, \quad [U_1, U_3] = 0, \quad [U_2, U_3] = U_1$

3° $[U_1, U_2] = 0, \quad [U_1, U_3] = U_1, \quad [U_2, U_3] = 0$

4° $[U_1, U_2] = 0, \quad [U_1, U_3] = U_1, \quad [U_2, U_3] = U_1 + U_2$

5° $[U_1, U_2] = 0, \quad [U_1, U_3] = U_1, \quad [U_2, U_3] = U_2$

6° $[U_1, U_2] = 0, \quad [U_1, U_3] = U_1, \quad [U_2, U_3] = qU_2, \; q \neq 0{,}1$

7° $[U_1, U_2] = 0, \quad [U_1, U_3] = U_2, \quad [U_2, U_3] = -U_1 + qU_2, \; q^2 < 4$

8° $[U_1, U_2] = U_1, \quad [U_1, U_3] = 2U_2, \quad [U_2, U_3] = U_3$

9° $[U_1, U_2] = U_3, \quad [U_1, U_3] = U_2 \quad [U_2, U_3) = U_1$

algebrele 1°—7° fiind rezolubile, iar algebrele 8°, 9° nerezolubile.

Vom lua fiecare din aceste algebre în parte şi vom cerceta care dintre acestea se realizează în $sl(2,C)$.

1° $[U_1, U_2] = 0, \; [U_1, U_3] = 0, \; [U_2, U_3] = 0.$

Am stabilit faptul că două elemente $U, V \in sl(2,C)$ comută dacă şi numai dacă sînt liniar dependente peste corpul complex.

Cum $U_1 \neq 0$, rezultă că $U_2 = \lambda U_1$, $U_3 = \mu U_1$.

Dar putem presupune λ şi μ pur imaginari, luînd în locul lor elementele $U_2 - \mathrm{Re}\lambda . U_1$, $U_3 - \mathrm{Re}\mu \, . \, U_1$.

Însă de aici rezultă că U_2 şi U_3 sînt liniar dependente peste corpul real.

Deci în $SO(3.1)$ nu există subgrupuri abeliene de dimensiune 3 de acest tip.

2° $[U_1, U_2] = 0, \; [U_1, U_3] = 0, \; [U_2, U_3] = U_1.$

Din primele relaţii rezultă $U_2 = \lambda U_1$, $U_3 = \mu U_1$.

Dar de aici deducem $[U_2, U_3] = 0$.

Deci în $SO(3,1)$ nu există subgrupuri de acest tip.

3° $[U_1, U_2] = 0, \; [U_1, U_3] = U_1, \; [U_2, U_3] = 0$

Printr-un raţionament similar deducem că în $SO(3,1)$ nu există subgrupuri de acest tip.

4° $[U_1, U_2] = 0, \; [U_1, U_3] = U_1, \; [U_2, U_3] = U_1 + U_2.$

Din prima relaţie deducem $U_2 = \lambda U_1$ şi atunci

$[U_2, U_3] = [\lambda U_1, U_3] = U_1 \neq U_1 + \lambda U_1.$

5° $[U_1, U_2] = 0, \; [U_1, U_3] = U_1, \; [U_2, U_3] = U_2.$

Din prima relaţie deducem $U_1 = \lambda U_2$ $(\lambda \in C - R)$.

Dar U_2, U_3 generează un subgrup neabelian de dimensiune 2.

Am văzut însă că printr-un automorfism interior putem aduce U_2 la forma canonică $U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, iar din faptul că $[U_2, U_3] = U_2$ deducem $U_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & \beta \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$, $\beta \in C$.

Vom schimba baza, şi anume

$$\tilde{U}_1 = U_1 - \mathrm{Re}\lambda \cdot U_2$$
$$\tilde{U}_2 = U_2$$
$$\tilde{U}_3 = U_3 - \mathrm{Re}\beta \cdot U_2,$$

ceea ce ne permite să considerăm β şi λ pur imaginari.

Vom schimba elementul U_1 aşa încît să avem $\lambda = i$; schimbînd apoi elementul U_3:

$$\tilde{U}_3 = U_3 - \frac{\beta}{i} U_1$$

realizăm $\tilde{\beta} = 0$.

Deci orice subalgebră de dimensiune 3, de tipul 5° este conjugată cu algebra generată de elementele:

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$U_3 = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

6° $[U_1, U_2] = 0$, $[U_1, U_3] = U_1$, $[U_2, U_3] = qU_2$, $q \neq 0{,}1$.

Din prima relaţie deducem $U_1 = \lambda U_2$, şi deci $[U_1, U_3] = [\lambda U_2, U_3] = \lambda q\ U_2 \neq \lambda U_2$.

7° $[U_1, U_2] = 0$, $[U_1, U_3] = U_2$, $[U_2, U_3] = -U_1 + qU_2$, $q^2 < 4$.

Ca şi mai sus, deducem că $U_1 = \lambda U_2$ ($\lambda \in C - R$). De aici obţinem:

$$[U_1, U_3] = [\lambda U_2, U_3] = \lambda(-U_1 + qU_2) = \lambda(-\lambda U_2 + qU_2) = U_2.$$

Dar ultima ecuaţie e verificată numai pentru $\lambda = \dfrac{q \pm \sqrt{q^2 - 4}}{2}$.

Din $[U_1, U_3] = U_2$ şi cum $U_1 = \lambda U_2$, rezultă că $[\lambda U_2, U_3] = U_2 = [U_2, \lambda U_3]$. Am văzut la studiul subgrupurilor de dimensiune 2 că U_2 adus la forma canonică Jordan este

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ şi } U_3 = \begin{pmatrix} -1/2 & \beta \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \beta \in C.$$

Schimbînd elementul U_3:

$$\tilde{U}_3 = U_3 + aU_1 + bU_2$$

putem determina a şi b astfel încît $\tilde{\beta} = 0$.

Remarcăm faptul că $|\lambda| = \left| \dfrac{q \pm \sqrt{q^2 - 4}}{2} \right| = 1$, deci putem scrie $\lambda = e^{i\theta}$ ($\theta \neq k\pi$).

Prin urmare orice subalgebră de tipul 7° este conjugată cu algebra generată de elementele:

$$U_1 = e^{i\theta}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad U_3 = e^{-i\theta}\begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Punînd $\theta' = \theta + \pi$, obținem aceeași structură, generatorii U_1, U_3 schimbîndu-și doar semnul; deci putem lua $\theta \in (0, \pi)$.

Făcînd o nouă schimbare a generatorilor

$$\tilde{U}_1 = (U_1 - \cos\theta \cdot U_2)\,\frac{2}{\sin\theta}$$

$$\tilde{U}_2 = 2U_2$$

$$\tilde{U}_3 = U_3,$$

vom avea baza de subalgebră în *so* (3,1):

$$\bar{\varphi}U_1 = -X_{23} + X_{24}$$

$$\bar{\varphi}U_2 = -X_{13} + X_{14}$$

$$\bar{\varphi}U_3 = -\cos\theta X_{34} - \sin\theta\, X_{12}$$

Convenind să scriem $\bar{\varphi}U_i = \overline{U}_i$, avem:

$$[\overline{U}_1, \overline{U}_2] = 0$$

$$[\overline{U}_1, \overline{U}_3] = \cos\theta\cdot\overline{U}_1 + \sin\theta\cdot\overline{U}_2$$

$$[\overline{U}_2, \overline{U}_3] = -\sin\theta\cdot\overline{U}_1 + \cos\theta\cdot\overline{U}_2,$$

Remarcăm de asemenea faptul că pentru $\theta = 0$ obținem subgrupul de tipul 5°.

Vom studia acum existența subgrupurilor nerezolubile de dimensiune 3.

8° $[U_1, U_2] = U_1$, $[U_1, U_3] = 2U_2$, $[U_2, U_3] = U_3$.

Prima relație ne spune că U_1, U_2 generează un subgrup de dimensiune 2; știm că U_1 adus la forma canonică Jordan este $U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ iar U_2 este de forma $U_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & \beta \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, $\beta \in C$.

Dacă $U_3 = \begin{pmatrix} u & v \\ w & -u \end{pmatrix}$, atunci $[U_1, U_3] = \begin{pmatrix} w & -2u \\ 0 & -w \end{pmatrix}$, deci trebuie ca $u = -\beta$, $w = -1$.

Punînd apoi condiția ca $[U_2, U_3] = U_3$, deducem că $v = \beta^2$.

Rezultă deci că există în $sl(2,C)$ subalgebre cu această structură și că, dacă baza U_1, U_2, U_3 verifică ecuațiile de structură de mai sus, atunci pentru $U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, U_2 și U_3 sînt respectiv: $U_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & \beta \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$,

$U_3 = \begin{pmatrix} -\beta & \beta^2 \\ -1 & \beta \end{pmatrix}$. Automorfismele interioare ce păstrează elementul U_1 pe loc, sînt definite de matrici de forma $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL\ (2, C)$.

Dar avem :

$$\tilde{U}_2 = AU_2A^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & \beta + a \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix};$$

luînd deci $a = -\beta$, vom avea $\tilde{\beta} = 0$ şi deci

$$\tilde{U}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trecînd la algebra *so* (3,1), deducem că orice subalgebră de tipul 8° este conjugată cu algebra generată de elementele :

$$\bar{\varphi} U_1 = \overline{U}_1 = \frac{1}{2}(-X_{13} + X_{14}).$$

$$\bar{\varphi} U_2 = \overline{U}_2 = -X_{34}$$

$$\bar{\varphi} U_3 = \overline{U}_3 = -2(X_{13} + X_{14})$$

deci algebra generată de elementele

$$U_1 = X_{14},\quad U_2 = X_{13},\quad U_3 = X_{34}$$

9° $[U_1, U_2] = U_3$, $[U_1, U_3] = -U_2$, $[U_2, U_3] = U_1$.

Vom aduce elementul U_1 la forma canonică Jordan.

a) Fie deci $U_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ şi fie $U_2 = \begin{pmatrix} u & v \\ w & -u \end{pmatrix}$,

$$U_3 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix},\quad \alpha,\ \beta,\ \gamma \in C.$$

Relaţiile de structură impun asupra numerelor a, u, v, w, α, β, γ condiţiile :

$$\alpha = 0,\qquad u = 0$$

$$\beta = 2av,\qquad v = -2a\beta v\gamma - w\beta = a.$$

$$\gamma = -2aw,\ w = 2a\gamma$$

Din sistem deducem că dacă $1 + 4a^2 \neq 0$, atunci $\beta = \gamma = v = w = 0$, de unde se deduce $U_2 = U_3 = 0$; deci $a = \pm \dfrac{i}{2}$.

Schimbînd eventual elementul U_1 în $-U_1$, şi U_2 în $-U_2$, relaţiile de structură nu se schimbă, şi în plus putem realiza $a = \frac{i}{2}\cdot$

Găsim $\beta = iw$, $\gamma = -iw$ iar $vw = -\frac{1}{4}$; deci subalgebra este generată de elementele:

$$U_1 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \frac{1}{4\lambda} & 0 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & i\lambda \\ \frac{i}{4\lambda} & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 0.$$

Vom schimba baza subalgebrei

$$\tilde{U}_1 = U_1$$
$$\tilde{U}_2 = aU_2 + bU_3$$
$$\tilde{U}_3 = -bU_2 + aU_3,$$

unde $a - ib = \frac{\lambda}{|\lambda|}\cdot$

Noua bază a algebrei va avea aceeaşi formă cu singura deosebire că în locul lui λ va apărea $|\lambda|$.

Vom trece la algebra $so(3,1)$.

Vom avea:

$$\overline{U}_1 = \overline{\varphi} U_1 = -X_{12}$$

$$\overline{U}_2 = \overline{\varphi} U_2 = \frac{1}{2}|\lambda|(-X_{13} + X_{14}) - \frac{1}{|\lambda|}(X_{13} + X_{14}) =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(|\lambda| + \frac{1}{|\lambda|}\right)X_{13} + \frac{1}{2}\left(|\lambda| - \frac{1}{|\lambda|}\right)X_{14}$$

$$\overline{U}_3 = \overline{\varphi} U_3 = \frac{1}{2}|\lambda|(-X_{23} + X_{24}) - \frac{1}{2|\lambda|}(X_{23} + X_{24}) =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(|\lambda| + \frac{1}{|\lambda|}\right)X_{23} + \frac{1}{2}\left(|\lambda| - \frac{1}{|\lambda|}\right)X_{24}.$$

Notînd $\theta = \ln |\lambda|$, avem deci:

$$U_1 = -X_{12}$$
$$U_2 = -\operatorname{ch}\theta X_{13} + \operatorname{sh}\theta\, X_{14}$$
$$U_3 = -\operatorname{ch}\theta\, X_{23} + \operatorname{sh}\theta\, X_{24}.$$

Efectuînd transformarea Lorentz specială :

$$\begin{aligned}
&\widetilde{x}_1 = x_1,\ \widetilde{x}_2 = x_2\\
&\widetilde{x}_3 = \operatorname{ch}\theta x_3 + \operatorname{sh}\theta x_4\\
&\widetilde{x}_4 = \operatorname{sh}\theta x_3 + \operatorname{ch}\theta x_4,
\end{aligned}$$

cîmpurile $\overline{U}_i$ din R_4 devin în noua bază de vectori tangenţi :

$$\begin{aligned}
\overline{U}_1 &= -\widetilde{X}_{12}\\
\overline{U}_2 &= -\widetilde{X}_{13}\\
\overline{U}_3 &= -\widetilde{X}_{23}.
\end{aligned}$$

Am obţinut deci următoarea teoremă :

TEOREMA 3. *Orice subgrup conex, de dimensiune 3, al grupului SO (3,1) este conjugat cu unul dintre subgrupurile generate de elementele algebrei Lie :*

$$(\overline{g}_6):\begin{cases} U_1 = -X_{23} + X_{24} \\ U_2 = -X_{13} + X_{14}\quad \theta\in[0,\ \pi), \\ U_3 = -\cos\theta X_{34} + \sin\theta X_{12}\end{cases}\qquad \begin{aligned}&[U_1,\ U_2] = 0\\ &[U_1,\ U_3] = \cos\theta U_1 + \sin\theta U_2\\ &[U_2,\ U_3] = -\sin\theta\, U_1 + \cos\theta\, U_2\end{aligned}$$

$$(\overline{g}_7):\begin{cases} U_1 = X_{13} \\ U_2 = X_{14} \\ U_3 = X_{34}\end{cases}\qquad \begin{aligned}&[U_1,\ U_2] = U_3\\ &[U_1,\ U_3] = U_2\\ &[U_2,\ U_3] = U_1\end{aligned}$$

$$(\overline{g}_8):\begin{cases} U_1 = X_{12} \\ U_2 = X_{13} \\ U_3 = X_{23}\end{cases}\qquad \begin{aligned}&[U_1,\ U_2] = U_3\\ &[U_1,\ U_3] = -U_2\\ &[U_2,\ U_3] = U_1\end{aligned}$$

grupurile $(\overline{g}_6)$ *fiind rezolubile, iar grupurile* $(\overline{g}_7)$, $(\overline{g}_8)$ *fiind nerezolubile.*

SUBGRUPURI DE DIMENSIUNE 4

Pentru determinarea subgrupurilor de dimensiune 4 vom utiliza clasificarea prof. A. Dobrescu [2] folosind aceeaşi metodă ca şi în cazul subgrupurilor de dimensiune 3.

$$\text{I.}\ [U_1,\ U_2] = \varepsilon U_3,\ [U_1,\ U_3] = U_2,\quad [U_2,\ U_3] = 0,\ \varepsilon = \pm 1$$

$$[U_1,\ U_4] = 0,\quad [U_2,\ U_4] = \frac{1}{2}U_2,\ [U_3,\ U_4] = \frac{1}{2}U_3.$$

a) Să considerăm $\varepsilon = -1$. Acest grup conţine un subgrup de dimensiune 3 de tipul 7°, cu $q = 0$, şi deci $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Ca şi în cazul subgrupului 7°

de dimensiune 3, vom aduce U_3 la forma canonică şi atunci U_1, U_2, U_3 vor fi :

$$U_1 = -i\begin{pmatrix} -1/2 & \beta \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad U_2 = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Din a patra ecuaţie de structură obţinem $U_4 = \rho U_1$. Dar din a cincea ecuaţie de structură deducem :

$$\rho[U_2, U_1] = U_2 = \rho U_3, \text{ deci } \rho = i.$$

Prin urmare avem :

$$U_1 = -i\begin{pmatrix} -1/2 & \beta \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad U_2 = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_4 = \begin{pmatrix} -1/2 & \beta \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Schimbînd elementele U_1 şi U_4 prin adunarea unor combinaţii liniare de elementele U_2, U_3, putem considera $\beta = 0$.

b) Dacă pentru $\varepsilon = 1$ există un subgrup de dimensiune 4, ar însemna că în $SO(3,1)$ există subgrupuri de dimensiune 3 de tipul 3, cum este cel generat de elementele U_1, U_2, U_3 ; însă am văzut că în $SO(3,1)$ nu există subgrupuri de acest tip.

În afară de subgrupul de dimensiune 4 determinat mai sus nu mai există alte tipuri de subgrupuri de dimensiune 4 pentru următoarele motive :

1° Grupurile II—VIII, XI, XII din [1] conţin subgrupuri de dimensiune 3 ce nu sînt realizate în SO (3,1).

2° Grupurile IX, X conţin 3 elemente din bază ce comută cu un al patrulea ; dar de aici se deduce că cele trei elemente sînt liniar dependente peste corpul real, trebuind să fie multipli complecşi de cel de-al patrulea element din bază.

Am obţinut deci :

TEOREMA 4. *Orice subgrup conex de dimensiune 4 al grupului $SO(3,1)$ este conjugat cu subgrupul generat de elementele algebrei Lie* :

$$U_1 = -X_{12}$$

$$U_2 = -\frac{1}{2}X_{23} + \frac{1}{2}X_{24}$$

$$U_3 = -\frac{1}{2}X_{13} + \frac{1}{2}X_{14}$$

$$U_4 = -X_{34}$$

și va avea ecuațiile de structură :

$$[U_1, U_2] = -U_3,\ [U_2, U_3] = 0,\ [U_1, U_3] = U_2$$

$$[U_1, U_4] = 0,\ [U_2, U_4] = U_2,\ [U_3, U_4]=U_3.$$

SUBGRUPURI DE DIMENSIUNE 5

Vom demonstra

TEOREMA 5. *Grupul lui Lorentz nu conține subgrupuri de dimensiune 5.*

Pentru a demonstra teorema vom stabili cîteva leme.

Fie $X = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Atunci X, Y, Z, iX, iY, iZ formează o bază reală a algebrei reale sl (2, C).

LEMA 1. *Nu există nici o subalgebră în sl (2, C) de dimensiune 5 care conține elementele X, Y, iX.*

Demonstrație. Să presupunem că există o subalgebră ce conține elementele X, Y, iX. Dar algebra va mai conține atunci și elementul iY pentru că $[iX, Y] = 2iY$.

Fie U un al cincilea element care împreună cu X, Y, iX, iY formează o bază a subalgebrei. Putem lua $U = aZ + biZ$. Dar

$$[iX, U] = i(a + bi)\,[X, Z] = -2i(a + bi)Z = \rho U$$

cu $\rho \in R$. Trebuie să avem deci $-2i\,(a + bi) = \rho(a + bi)$, de unde deducem $a + ib = 0$, deci $U = 0$, ceea ce e absurd.

LEMA 2. *Nu există nici o subalgebră în sl(2, C) de dimensiune 5, care să nu conțină elementul X.*

Demonstrație. Să presupunem că există o subalgebră h, de dimensiune 5, care nu conține pe X.

Dar h e hipervarietate în sl (2, C) ; atunci există α, β_1, β_2, γ_1, $\gamma_2 \in R$ în așa fel încît elementele :

$$T_1 = iX + \alpha X, \qquad T_3 = iY + \beta_2 X$$

$$T_2 = Y + \beta_1 X, \qquad T_5 = iZ + \gamma_2 X$$

$$T_4 = Z + \gamma_1 X$$

să formeze o bază în h.

Dar pentru orice a, $b \in R$, vom avea atunci :

$$h \ni [T_1, aT_4 + bT_5] = -2(i + \alpha)(a + bi)Z = -$$

$$-2\{(a\alpha - b)T_4 + (a + \alpha b)T_5 - [(a\alpha - b)\gamma_1 + (a\alpha + b)\gamma_2]X\}.$$

Însă componenta în X trebuie să fie nulă oricare ar fi a, $b \in R$; deducem deci

$$\alpha\gamma_1 + \gamma_2 = 0$$

$$-\gamma_1 + \alpha\gamma_2 = 0$$

de unde $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

Calculînd apoi $[T_1,\ aT_2 + bT_3]$, deducem printr-un raţionament analog că $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Dar atunci $[T_2,\ T_4] = X$, ceea ce contrazice ipoteza.

LEMA 3. *Nu există în sl (2, C) nici o subalgebră h, de dimensiune 5, ce nu conţine elementul iX.*

Demonstraţie. Ideea demonstraţiei este identică cu cea din lema 1. Există un sistem de constante α, β_1, β_2, γ_1, γ_2, astfel încît elementele :

$$T_1 = X + \alpha iX, \quad T_3 = iY + \beta_2 iX$$

$$T_2 = Y + \beta_1 iX, \quad T_5 = iZ + \gamma_2 iX$$

$$T_4 = Z + \gamma_1 iX$$

să formeze o bază în h.

Atunci, oricare ar fi a, $b \in R$, vom avea

$$h \ni [T_1,\ aT_2 + bT_3] = 2(1 + \alpha i)(a + ib)\,Y = 2[(a - \alpha b) + i(\alpha a + b)]Y =$$

$$= 2(a + \alpha b)T_2 + 2(\alpha a + b)T_3 - 2[(a - \alpha b)\beta_1 + (\alpha a + b)\beta_2]\,iX$$

Trebuie deci ca $\beta_1 + \alpha\beta_2 = 0$ şi $-\beta_1\alpha + \beta_2 = 0$, de unde rezultă $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

În acelaşi mod deducem că $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$; însă de aici va rezulta că :

$$iX = [T_2,\ T_5] \in h,$$

ceea ce contrazice ipoteza.

LEMA 4. *Nu există nici o subalgebră h de dimensiune 5 în sl (2, C) ce nu conţine elementul Y.*

Demonstraţie. Putem determina numerele reale α_1, α_2, β, γ_1, γ_2 aşa încît elementele :

$$T_1 = X + \alpha_1 Y, \qquad T_4 = Z + \gamma_1 Y$$

$$T_2 = iX + \alpha_2 Y, \qquad T_5 = iZ + \gamma_2 Y$$

$$T_3 = iY + \beta Y$$

să formeze o bază în h.

Dar atunci

$$h \ni [T_2,\ T_3] = i(1 + \beta)\,[X,\ Y] = 2i(i + \beta)\,Y = \rho T_3 =,$$

$$(\text{cu } \rho \in R) = \rho\,(i + \beta)Y$$

ceea ce nu e posibil.

Demonstraţia teoremei 5. Lemele 2, 3, 4 afirmă că orice subalgebră de dimensiune 5 în *sl* (2, *C*), dacă există, conţine elementele X, iX, Y, ceea ce contrazice lema 1.

TEOREMA 6. *Grupul lui Lorentz nu conţine subgrupuri reductibile de dimensiune* $\geqslant 3$.

Demonstraţie. Am stabilit că singurele tipuri de subgrupuri de dimensiune 3 ale grupului lui Lorentz sînt grupurile $(\bar{g}_6)$, $(\bar{g}_7)$, $(\bar{g}_8)$. Aceste grupuri sînt însă ireductibile, căci în caz contrar algebrele lor derivate ar fi de dimensiune $\leqslant 1$.

Grupurile reductibile de dimensiune 4 sînt produse sau de două grupuri de dimensiune 2 sau de două grupuri, unul de dimensiune 3 şi celălalt de dimensiune 1. Fie X, Y şi U, V baze ale subgrupurilor de dimensiune 2.

Dar atunci avem $[X, U] = [X, V] = [Y, U] = [Y, V] = 0$, de unde se deduce :

$$\begin{aligned} X &= \rho U = \sigma V \\ Y &= \rho' U = \sigma' V \end{aligned} \qquad \rho, \rho', \sigma, \sigma' \in C - R.$$

De aici rezultă însă că $[X, Y] = \rho\rho'[U, U] = 0$ şi $[U, V] = 0$, ceea ce va cere ca grupul să fie abelian. S-a stabilit însă că grupul lui Lorentz nu conţine subgrupuri abeliene de dimensiune $\geqslant 3$.

Dacă un subgrup de dimensiune 4 e produsul dintre unul de dimensiune 3 şi altul de dimensiune 1, fie U, V, W şi T baze ale algebrelor lor. Dar atunci avem $U = \alpha T$, $V = \beta T$, $W = \gamma T$, $(\alpha, \beta, \gamma \in C-R)$ de unde deducem, însă, că U, V, W sînt liniar dependenţi peste corpul real.

COROLAR. *Grupul lui Lorentz nu este reductibil.*

TEOREMĂ. *Oricare două subgrupuri Lie conexe, izoforme, de dimensiune $\geqslant 2$ ale grupului lui Lorentz, sînt conjugate.*

Vom nota :

$$X_{12} = R_3, \quad X_{13} = R_2, \quad X_{23} = R_1$$
$$X_{14} = L_1, \quad X_{24} = L_2, \quad X_{34} = L_3.$$

Algebra Lie a grupului lui Lorentz este definită de relaţiile

$$\begin{array}{lll} [R_1, R_2] = R_3, & [R_1, L_1] = 0, & [R_2, L_1] = -L_3 \\ [R_1, R_3] = -R_2, & [R_1, L_2] = -L_3, & [R_2, L_2] = 0 \\ [R_2, R_3] = R_1, & [R_1, L_3] = L_2, & [R_3, L_3] = L_1 \\ & [R_3, L_1] = -L_2 & [L_1, L_2] = R_3 \\ & [R_3, L_2] = L_1 & [L_1, L_3] = R_2 \\ & [R_3, L_3] = 0 & [L_1, L_3] = R_1 \end{array} \tag{8}$$

Notaţii. 1°. Dacă $X = \sum\limits_{i,j} \alpha_{ij} X_{ij} + \overline{X}$ este un operator al grupului de stabilitate şi dacă $\overline{X}$ are toate componentele cu derivatele de ordinul I nule în punctul x_0, vom conveni să notăm suma $\sum\limits_{i,j} \alpha_{ij} X_{ij}$ cu aceeaşi literă X.

2°. Dacă c^i_{jk} sînt constantele de structură ale unei algebre Lie într-o anumită bază $\mathcal{E}$, şi dacă schimbăm baza $\mathcal{E}$ în baza $\widetilde{\mathcal{E}}$, vom nota constantele de structură în noua bază cu $\widetilde{c}^i_{jk}$. După ce am efectuat transformarea, vom omite semnul $\sim$.

3°. Prin definiţie :

$$[X, Y, Z] = [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y].$$

CAPITOLUL III

SPAȚII OMOGENE

§ I. V_4 CU GRUP G_{10} [1]

Parantezele Jacobi formate între cîmpurile X_i și operatorii grupului de stabilitate sînt definite pînă la o combinație liniară de operatori ai grupului de stabilitate, și anume (1) :

$$\begin{array}{lll}
[X_1, R_1] = a_{11}, & [X_2, R_1] = X_3 + a_{21}, & [X_3, R_1] = -X_2 + a_{31} \\
[X_1, R_2] = X_3 + a_{12}, & [X_2, R_2] = a_{22}, & [X_3, R_2] = -X_1 + a_{32} \\
[X_1, R_3] = X_2 + a_{13}, & [X_2, R_3] = -X_1 + a_{23}, & [X_3, R_3] = a_{33} \\
[X_1, L_1] + X_4 + b_{11}, & [X_2, L_1] = b_{21}, & [X_3, L_1] = b_{31} \\
[X_1, L_2] = b_{12}, & [X_2, L_2] = X_4 + b_{22}, & [X_3, L_2] = b_{32} \\
[X_1, L_3] + b_{13}, & [X_2, L_3] = b_{23}, & [X_3, L_3] = X_4 + b_{33}
\end{array}$$

(I. 1)

$$\begin{array}{l}
[X_4, R_1] = a_{41} \\
[X_4, R_2] = a_{42} \\
[X_4, R_3] = a_{43} \\
[X_4, L_1] = X_1 + b_{41} \\
[X_4, L_2] = X_2 + b_{42} \\
[X_4, L_3] + X_3 + b_{43}
\end{array}$$

unde a_{ij}, $b_{ij} \in so\ (3,1)$.

Printr-o transformare $\tilde{X}_i = X_i + l_i$, $l_i \in so(3,1)$, putem realiza $= \tilde{a}_{11} = aR_1 + bL_1$, $\tilde{a}_{12} = \tilde{a}_{13} \overset{\sim}{=} b_{11} = 0$, și b_{12} să nu conțină R_3 și L_3.

Din $[X_1, R_1, L_2] = 0$ și $[X_1, R_1, L_3] = 0$ deducem însă $a_{11} = 0$ și

$$\text{(I.2)} \qquad \begin{array}{l}
b_{12} = bR_2 + cR_3 + b'L_2 + c'L_3 \\
b_{13} = cR_2 - bR_3 - c'L_2 + b'L_3.
\end{array}$$

Celelalte identități Jacobi formate cu X_1 și R_i, L_i arată însă că $a_{31} = a_{21} = a_{41} = 0$ și :

$$\begin{array}{l}
b_{42} = -(c'R_2 + b'R_3 + cL_2 + bL_3) \\
b_{43} = b'R_2 + c'R_3 + bL_2 - cL_3.
\end{array}$$

Cum însă am observat că putem alege operatorii X_i așa fel încît b_{12} să nu conțină R_3 și L_3, rezultă că $c' = c = 0$.

---

[1] Indicele lui G indică dimensiunea grupului complet de mișcări.

Din aceleaşi identităţi mai obţinem $b_{32} = b_{23} = 0$, $a_{22} = a_{33}$ şi că a_{42}, a_{43} sînt combinaţii liniare de R_3 şi L_3, şi anume :

$$\begin{aligned} a_{42} &= -pR_3 + qL_3 \\ a_{43} &= pR_3 + qL_3 \end{aligned}$$

iar b_{31} şi b_{21} sînt de forma

$$\begin{aligned} b_{31} &= (b - p)R_3 + (q - b')\,L_3 \\ b_{21} &= (p - b)R_2 + (q - b')L_2. \end{aligned} \tag{I.3}$$

Din $[X_4, R_1, L_1] = 0$ şi $[X_4, R_2, L_1] = 0$ obţinem însă $b_{41} = 0$, $a_{42} = a_{43} = 0$ şi deci $b_{12} = b_{13} = 0$.

Din celelalte identităţi Jacobi formate cu X_4 şi R_i, L_i deducem $b_{42} = b_{43} = a_{22} = a_{23} = a_{32} = 0$, şi deci $b_{31} = b_{21} = 0$, iar din $[X_2, R_2, L_2] = 0$ rezultă că $b_{22} = 0$ şi din $[X_1, R_2, L_3] = 0$, $b_{33} = 0$.

Vedem deci că putem determina un sistem de cîmpuri X_i aşa fel încît $a_{ij} = b_{ij} = 0$.

Vom considera acuma identităţile lui Jacobi $[X_i, X_j, R_k] = 0$.

Vom avea în general :

$$[X_i\,, X_j] = a^k_{ij}X_k + b^k_{ij}R_k + c^k_{ij}L_k.$$

Dar datorită faptului că $[R_i, L_j] = \varepsilon_{ij}L_k$ (vezi (8)), scriind ecuaţiile $[X_i, X_j, R_k] = 0$, vom obţine, printre altele, ecuaţii pătratice în a_{ij} şi b_{ij} ca şi cum am avea $c^k_{ij} = 0$, aceste ecuaţii coincizînd deci cu ecuaţiile analoge din cazul spaţiilor riemanniene, omogene V_4, cu metrică definită, cu grup de mişcări de dimensiune 7, grupul de stabilitate fiind grupul rotaţiilor în E_3.

Folosind rezultatele din [5][2] constatăm că printr-o transformare :

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_1 &= X_1 + aR_1 \\ \widetilde{X}_2 &= X_2 - aR_2 \\ \widetilde{X}_3 &= X_3 + aR_3 \\ \widetilde{X}_4 &= X_4 \end{aligned} \tag{I.4}$$

ecuaţiile $[X_i, R_j]$ din (I.1) rămîn neschimbate şi putem determina a în aşa fel încît :

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= rR_3 + L_{12} \\ [X_1, X_3] &= rR_2 + L_{13} \\ [X_2\,X_3] &= rR_1 + L_{23} \qquad \text{cu } pr = 0 \text{ şi } L_{ij} = C^k_{ij}L_k \\ [X_1, X_4\,] &= p\,X_1 + L_{14} \\ [X_2, X_4] &= pX_2 + L_{24} \\ [X_3, X_4] &= pX_3 + L_{34}, \end{aligned}$$

---

[2] Pag. 321–323.

Prin transformarea (I.4), parantezele $[X_i, L_j]$ devin

$$[X_1, L_1] = X_4,\ [X_2, L_1] = aL_3,\ [X_3, L_1] = -aL_2,\ [X_4, L_1] = X_1 - aR_1$$
$$[X_1, L_2] = -aL_3,\ [X_2, L_2] = X_4,\ [X_3, L_2] = aL_1,\ [X_4 L_2] = X_2 + aR_2$$
$$[X_1, L_3] = aL_2,\ [X_2, L_3] = -aL_1,\ [X_3, L_3] = X_4,\ [X_4, L_3] = X_3 - aR_3.$$

Din $[X_2, X_3, R_1] = 0$ obținem $L_{23} = qL_1$ iar din $[X_1, X_2, R_i] = 0$ deducem $L_{12} = qL_3$ și $L_{13} = -qL_2$. Identitatea $[X_1, X_2, L_1] = 0$ cere ca $p = 0$ și $L_{24} = (a^2 + r)L_2$.

Din $[X_1, X_2, X_3] = 0$ și $[X_1, X_2, L_3] = 0$ obținem însă că $q = 0$ și $a = 0$ iar din $[X_1, X_2, L_2] = 0$ și $[X_1, X_3, L_1] = 0$ că $L_{14} = rL_2$ și $L_{34} = rL_3$.

Toate celelalte ecuații Jacobi vor fi verificate.

Rezultă deci structura de grup formată din ecuațiile (8), (I, 1) cu $a_{ij} = b_{ij} = 0$ și

$$\text{(I.5)}\qquad \begin{aligned} &[X_1, X_2] = rR_3, && [X_1, X_4] = rL_1,\\ &[X_1, X_3] = rR_2, && [X_2, X_4] = rL_2\\ &[X_2, X_3] = rR_1, && [X_3, X_4] = rL_3. \end{aligned}$$

Metrica spațiului este

$$\text{(I)}\qquad ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2}{[1 - 4r((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2)]^2}$$

iar grupul de mișcări va fi grupul transformărilor liniare din R_5 ce invariază forma pătratică

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 + \varepsilon(x^5)^2, \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

ε depinzînd de sensul lui r, dacă $r \neq 0$.

Metrica (I) este cu curbură constantă.

Dacă $r \geqslant 0$, pe spațiu se poate determina un grup de mișcări simplu tranzitiv.

Se verifică cu ușurință că pe grupul simplu tranzitiv cu structura :

$$\begin{aligned} &[Y_1, Y_4] = 0, && [Y_2, Y_4] = aY_4\\ &[Y_3, Y_4] = 0, && [Y_1, Y_2] = aY_1\\ &[Y_1, Y_3] = 0, && [Y_1, Y_3] = aY_3 \end{aligned}$$

există metrica invariantă :

$$ds^2 = e^{2ax^2}[(dx^1)^2 + 4dx^3\, dx^4] + (dx^2)^2$$

cu curbura constantă negativă.

§ II. V_4 CU GRUP G_8

Am stabilit că nu există decît un tip de grup de stabilitate de dimensiune 4, acesta fiind grupul $(\overline{g}_9)$. Făcînd schimbarea de operatori :

$$Y_1 = X_1, \qquad Y_2 = X_2$$

$$Y_3 = X_3 - X_4\,, \; Y_4 = X_3 + X_4$$

vom avea conform ecuațiilor (1) :

$$\begin{array}{ll} [Y_1,\ U_1] = -\,Y_2 + a_{11}, & [Y_2,\ U_1] = Y_1 + a_{21} \\ [Y_1,\ U_2] = a_{12}, & [Y_2,\ U_2] = -\tfrac{1}{2}\,Y_3 + a_{22} \\ [Y_1,\ U_3] = -\,\tfrac{1}{2}\,Y_3 + a_{13}, & [Y_2,\ U_3] = a_{23} \\ [Y_1,\ U_4] = a_{14}\,, & [Y_2,\ U_4] = a_{24} \\ [Y_3,\ U_1] = a_{31}, & [Y_4,\ U_1] = a_{41} \\ [Y_3,\ U_2] = a_{32}, & [Y_4,\ U_2] = Y_2 + a_{42} \\ [Y_3,\ U_3] = a_{33},. & [Y_4,\ U_3] = Y_1 + a_{43} \\ [Y_3,\ U_4] = Y_3 + a_{34}, & [Y_4,\ U_4] = -Y_4 + a_{44} \end{array} \tag{II.1}$$

unde $a_{ij} \in (\overline{g}_9)$.

Prin transformări de forma $\widetilde{Y}_i = Y_i + l_i\,,\ (l_i \in \overline{g}_9)$ vom realiza $\widetilde{a}_{42} = \widetilde{a}_{43} = \widetilde{a}_{44} = 0$ și

$$\widetilde{a}_{34} = mU_2 + nU_3$$

$$\widetilde{a}_{22} = rU_1 + sU_4.$$

Din $[Y_4\,,\ U_i,\ U_j] = 0$ deducem $a_{41} = a_{21} = a_{11} = a_{24} = a_{14} = 0$ și $a_{12} = a_{23}$, din $[Y_3,\ U_i\,,\ U_j] = 0$ deducem $a_{34} = a_{33} = a_{32} = 0$ și faptul că a_{31} are componentele în U_1 și U_4 nule, iar $[Y_2,\ U_i,\ U_j] = 0$ impun condițiile $a_{12} = a_{23} = -\dfrac{1}{4}a_{31}$, $a_{13} = [a_{23},\ U_1]$ și faptul că a_{23} are componentele în U_1 și U_4 nule.

Ecuațiile $[Y_1,\ U_i,\ U_j] = 0$ cer apoi ca $a_{13} = a_{31} = a_{12} = a_{21} = 0$.

Constatăm deci că putem alege operatorii Y_i în așa fel încît $a_{ij} = 0$.

Identitățile Jacobi $[Y_3,\ Y_4,\ U_i] = 0$ ne conduc la forma parantezelor $[Y_3,\ Y_4]$, $[Y_2,\ Y_3]$, $[Y_1,\ Y_3]$:

$$[Y_3,\ Y_4] = mU_1 + nU_4$$

$$[Y_2,\ Y_3] = mU_3 + nU_2$$

$$[Y_1,\ Y_3] = -mU_2 + nU_3.$$

Din $[Y_1,\ Y_2,\ U_i] = 0$ obținem :

$$[Y_1,\ Y_2] = aU_1,\ m = 0 \text{ și } n = 2a,$$

iar din $[Y_1, Y_4, U_i] = 0$ că $[Y_1, Y_4] = 0$ şi $a = 0$.
Însă $[Y_2, Y_4] = 0$, fapt ce rezultă din $[Y_2, Y_4, U_i] = 0$.

Prin urmare $[Y_i, Y_j] = 0$.

Dar aceasta înseamnă că pe spaţiu acţionează un grup de mişcări tranzitiv, abelian — deci că spaţiul este local pseudoeuclidian. Dar grupul său complet de mişcări va fi de dimensiune 10.

Am regăsit deci rezultatul lui Egorov [7]:

TEOREMA 7. *Nu există spaţii riemanniene V_4 de tip relativist, omogene, cu grup complet de mişcări de dimensiune 8.*

§ III. V_4 CU GRUP G_7

A. Să presupunem că grupul de stabilitate este grupul $(\bar{g}_6)$ cu $\theta = 0$, deci algebra sa este generată de elementele:

$$\begin{array}{lll} & U_1 = -R_1 + L_2, & [U_1, U_2] = 0 \\ \text{(III.1)} & U_2 = -R_2 + L_1 & [U_1, U_3] = U_1 \\ & U_3 = -L_3 & [U_2, U_3] = U_2. \end{array}$$

Vom face schimbarea operatorilor X_i:

$$\begin{array}{ll} Y_1 = X_1, & Y_2 = X_2 \\ Y_3 = X_3 - X_4, & Y_4 = X_3 + X_4. \end{array}$$

Avem, conform relaţiilor (1):

$$\begin{array}{lll} & [Y_1, U_1] = a_{11}, & [Y_2, U_1] = -Y_3 + a_{21} \\ & [Y_1, U_2] = -Y_3 - a_{12}, & [Y_2, U_2] = a_{22} \\ & [Y_1, U_4] = a_{13}, & [Y_2, U_3] = a_{23} \\ \text{(III.2)} & [Y_3, U_1] = a_{31}, & [Y_4, U_1] = 2Y_1 + a_{41} \\ & [Y_3, U_2] = a_{32}, & [Y_4, U_2] = 2Y_1 + a_{42} \\ & [Y_3, U_3] = Y_3 + a_{33}, & [Y_4, U_3] = -Y_4 + a_{43} \end{array}$$

a_{ij} fiind elemente din algebra subgrupului de stabilitate.

Schimbînd operatorii Y_i prin transformări de forma

$$\tilde{Y}_i = Y_i + l_i, \ l_i \in (\bar{g}_6)$$

putem presupune că $\tilde{a}_{33}$ are componenta în U_3 nulă, $a_{21} = \lambda U_3$ iar $a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0$.

Din $[Y_4, U_1, U_3] = 0$, $[Y_4, U_2, U_3] = 0$, $[Y_3, U_1, U_3] = 0$, obţinem succesiv $a_{23} = 0$, $a_{13} = 0$ şi $a_{32} = a_{31} = 0$, iar apoi din ecuaţia: $[Y_2, U_1, U_3] = 0$ obţinem $a_{33} = a_{21} = 0$.

Celelalte identităţi Jacobi formate cu un singur cîmp Y_i ne dau forma elementelor a_{11}, a_{12}, a_{22}:

$$a_{11} = a_{22} = aU_1 + bU_2$$
$$a_{12} = \alpha U_1 + \beta U_2.$$

Folosind identitățile $[Y_i, Y_j, U_k] = 0$ cu $(i, j) \neq (1,2)$ și $(i, j, k) \neq (2,4,2)$, găsim :

$$[Y_1, Y_2] = (\beta - a)\, Y_2 - bY_1, \qquad [Y_2, Y_3] = -\alpha Y_3$$

$$[Y_1, Y_3] = a_{22}, \qquad [Y_2, Y_4] = -\alpha Y_4$$

$$[Y_1, Y_4] = -\beta Y_4, \qquad [Y_3, Y_4] = -2\alpha Y_2.$$

Din $[Y_2, Y_4, U_2] = 0$ deducem însă că $\alpha = \beta = 0$ iar din $[Y_1, Y_2, U_2] = 0$ deducem că $a = b = 0$.

Deci spațiul admite un grup de mișcări simplu tranzitiv, abelian.

Prin urmare grupul de mișcări al spațiului ce admite ca grup de stabilitate (III.1), are un grup de stabilitate mai bogat.

B. Vom considera acum grupul de stabilitate cu algebra $(\bar{g}_6)$ pentru $\theta \in (0, \pi)$.

Avem în baza relațiilor (1) :

$$\text{(III.3)} \quad \begin{array}{ll} [Y_1, U_1] = a_{11}, & [Y_2, U_1] = -Y_3 + a_{21} \\ [Y_1, U_2] = -Y_3 + a_{12}, & [Y_2, U_2] = a_{22} \\ [Y_1, U_3] = -Y_2 \sin\theta + a_{13}, & [Y_2, U_3] = Y_1 \sin\theta + a_{23} \\ [Y_3, U_1] = a_{31}, & [Y_4, U_1] = 2Y_2 + a_{41} \\ [Y_3, U_2] = a_{32}, & [Y_4, U_2] = 2Y_1 + a_{42} \\ [Y_3, U_3] = Y_3 \cos\theta + a_{33}, & [Y_4, U_3] = -Y_4 \cos\theta + a_{43} \end{array}$$

unde a_{ij} sînt combinații liniare de U_1, U_2, U_3, iar

$$Y_1 = X_1, \qquad Y_3 = X_3 - X_4$$

$$Y_2 = X_2, \qquad Y_4 = X_3 + X_4.$$

Fie $v = \lambda U_1 + \mu U_2$, $\lambda, \mu \in R$. Din relațiile de compunere a cîmpurilor U_i :

$$\text{(III.4)} \quad \begin{aligned} [U_1, U_2] &= 0 \\ [U_1, U_3] &= \cos\theta\, U_1 + \sin\theta\, U_2 \\ [U_2, U_3] &= -\sin\theta\, U_1 + \cos\theta\, U_2 \end{aligned}$$

deducem că $[v, U_3] = R(\theta)\, v$, $R(\theta)$ fiind rotația de unghi θ în planul U_1, U_2.

Putem determina două elemente v_3, v_4, combinații liniare de U_1 și U_2, astfel încît prin transformarea :

$$\widetilde{Y}_3 = Y_3 + v_3$$

$$\widetilde{Y}_4 = Y_4 + v_4$$

să avem $\widetilde{a}_{33} = \alpha U_3$, $\widetilde{a}_{43} = \beta U_3$.

Într-adevăr, avem :

$$[\widetilde{Y}_3, \quad U_3] = \cos\theta \ \widetilde{Y}_3 + (R(\theta) - \cos\theta \ E) \ v_3 + a_{33}$$

$$[\widetilde{Y}_4, \quad U_3] = -\cos\theta \ \widetilde{Y}_4 + (R(\theta) + \cos\theta \ E) \ v_4 + a_{43},$$

unde E este transformarea identică în planul determinat de elementele U_1, U_2.

Însă transformările $R(\theta) \pm E \cos \theta$, $\theta \in (0, \pi)$ sînt nedegenerate ; de aici rezultă că putem găsi două elemente v_3, v_4 cu proprietatea cerută.

Să presupunem acum că $\theta \in (0, \pi)$ şi în plus $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. Efectuînd schimbarea

$$\widetilde{Y}_3 = Y_3 + \xi \ U_3$$

$$\widetilde{Y}_4 = Y_4 + \eta \ U_4,$$

putem determina ξ şi η aşa fel încît să avem $\widetilde{a}_{33} = \widetilde{a}_{43} = 0$. Prin transformarea :

$$\widetilde{Y}_1 = Y_1 + \frac{1}{2} a_{42}$$

$$\widetilde{Y}_2 = Y_2 + \frac{1}{2} a_{41}$$

avem şi $\widetilde{a}_{41} = \widetilde{a}_{42} = 0$.

Din $[Y_4, \ U_i, \ U_j] = 0$ deducem $a_{11} = a_{22} = 0$ şi $a_{13} = a_{23} = 0$.

Ecuaţia $[Y_1, \ U_1, \ U_2] = 0$ se scrie :

$$[a_{31}, \ U_2] - [a_{32}, \ U_1] = 0$$

şi dacă notăm :

$$a_{31} = U + nU_3$$

$$a_{32} = V + pU_3,$$

U, V fiind combinaţii liniare de U_1, U_2, această ecuaţie este $R(\theta) \ (-nU_2 + pU_1) = 0$; or, de aici deducem : $n = p = 0$.

Identităţile $[Y_3, \ U_1, \ U_3] = 0$, $[Y_3, \ U_2, \ U_3] = 0$ se pot scrie :

$$(R(\theta) - 2E \ \cos\theta) \ U = \sin\theta V$$

$$(R(\theta) - 2E \ \cos\theta) \ V = -\sin\theta U.$$

Dar din ecuaţiile de mai sus rezultă că :

$$(R(\theta) - 2E \ \cos\theta)^2 \ U = -\sin^2 \theta U$$

ceea ce nu e posibil decît dacă $U = 0$ şi deci $V = 0$.

Din celelalte identităţi $[Y_i, \ U_j, \ U_k] = 0$ rezultă :

$$a_{11} = a_{22} = aU_1 + bU_2$$

$$-a_{12} = a_{21} = 2bU_1 - 2aU_2.$$

Parantezele $[Y_3, Y_4, U_i] = 0$ le folosim pentru a determina $[Y_3, Y_4]$, $[Y_2, Y_3]$ și $[Y_1, Y_3]$:

$$[Y_3, Y_4] = mU_3$$

$$[Y_2, Y_3] = \frac{m}{2} R(\theta)\ U_1$$

$$[Y_1, Y_3] = \frac{m}{2} R(\theta)\ U_2.$$

Însă ecuația $[Y_2, Y_4, U_1] = 0$ cere ca $a = 0$, $m = 0$ și

$$[Y_2, Y_4,] = (pU_1 + qU_2) + sY_1 + uY_3 - 2bY_4 \text{ cu } sb = 0$$

iar din $[Y_2, Y_4, U_3] = 0$ obținem :

$$[Y_1, Y_4] = \frac{1}{\sin\theta}[R(\theta) + E\cos\theta(pU_1 + qU_2) +$$
$$+ s\cdot\cos\theta Y_1 - s\cdot\sin\theta\ Y_2 + 2u\cos\theta Y_3].$$

Identitatea $[Y_2, Y_4, U_2] = 0$ ne conduce la relația

$$[Y_1, Y_2] = bY_1 + \frac{s}{2} Y_3;$$

din $[Y_1, Y_4, U_2] = 0$ obținem $s = b = 0$ iar din $[Y_1, Y_4, U_3] = 0$ rezultă $p = q = 0$ și $u = 0$.

Prin urmare operatorii Y_i, astfel aleși, determină baza unei algebre de grup simplu tranzitiv, abelian, grupul complet de mișcări al spațiului fiind deci de dimensiune 10.

Rămîne să considerăm $\theta = \frac{\pi}{2}\cdot$

Putem presupune că $a_{12} = aU_1 + bU_2$, deoarece relațiile $a_{33} = \alpha U_3$, $a_{43} = \beta U_3$ nu sînt afectate de transformări de forma $\widetilde{Y}_3 = Y_3 + \zeta U_3$; efectuînd transformarea :

$$\widetilde{Y}_1 = Y_1 + \frac{1}{2} a_{42}$$

$$\widetilde{Y}_2 = Y_2 + \frac{1}{2} a_{41}$$

avem $\widetilde{a}_{41} = \widetilde{a}_{42} = 0$.

Ecuațiile $[Y_3, U_i, U_j] = 0$ arată că a_{31} și a_{32} sînt combinații liniare de U_1, U_2 și trebuie să verifice relațiile :

$$R\left(\frac{\pi}{2}\right) a_{31} - a_{32} + \alpha U_2 = 0$$

$$R\left(\frac{\pi}{2}\right) a_{32} + a_{31} - \alpha U_1 = 0. \qquad \text{(III.5)}$$

Aplicînd $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ celei de a doua ecuații (III.5) și adunînd-o apoi la prima, obținem $R\left(\frac{\pi}{2}\right) a_{31} = a_{32}$ de unde rezultă că $\alpha = 0$ și :

$$a_{31} = pU_1 + qU_2$$

$$a_{32} = -qU_1 + pU_2$$

Din $[Y_4, U_i, U_j] = 0$ deducem :

$$a_{11} = a_{22}$$

$$a_{23} = -\frac{\beta}{2} U_2$$

$$a_{13} = \frac{\beta}{2} U_1$$

iar $[Y_1, U_i, U_j] = 0$, $[Y_2, U_i, U_j] = 0$ arată că $a_{31} = a_{32} = a_{12} = a_{11} = a_{21} = 0$.

Scriind condițiile $[Y_i, Y_j, U_k] = 0$ obținem :

$$[Y_1, Y_2] = cY_3$$

$$[Y_1, Y_3] = 0$$

$$[Y_1, Y_4] = qU_1 + aU_2 + bY_1 - 2cY_2$$

$$[Y_2, Y_3] = 0 \qquad\qquad 2q + bc = 0$$

$$[Y_2, Y_4] = aU_1 - qU_2 + 2cY_1 + bY_2$$

și $\beta = 0$; identitățile $[Y_i, Y_j, Y_k] = 0$ sînt verificate.

Efectuînd transformarea :

$$\tilde{Y}_1 = Y_1 - \frac{c}{2} U_1$$

$$\tilde{Y}_2 = Y_2 + \frac{c}{2} U_2$$

$$\tilde{Y}_3 = Y_3$$

$$\tilde{Y}_4 = Y_4 - cU_3,$$

avem $\tilde{c} = 0$ și deci $\tilde{q} = 0$.

În consecință, avem structura de grup dată de relațiile (III. 3) cu $\theta = \frac{\pi}{2}$, $a_{ij} = 0$ (III. 4), și :

$$[Y_1, Y_2] = 0$$

$$[Y_1, Y_3] = 0$$

$$\text{(III.6)}\qquad \begin{aligned}[][Y_2, Y_3] &= 0\\ [Y_1, Y_4] &= aU_2 + bY_1\\ [Y_2, Y_4] &= aU_1 + bY_2\\ [Y_3, Y_4] &= bY_3.\end{aligned}$$

Ecuaţiile Maurer-Cartan ale formelor invariante pe grupul de mişcări, duale bazei U_i, U_j au soluţia :

$$\begin{aligned} ds^1 &= e^{-bx^4}dx^1 - 2y^2dx^4\\ ds^2 &= e^{-bx^4}dx^2 - 2y^1dx^4\\ ds^3 &= e^{-bx^4}(y^2dx^1 + y^1dx^2 + dx^3) - (ax^1x^2e^{-2bx^4} + (y^1)^2 + (y^2)^2)\,dx^4\\ ds^4 &= dx^4\\ ds^5 &= ax^2e^{-bx^4}dx^4 + dy^1\\ ds^6 &= ax^1e^{-bx^4}dx^4 + dy^2,\end{aligned}$$

iar metrica [3]) spaţiului riemannian V_4, invariantă la acest grup, este :

$$\text{(III.7)}\qquad \begin{aligned} ds^2 = e^{-2bx^4}[(dx^1)^2 + (dx^2)^2] + 4\,e^{-bx^4}dx^3dx^4 -\\ - 4a\,e^{-2bx^4}x^1x^2(dx^4)^2.\end{aligned}$$

Remarcăm faptul că metrica este regulată în R^4.

Dacă $b^2 - 8a \geqslant 0$, putem determina un subgrup de mişcări simplu tranzitiv. Într-adevăr, dacă λ verifică ecuaţia $2\lambda^2 - b\lambda + a = 0$, prin schimbarea cîmpurilor Y_i : $(i = 1,2)$:

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_1 &= Y_1 + \lambda U_2, & \tilde{Y}_3 &= Y_3\\ \tilde{Y}_2 &= Y_2 + \lambda U_1, & \tilde{Y}_4 &= Y_4,\end{aligned}$$

vom avea :

$$\begin{aligned}[][\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2] &= 0 & [\tilde{Y}_2, \tilde{Y}_3] &= 0\\ [\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_3] &= 0 & [\tilde{Y}_2, \tilde{Y}_4] &= (b - 2\lambda)\,\tilde{Y}_2\\ [\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_4] &= (b - 2\lambda)\,\tilde{Y}_1, & [\tilde{Y}_3, \tilde{Y}_4] &= b\tilde{Y}_3\end{aligned}$$

şi în acest caz metrica poate fi scrisă mai simplu :

$$ds^2 = e^{-2cx^4}[(dx^1)^2 + (dx^2)^2] + 4\,e^{-bx^4}dx^3dx^4,$$

unde $c = b - 2\lambda$.

Vom cerceta acum grupul complet de mişcări al metricei (III. 7)

---

[3]) Ţinînd cont de faptul că $Y_i = X_i$ $(i = 1,2,)$ iar $Y_3 = X_3 - X_4$, $X_4 = X_3 + X_4$, dacă ds^1, ds^2, ds^3, ds^4 sînt forme invariante, duale bazei Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, rezultă că metrica este :

$$ds^2 = (ds^1)^2 + (ds^2)^2 + 4\,ds^3\,ds^4$$

Să presupunem $b \neq 0$. Vom efectua schimbarea de variabile :

$$-\frac{1}{b}\,e^{-bx^4} = \bar{x}^4,\ bx^1 = \bar{x}^1,\ bx^2 = \bar{x}^2,\ x^3 = \bar{x}^3\,;$$

prin această transformare metrica (III.7) devine :

$$ds^2 = (x^4)^2[(dx^1)^2 + (dx^2)^2] + \qquad \text{(III.8)}$$

$$+ 4\,dx^3dx^4 - 4\frac{a}{b^2}\,x^1x^2(dx^4)^2.$$

Singurii coeficienţi de conexiune nenuli ai metricii (III.8) sînt :

$$\Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{22} = -\frac{1}{2}\,x^4$$

$$\Gamma^1_{14} = \Gamma^2_{24} = \frac{1}{x^4}$$

$$\Gamma^3_{14} = -\frac{a}{b^2}\,x^2;\ \Gamma^3_{24} = -\frac{a}{b^2}\,x^1$$

$$\Gamma^1_{44} = \frac{2a}{b^2}\,\frac{x^2}{(x^4)^2}\,;\ \Gamma^2_{44} = \frac{2a}{b^2}\,\frac{x^1}{(x^4)^2}.$$

Dar atunci :

$$\Gamma^3_{124} = -\frac{a}{b^2}.$$

Deci, necesar ca spaţiul să fie cu curbură constantă, este $a = 0$.

Însă dacă $a = 0$, sistemul de ecuaţii

$$\frac{\partial \lambda^i}{\partial x^i} = \lambda^k\,\Gamma^i_{kj}$$

este complet integrabil ; deci metrica este cu curbura nulă.

Dacă $b = 0$, singurii coeficienţi de conexiune nenuli ai metricii (III.7) sînt :

$$\Gamma^3_{14} = -\,ax^2,\ \Gamma^3_{24} = -\,ax^1$$

$$\Gamma^1_{44} = 2ax^2,\quad \Gamma^2_{44} = 2ax^1.$$

Constatăm că $\Gamma^3_{124} = -\,a$; deci dacă $a \neq 0$, metrica (III.7) nu este cu curbură constantă.

Din rezultatele anterioare ştim însă că nu există spaţii V_4 omogene, de tip relativist, cu grup complet de mişcări de dimensiune 8 şi 9 ; deci dacă metrica (III.7) nu este cu curbură constantă, grupul ei complet de mişcări este de dimensiune 7.

Am obţinut deci :

TEOREMA 8. *Metrica*

$$ds^2 = e^{-2bx^4}[(dx^1)^2 + (dx^2)^2] + 4e^{-bx^4}dx^3dx^4 -$$

$$- 4a\,e^{-2bx^4}x^1x^2(dx^4)^2,\ (|a| + |b| \neq 0)$$

este singura metrică de spațiu V_4 omogen, relativist, cu grup complet de mișcări rezolubil, de dimensiune 7.

C. Vom considera grupurile de mișcări ce au subgrupul $(\bar{g}_7)$ ca grup de stabilitate $(U_1 = X_{14},\ U_2 = X_{13},\ U_3 = X_{34})$.

Știm că :

$$
\begin{array}{llll}
 & [X_1, U_1] = X_4 + a_{11}, & [X_2, U_1] = a_{21}, & [X_3, U_1] = a_{31} \\
 & [X_1, U_2] = X_3 + a_{12}, & [X_2, U_2] = a_{22}, & [X_3, U_2] = -X_1 + a_{32} \\
 & [X_1, U_3] = a_{13}, & [X_2, U_3] = a_{23}, & [X_3, U_3] = X_4 + a_{33} \\
\text{(III.9)} & [X_4, U_1] = X_1 + a_{41}, & [U_1, U_2] = U_3 & \\
 & [X_4, U_2] = a_{42}, & [U_1, U_3] = U_2 & \\
 & [X_4, U_3] = X_3 + a_{43}, & [U_2, U_3] = U_1. & \\
 & a_{ij} \in (\bar{g}_7). & &
\end{array}
$$

Făcînd transformarea :

$$
\begin{aligned}
\widetilde{X}_3 &= X_3 + a_{12} \\
\widetilde{X}_4 &= X_4 + a_{11}
\end{aligned}
$$

avem în noua bază de operatori $\widetilde{a}_{11} = \widetilde{a}_{12} = 0$.

Această situație se menține prin transformările :

$$
\begin{aligned}
\widetilde{X}_1 &= X_1 + \alpha U_1 + \beta U_2 + \gamma U_3 \\
\widetilde{X}_2 &= X_2 + \xi U_1 + \eta U_2 + \zeta U_3 \\
\widetilde{X}_3 &= X_3 - \gamma U_1 + \alpha U_3 \\
\widetilde{X}_4 &= X_4 - \beta U_1 - \gamma U_2 ;
\end{aligned}
$$

putem alege α, β, γ așa fel încît să avem $a_{13} = aU_3$ și ξ, η, ζ pentru a avea $a_{21} = bU_1$ și $a_{22} = cU_1 + dU_2$.

Din $[X_2, U_1, U_2] = 0$ deducem $a_{23} = (b + d)U_3$; din $[X_2, U_1, U_3] = 0$ și $[X_2, U_2, U_3] = 0$ obținem succesiv $b = c = 0$, $d = 0$ și $a = 0$.

Ecuațiile $[X_1, U_i, U_j] = 0$ cer ca $a_{42} = a_{31}$ și $a_{33} = a_{43} = 0$. Constatăm, folosind $[Y_4, U_1, U_2] = 0$ și $[Y_4, U_1, U_3] = 0$, că $a_{41} = \alpha U_2$ și $a_{31} = \frac{1}{2} \alpha U_1$; din $[Y_4, U_2, U_3] = 0$ deducem $a_{32} = -\frac{\alpha}{2} U_2$, însă din $[X_3, U_2, U_3] = 0$ obținem $\alpha = 0$; deci $a_{31} = a_{32} = a_{41} = a_{42} = 0$.

Prin urmare putem alege operatorii X_i încît să avem $a_{ij} = 0$.

Identitățile $[X_1, X_2, U_3] = 0$, $[X_1, X_2, U_2] = 0$, $[X_1, X_2, U_1] = 0$, ne dau succesiv :

$$
\text{(III.10')} \qquad
\begin{aligned}
[X_1, X_2] &= uX_1 + vX_2 + wU_3 \\
[X_2, X_3] &= -uX_3 + wU_1 \\
[X_2, X_4] &= -uX_4 + wU_2 ;
\end{aligned}
$$

însă $v = 0$, așa cum rezultă din $[X_2, X_3, U_2] = 0$.

Vom folosi apoi $[X_1, X_4, U_1] = 0$, $[X_1, X_4, U_2] = 0$, $[X_1, X_4, U_1] = 0$ pentru a stabili că :

$$\begin{aligned} &[X_1, X_4] = mX_2 + nX_3 + pU_1 \\ \text{(III.10}'') \qquad &[X_3, X_4] = -nX_1 + pU_3 \\ &[X_1, X_3] = nX_4 + pU_2 ; \end{aligned}$$

dar $[X_3, X_4, U_2] = 0$ cere $m = 0$.

Din $[X_i, X_j, X_k] = 0$ rezultă condițiile :

$$\text{(III.10}''') \qquad w = \frac{u \cdot n}{2}, \; 2up + nw = 0$$

Să presupunem că $u \neq 0$. Vom efectua transformarea :

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_1 &= X_1 + \frac{w}{u} U_3 \\ \widetilde{X}_2 &= X_2 \\ \widetilde{X}_3 &= X_3 - \frac{w}{u} U_1 \\ \widetilde{X}_4 &= X_4 - \frac{w}{u} U_2 ; \end{aligned}$$

în noua bază avem, conform ecuațiilor (III.10'''), $w = 0$ și deci, așa cum rezultă din (III.10'''), $n = p = 0$.

Dar în acest caz pe spațiu acționează un grup simplu tranzitiv de mișcări :

$$\begin{aligned} &[X_1, X_2] = uX_1, \qquad &&[X_1, X_3] = 0 \\ &[X_2, X_3] = uX_3, \qquad &&[X_1, X_4] = 0 \\ &[X_2, X_4] = -uX_4, \qquad &&[X_3, X_4] = 0 \end{aligned}$$

iar metrica va fi cu curbură nulă ; deci grupul nu e grup complet. Fie deci $u = 0$; din (III.10) rezultă $w = 0$.

Vom schimba X_i :

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_1 &= X_1 + \frac{n}{2} U_3 \\ \widetilde{X}_2 &= X_2 \\ \widetilde{X}_3 &= X_3 - \frac{n}{2} U_1 \\ \widetilde{X}_4 &= X_4 - \frac{n}{2} U_2 ; \end{aligned}$$

prin această transformare nu se modifică decît n şi p şi anume vom avea $\tilde{n} = 0$, $\tilde{p} = p + \frac{n^2}{4}$.

Spaţiul admite un subgrup simplu tranzitiv de mişcări :

$$\begin{array}{lll} & [X_i, X_2] = 0 & (i = 1, 3, 4) \\ \text{(III.11)} & [X_1, X_4] = aU_1 & \\ & [X_1, X_3] = aU_2 & \\ & [X_3, X_4] = aU_3. & \end{array}$$

Metrica invariantă prin acest grup este

$$ds^2 = d\sigma^2 + (dx^2)^2$$

unde $d\sigma^2$ este o metrică nedefinită, cu curbură constantă în variabilele x^1, x^3, x^4.

Grupul complet de mişcări este de dimensiune 7 dacă şi numai dacă $a \neq 0$.

Grupul de mişcări nu este rezolubil.

D. Vom determina spaţiile ce admit ca grup de stabilitate grupul $(\overline{g}_8)$, izomorf cu un grup de rotaţii.

Generatori ai algebrei grupului de stabilitate am văzut că pot fi luate elementele :

$$U_1 = X_{23}, \; U_2 = X_{13}, \; U_3 = X_{12}.$$

Ştim în acest caz că X_i se compune cu U_j în modul următor :

$$\begin{array}{llll} & [X_1, U_1] = a_{11}, & [X_2, U_1] = X_3 + a_{21}, & [X_3, U_1] = -X_2 + a_{31}, \\ & [X_1, U_2] = X_3 + a_{12}, & [X_2, U_2] = a_{22}, & [X_3, U_2] = -X_1 + a_{32}, \\ & [X_1, U_3] = X_2 + a_{13}, & [X_2, U_3] = X_1 + a_{23}, & [X_3, U_3] = a_{33}, \\ \text{(III.12)} & [X_4, U_1] = a_{41}, & [U_1, U_2] = U_3 & \\ & [X_4, U_2] = a_{42}, & [U_1, U_3] = -U_2 & \\ & [X_4, U_3] = a_{43}, & [U_2, U_3] = U_1. & \end{array}$$

Structura de algebră poate fi canonizată ca şi în cazul spaţiilor V_4 omogene, cu metrică definită, problemă rezolvată în [5] [4])

Se demonstrează că X_i pot fi astfel aleşi, încît structura de algebră să fie :

$$\begin{array}{lllll} & [X_1, U_1] = 0, & [X_2, U_1] = X_3 & [X_3, U_1] = -X_2 & [X_4, U_1] = 0 \\ & [X_1, U_2] = X_3, & [X_2, U_2] = 0, & [X_3, U_2] = -X_1, & [X_4, U_2] = 0 \\ & [X_1, U_3] = X_2 & [X_2, U_3] = -X_1, & [X_3, U_3] = 0, & [X_4, U_3] = 0 \\ \text{(III.13)} & [U_1, U_2] = U_3, & [X_1, X_2] = rU_3, & [X_1, X_4] = pX_1 & \\ & [U_1, U_3] = -U_2, & [X_1, X_3] = rU_2, & [X_2, X_4] = pX_2 & \\ & [U_2, U_3] = U_1, & [X_2, X_3] = rU_1, & [X_3, X_4] = pX_3 & \end{array}$$

cu $pr = 0$.

---

[4] Pag. 322.

Dacă $p = r = 0$, metrica este cu curbură nulă.

Pentru $r = 0$, $p \neq 0$, obţinem metrica cu curbură constantă

$$ds^2 = e^{-2px^4}[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2] - (dx^4)^2.$$

Fie deci $r \neq 0$, $p = 0$; obţinem metrica local reductibilă cu grup complet de dimensiune 7

$$ds^2 = d\rho^2 - (dx^4)^2$$

$d\rho^2$ fiind o metrică cu curbură constantă, nenulă, în variabilele x^1, x^2, x^3.

Grupul de mişcări nu este rezolubil.

Am obţinut:

TEOREMA 9. *Există numai două tipuri de metrici omogene de spaţiu V_4, de tip relativist, cu grup complet de mişcări de dimensiune 7 nerezolubil:*

$$\text{i}^\circ : ds^2 = d\sigma^2 + (dx^2)^2$$

$$\text{ii}^\circ : ds^2 = d\rho^2 - (dx^4)^2$$

$d\sigma^2$ *fiind o metrică nedefinită cu curbură constantă nenulă, în variabilela* x^1, x^3, x^4, *iar* $d\rho^2$ *fiind o metrică definită, cu curbură constantă, nenulă, în variabilele* x^1, x^2, x^3.

§ IV. V_4 CU GRUP G_6

A. Vom considera pentru început spaţiile cu grupul de stabilitate $(\bar{g}_3)$; algebra acestui grup este generată deci de elementele $U = X_{12}$, $V = X_{34}$; aceste cîmpuri se compun cu cîmpurile Y_i în modul următor:

$$\text{(IV.1)}\quad \begin{array}{lll} [Y_1, U] = Y_2 + a_1, & [Y_1, V] = b_1 & \\ [Y_2, U] = -Y_1 + a_2, & [Y_2, V] = b_2, & [U, V] = 0 \\ [Y_3, U] = a_3, & [Y_3, V] = -Y_3 + b_3 & a_i, b_i \in (\bar{g}_3) \\ [Y_4, U] = a_4, & [Y_4, V] = Y_4 + b_4 & \\ Y_i = X_i \ (i = 1, 2) \quad , & Y_3 = X_3 - X_4, \ Y_4 = X_3 + X_4. & \end{array}$$

Putem presupune de la început că $a_1 = a_2 = b_3 = b_4 = 0$ adunînd operatorilor Y_i combinaţii lineare de U, V.

Identităţile $[Y_i, U, V] = 0$ dovedesc că pentru această alegere a cîmpurilor Y_i, trebuie ca $a_3 = a_4 = b_1 = b_2 = 0$.

Identităţile $[Y_i, Y_3, U] = 0$, $[Y_i, Y_3, V] = 0$, $(i = 1, 2)$, se scriu

$$\text{(IV.2)}\quad \begin{array}{ll} [[Y_1, Y_3], U] - [Y_2, Y_3] = 0, & [[Y_1, Y_3], V] + [Y_1, Y_3] = 0 \\ [[Y_2, Y_3], U] + [Y_1, Y_3] = 0, & [[Y_2, Y_3], V] + [Y_2, Y_3] = 0. \end{array}$$

Însă subspaţiul vectorilor proprii pentru ad V cu valoarea proprie -1, din algebra grupului de mişcări, este spaţiul generat de Y_3; deci $[Y_1, Y_3] = mY_3$.

Dar din (IV. 2) şi (IV. 1) rezultă $[Y_2, Y_3] = 0$ şi apoi $[Y_1, Y_3] = 0$; în mod analog deducem că $[Y_1, Y_4] = 0$, $[Y_2, Y_4] = 0$.

În ceea ce priveşte parantezele $[Y_1, Y_2]$, $[Y_3, Y_4]$, folosind $[Y_1, Y_2, U] = 0$, $[Y_1, Y_2, V] = 0$, $[Y_1, Y_2, Y_3] = 0$ şi $[Y_1, Y_3, Y_4] = 0$, găsim :

$$[Y_1, Y_2] = aU$$
$$[Y_3, Y_4] = \bar{b}V.$$

Se constată că algebra grupului de mişcări este reductibilă ; revenind la baza X_1, X_2, X_3, X_4, singurele paranteze nenule sînt :

$$\begin{array}{llll} & [X_1, U] = X_2, & [X_3, V] = X_4 & \\ & [X_2, U] = -X_1, & [X_4, V] = X_3 & \\ \text{(IV.3)} & [X_1, X_2] = aU, & [X_3, X_4] = bV & \\ & [X_i, V] = 0, & i = 1, 2 & \\ & [X_j, U] = 0, & j = 3, 4 & [X_i, X_j] = 0. \end{array}$$

Metrica este :

$$ds^2 = d\rho^2 + d\sigma^2. \tag{IV.4}$$

$d\rho^2$ fiind o metrică definită, cu curbură constantă, în 2 variabile iar $d\sigma^2$ o metrică nedefinită în două variabile, cu curbură constantă.

Vom dovedi că dacă metrica (IV. 4) nu este cu curbură constantă, grupul ei complet de mişcări este chiar grupul (IV. 3). Pentru aceasta este suficient să dovedim că grupul complet de mişcări nu este de dimensiune 7 ; dar pentru aceasta este suficient să demonstrăm că nu există subgrupuri ale grupului lui Lorentz de dimensiune 3, ale căror algebre să conţină elementele X_{12}, X_{34}. Acest fapt este uşor de stabilit dacă trecem în algebra izomorfă $sl(2, C)$.

Fie $W = \begin{pmatrix} w & u \\ v & -w \end{pmatrix}$ un al treilea element în $sl(2, C)$ care împreună cu $U = -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $V = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (vezi (7)) să formeze o bază în subalgebra h a subgrupului de dimensiune 3, care presupunem că există. Putem lua $w = 0$; dar, oricare ar fi $z \in C$, trebuie să avem :

$$\left[\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & -z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{pmatrix}\right] \in h$$

ceea ce nu e posibil decît dacă $u = v = 0$.

Dacă cel puţin una dintre metricele $d\rho^2$, $d\sigma^2$ nu este cu curbură nulă, metrica (IV. 4) nu este cu curbură constantă.

B. Fie acuma grupul de stabilitate $(\bar{g}_4)$ cu algebra generată de elementele $U = X_{13} - X_{14}$, $V = X_{23} - X_{24}$.

Forma parantezelor $[Y_i, U]$, $[Y_i, V]$ este :

$$\begin{array}{lll} & [Y_1, U] = Y_3 + a_1, & [Y_1, V] = b_1 \\ & [Y_2, U] = a_2, & [Y_2, V] = Y_3 + b_2 \\ \text{(IV.5)} & [Y_3, U] = a_3, & [Y_3, V] = b_3 \\ & [Y_4, U] = -2Y_1 + a_4, & [Y_4, V] = -2Y_2 + b_4, \end{array}$$

a_i, b_i, Y_i avînd aceleaşi semnificaţii cu cele din (IV. 1).

Prin transformări de forma $\widetilde{Y}_i = Y_i + l_i\,(l_i = \alpha_i U + \beta_i V)$ putem face $\widetilde{a}_1 = \widetilde{a}_4 = \widetilde{b}_4 = 0$.

Identităţile $[Y_i,\ U,\ V] = 0$, $(i = 1,\ 2)$, arată că $b_3 = 0$ şi $a_3 = 0$, iar $[Y_4,\ U,\ V] = 0$ implică relaţia $a_2 = b_1$.

Fie atunci $b_2 = cU + fV$ şi $a_2 = b_1 = gU + hV$.

Vom determina acum $[Y_i,\ Y_j]$; pentru aceasta utilizăm identităţile $[Y_i,\ Y_j,\ U] = 0$, $[Y_i,\ Y_j,\ V] = 0$ şi obţinem :

$$
\begin{aligned}
&[Y_1,\ Y_4] = mY_1 + nY_2 + pY_3 + qY_4 + rU + sV\\
&[Y_3,\ Y_4] = -2qY_1 + mY_3 + n(gU + hV),\\
&[Y_2,\ Y_3] = -\,q(gU + hV),\\
&[Y_1,\ Y_2] = gY_1 + (h+q)Y_2 - \frac{n}{2}\,Y_3 - \frac{1}{2}(mg + ne)\,U -\\
&\qquad\qquad - \frac{1}{2}(mh + nf)\,V\\
&[Y_1,\ Y_3] = -qY_3.
\end{aligned}
$$

Constantele ce apar în aceste relaţii sînt legate prin condiţiile :

$$
\begin{aligned}
&e = 2(h + q)\\
&2g^2 + e(2h + q) - fg = 0\\
&2gh + (h + q)f = 0.
\end{aligned}
$$

Putem determina un unghi θ, aşa fel încît, prin rotaţia :

$$
\text{(IV.6)}\quad \mathrm{R}:\quad
\begin{aligned}
Y_1 &= Y_1 \cos\theta - Y_2 \sin\theta\\
Y_2 &= Y_1 \sin\theta + Y_2 \cos\theta\\
U &= U \cos\theta - V \sin\theta\\
V &= U \sin\theta + V \cos\theta
\end{aligned}
$$

să avem $\widetilde{e} = 0$; aceasta revine la a vedea dacă ecuaţia :

$$g\cos^3\theta - \cos^2\theta\sin\theta\,(e + h) - \cos\theta\sin^2\theta\,(g - f) + h\sin^3\theta = 0,$$

are soluţie. Ecuaţia are însă soluţie reală oricare ar fi e, f, g, h.

Din $[Y_2,\ Y_4,\ V] = 0$, obţinem :

$$[Y_2,\ Y_4] = \alpha Y_1 + mY_2 + \beta Y_3 - fY_4 + \gamma U + \delta V$$

şi $(\alpha - n)\,.\,g = 0$, $(\alpha - n)h = 0$, $q = 0$, iar $[Y_2,\ Y_4,\ U] = 0$ cere ca $h = 0$, $f = 2g$, $\alpha + n = 0$, $mg = nf = 0$ iar din $[Y_1,\ Y_2,\ Y_4] = 0$ obţinem condiţiile (dacă ţinem seama şi de relaţiile deja stabilite între constante) :

$$
\begin{aligned}
&3pg + \frac{mn}{2} - \gamma + s = 0\\
&4rg - \frac{n^2}{2}\ g - \delta g = 0\\
&sg = 0.
\end{aligned}
$$

B$_1$. Dacă $g = 0$, obținem structura : (după ce am efectuat transformarea $\widetilde{Y}_4 = Y_4 - \frac{p}{2} U - \frac{\beta}{2} V$ ceea ce ne-a dat $\widetilde{p} = \widetilde{\beta} = 0$)

$$\begin{aligned}
&[Y_1, U] = Y_3, && [Y_1, V] = 0 \\
&[Y_2, U] = 0, && [Y_2, V] = Y_3,\ [U, V] = 0 \\
&[Y_3, U] = 0, && [Y_3, V] = 0 \\
&[Y_4, U] = -2Y_1, && [Y_4, V] = -2Y_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[Y_1, Y_4] = mY_1 + nY_2 + rU + \left(s - \frac{mn}{4}\right) V \\
(\text{IV.7}) \quad &[Y_3, Y_4] = mY_3 \\
&[Y_2, Y_3] = 0 \\
&[Y_1, Y_2] = -\frac{n}{2} Y_3 \\
&[Y_1, Y_3] = 0 \\
&[Y_2, Y_4] = -nY_1 + mY_2 + \left(\frac{mn}{4} + s\right) U + \delta V.
\end{aligned}$$

Dacă ecuația matricială

$$X^2 + AX + B = 0 \text{ unde } A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} m & n \\ -n & m \end{pmatrix};$$

$$B = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} r & s - \frac{mn}{4} \\ s + \frac{mn}{4} & \delta \end{pmatrix}$$

are soluție reală, atunci dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ este una din soluții, efectuînd schimbarea :

$$\begin{aligned}
\widetilde{Y}_1 &= Y_1 + aU + bV, \\
\widetilde{Y}_2 &= Y_2 + cU + dV,
\end{aligned} \qquad \widetilde{Y}_i = Y_i \quad (i = 3,\ 4)$$

cîmpurile $\widetilde{Y}_1$, $\widetilde{Y}_2$, $\widetilde{Y}_3$, $\widetilde{Y}_4$ vor forma o structură de algebră de grup simplu tranzitiv.

Formele :

$$\begin{aligned}
ds^1 &= e^{-mx^4}(\cos nx^4\, dx^1 + \sin nx^4\, dx^2 + 2y^1\, dx^4) \\
ds^2 &= e^{-mx^4}(-\sin nx^4\, dx^1 + \cos nx^4\, dx^2 + 2y^2 dx^4) \\
ds^3 &= e^{-2mx^4}\{-y_1(\cos nx^4\, dx^1 + \sin nx^4\, dx^2) +
\end{aligned}$$

(pentru $m \neq 0$).

$$+ y^2 (\sin n x^4 \, \mathrm{d}x^1 - \cos n x^4 \, \mathrm{d}x^2) - [(y^1)^2 + (y^2)^2] \, \mathrm{d}x^4 +$$

$$+ \frac{1}{2m} \Bigl[(r + \delta) \, x^1 + \frac{mn}{2} \, x^2 \Bigr] \mathrm{d}x^1 + \frac{1}{2m} \Bigl[- \frac{mn}{2} x^1 + (r + \delta) \, x^2 \Bigr] \mathrm{d}x^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \Bigl[\cos 2n \, x^4 \Bigl(2 s x^1 x^2 + \frac{r - \delta}{2} ((x^1)^2 - (x^2)^2) \Bigr) +$$

$$+ \sin 2n x^4 ((r - \delta) x^1 x^2 - s ((x^1)^2 - (x^2)^2)) \Bigr] \mathrm{d}x^4 \Bigr\} + \mathrm{e}^{-m x^4} \mathrm{d}x^3$$

şi pentru $m = 0$ forma $\mathrm{d}s^3$ este :

$$\mathrm{d}s^3 = - y^1 (\cos n x^4 \, \mathrm{d}x^1 + \sin n x^4 \, \mathrm{d}x^2) + y^2 (\sin n x^4 \, \mathrm{d}x^1 - \cos n x^4 \, \mathrm{d}x^2) +$$

$$+ [(y^1)^2 + (y^2)^2] \, \mathrm{d}x^4 + \Bigl(- \frac{1}{2} (r + \delta) \, x^1 x^4 + \frac{n}{4} \, x^2 \Bigr) \mathrm{d}x^1 -$$

$$- \Bigl(\frac{n}{4} \, x^1 + \frac{1}{2} (r + \delta) \, x^2 x^4) \, \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3 +$$

$$+ \frac{\mathrm{d}x^4}{2} \Bigl[\cos 2n x^4 \Bigl(2 s x^1 x^2 + \frac{r - \delta}{2} ((x^1)^2 - (x^2)^2 \Bigr) +$$

$$+ \sin 2n x^4 ((r - \delta) x^1 x^2 - s ((x^1)^2 - (x^2)^2)) \Bigr]$$

$$\mathrm{d}s^4 = \mathrm{d}x^4$$

$$\mathrm{d}s^5 = \mathrm{e}^{-m x^4} \Bigl\{ \Bigl[- m y^1 + \cos n x^4 \Bigl(r x^1 + \Bigl(\frac{mn}{4} + s \Bigr) \, x^2 \Bigr) +$$

$$+ \sin n x^4 \Bigl(- \Bigl(\frac{mn}{4} + s \Bigr) \, x^1 + r x^2 \Bigr) \Bigr] \, \mathrm{d}x^4 + \mathrm{d}y^1 \Bigr\},$$

$$\mathrm{d}s^6 = \mathrm{e}^{-m x^4} \Bigl\{ \Bigl[- m y^2 + \cos n x^4 \Bigl(\Bigl(s - \frac{mn}{4} \Bigr) \, x^1 + \delta x^2 \Bigr) +$$

$$+ \sin n x^4 \Bigl(- \delta x^1 + \Bigl(\delta - \frac{mn}{4} \Bigr) \, x^2 \Bigr) \Bigr] \, \mathrm{d}x^4 + \mathrm{d}y^2 \Bigr\}$$

sînt invariante pe grupul (IV.7) şi formează o bază duală bazei Y_i, U, V.
Metrica invariantă la grupul (IV.7) va fi 5)

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{-2m x^4} \Bigl\{ (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + \Bigl(\frac{2 (r + \delta)}{m} \, x^1 + n x^2 \Bigr) \, \mathrm{d}x^1 \, \mathrm{d}x^4 +$$

$$+ \Bigl(- n x^1 + \frac{2 (r + \delta)}{m} \, x^2 \Bigr) \, \mathrm{d}x^2 \, \mathrm{d}x^4 + 2 \Bigl[\cos 2n x^4 \Bigl(2 s x^1 x^2 + \frac{r - \delta}{2} \Bigl((x^1)^2 - (x^2)^2 \Bigr) \Bigr) +$$

$$+ \sin 2n x^4 ((r - \delta) x^1 x^2 - s ((x^1)^2 - (x^2)^2) \Bigr] (\mathrm{d}x^4)^2 \Bigr\} + 4 \mathrm{e}^{-m x^4} \, \mathrm{d}x^3 \, \mathrm{d}x^4 \; (m \neq 0)$$

---

5) $\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}s^1)^2 + (\mathrm{d}s^2)^2 + 4 \, \mathrm{d}s^3 \, \mathrm{d}s^4$.

iar pentru $m = 0$:

$$\begin{aligned} & \mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + [-2\,(r + \delta)\, x^1 x^4 + n x^2]\, \mathrm{d}x^1\, \mathrm{d}x^4 - \\ \text{(IV.8)}\quad & - [n x^1 + (r + \delta) x^2 x^4] \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^4 + [\cos 2 n x^4 (4 s x^1 x^2 + (r - \delta)((x^1)^2 - (x^2)^2) + \\ & + \sin 2 n x^4 (2\,(r - \delta)\, x^1 x^2 - 2 s\,((x^1)^2 - (x^2)^2))]\,(\mathrm{d}x^4)^2 + 4 \mathrm{d}x^3 \mathrm{d}x^4. \end{aligned}$$

Vom cerceta dacă grupul de mișcări al metricii (IV.8) este de dimensiune 6.

Să presupunem că metrica (IV. 8) are un grup de mișcări de dimensiune > 6; dar dimensiunea nu poate fi în acest caz decît 7 sau 10.

Dacă dimensiunea grupului de mișcări este 7, grupul (IV.7) trebuie să fie un subgrup al grupului (III.6), deoarece orice subgrup de stabilitate complet, de dimensiune 3, a cărei algebră conține elementele $X_{13} - X_{14}$, $X_{23} - X_{24}$ este grupul $(\overline{g}_6)$ cu $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Să observăm faptul că structura algebrică (IV.7) rămîne neschimbată prin tranformarea R(IV.6).

Efectuînd transformarea R^{-1}, constatăm deci că oricare ar fi sistemul de coordonate normale[6] în punctul x_0 al spațiului V_4 cu metrica (IV.8), în așa fel încît vectorii tangenți canonici în x_0 la V_4, $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$, să aibă respectiv normele $+1$, $+1$, $+1$, -1, există patru cîmpuri Y_i (ce definesc mișcări ale spațiului riemannian) cu valorile în x_0, respectiv, $\frac{\partial}{\partial x^1}$, $\frac{\partial}{\partial x^2}$, $\frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x^4}$, $\frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x^4}$ și care se compun cu U și V ca în (IV.7). Însă un cîmp (ce definește mișcări), cunoscut prin valoarea sa în x_0, este determinat pînă la un cîmp (ce definește mișcări) din grupul de stabilitate al punctului x_0.

Aceleași considerații sînt valabile și pentru spațiul cu grupul de mișcări (III.6).

Presupunînd că grupul complet de mișcări al metricei (IV.8) este grupul (III.6), dacă notăm cu $\overline{Y}_i$ cîmpurile de tranzitivitate din (III.6), este necesar și suficient să existe trei combinații liniare a_i, de U_1, U_2, U_3, așa încît să avem:

$$Y_i = \overline{Y}_i + a_i.$$

Considerînd deocamdată numai parantezele $[Y_i, U]$, $[Y_i, V]$ din structurile (III. 6), (IV. 7), deducem

$$\begin{aligned} Y_1 &= \overline{Y}_1 + \frac{\alpha_3}{2} U_1 \\ Y_2 &= \overline{Y}_2 - \frac{\alpha_3}{2} U_2 \\ Y_3 &= \overline{Y}_3 \\ Y_4 &= \overline{Y}_4 + \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3. \end{aligned}$$

---

[6] în raport cu care, cîmpurile U, V au respectiv, expresiile $U = X_{13} - X_{14}$, $V = X_{23} - X_{24}$.

Considerînd apoi $[Y_i, Y_4]$, $(i = 1, 2)$, obţinem :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = -\frac{n}{2}, \quad b = m \text{ şi condiţiile}$$

$$r = \delta = a - \frac{n^2}{8}, \quad s = 0.$$

Deci metrica (IV.8) are grup de mişcări de dimensiune 7 dacă şi numai dacă în raport cu un anumit sistem de coordonate normale relativ la care $U = X_{13} - X_{14}$, $V = X_{23} - X_{24}$, avem $r = \delta$ şi $s = 0$.

Dar această situaţie se menţine prin transformările de coordonate în raport cu care avem $U = X_{13} - X_{14}$, $V = X_{23} - X_{24}$. Rămîne să probăm dacă metrica (IV.8) este cu curbură constantă. Pentru rezolvarea acestei probleme folosim aceeaşi metodă.

Punînd condiţia ca $[Y_i, U]$, $[Y_i, V]$ din structura (IV.7) să concorde cu $[Y_i, U]$, $[Y_i, V]$ din structura grupului de mişcări al metricii cu curbură constantă, obţinem relaţiile :

$$\begin{aligned} Y_1 &= \overline{Y}_1 + \frac{a_1}{2} V - \frac{a_2}{2} U \\ Y_2 &= \overline{Y}_2 - \frac{a_1}{2} U - \frac{a_2}{2} V \\ Y_3 &= \overline{Y}_3 \\ Y_4 &= \overline{Y}_4 + a_1 R_3 + a_2 L_3 + a_3 U + a_4 V. \end{aligned} \tag{IV.9}$$

Din calcularea parantezei $[Y_i, Y_4]$, folosind (IV.9), deducem că $a_1 = \frac{n}{2}$, $a_2 = -m$, $a_3 = a_4 = 0$ şi condiţia $s = 0$, $r = \delta = \frac{n^2}{8}$.

Deci metrica (IV.8) este un grup complet de dimensiune 10 dacă şi numai dacă :

$$s = 0 \text{ şi } r = \delta = \frac{n^2}{8};$$

(curbura în acest caz este 0).

Am obţinut deci următoarea :

PROPOZIŢIA 1. *Metrica* (*IV.8*) *are grup complet de mişcări de dimensiune 6 dacă şi numai dacă cel puţin una din inegalităţile* :

$$s \neq 0, \quad r \neq \delta$$

este adevărată.

B_2. Dacă $g \neq 0$, se obţine structura :

$$\begin{array}{lll} [Y_1, U] = Y_3, & [Y_1, V] = gU & \\ [Y_2, U] = gU, & [Y_2, V] = 2gV + Y_3 & \\ [Y_3, U] = 0, & [Y_3, V] = 0, & [U, V] = 0 \\ [Y_4, U] = -2Y_1, & [Y_4, V] = -2Y_2 & \end{array} \tag{IV.10}$$

$$[Y_1, Y_4] = 0, \qquad [Y_1, Y_2] = gY_1$$
$$[Y_3, Y_4] = 0, \qquad [Y_1, Y_3] = 0$$
$$[Y_2, Y_3] = 0, \qquad [Y_2, Y_4] = -2gY_4 + \beta Y_3$$

Pentru a obţine forma de structură de mai sus s-a utilizat transformarea :

$$\tilde{Y}_4 = Y_4 - \frac{p}{2} U + \frac{r}{g} V.$$

Pe spaţiu acţionează un grup de mişcări simplu tranzitiv cu formele invariante.

$$ds^1 = e^{-gx^2} dx^1$$

$$ds^2 = dx^2$$

$$ds^3 = -\frac{\beta}{2g} e^{-2gx^2} dx^4 + dx^3$$

$$ds^4 = e^{-2gx^2} dx^4$$

şi deci spaţiul are metrica :

$$\text{(IV.11)} \quad ds^2 = e^{-2gx^2} [(dx^1)^2 + 4dx^3dx^4] + (dx^2)^2 - 2 \frac{\beta}{g} e^{-4gx^2} (dx^4)^2.$$

Ne punem acuma problema determinării grupului complet de mişcări al metricii.

Dacă grupul complet al acestei metrici nu este de dimensiune 6, el trebuie să fie sau de tipul (III.6), sau grup de metrică cu curbură constantă. Dar grupul complet de mişcări al metricei (IV.11) nu poate fi grupul (III.6) deoarece grupul (III.6) este rezolubil, iar grupul (IV.10) este nerezolubil. Metrica (IV.11) este cu curbură constantă pentru $\beta = 0$.

Mai remarcăm faptul că pentru obţinerea structurii (IV.10) am utilizat transformarea (R).

Metrica (IV.11) nu este echivalentă cu metrica (IV.8) pentru că grupul de mişcări al primei metrici este nerezolubil, în timp ce grupul de mişcări al celei de-a doua metrici este rezolubil.

Am obţinut deci următoarea :

PROPOZIŢIA 2. *Metrica* (*IV.11*) *are grup complet de mişcări de dimensiune 6 pentru* $\beta \neq 0$.

C. Să determinăm acum spaţiile al căror subgrup de stabilitate coincide cu grupul $(\overline{g}_5)$.

Pentru un astfel de spaţiu, relaţiile (1) devin :

$$[Y_1, U] = -Y_3 + \alpha_1, \qquad [Y_1, V] = \beta_1$$
$$[Y_2, U] = \alpha_2, \qquad [Y_2, V] = \beta_2, \quad [U,V] = U$$
$$[Y_3, U] = \alpha_3, \qquad [Y_3, V] = Y_3 + \beta_3$$
$$[Y_4, U] = 2Y_1 + \alpha_4, \qquad [Y_4, V] = -Y_4 + \beta_4,$$

în care $U = -X_{13} + X_{14}$, $V = -X_{34}$, iar α_i, β_i sînt combinaţii liniare de U, V; Y_i au aceeaşi valoare în punctul x ca şi în structurile anterioare.

Modificînd cîmpul Y_3 prin adunarea unui cîmp al grupului de stabilitate, putem considera $\beta_3 = p_3 U$; însă din $[Y_3, U, V] = 0$ deducem $\alpha_3 = \beta_3 = 0$.

Schimbînd în acelaşi mod cîmpul Y_2, putem realiza condiţiile:

$$\alpha_2 = p_2 U$$

$$\beta_2 = q_2 U,$$

şi apoi modificînd cîmpul Y_4, putem face $\beta_4 = 0$. De asemenea vom considera $\alpha_1 = 0$, relaţie realizabilă prin schimbarea cîmpului Y_1. Din $[Y_1, U, V] = 0$ obţinem:

$$\alpha_1 = p_1 U$$

$$\beta_1 = q_1 U$$

iar din $[Y_2, U, V] = 0$ rezultă $p_2 = q_2 = 0$. Transformînd din nou Y_3:

$$\widetilde{Y}_3 = Y_3 - p_1 U,$$

avem $\alpha_1 = 0$.

Vom determina acum $[Y_i, Y_j]$.

Din $[Y_2, Y_4, V] = 0$, $[Y_2, Y_4, U] = 0$ rezultă succesiv:

$$[Y_2, Y_4] = aY_4, \qquad [Y_1, Y_2] = -aY_1$$

iar din $[Y_1, Y_2, U] = 0$ obţinem:

$$[Y_2, Y_3] = aY_3.$$

Identităţile $[Y_1, Y_4, V] = 0$, $[Y_3, Y_4, V] = 0$, $[Y_1, Y_4, U] = 0$ impun condiţiile: $q_1 = 0$ şi

$$[Y_3, Y_4] = -2bY_1, \quad [Y_1, Y_4] = bY_4;$$

în sfîrşit, din $[Y_3, Y_4, U] = 0$ rezultă:

$$[Y_1, Y_3] = -bY_3.$$

Din identităţile $[Y_i, Y_j, Y_k] = 0$ rezultă $a \cdot b = 0$. Rezultă deci structura:

$$\begin{array}{ll} [Y_1, U] = -Y_3, & [Y_1, V] = 0 \\ [Y_2, U] = 0, & [Y_2, V] = 0, \quad [U, V] = 0 \\ [Y_3, U] = 0, & [Y_3, U] = Y_3 \\ [Y_4, U] = 2Y_1, & [Y_4, V] = -Y_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} [Y_1, Y_2] = -aY_1, & [Y_1 \; Y_4] = bY_4 \\ [Y_2, Y_3] = aY_3, & [Y_1, Y_3] = -bY_3, \quad a \cdot b = 0 \\ [Y_2, Y_4] = aY_4, & [Y_3, Y_4] = -2bY_1. \end{array}$$

Spațiul are structură de grup.

C_1. Dacă $a \neq 0$, $b = 0$, pe spațiu există formele invariante:

$$
\begin{aligned}
ds^1 &= e^{ax^2} dx^1 \\
ds^2 &= dx^2 \\
ds^3 &= e^{ax^2} dx^3 \\
ds^4 &= e^{ax^2} dx^4
\end{aligned}
$$

și deci metrica invariantă este

$$ds^2 = e^{2ax^2}[(dx^1)^2 + 4dx^3dx^4] + (dx^2)^2;$$

grupul de mișcări al acestei metrici este de dimensiune 10, metrica fiind cu curbură constantă.

C_2. Dacă $a = 0$, $b \neq 0$, grupul de mișcări admite un subgrup simplu tranzitiv, identic cu structura de subgrup simplu tranzitiv din cazul grupurilor de mișcări de dimensiune 7 ($\bar{g}_7$) (pentru $u = w = p = 0$, — u, w, p fiind constantele de structură ale grupului (III.9), (III.10'), (III.10'').

În rezumat, am obținut

Teorema 10. i°. *Metricele* (IV.4), (IV.8), (IV.11) *sînt singurele metrici de spațiu* V_4, *omogen, relativist cu grup complet de dimensiune 6* $i(|a| + |b| > 0$, $|r - \delta| + |s| > 0$, $\beta \neq 0)$.

ii°. *Nu există spații* V_4 *omogene de tip relativist cu grup complet de mișcări de dimensiune 6, cu grup de stabilitate neabelian.*

§ V. SPAȚII V_4 CU GRUP G_5

A. Fie $U = X_{13} - X_{14}$.

Știm că $[Y_i, U]$ sînt:

$$
\begin{aligned}
[Y_1, U] &= Y_3 + a_1 \\
[Y_2, U] &= a_2 U \\
[Y_3, U] &= a_3 U \\
[Y_4, U] &= -2Y_1 + a_4 U.
\end{aligned}
\tag{V.1}
$$

Schimbînd cîmpurile Y_1, Y_3 prin sumarea cu cîte un cîmp ce generează mișcări ale grupului de stabilitate, putem face $a_1 = a_4 = 0$. Folosind identitățile $[Y_i, Y_4, U] = 0$ deducem:

$$
\begin{aligned}
[[Y_1, Y_4], U] &= [Y_3, Y_4] \\
[[Y_3, Y_4], U] &= 2[Y_1, Y_3] + 2a_3Y_1.
\end{aligned}
$$

Dacă luăm:

$$[Y_1, Y_4] = mY_1 + nY_2 + pY_3 + qY_4 + rU,$$

din ecuațiile de mai sus deducem:

$$
\begin{aligned}
[Y_3, Y_4] &= -2qY_1 + mY_3 + (na_2 + pa_3)\, U \\
[Y_1, Y_3] &= \frac{1}{2}(-2a_3Y_1 - 2qY_3 + ma_3\, U).
\end{aligned}
\tag{V.2}
$$

Folosind identitatea $[Y_1, Y_3, U] = 0$ rezultă :

$$[[Y_1, Y_3], U] = a_3 Y_3$$

şi din (V.2) obţinem $a_3 = 0$.

Din $[Y_2, Y_i, U] = 0$ obţinem :

$$\begin{aligned} & [Y_2, Y_4] = aY_1 + aY_2 + cY_3 + dY_4 + eU \\ \text{(V.3)} \qquad & [Y_1, Y_2] = -(a_2 + d)\, Y_1 + \frac{a}{2}\, Y_3 + \frac{ba_2}{2}\, U \\ & [Y_2, Y_3] = (2a_2 + d)\, Y_3. \end{aligned}$$

Coeficienţii din (V.2), (V.3) trebuie să verifice sistemul :

$$\begin{aligned} & q(a_2 + d) = 0 \\ & 2ba_2 + bd - md = 0 \\ & -2nd - na_2 + bq = 0 \\ \text{(V.4)} \qquad & 2cq - pd + pa_2 - \frac{ab}{2} - e = 0 \\ & -2dr + qe + \frac{a_2}{2}(na - b^2 - mb) = 0 \\ & 2mq - nd - 3na_2 = 0, \end{aligned}$$

ecuaţii ce se obţin din $[Y_i, Y_j, Y_k] = 0$.

Efectuînd transformarea

$$\widetilde{Y}_2 = Y_2 - \frac{a_2}{2}\, U$$

avem $\widetilde{a} = 0$.

A_1. Fie $a_2 = 0$.

Din sistemul (V.4) se vede că se impun unele subcazuri.

a. Dacă $d = q = 0$, constantele a, b, c, m, n, p, r, sînt arbitrare iar $e = -\dfrac{ab}{2}$. Avem deci structura de grup rezolubil.

$$\begin{aligned} & [Y_1, U] = Y_3, && [Y_1, Y_4] = mY_1 + nY_2 + pY_3 + rU \\ & [Y_2, U] = 0, && [Y_1, Y_2] = \frac{a}{2}\, Y_3 \\ \text{(V 5)} \qquad & [Y_3, U] = 0, && [Y_2, Y_3] = 0 \\ & [Y_4, U] = -2Y_1, && [Y_2, Y_4] = aY_1 + bY_2 + cY_3 - \frac{ab}{2}\, U \\ & && [Y_3, Y_4] = mY_3 \\ & && [Y_1, Y_3] = 0. \end{aligned}$$

Comparînd această structură cu structura (IV.7) constatăm că dacă $m = b$ și $n = -a$, atunci pe acest spațiu acționează un grup cu cel puțin dimensiunea 6.

Schimbînd Y_2 și Y_4:

$$\tilde{Y}_2 = Y_2 - \frac{a}{2} U$$

$$\tilde{Y}_4 = Y_4 + pU$$

avem în noua bază $\tilde{a} = \tilde{p} = 0$.

PROPOZIȚIA 3. *Metrica omogenă de spațiu V_4 cu grup de mișcări* (*V*.5) *are un grup complet de mișcări de dimensiune* $\geqslant 6$.

Demonstrație Vom arăta că structura algebrică (V.5) se poate completa cu $V = X_{23} - X_{24}$.

Ecuațiile de structură ale grupului completat, dacă există, vor conține în plus relațiile:

$$\begin{array}{lll} & [Y_1, V] = \alpha & \\ \text{(V. 6)} & [Y_2, V] = Y_3 + \beta, & [U, V] = 0 \\ & [Y_3, V] = \gamma & \\ & [Y_4, V] = -2Y_2 + \delta, & \end{array}$$

α, β, γ, δ fiind combinații liniare de U și V.

Din $[Y_i, U, V] = 0$ deducem $\alpha = \gamma = 0$.

Dar pentru a avea o structură de algebră Lie, este necesar și suficient să mai fie verificate ecuațiile $[Y_i, Y_j. V] = 0$. Acestea cer însă: $\beta = 0$ și $\delta = nU + (b - m)V$.

Prin urmare $[Y_i, U]$ generează o subalgebră în algebra (V.5), (V.6) pentru $\alpha = \beta = \gamma = 0$ și $\delta = nU + (b - m)V$.

b. Dacă $\alpha \neq 0$, din sistemul (V.4) rezultă $q = 0$, $m = b$, $n = 0$, $r = 0$, $e = -\left(pd + \frac{ab}{2}\right)$.

Prin transformarea:

$$\tilde{Y}_4 = Y_4 - pU$$

obținem $\tilde{p} = 0$ și deci avem structura:

$$\begin{array}{lll} & [Y_1, U] = Y_3, & [Y_1, Y_4] = mY_1 \\ & [Y_2, U] = 0, & [Y_2, Y_4] = mY_3 \\ \text{(V. 7)} & [Y_3, U] = 0, & [Y_1, Y_3] = 0 \\ & [Y_4, U] = -2Y_1, & [Y_2, Y_4] = mY_2 + cY_3 + dY_4 \\ & (d \neq 0) & [Y_1, Y_2] = -dY_1 \\ & & [Y_2, Y_3] = dY_3. \end{array}$$

Se observă că spațiul are structură de grup, Y_i, definind o algebră.

Vom efectua o nouă schimbare a operatorului Y_4:

$$\widetilde{Y}_4 = Y_4 + \frac{m}{d} Y_2;$$

prin aceasta vom anula constanta m.

Rămîne deci structura de grup simplu tranzitiv

$$(\text{V. } 7') \quad \begin{aligned} &[Y_1, Y_4] = [Y_3, Y_4] = [Y_1, Y_3] = 0 \\ &[Y_2, Y_4] = cY_3 + dY_4 \\ &[Y_1, Y_2] = -dY_1, \qquad (d \neq 0) \\ &[Y_2, Y_3] = dY_3. \end{aligned}$$

Structura (V. 7′) admite sistemul de forme invariante, duale bazei Y_i

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^1 &= \mathrm{e}^{x^2 d} \cdot \mathrm{d}x^1 \\ \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^2 \\ \mathrm{d}s^3 &= \mathrm{e}^{\mathrm{d}x^2} (cx^2 \mathrm{d}x^4 + \mathrm{d}x^3) \\ \mathrm{d}s^4 &= \mathrm{e}^{x^2 d} \cdot \mathrm{d}x^4 \end{aligned}$$

iar metrica spaţiului este:

$$(\text{V. } 8) \quad \begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2ax^2} [(\mathrm{d}x^1)^2 + 4\mathrm{d}x^3\, \mathrm{d}x^4 + 4cx^2(\mathrm{d}x^4)^2] + \\ + \left(\mathrm{d}x^2 + \frac{m}{a} \mathrm{e}^{ax^2} \cdot \mathrm{d}x^4\right)^2 \end{aligned}$$

am înlocuit d din structură cu a pentru a nu se produce confuzii).

c. Să considerăm acum cazul $q \neq 0$; din sistemul (V. 4), se obţine $b = c = d = e = m = 0$.

Efectuînd transformarea:

$$\widetilde{Y}_4 = Y_4 + \frac{r}{q} U,$$

realizăm $r = 0$.

Avem deci structura:

$$(\text{V. } 9) \quad \begin{aligned} &[Y_1, U] = Y_3, && [Y_1, Y_2] = [Y_2, Y_3] = [Y_2, Y_4] = 0 \\ &[Y_2, U] = 0, && [Y_1, Y_4] = nY_2 + pY_3 + qY_4 \\ &[Y_3, U] = 0, && [Y_3, Y_4] = -2qY_1 \\ &[Y_4, U] = -2Y_1 && [Y_1, Y_3] = -qY_3 \qquad (q \neq 0) \end{aligned}$$

Dacă facem transformarea $\widetilde{Y}_4 = Y_4 + \frac{n}{2} Y_2 + \frac{p}{2} Y_3$, avem $\widetilde{n} = \widetilde{p} = 0$.

Formele invariante sînt :

$$\mathrm{d}s^1 = -\frac{2}{q}\left(\frac{1 + x^3x^4}{x^1}\,\mathrm{d}x^1 - x^3\mathrm{d}x^4\right),\quad \mathrm{d}s^3 = -\frac{1}{q}(-x^4\mathrm{d}x^1 + x^1\mathrm{d}x^4)$$

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{q}\,\mathrm{d}x^2,\quad \mathrm{d}s^4 = -\frac{1}{q}\left(\frac{x^3(1 + x^3x^4)}{(x^1)^2}\,\mathrm{d}x^1 + \frac{1}{x^1}\,\mathrm{d}x^3 - \frac{(x^3)^2}{x^1}\,\mathrm{d}x^4\right)$$

şi deci metrica

$$\text{(V. 10)}\qquad \mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}s^1)^2 + \left(\mathrm{d}s^2 + \frac{n}{q}\,\mathrm{d}s^4\right)^2 + 4\left(\mathrm{d}s^3 + \frac{p}{2q}\,\mathrm{d}s^4\right)\mathrm{d}s^4.$$

Ne vom ocupa acum de problema grupurilor complete de mişcări ale metricilor (V. 8), (V. 10).

Grupul complet de mişcări al oricărei metrici omogene obţinute din structurile algebrice ce conţin elementul grupului de stabilitate :

$$U = X_{13} - X_{14}$$

este sau un grup de dimensiune 10, sau de dimensiune 7 (şi deci coincide cu grupul (III. 6) sau (III. 11) sau de dimensiune 6 (şi deci coincide cu grupul (IV. 7) sau de dimensiune 5.

Pentru a stabili care din aceste incidenţe se întîmplă, procedăm ca şi în cazurile precedente.

Pe această cale constatăm că metrica (V.8) este cu curbură constantă dacă şi numai dacă $c = 0$ şi în acest caz între cîmpurile Y_i din structura (V. 7) şi cîmpurile $\overline{Y}_i$ din structura de grup de mişcări al unui spaţiu cu curbură constantă există relaţiile :

$$Y_1 = \overline{Y}_1 - dR_3 + \frac{mt}{2}\,U$$

$$Y_2 = \overline{Y}_2 + \frac{m}{2}\,V$$

$$Y_3 = \overline{Y}_3 + dV$$

$$Y_4 = \overline{Y} + 2dR_1 - mL_3 - dV.$$

Metrica (V. 10) nu este cu curbură constantă.

Dacă notăm prin $\overline{Y}_i$ cîmpurile Y_i din structura (III. 6), condiţia necesară şi suficientă ca una dintre metricele omogene, al căror grup de stabilitate conţine elementul $U = X_{13} - X_{14}$, să aibă grupul de mişcări (III. 6) este să existe constantele a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, aşa fel încît între elementele Y_i, $\overline{Y}_i$ să existe relaţiile :

$$\text{(V. 11)}\qquad \begin{aligned} Y_1 &= \overline{Y}_1 + \frac{a_3}{2}\,U_1 \\ Y_2 &= \overline{Y}_2 + b_1U_1 + b_2U_2 \\ Y_3 &= \overline{Y}_3 \\ Y_4 &= \overline{Y}_4 + a_1U_1 + a_2U_2 + a_3U_3\,. \end{aligned}$$

Dar dacă există aceste constante, atunci $[Y_i, Y_j]$ sînt :

$$
\begin{aligned}
&[Y_1, Y_3] = 0\\
&[Y_1, Y_4] = bY_1 + 2a_1Y_2 + a_2Y_3 + \left(a - \frac{a_3^2}{2}\right)U_2\\
&[Y_3, Y_4] = bY_3\\
\text{(V. 12)}\qquad &[Y_1, Y_2] = \left(b_2 - \frac{a_3}{2}\right)Y_3\\
&[Y_2, Y_3] = 0\\
&[Y_2, Y_4] = (2b_2 - a_3)Y_1 + (2b_1 + b)Y_2 + a_1Y_3 +\\
&+ (a + b_2a_3)\,U_1 + (\alpha a_2 - b_1a_3)U_2
\end{aligned}
$$

(α fiind 0 în acest caz) [7].

Constatăm însă că nici structura (V. 7) şi nici structura (V. 9) nu poate fi completată pînă la structura (III. 6) deoarece :

— în structura (V. 7) $[Y_2, Y_3] \neq 0$, iar

— în structura (V. 9) $[Y_1, Y_3] \neq 0$.

Dacă o metrică omogenă are un grup de mişcări al cărui grup de stabilitate conţine elementul $U = X_{13} - X_{14}$, însă grupul ei complet de mişcări este grupul (III. 11), atunci e necesar şi suficient să existe constantele a_1, a_2, a_3, b_1, d, aşa încît să existe relaţiile :

$$
\begin{aligned}
&Y_1 = \overline{Y}_1 - \frac{a_2}{2}L_3 - \frac{a_3}{2}U\\
\text{(V. 13)}\qquad &Y_2 = \overline{Y}_2 + b_1U + \alpha L_3 \qquad (U = R_2 - L_1)\\
&Y_3 = \overline{Y}_3 - \frac{a_2}{2}U\\
&Y_4 = \overline{Y}_4 + a_1U + a_2R_2 + a_3R_3
\end{aligned}
$$

($\overline{Y}_i$ reprezintă elementele Y_i din structura (III. 11); dar atunci

$$
\begin{aligned}
&[Y_1, Y_2] = b_1\overline{Y}_3 + \left(a_3\alpha - \frac{a_2}{2}b_1\right)U\\
&[Y_2, Y_3] = \alpha\overline{Y}_3 - a_2\alpha U\\
&[Y_2, Y_4] = 2b_1Y_1 - \alpha\overline{Y}_4 + (2\alpha a_1 + \alpha a_2 - a_3b_1)U - \alpha a_2R_2 - a_2b_1L_3\\
&[Y_1, Y_3] = -a_2\overline{Y}_3 + \left(d + \frac{a_2^2}{4}\right)U
\end{aligned}
$$

---

[7] Relaţiile de mai sus sînt valabile pentru $[Y_2, U] = \alpha U$; în cazul de faţă $[Y_2, U] = 0$.

$$[Y_1, Y_4] = -a_3\overline{Y}_1 + \left(a_1 + \frac{a_2}{2}\right)\overline{Y}_3 + a_2\overline{Y}_4 - \left(d + \frac{a_1a_2}{2} + \frac{a_2^2}{2} - \frac{a_3^2}{2}\right)U + $$
$$+ \left(2d + \frac{a_2^2}{2}\right)R_2 + \frac{a_2a_3}{2}\Bigg) L_3$$

$$(\text{V. } 14) \quad [Y_3, Y_4] = -2a_2\overline{Y}_1 - a_3\overline{Y}_3 + \frac{a_2a_3}{2}U + \left(2d + \frac{a_2^2}{2}\right)L_3 .$$

Se constată însă că nici pentru structura (V. 7), nici pentru structura (V. 9) nu există un sistem de constante a_i, b_1, d, α așa încît $[Y_i, Y_j]$ să concorde cu $[Y_i, Y_j]$ date de (V. 14).

Dacă o metrică omogenă are un grup de mișcări, al cărui subgrup de stabilitate conține elementul $U = X_{13} - X_{14}$ și dacă $[Y_i, U]$ nu se exprimă decît cu ajutorul cîmpurilor Y_i (pentru o alegere convenabilă a acestor cîmpuri), condiție îndeplinită în cazul structurilor (V. 7), (V. 9), și dacă metrica admite un grup de mișcări de dimensiune 6, atunci este necesar și suficient să existe un sistem de constante a_1, a_2, b_1, b_2, așa fel încît să avem :

$$(\text{V. } 15) \quad \begin{aligned} Y_1 &= \overline{Y}_1, & U &= X_{13} - X_{14} \\ Y_2 &= \overline{Y}_2 + a_1U + a_2V, & V &= X_{23} - X_{24} \\ Y_3 &= \overline{Y}_3, & & \\ Y_4 &= \overline{Y}_4 + b_1U + b_2V & & \end{aligned}$$

($\overline{Y}_i$ sînt cîmpurile de tranzitivitate din structura (IV. 7)). Dar dacă există constantele a_i, b_i ($i = 1, 2$) făcînd să se îndeplinească (V. 15), $[Y_i, Y_j]$ vor fi :

$$\begin{aligned} &[Y_1, Y_2] = \left(a_1 - \frac{n}{2}\right)\overline{Y}_3 \\ &[Y_1, Y_3] = 0 \\ (\text{V. } 16) \quad &[Y_1, Y_4] = m\overline{Y}_1 + n\overline{Y}_2 + b_1\overline{Y}_3 + rU + \left(s - \frac{mn}{4}\right)V \\ &[Y_2, Y_3] = 0 \\ &[Y_2, Y_4] = (2a_1 - n)\overline{Y}_1 + (m + 2a_2)\overline{Y}_2 + b_2\overline{Y}_3 + \left(\frac{mn}{4} + s\right)U + \delta V \\ &[Y_3, Y_4] = mY_3 . \end{aligned}$$

Pentru structura (V. 7) relațiile (V. 15), (V. 16) nu sînt verificate deoarece $[Y_2, Y_3] \neq 0$.

Nici pentru structura (V. 9) relațiile (V. 15), (V. 16) nu sînt verificate, pentru că $[Y_1, Y_3] \neq 0$.

În concluzie obținem :

PROPOZIȚIA 4. i°. *Metrica (V. 8) este cu grup complet de mișcări de dimensiune 5 dacă și numai dacă $c \neq 0$.*

ii°. *Metrica (V. 10) este un grup complet de mișcări de dimensiune 5.*

Metricile (V. 8), (V. 10) nu sînt echivalente pentru că grupul (V. 7) este rezolubil în timp ce (V. 9) nu este rezolubil.

A$_2$. Studiem structurile cu $a_2 \neq 0$.

Prin transformarea :

$$\widetilde{Y}_4 = Y_4 + pU, \quad \widetilde{Y}_2 = a_2 Y_2$$

avem în noua bază $\widetilde{p} = 0$ şi $\widetilde{a}_2 = 1$[8].

a. Fie $q = 0$. Din sistemul (V. 4) rezultă că trebuie să considerăm două cazuri : $n = 0$ şi $n \neq 0$. Din acelaşi sistem rezultă că pentru $n = 0$ se impune studiul cazurilor $d = -2,\ 0$, şi $d \neq 0,\ -2$.

a$_1$. Dacă $n = 0$ şi $d = 0$, rezultă $b = 0$ şi deci avem structura :

$$\begin{array}{llll} & [Y_1,\ U] = Y_3, & [Y_2,\ Y_4] = cY_3, & [Y_1,\ Y_4] = mY_1 + rU \\ \text{(V. 17)} & [Y_2,\ U] = U, & [Y_1,\ Y_2] = -Y_1, & [Y_3,\ Y_4] = mY_3 \\ & [Y_3,\ U] = 0, & [Y_2,\ Y_3] = 2Y_3, & [Y_1,\ Y_3] = 0 \\ & [Y_4,\ U] = -2Y_1. & & \end{array}$$

Structura se mai poate simplifica prin transformarea :

$$\widetilde{Y}_1 = Y_1 - \frac{m}{4} U$$

$$\widetilde{Y}_4 = Y_4 + \frac{m}{2} Y_2$$

după aplicarea căreia vom avea $\widetilde{m} = 0$.

Un sistem de forme invariante este :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^1 &= \mathrm{e}^{x^2} (\mathrm{d}x^1 - 2y\mathrm{d}x^4) \\ \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^2 \\ \mathrm{d}s^3 &= \mathrm{e}^{2x^2}\left[-y\mathrm{d}x^1 + \mathrm{d}x^3 - \left(\frac{c}{2}\mathrm{e}^{-2x^2} + (y)^2 - \frac{r}{2}(x^1)^2 \right) \mathrm{d}x^4 \right] \\ \mathrm{d}s^4 &= \mathrm{d}x^4 \\ \mathrm{d}s &= \mathrm{e}^{x^2} (\mathrm{d}y + rx^1\mathrm{d}x^4), \end{aligned}$$

iar metrica este :

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}s^1)^2 + a^2\left(\mathrm{d}s^2 + \frac{m}{2}\,\mathrm{d}s^4\right)^2 + 4\mathrm{d}s^3\mathrm{d}s^4$$

sau

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2x^2}(\mathrm{d}x^1)^2 + a^2(\mathrm{d}x^2 + \frac{m}{2}\,\mathrm{d}x^4)^2 + 4\mathrm{e}^{2x^2}\,\mathrm{d}x^3\mathrm{d}x^4 + 2(r(x^1)^2\,\mathrm{e}^{2x^2} - c)\,(\mathrm{d}x^4)^2$$

$$\text{(V. 18)} \qquad\qquad (a \neq 0)$$

---

[8] În cele ce urmează ţinem seama de această transformare la determinarea metricii şi a grupului complet.

a$_2$. Fie $n = 0$ şi $d = -2$. Din sistemul (V. 4) rezultă $m = 0$ şi $r = \frac{1}{8} b^2$; deci se obține structura:

$$
\begin{array}{lll}
 & [Y_1, U] = Y_3, & [Y_2, Y_4] = bY_2 + cY_3 - 2Y_4 \\
 & [Y_2, U] = U, & [Y_1, Y_2] = Y_1 + \frac{b}{2} U \\
(\text{V. } 19) & [Y_3, U] = 0, & [Y_2, Y_3] = 0 \\
 & [Y_4, U] = -2Y_1, & [Y_1, Y_4] = \frac{1}{8} b^2 U \\
 & & [Y_3, Y_4] = 0 \\
 & & [Y_1, Y_3] = 0.
\end{array}
$$

Dar putem schimba baza pentru a avea $\tilde{b} = 0$; această transformare este:

$$\widetilde{Y}_1 = Y_1 + \frac{b}{4} U$$

$$\widetilde{Y}_4 = Y_4 - \frac{b}{2} Y_2.$$

Spațiul va avea structură de grup. Sistemul de forme invariante:

$$
\begin{aligned}
ds^1 &= e^{-x^2} dx^1 \\
ds^2 &= dx^2 \\
ds^3 &= -\frac{c}{2} e^{-2x^2} dx^4 + dx^3 \\
ds^4 &= e^{-2x^2} dx^4
\end{aligned}
$$

ne conduce la metrica:

$$ds^2 = e^{-2x^2} (dx^1)^2 + a^2(dx^2 - \frac{b}{2} e^{-2x^2} dx^4)^2 + 4e^{-2x^2} dx^3 dx^4 - 2c\, e^{-4x^2} (dx^4)^2$$

$$(\text{V. } 20) \qquad (a \neq 0).$$

a$_3$. Pentru $n = 0$ şi $d \neq -2$, 0 din sistemul (V. 4) rezultă $b = \frac{md}{d+2}$, şi $r = -\frac{m^2(d+1)}{2(d+2)^2}$.

Se obține deci structura :

$$\begin{array}{lll} & [Y_1, U] = Y_3 & [Y_2, Y_4] = \frac{md}{d+2} Y_2 + cY_3 + dY_4 \\ & [Y_2, U] = U, & [Y_1, Y_2] = -(1+d)\, Y_1 + \frac{md}{2(d+2)} U \\ \text{(V. 21)} & [Y_3, U] = 0, & [Y_2, Y_3] = (2+d) Y_3 \\ & [Y_4, U] = -2Y_1, & [Y_1, Y_4] = mY_1 - \frac{m^2(d+1)}{2(d+2)^2} U \\ & (d \neq -2, 0), & [Y_3, Y_4] = mY_3, \; [Y_1, Y_3] = 0. \end{array}$$

Prin schimbarea de operatori :

$$\widetilde{Y}_1 = Y_1 - \frac{m}{2(d+2)} U$$

$$\widetilde{Y}_4 = Y_4 + \frac{m}{d+2} Y_2$$

se obține $\widetilde{m} = 0$.

Se observă că Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 generează un grup de mișcări simplu tranzitiv :

$$\begin{aligned} &[Y_2, Y_4] = cY_3 + dY_4 \\ &[Y_1, Y_2] = -(d+1) Y_1 \\ &[Y_2, Y_3] = (d+2) Y_3 \\ &[Y_1, Y_4] = [Y_3, Y_4] = [Y_1, Y_3] = 0. \end{aligned}$$

Un sistem de forme invariante pe acest grup este

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^1 &= \mathrm{e}^{(1+d)x^2}\, \mathrm{d}x^1 \\ \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^2 \\ \mathrm{d}s^3 &= \mathrm{e}^{(2+d)}\, \mathrm{d}x^3 - \frac{c}{2} \mathrm{e}^{x^2 d}\, \mathrm{d}x^4 \\ \mathrm{d}s^4 &= \mathrm{e}^{x^2 d}\, \mathrm{d}x^4 \end{aligned}$$

și deci se obține metrica :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2(1+d)x^2} (\mathrm{d}x^1)^2 + a^2(\mathrm{d}x^2 + b\mathrm{e}^{x^2 d}\, \mathrm{d}x^4)^2 + 4\mathrm{e}^{2(d+1)x^2}\, \mathrm{d}x^3 \mathrm{d}x^4 - 2c\mathrm{e}^{2x^2 d} (\mathrm{d}x^4)^2$$

$$\text{(V. 22)} \qquad \left(a \neq 0,\ d \neq -2,\ 0,\ b = \frac{m}{d+2}\right).$$

În secțiunile a_1, a_2, a_3 am considerat $n = 0$.

Dar dacă $n \neq 0$, sistemul (V. 4) nu este compatibil.

b. Fie acum $q \neq 0$. Sistemul (V. 4) dă :

$$d = -1,\ m = -b,\ n = -bq,\ e = 2cq,\ r = cq^2$$

și deci avem structura :

$$\begin{array}{lll}
 & [Y_1, U] = Y_3, & [Y_2, Y_4] = bY_2 + cY_3 - Y_4 + 2cqU \\
 & [Y_2, U] = U, & [Y_1, Y_2] = \dfrac{b}{2} U \\
 & [Y_3, U] = 0, & [Y_2, Y_3] = Y_3 \\
\text{(V. 23)} & [Y_4, U] = -2Y_1 & \\
 & [Y_1, Y_4] = -bY_1 - bqY_2 + qY_4 - cq^2U & \\
 & [Y^3, Y_4] = -2qY_1 - bY_3 - bqU & \\
 & [Y_1, Y_3] = -qY_3. &
\end{array}$$

Putem considera însă $b = c = 0$, așa cum rezultă prin schimbarea :

$$\widetilde{Y}_1 = Y_1 + \frac{b}{2} U$$

$$\widetilde{Y}_4 = Y_4 - bY_2 - \frac{c}{2} Y_3 - cqU .$$

Operatorii Y_i vor determina o structură de grup pe spațiul omogen, condițiile de structură fiind :

$$\begin{aligned}
&[Y_2, Y_4] = -Y_4 \\
&[Y_1, Y_2] = 0 \\
&[Y_2, Y_3] = Y_3 \qquad\qquad (q \neq 0) \\
&[Y_1, Y_4] = qY_4 \\
&[Y_3, Y_4] = -2qY_1 \\
&[Y_1, Y_3] = -qY_3.
\end{aligned}$$

Pe grupul de mai sus sînt formele invariante :

$$\begin{aligned}
ds^1 &= -\frac{2}{q}\left(\frac{1 + x^3x^4}{x^1} \cdot dx^1 - x^3dx^4\right) \\
ds^2 &= dx^2 \qquad\qquad (q \neq 0) \\
ds^3 &= -\frac{1}{q} e^{x^2} (-x^4dx^1 + x^1dx^4) \\
ds^4 &= -\frac{1}{q} e^{-x^2} \left(\frac{x^3 (1 + x^3x^4)}{(x^1)^2} dx^1 + \frac{dx^3}{x^1} - \frac{(x^3)^2}{x^1} dx^4\right)
\end{aligned}$$

iar metrica este :

$$ds^2 = (ds^1)^2 + a^2(ds^2 - b\,ds^4)^2 + 4\left(ds^3 - \frac{c}{2}ds^4\right)ds^4$$

$$\text{(V. 24)} \qquad (a \neq 0).$$

Vom studia acum problema determinării grupurilor complete de mişcări ale metricilor (V. 18), (V. 20), (V. 22), (V. 24).

Folosind aceeaşi metodă de determinare a grupului complet, constatăm că (V. 18), (V. 20), (V. 24) nu sînt cu curbură constantă iar (V. 22) este cu curbură constantă dacă şi numai dacă $b = c = 0$.

Nici una dintre aceste metrici nu are grup complet de dimensiune 7 (de aceasta ne convingem utilizînd ecuaţiile (V. 11), (V. 12) şi (V. 13), (V. 14) — dar nici unul dintre aceste două sisteme nu este compatibil în cazul metricilor enumerate).

Rămîne să cercetăm dacă metricile (V. 18), (V. 20), (V. 22), (V. 24) au grup de mişcări de dimensiune 6.

Dacă grupul complet de mişcări al acestor metrici este de dimensiune 6, atunci grupurile lor de mişcări nu pot fi decît de tipul (IV. 10). Dar să observăm faptul că Y_1, Y_2 şi U, V din structura (IV. 10) s-au obţinut printr-o transformare ortogonală R a cîmpurilor iniţiale Y_1, Y_2 şi U, V :

$$R: \quad \begin{aligned} \widetilde{Y}_1 &= Y_1\cos\theta - Y_2 \sin\theta, \quad U = X_{13} - X_{14} \\ \widetilde{Y}_2 &= Y_1\sin\theta + Y_2 \cos\theta, \quad V = X_{23} - X_{24} \\ \widetilde{U} &= U\cos\theta - V\sin\theta \\ \widetilde{V} &= U\sin\theta + V\cos\theta. \end{aligned}$$

Transformarea R însă revine la a schimba sistemul de coordonate normale :

$$\begin{aligned} \widetilde{x}^1 &= x^1\cos\theta - x^2\sin\theta \\ \widetilde{x}^2 &= + x^1\sin\theta + x^2\cos\theta \end{aligned}$$

Dar pe spaţiul cu metrica (IV. 10) există un sistem de coordonate normale $\mathfrak{N}$ în punctul x_0, cu proprietatea că există patru cîmpuri Y_i pe acest spaţiu, ce induc mişcări ale metricii (IV. 11) şi care în punctul x_0 au respectiv valorile : $\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x^4}, \frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x^4}$ şi două cîmpuri U, V (ce definesc mişcări) ale grupului de stabilitate, cîmpurile Y_i, U, V formînd structura (IV. 10).

Să presupunem acum că una dintre metricile (V. 18), (V. 20), (V.22), (V. 24) are grup complet de mişcări de dimensiune 6 ; dar în acest caz grupul complet al acelei metrici este grupul (IV. 10). Vom lua pe acel spaţiu V_4 cu grup G_5 (ce admite deci grup G_6) sistemul de coordonate normale $\mathfrak{N}$.

În raport cu acest sistem de coordonate, dacă notăm prin $\overline{Y}_i$ cîmpurile din structura (IV. 10) şi cu Y_i cîmpurile din structurile

(V. 18)—(V. 24) (în ipoteza că admit grup de mișcări de dimensiune 6), este necesar să existe a_1, a_2, b_1, b_2 așa încît să avem :

$$\begin{aligned} Y_1 &= \overline{Y}_1 \\ Y_2 &= \overline{Y}_2 + a_1 U + a_2 V \\ Y_3 &= \overline{Y}_3 \\ Y_4 &= \overline{Y}_4 + b_1 U + b_2 V ; \end{aligned}$$

dar atunci avem :

$$\begin{aligned} [Y_1, Y_2] &= g\overline{Y}_1 + a_1\overline{Y}_3 + ga_2 U \\ [Y_1, Y_3] &= 0 \\ [Y_1, Y_4] &= b_1\overline{Y}_3 + gb_2 U \\ [Y_2, Y_3] &= 0 \\ [Y_2, Y_4] &= 2a_1\overline{Y}_1 + 2a_2\overline{Y}_2 + b_2\overline{Y}_3 - 2g\overline{Y}_4 + b_1 gU + 2b_2 gV \\ [Y_3, Y_4] &= 0. \end{aligned}$$

(g este constanta din structura (IV. 10)).

Stabilim pe această cale că numai metrica (V. 20) admite un grup de mișcări de dimensiune 6 și aceasta dacă și numai dacă $b^2 = 8ca$.

Să rezolvăm acum problema echivalenței metricilor (V. 18), (V. 20), (V. 22), (V. 24).

Constatăm că grupurile de mișcări ale primelor trei metrici sînt rezolubile, iar grupul de mișcări al ultimei metrici este nerezolubil. Deci primele trei metrici nu sînt echivalente cu ultima metrică. Pe de altă parte, constatăm că a doua algebră derivată a grupului de mișcări al primei metrici este de dimensiune 1, în timp ce a doua algebră derivată a grupului metricilor (V. 20) și (V. 22) este de dimensiune 2. Deci prima metrică nu este echivalentă cu următoarele două. Rămîne de văzut dacă metricile (V. 20), (V. 22) sînt echivalente. Printr-un calcul direct ne convingem că, dacă pe spațiul (V. 20) schimbăm sistemul de coordonate normale, în așa fel încît forma ecuațiilor $[Y_i, U]$ să rămînă neschimbată, și dacă notăm cu $\overline{Y}_i$ cîmpurile obținute pornind de la al doilea sistem de coordonate, între Y_i și $\overline{Y}_j$ sînt relațiile :

$$\begin{aligned} \overline{Y}_1 &= \varepsilon Y_1 - rY_3 - sa_2 U \\ \overline{Y}_2 &= \overline{\varepsilon} Y_2 - \varepsilon\overline{\varepsilon} s Y_3 + tU & \qquad \varepsilon, \overline{\varepsilon} &= \pm 1 \\ \overline{Y}_3 &= \varepsilon Y_3 & r, s, t, v, &\in R. \\ \overline{Y}_4 &= 2rY_1 + 2sY_2 - \varepsilon(r^2 + s^2)Y_3 + \varepsilon Y_4 + vU \end{aligned}$$

(schimbarea de coordonate presupunem că invariază metrica din spațiul tangent în punctul x_0 al spațiului riemannian V_4).

Dacă metricile (V. 20), (V. 22) ar fi echivalente, atunci ar trebui să existe o transformare de tipul celei de mai sus care ar face ca $\overline{Y}_i$ să verifice ecuațiile de structură (V. 21). Însă ecuația $[\overline{Y}_2, \overline{Y}_3] = a_2 (2 + d) Y_3$ nu poate fi verificată.

Prin urmare metricile (V. 20), (V. 22) nu sînt echivalente.

Avem deci :

PROPOZIȚIA 5. *Singurele metrici V_4 omogene, cu grup complet de dimensiune 5, al căror grup de stabilitate este grupul* $(\bar{g}_2)$ *sînt* :

1° (V. 8) *dacă* $c \neq 0$
2° (V. 10)
3° (V. 18)
4° (V. 20) *dacă* $b^2 \neq 8ac$
5° (V. 22) *dacă* $|b| + |c| \neq 0$
6° (V. 24).

B. Să considerăm grupul de stabilitate de dimensiune 1, cu operatorul $U = \lambda X_{12} + \mu X_{34}$, $|\lambda| + |\mu| > 0$.

După ce facem schimbarea de operatori

$$Y_i = X_i \qquad (i = 1,\ 2)$$
$$Y_3 = X_3 - X_4$$
$$Y_4 = X_3 + X_4$$

vom avea :

$$[Y_1,\ U] = \lambda Y_2 + a_1 U$$
$$[Y_2,\ U] = -\lambda Y_1, + a_2 U, \qquad (a_i \in R).$$
$$[Y_3,\ U] = -\mu Y_3 + a_3 U$$
$$[Y_4,\ U] = \mu Y_4 + a_4 U.$$

B$_1$. Să presupunem că λ și μ sînt nenuli — dar atunci putem alege Y_i așa fel încît să avem $a_i = 0$. Putem lua $\mu = 1$. Fie A transformarea liniară definită pe algebra grupului de mișcări prin relația :

$$A(W) = [W,\ U]$$

și E aplicația identică

Din $[Y_1,\ Y_2,\ U] = 0$, $[Y_3,\ Y_4,\ U] = 0$ rezultă $[Y_1,\ Y_2] = aU$, $[Y_3,\ Y_4] = bU$. Din $[Y_i,\ Y_3,\ U] = 0$, $i = 1,\ 2$, deducem condițiile :

$$[[Y_1,\ Y_3],\ U] + [Y_1\ Y_3] - \lambda[Y_2,\ Y_3] = 0$$
$$[[Y_2,\ Y_3],\ U] + [Y_2,\ Y_3] + \lambda[Y_1,\ Y_3] = 0,$$

sau :

$$(A + E)([Y_1,\ Y_3]) = \lambda[Y_2,\ Y_3]$$
$$(A + E)([Y_2,\ Y_3]) = -\lambda[Y_1,\ Y_3]. \qquad \text{(V. 25)}$$

Dar, aplicînd $A + E$ ambilor membri (V. 25), avem

$$(A + E)^2([Y_1,\ Y_3]) = -\lambda^2 \cdot [Y_1,\ Y_3].$$

Ecuația ρ — caracteristică a matricei $(A + E)^2$ este :

$$\rho^2[(1 - \lambda^2 - \rho^2)^2 + 4\lambda^2](4 - \rho) = 0.$$

Însă această ecuație nu admite soluția $\rho = -\lambda^2$.

Deci $[Y_1, Y_3] = [Y_2, Y_3] = 0$.

Identitățile $[Y_i, Y_4, U] = 0$, $i = 1, 2$, se vor scrie:

$$(A - E)([Y_1, Y_4]) = \lambda[Y_2, Y_4]$$
$$(A - E)([Y_2, Y_4]) = -\lambda[Y_1, Y_4];$$

de aici deducem însă, în mod analog:

$$(A - E)^2([Y_1, Y_4]) = -\lambda^2([Y_1, Y_4].$$

Ecuația ρ — caracteristică a matricei $(A - E)^2$ este

$$\rho^2[4\lambda^2 + (1 - \lambda^2 - \rho^2)^2](4 - \rho) = 0,$$

însă nici această ecuație nu admite rădăcina $\rho = -\lambda^2$. Rezultă deci $[Y_1, Y_4] = [Y_2, Y_4] = 0$.

Dar $[Y_1, Y_2, Y_3] = 0$, $[Y_1, Y_3, Y_4] = 0$ cer $a = b = 0$. În concluzie, $[Y_i, Y_j] = 0$.

Deci nu există spații V_4 omogene de tip relativist cu grup complet de dimensiune 5 și cu grupul de stabilitate $(\bar{g}_1)$ cu λ și μ nenuli.

B$_2$. Fie $\lambda = 0$; putem lua $\mu = 1$.

Alegem Y_3, Y_4 așa încît să avem $a_3 = a_4 = 0$.

Printr-o transformare ortogonală a elementelor Y_1, Y_2 vom anula a_2.

Din $[Y_1, Y_3, U] = 0$, $[Y_1, Y_2, U] = 0$, $[Y_2, Y_3, U] = 0$ deducem succesiv $a_1 = 0$ și

$$\begin{aligned}&[Y_1, Y_3] = a\,Y_3\\ &[Y_1, Y_2] = bY_1 + cY_2 + dU \qquad \text{(V.26)}\\ &[Y_2, Y_3] = eY_3.\end{aligned}$$

Constantele a, b, c, d, e sînt legate prin relația

$$an + ce + d = 0, \qquad \text{(V.27)}$$

așa cum rezultă din $[Y_1, Y_2, Y_3] = 0$.

Dacă $|b| + |c| \neq 0$, să presupunem $b \neq 0$, printr-o transformare

$$\widetilde{Y}_1 = \alpha_1 Y_1 + \beta_1 Y_2 + \gamma_1 U$$
$$\widetilde{Y}_2 = \alpha_2 Y_1 + \beta_2 Y_2,$$

matricea $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix}$ fiind ortogonală, putem face $\widetilde{c} = \widetilde{d} = 0$; dar din (V.27) rezultă $d = 0$.

Din raționamentul făcut rezultă că parantezele $[Y_i, Y_j]$ $(i, j = 1, 2, 3)$ pot fi scrise:

$$\begin{aligned}&[Y_1, Y_2] = bY_1\\ &[Y_1, Y_3] = aY_3 \text{ cu } a \cdot b = 0 \qquad \text{(V.28)}\\ &[Y_2, Y_3] = eY_3.\end{aligned}$$

Celelalte identități Jacobi formate cu U ne conduc la relațiile :

$$\begin{aligned} &[Y_1, Y_4] = \alpha Y_4 \\ (\text{V.29}) \qquad &[Y_2, Y_4] = \beta Y_4 \\ &[Y_3, Y_4] = \gamma Y_1 + \delta Y_2 + \eta U. \end{aligned}$$

Ecuațiile $[Y_i, Y_j, Y_k] = 0$ stabilesc între constantele $a, b, e, \alpha, \beta, \delta, \gamma, \eta$ relațiile :

$$(\text{V.29}') \qquad \begin{aligned} ab &= 0, & b\alpha &= 0 \\ \gamma(a + \alpha) - b\delta &= 0, & \gamma(e + \beta) + \gamma b &= 0 \\ \delta(a + \alpha) &= 0, & \delta(e + \beta) &= 0 \\ \eta(a + \alpha) &= 0, & \eta(e + \beta) &= 0 \end{aligned}$$

a. Fie $b = 0$. Printr-o transformare ortogonală a elementelor Y_1, Y_2 putem realiza $a = 0$.

Dacă $\delta \neq 0$, prin transformarea :

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}_1 &= Y_1 \\ \widetilde{Y}_2 &= \gamma Y_1 + \delta Y_2 + \eta U \end{aligned}$$

avem $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\eta} = 0$, $\delta = 1$ și deci $\alpha = 0$, $\beta = -e$; de aici structura

$$(\text{V.30}) \qquad \begin{aligned} &[Y_1, U] = 0, && [Y_1, Y_2] = 0, && [Y_1, Y_4] = 0 \\ &[Y_2, U] = 0, && [Y_1, Y_3] = 0, && [Y_2, Y_4] = -eY_4 \\ &[Y_3, U] = -Y_3, && [Y_2, Y_3] = eY_3, && [Y_3, Y_4] = Y_2 \\ &[Y_4, U] = Y_4. \end{aligned}$$

Metrica omogenă este :

— pentru $e \neq 0$:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{4}{e^2}\left[\mathrm{d}x^1 + a\left(\frac{1 + x^3x^4}{x^2}\mathrm{d}x^2 - x^3\mathrm{d}x^4\right)\right]^2 + \frac{4b^2}{e^2}\left(\frac{1 + x^3x^4}{x^2}\mathrm{d}x^2 - x^3\mathrm{d}x^4\right)^2 +$$

$$+ \frac{8}{e}(-x^4\mathrm{d}x^2 + x^2\mathrm{d}x^4)\cdot\left(\frac{x^3(1 + x^3x^4)}{(x^2)^2}\mathrm{d}x^2 + \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x^3 - \frac{(x^3)^2}{x^2}\mathrm{d}x^4\right);$$

$$(b \neq 0)$$

— pentru $e = 0$:

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^1 + a(x^3\mathrm{d}x^4 + \mathrm{d}x^2))^2 + b^2(x^3\mathrm{d}x^4 + \mathrm{d}x^2)^2 + 4\mathrm{d}x^3\mathrm{d}x^4$$

$$(\text{V.31}) \qquad (b \neq 0)$$

Grupul complet de mișcări este de dimensiune 5.

Dacă $\delta = 0$ vom considera două cazuri : $\gamma \neq 0$ și $\gamma = 0$.

Pentru $\gamma \neq 0$, prin transformarea $\gamma\widetilde{Y}_1 = \gamma Y_1 + \eta U$, avem $\widetilde{\eta} = 0$; de aici va rezulta $\alpha = 0$ și $\beta = -e$.

Structura care s-a obţinut este inclusă în cea precedentă. Dacă avem $\gamma = 0$, vom considera două subcazuri : $\eta \neq 0$ şi $\eta = 0$. Pentru $\gamma = 0$ şi $\eta \neq 0$ rezultă $\alpha = 0$, $\beta = -e$ şi deci structura

$$\begin{array}{lll} [Y_1, U] = 0, & [Y_1, Y_2] = 0, & [Y_1, Y_4] = 0 \\ [Y_2, U] = 0, & [Y_1, Y_3] = 0, & [Y_2, Y_4) = -e\, Y_4, \ (\eta \neq 0) \\ [Y_3, U] = -Y_3, & [Y_2, Y_3] = eY_3, & [Y_3, Y_4] = \eta U \\ [Y_4, U] = Y_4. & & \end{array}$$

Structura mai poate fi simplificată dacă schimbăm Y_2 :

$$\widetilde{Y}_2 = Y_2 + eU\,;$$

după schimbare avem $\tilde{e} = 0$.

Se observă însă că grupul complet de mişcări este de dimensiune 6.

Fie acuma $\gamma = 0$ şi $\eta = 0$. Printr-o transformare ortogonală a elementelor Y_1, Y_2, putem face $\alpha = 0$.

Schimbînd Y_2 : $\widetilde{Y}_2 = Y_2 - \beta U$, avem : $\widetilde{\beta} = 0$.

Rezultă structura :

$$\text{(V.32)} \quad \begin{array}{lll} [Y_1, U] = 0, & [Y_1, Y_2] = 0, & [Y_1, Y_4] = 0 \\ [Y_2, U] = 0, & [Y_1, Y_3] = 0, & [Y_2, Y_4] = 0 \\ [Y_3, U] = -Y_3, & [Y_2, Y_3] = aY_3, & [Y_3, Y_4] = 0 \\ [Y_4, U] = Y_4 & & \end{array}$$

şi deci metrica :

$$\text{(V.33)} \qquad ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + 4e^{ax^2}\, dx^3 dx^4.$$

Pentru $a \neq 0$ grupul complet al metricii (V. 33) este de dimensiune 5 ; dacă $a = 0$, metrica are curbură nulă.

b. Dacă $b \neq 0$, atunci $a = 0$, $\alpha = 0$, şi $\delta = 0$.

Vom considera cazurile : $\eta \neq 0$ şi $\eta = 0$.

Pentru $\eta \neq 0$, rezultă $\beta = -e$ şi $\gamma = 0$.

Prin transformarea $\widetilde{Y}_2 = Y_2 + eU$, avem $\tilde{e} = 0$ şi deci structura

$$\begin{array}{lll} [Y_1, U] = 0, & [Y_1, Y_3] = 0, & [Y_1, Y_4] = 0 \\ [Y_2, U] = 0, & [Y_1, Y_2] = bY_1 & [Y_2, Y_4] = 0 \\ [Y_3, U] = -Y_3, & [Y_2, Y_3] = 0, & [Y_3, Y_4] = \eta U \\ [Y_4, U] = Y_4 & (b \neq 0,\ \eta \neq 0). & \end{array}$$

Structura aceasta conduce însă la o metrică cu grup complet de dimensiune 6.

Să presupunem acum că $\eta = 0$.

Dacă $\gamma = 0$, după efectuarea transformării $\widetilde{Y}_2 = Y_2 - eU$, avem

$$(\text{V}.34)\quad \begin{array}{lll} [Y_1, U] = 0, & [Y_1, Y_2] = bY_1, & [Y_1, Y_4] = 0 \\ [Y_2, U] = 0, & [Y_1, Y_3] = 0, & [Y_2, Y_4] = Y_4 \\ [Y_3, U] = -Y_3, & [Y_2, Y_3] = 0, & [Y_3, Y_4] = 0 \\ [Y_4, U] = Y_4, & (b \neq 0). & \end{array}$$

iar metrica este :

$$(\text{V}.35)\qquad ds^2 = e^{-2bx^2}(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + 4e^{\beta x^2}\, dx^3\, dx^4, \qquad (b \neq 0).$$

Folosind pentru determinarea grupului complet de mișcări aceeași metodă ca și mai sus, constatăm că metrica (V.35) are grup complet de dimensiune 5 pentru $\beta \neq -2b$ (în caz contrar are grup de dimensiune 10) sau dacă $\beta \neq 0$ (în caz contrar are grup de dimensiune 6).

Dacă $\gamma \neq 0$, ca și mai sus, putem alege Y_2 așa încît $e = 0$; deci avem structura :

$$(\text{V}.36)\quad \begin{array}{lll} [Y_1, U] = 0, & [Y_1, Y_2] = bY_1, & [Y_1, Y_4] = 0 \\ [Y_2, U] = 0, & [Y_1, Y_3] = 0, & [Y_2, Y_4] = -bY_4 \\ [Y_3, U] = -Y_3, & [Y_2, Y_3] = 0, & [Y_3, Y_4] = \gamma Y_1 \\ [Y_4, U] = Y_4, & (b \neq 0, \quad \gamma \neq 0) & \end{array}$$

iar metrica este :

$$(\text{V}.37)\quad ds^2 = e^{-2bx^2}(dx^1 + \gamma x^3\, dx^4)^2 + (dx^2)^2 + 4e^{-bx^2}\, dx^3 dx^4, \quad (b \neq 0, \ \gamma \neq 0).$$

Calculînd algebrele derivate pe ordinul 1 și 2 ale grupurilor (V. 30), (V. 32), (V. 34), (V. 36), constatăm că aceste grupuri nu sînt două cîte două izomorfe; deci metricile (V. 31), (V. 33), (V. 35), (V. 37) sînt două cîte două neechivalente.

Am obținut deci :

PROPOZIȚIA 6. *Singurele metrici V_4 omogene, de tip relativist, ale căror grupuri de stabilitate sînt generate de X_{34} (cu grup complet de dimensiune 5), sînt :*

1° (V. 31)

2° (V. 33) *dacă* $a \neq 0$

3° (V. 35) *dacă* $\beta \neq 0$ *și* $\beta \neq -2b$

4° (V. 37)

B_3. Rămîne să determinăm spațiile V_4 omogene de tip relativist al căror grup de stabilitate este generat de $U = X_{12}$. În baza formulelor (1) avem :

$$\begin{array}{l} [X_1, U] = X_2 \\ [X_2, U] = -X_1 \\ [X_3, U] = [X_4, U] = 0. \end{array}$$

Dar aceleaşi relaţii apar şi în cazul spaţiilor V_4 omogene cu metrică definită, clasificate în [5] [9].

Se deduce forma structurilor :

$$[X_1, X_2] = pX_3 + qX_4 + rU, \qquad [X_3, X_4] = mX_3 + nX_4 + sU$$
$$[X_1, X_3] = \lambda X_1, \qquad [X_1, X_4] = \rho X_1$$
$$[X_2, X_3] = \lambda X_2, \qquad [X_2, X_4] = \rho X_2$$

iar constantele ce apar sînt supuse condiţiilor :

$$q[X_3, X_4] + 2\lambda(X_1, X_3] = 0, \qquad p[X_3, X_4] - 2\rho[X_1, X_2] = 0$$
$$m[X_1, X_3] + n[X_1, X_4] + sX_2 = 0, \qquad m[X_2, X_3] + n[X_2, X_4] - sX_1 = 0.$$

Vom presupune că $|m| + |n| \neq 0$.

Dacă $|m| > |n|$, printr-o transformare Lorentz specială :

$$\overline{X}_3 = X_3 \operatorname{ch}\theta + X_4 \operatorname{sh}\theta$$
$$\overline{X}_4 = X_3 \operatorname{sh}\theta + X_4 \operatorname{ch}\theta$$

putem realiza $\tilde{n} = 0$.

a) Să presupunem că $m \neq 0$. Efectuînd transformarea $\widetilde{Y}_4 = aY_4$ $(a \neq 0)$, pentru un a convenabil, avem îndeplinită condiţia $|m| > |n|$; dar fiind îndeplinită această condiţie, putem deci să considerăm şi $\tilde{n} = 0$.

Se obţin structurile :

$$(\text{V}.38) \quad \begin{array}{lll} [X_1, U] = X_2, & [X_1, X_2] = 0, & [X_3, X_4] = X_3 \\ [X_2, U] = -X_1, & [X_1, X_3] = 0, & [X_1, X_4] = \rho X_1 \\ [X_3, U] = 0, & [X_2, X_3] = 0, & [X_2, X_4] = \rho X_2, \\ [X_4, U] = 0, & & \end{array}$$

$$(\text{V}.39) \quad \begin{array}{lll} [X_1, U] = X_2, & [X_1, X_2] = X_3, & [X_3, X_4] = X_3 \\ [X_2, U] = -X_1, & [X_1, X_3] = 0, & [X_1, X_4] = \frac{1}{2} X_1 \\ [X_3, U] = 0, & [X_2, X_3] = 0, & [X_2, X_4] = \frac{1}{2} X_2 \\ [X_4, U] = 0. & & \end{array}$$

Metricile corespunzătoare sînt :

$$(\text{V}.38') \quad ds^2 = e^{2\rho x^4}[(dx^1)^2 + (dx^2)^2] + e^{2x^4}(dx^3)^2 - a^2(dx^4)^2 \quad (a \neq 0)$$

şi :

$$(\text{V}.39') \quad ds^2 = e^{2x^4}[(dx^1)^2 + (dx^2)^2] + e^{4x^4}(dx^3 - x^1\,dx^2)^2 - 4a^2(dx^4)^2 \ (a \neq 0).$$

Metrica (V. 38′) este cu grup complet de dimensiune 5 pentru $\rho \neq 0, 1$.

---

[9] Pag. 330–333.

b. Structurile cu $m = 0$, $(n \neq 0)$, le obținem schimbînd în (V. 38), (V.39) indicii 3, 4 între ei.

Rezultă metricile

$$\text{(V.40)} \quad ds^2 = e^{2\rho x^3}\,[(dx^1)^2 + (dx^2)^2] + a^2 (dx^3)^2 - e^{2x^3} (dx^4)^2, \ (\rho \neq 0,1;\ (a \neq 0)$$

$$\text{(V.41)} \quad ds^2 = e^{2x^3}[(dx^1)^2 + (dx^2)^2] + 4a^2 (dx^3)^2 - e^{4x^3}(dx^4 - x^1 dx^2)^2, \ (a \neq 0)$$

c. Dacă $m = n = 0$, se obțin structurile :

$$\text{(V.42)} \quad \begin{array}{lll} [X_1, U] = X_2, & [X_3, X_4] = 0 & \\ [X_2, U] = -X_1, & [X_1, X_2] = 0, & [X_1, X_4] = \rho X_1 \\ [X_3, U] = 0, & [X_1, X_3] = \lambda X_1 & [X_2, X_4] = \rho X_2 \\ [X_4, U] = 0, & [X_2, X_3] = \lambda X_2, & \end{array}$$

$$\text{(V.43)} \quad \begin{array}{lll} [X_1, U] = X_2, & [X_3, X_4] = 0, & [X_1, X_3] = 0 \\ [X_2, U] = -X_1, & [X_1, X_4] = 0, & [X_2, X_3] = 0 \\ [X_3, U] = 0, & [X_2, X_4] = 0 & \\ [X_4, U] = 0, & [X_1, X_2] = pX_3 + qX_4 + rU. & \end{array}$$

Structura (V. 42) conduce la o metrică cu grupa complet de dimensiune $\geqslant 7$.

Metrica corespunzătoare grupului (V. 43), este :

— dacă $r = 0$

$$\text{(V.44)} \quad ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (px^1\, dx^2 + dx^3)^2 - (qx^1\, dx^2 + dx^4)^2.$$

— dacă $r \neq 0$:

pentru $r > 0$:

$$ds^2 = \frac{1}{r}\,[(dx^1)^2 + (dx^2)^2]\,\mathrm{ch}^{-2} x^1 + \left(\frac{p}{r}\,\mathrm{th}\, x^1\, dx^2 + dx^3\right)^2 - \left(\frac{q}{r}\,\mathrm{th}\, x^1\, dx^2 + dx^4\right)^2$$

pentru $r < 0$:

$$ds^2 = \frac{1}{-r}\,[(dx^1)^2 + (dx^2)^2]\,(x^1)^{-2} + \left(dx^3 - \frac{p}{r}\frac{dx^2}{x^1}\right)^2 - \left(dx^4 - \frac{q}{r}\frac{dx^2}{x^1}\right)^2.$$

Metrica (V. 44) are grup complet de mişcări de dimensiune 5 dacă sînt îndeplinite relațiile :

1° $|p| + |q| + |r| \neq 0$ (în caz contrar, metrica este cu curbură constantă — nulă)

2° $p + q \neq 0$, sau $r \neq 0$ (în caz contrar, metrica are grup de mişcări de dimensiune 7, tipul (III.6)

3° $p^2 - q^2 + 2r \neq 0$ (în caz contrar, metrica are grup complet de mişcări de dimensiune 7, tipul (III.13)

4° $|p| + |q| \neq 0$ (în caz contrar, metrica are grup complet de dimensiune 6, tipul (IV.3).

Avem deci :

PROPOZIŢIA 7. *Singurele metrici* V_4 *omogene de tip relativist cu grup complet de dimensiune 5 al căror grup de stabilitate este generat de* X_{12} *sînt* : (*V. 38'*), (*V. 39'*), (*V. 40*), (*V. 41*), (*V. 44*), (*condiţiile enunţate după fiecare metrică în parte*).

Reunind rezultatele din acest paragraf, avem

TEOREMA 11. *Singurele metrici* V_4 *omogene de tip relativist cu grup complet de dimensiune 5 sînt metricile din propoziţiile 6, 7.*

Primită la redacţie la 12 iulie 1967

Institutul de matematică al Academiei Republicii
Socialiste România, str. M. Eminescu nr. 47,
Bucureşti.

BIBLIOGRAFIE

1. L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*, Spoerri, Pisa, 1918.
2. A. DOBRESCU, *Clasificarea grupurilor Lie cu patru parametri*. St. şi cerc. mat., 4, *3–4* (1953).
3. GH. VRĂNCEANU, *Leçons de Géométrie différentielle*, vol. I, Editura Academiei R. P. R., Bucureşti 1957.
4. GH. VRĂNCEANU, *Leçons de Géométrie différentielle*, vol. II, Editura Academiei R. P. R., Bucureşti 1957.
5. GH. VRĂNCEANU, *Leçons de Géométrie différentielle*, vol. III, Editura Academiei R.P.R., Bucureşti 1964.
6. GH. VRĂNCEANU şi C. TELEMAN, *Geometria euclidiană, geometrii neeuclidiene şi teoria relativităţii*, Editura tehnică, Bucureşti.
7. *Mişcări în spaţii cu conexiune afină*. Cazan, 1965.

ORSZÁGOS [illegible] KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date din text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzuanţelor internaţionale. Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine in exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

1968 FEB 2

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, A. DELEANU, M. JURCHESCU, **Topologie, Categorii, Suprafeţe riemanniene**, 1967, 394 p., 21,50 lei.

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.

ROMULUS CRISTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.

N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.

ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, **Metode matematice în hidrogazodinamica subterană**, 1966, 582 p., 31 lei.

AL. GHIKA, **Analiza funcţională**, 1967, 594 p., 31 lei.

S. GUIAŞU şi R. THEODORESCU, **Teoria matematică a informaţiei**, 1966, 227 p., 8,25 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, vol. II, 1966, 669 p., 38 lei.

S. STOÏLOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

IVAN SINGER, **Cea mai bună aproximare în spaţii vectoriale normate prin elemente din subspaţii vectoriale**, 1967, 386 p., 23 lei.

MARIUS I. STOKA, **Geometrie integrală**, 1967, 240 p., 9,75 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 1, P. 1—126, BUCUREŞTI, 1968

I. P. „Informaţia" — c. 6084

43831

Lei 12.

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

2

TOMUL 20

1968

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMANIA

COMITETUL DE REDACŢIE

Acad. MIRON NICOLESCU — **redactor responsabil**;
Acad. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
Acad. GH. MIHOC;
Acad. G. VRĂNCEANU;
Acad. CAIUS IACOB;
Acad. TIBERIU POPOVICIU;
Acad. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAŞ — secretar de redacţie

În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, Bucureşti, Căsuţa poştală 134—135 sau la reprezentanţii săi din străinătate.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondenţă, se trimit la Comitetul de redacţie al revistei pe adresa: Str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

F 762

TOM. 20, Nr. 2
1968

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

SUMAR

Pag.

M. BALÁZS, Asupra metodei coardei pentru rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare 129
V. BARBU, Ecuaţii funcţionale neliniare în spaţii Banach şi probleme la limită 137
FLORICA BUCUR, Asupra valuărilor semiinelelor de transformări interioare 165
H. COHN, Asupra fluctuaţiei sumelor de variabile aleatoare dependente 169
MARIANA CRAIU şi MARCEL N. ROŞCULEŢ, Cercetări asupra seriilor trigonometrice. VII. Calculul coeficienţilor seriei Fourier asociată unei funcţii neintegrabile de singularităţi algebrico-logaritmice oarecare 173
DUMITRU GAŞPAR, O proprietate de comutativitate a pseudorezolvantei 189
DOREL HOMENTCOVSCHI, Asupra mişcării unui fluid compresibil perfect conductor în jurul unui profil subţire cu grosime 191
N. MARCOV, Mişcarea fluidelor vîscoase electroconductoare în jurul profilelor subţiri (I) 199
N. MARCOV, Mişcarea fluidelor vîscoase în jurul unor profile subţiri (II) 213
I. MATEI, Clasificarea grupurilor lui Lie reale neintegrabile cu cinci parametri 223
GR. C. MOISIL, Logica clasică a propoziţiilor de tip superior . 237
HUBA SZÖCS, O metodă de transformare a proceselor structural-omogene în ansambluri statistice 259
IOAN TOMESCU, Asupra sintezei funcţiilor booleene cu ajutorul reţelelor disjunctive 267
RODICA TRANDAFIR, Familii de curbe măsurabile din planul proiectiv 283

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 2, P. 127–312 BUCUREŞTI 1968

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS
1863

ASUPRA METODEI COARDEI PENTRU REZOLVAREA ECUAȚIILOR OPERAȚIONALE NELINIARE

DE

M. BALÁZS

(Cluj)

În lucrarea de față sînt prezentate teoreme de existență și de unicitate ale ecuației operaționale $P(x) = \Theta$ cu metoda coardei [2], în cazul cînd operația $P(x)$ este omogenă și $\Gamma_0 = \overset{-1}{D}\,[x_0, cx_0;\, P(x)]$ există și este mărginit, respectiv există. Se mai dă o teoremă de existență și o teoremă de unicitate a ecuației $P(x) = \Theta$ cînd $\overset{-1}{D}\,[u, cu;\, P(x)]$ există și este mărginit pentru orice u dintr-o sferă dată.

Metoda coardei este una dintre metodele iterative folosită, în ultimul timp, pentru rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare în spații liniare normate. A. S. Sergheev în lucrarea [2] stabilește două teoreme, dintre care una se referă la existența, iar cealaltă la unicitatea soluției ecuațiilor operaționale neliniare în spații Banach. Aceste teoreme sînt demonstrate în condițiile analoage condițiilor Cauchy-Kantorovici [1]. Ordinul de convergență obținut de A. S. Sergheev este inferior ordinului de convergență de la metoda lui Cauchy-Kantorovici. S. Ul'm [3] demonstrează că dacă în locul metodei coardei folosim metoda lui Steffensen, care în esență este un caz particular al metodei coardei, atunci obținem același ordin de convergență ca și în cazul metodei lui Cauchy-Kantorovici, fără să presupunem derivabilitatea operației. În lucrarea citată a lui Ul'm se presupune că ecuația

$$P(x) = \Theta \tag{1}$$

se poate scrie sub forma $P(x) = x - \Phi(x) = \Theta$ și că diferența divizată a lui $\Phi(x)$ este uniform mărginită împreună cu inversa diferenței divizate de ordinul întîi al lui $P(x)$ într-o sferă dată.

În cadrul lucrării de față stabilim cîteva teoreme referitoare la existența respectiv la unicitatea soluției ecuației operaționale (1) în cazul cînd

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 2, P. 129–136, BUCUREȘTI, 1968

operaţia $P(x)$ este omogenă, $P(cx) = cP(x)$, îmbunătăţind în acest caz condiţiile date de S. A. Sergheev şi S. Ul'm. Despre operaţia $P(x)$ presupunem că este definită şi continuă într-o sferă completă dată din spaţiul liniar normat X şi cu valori în spaţiul Y de acelaşi tip. În cele ce urmează diferenţele divizate de ordinul întîi respectiv de ordinul al doilea introduse de A. S. Sergheev le vom nota prin $D[u, v; P(x)]$ respectiv $D[w, u, v; P(x)]$, [4].

TEOREMA 1. *Dacă sînt satisfăcute condiţiile:*

1°. *există un punct* $x_0 \in X$ *şi o constantă* $c \neq 0$, $c \neq 1$ *pentru care operaţia liniară* $D[x_0, cx_0; P(x)]$ *admite inversul* $\Gamma_0 = \overset{-1}{D}[x_0, cx_0; P(x)]$ *şi* $\|\Gamma_0\| \leqslant B_0$;

2°. *este cunoscută delimitarea*

$$\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leqslant \eta_0;$$

3°. $\|D[w, u, v; P(x)]\| \leqslant K$ *pentru orice* u, v, w *din sfera* S: $\|x - x_0\| \leqslant \left(\frac{3}{2} + |c|\right)\eta_0$;

4°. $h_0 = B_0 \eta_0 K(1 + |c|) \leqslant \frac{1}{4}$,

atunci ecuaţia (1) *are o soluţie* x^* *către care converge şirul* (x_n) *dat de algoritmul*

$$x_{n+1} = x_n - \overset{-1}{D}[x_n, cx_n; P(x_n)]\, P(x_n) = x_n - \Gamma_n P(x_n) \tag{2}$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$

iar rapiditatea convergenţei se caracterizează prin inegalitatea

$$\|x^* - x_n\| \leqslant 4\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\left(\frac{4}{9}\right)^{2^n-1}(4h_0)^{2^n-1}\eta_0.$$

Demonstraţie. Se demonstrează că trecînd de la x_0 la x_1, de la x_1 la x_2 etc. condiţiile 1°—4° rămîn valabile.

Folosind definiţia diferenţelor divizate de ordinul doi, din condiţiile 1° — 4° şi (2) obţinem

$$\begin{aligned}\|\Gamma_0\{D[x_0, cx_0; P(x)] - D[x_1, cx_1; P(x)]\}\| &= \|\Gamma_0\{D[x_0, cx_0; P(x)] - \\ -D[cx_0, x_1; P(x)] + D[cx_0, x_1; P(x)] &- D[x_1, cx_1; P(x)]\}\| \leqslant \\ \leqslant B_0 K[\|x_1 - x_0\| + |c|\,\|x_1 - x_0\|] &\leqslant B_0 K(1 + |c|)\eta_0 = h_0 \leqslant \frac{1}{4},\end{aligned}$$

de unde în baza teoremei lui Banach operaţia $H = I - \Gamma_0\{D[x_0, cx_0; P(x)] - D[x_1, cx_1; P(x)]\}$ are invers $\overset{-1}{H}$ şi

$$\|\overset{-1}{H}\| \leqslant \frac{1}{1 - h_0}. \tag{3}$$

Deoarece $\overset{-1}{H}\Gamma_0 = \Gamma_1 = \overset{-1}{D}[x_1, cx_1; P(x)]$, avem

$$\|\Gamma_1\| \leqslant \frac{B_0}{1 - h_0} = B_1 \tag{4}$$

deci condiţia 1° este satisfăcută pentru x_1.

Din formula lui Newton

$$\Gamma_0 P(x_1) = \Gamma_0 P(x_0) + \Gamma_0 D[x_0, cx_0; P(x)](x_1 - x_0) + $$
$$+ \Gamma_0 D[x_1, x_0, cx_0; P(x)](x_1 - cx_0)(x_1 - x_0)$$

şi din (2) avem

$$\|\Gamma_0 P(x_1)\| \leqslant B_0 K \|x_1 - x_0\| \|x_1 - cx_0\| \leqslant B_0 K |c| \eta_0 \tag{5}$$

deoarece

$$x_1 - cx_0 = \Gamma_0 P(cx_0) = c\,\Gamma_0 P(x_0). \tag{6}$$

Ţinînd seama de relaţiile (3), (5) şi de egalitatea $\overset{-1}{H}\Gamma_0 = \Gamma_1$, rezultă

$$\|\Gamma_1 P(x_1)\| \leqslant \frac{h_0}{1 - h_0}\eta_0 = \eta_1 \leqslant \frac{\eta_0}{3}. \tag{7}$$

Astfel condiţia 2° este verificată pentru x_1.

Punctele x_0, cx_0 şi x_1 se găsesc în sfera S, deoarece în mod evident avem $\|x_0 - x_1\| \leqslant \eta_0$, iar $\|x_0 - cx_0\| \leqslant \|x_0 - x_1\| + \|x_1 - cx_0\| \leqslant \eta_0 + \eta_0 |c| = (1 + |c|)\eta_0$, unde am folosit relaţia (6), deci şi condiţia 3° este satisfăcută.

Din inegalităţile (4) şi (7) obţinem

$$h_1 = B_1 \eta_1 K (1 + |c|) \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^2 h_0^2 \leqslant \frac{1}{3^2} < \frac{1}{4}$$

deci condiţia 4° este îndeplinită.

În consecinţă, înlocuind constantele B_0, η_0, h_0 cu B_1, η_1, h_1, condiţiile 1° — 4° sînt îndeplinite pentru x_1.

Pe baza inducţiei matematice se demonstrează că

$$\Gamma_n = \overset{-1}{D}[x_n, cx_n; P(x)] \text{ există şi } \|\Gamma_n\| \leqslant B_n = \frac{B_{n-1}}{1 - h_{n-1}} \tag{8}$$

$$\|\Gamma_n P(x_n)\| \leqslant \frac{h_{n-1}\eta_{n-1}}{1 - h_{n-1}} = \eta_n \leqslant \frac{4}{3} h_{n-1}\eta_{n-1} \tag{9}$$

$$h_n = \frac{h_{n-1}^2}{(1 - h_{n-1})^2} \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^2 h_{n-1}^2. \tag{10}$$

Din inegalităţile (9) şi (10) rezultă

$$\eta_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{4}{9}\right)^{2^n - 1} (4h_0)^{2^n - 1}\eta_0. \tag{11}$$

Se ştie că $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \eta_n$ şi atunci, folosind relaţia (11), obţinem

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \eta_n + \ldots + \eta_{n+p-1} \leqslant \tag{12}$$
$$\leqslant 4\eta_0 \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{4}{9}\right)^{2^n - 1} (4h_0)^{2^n - 1} \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^p\right].$$

Sfera S fiind completă, rezultă că există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Dacă în relația (12) facem $p \to \infty$, atunci se obține inegalitatea care caracterizează rapiditatea convergenței.

Trebuie să mai arătăm că atît x_n cît și cx_n se găsesc în sfera S. În adevăr

$$\|x_0 - x_n\| \leqslant \|x_0 - x_1\| + \|x_1 - x_2\| + \ldots + \|x_{n-1} - x_n\| \leqslant \eta_0 +$$

$$+ \frac{\eta_0}{3} + \ldots + \frac{\eta_0}{3^{n-1}} < \frac{3}{2}\eta_0 < \left(\frac{3}{2} + |c|\right)\eta_0$$

și deoarece avem

$$\|x_n - cx_n\| \leqslant \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - cx_n\| \leqslant \eta_n (1 + |c|),$$

rezultă că

$$\|x_0 - cx_n\| \leqslant \|x_0 - x_1\| + \ldots + \|x_{n-1} - x_n\| +$$

$$+ \|x_n - cx_n\| \leqslant \eta_0 \left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3^n} + |c|\right) < \left(\frac{3}{2} + |c|\right)\eta_0.$$

Observație. Soluția x^* se găsește în sferele $\|x - x_0\| \leqslant \frac{3}{2}\eta_0$ și $\|x - cx_0\| \leqslant \left(\frac{1}{2} + |c|\right)\eta_0$.

Să arătăm că x^* este soluția ecuației (1). În acest scop scriem că

$$D[x_n, cx_n; P(x)] = D[x_n, cx_n; P(x)] - D[x_n, cx_{n-1}; P(x)] +$$

$$+ D[x_n, cx_{n-1}; P(x)] - D[x_{n-1}, cx_{n-1}; P(x)] + D[x_{n-1}, cx_{n-1}; P(x)] -$$

$$- \ldots - D[x_0, cx_0; P(x)] + D[x_0; cx_0 P(x)] =$$

$$= D[cx_n, cx_{n-1}, x_n; P(x)]\, c\, (x_n - x_{n-1}) +$$

$$+ D[x_n, x_{n-1}, cx_{n-1}; P(x)]\, (x_n - x_{n-1}) +$$

$$+ \ldots + D[cx_1, cx_0, x_0; P(x)]\, c\, (x_1 - x_0) + D[x_0, cx_0; P(x)],$$

de unde avem

$$\|D[x_n, cx_n; P(x)]\| \leqslant K\, [|c|(\eta_0 + \eta_1 + \ldots + \eta_{n-1}) + \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_{n-1}] +$$

$$+ \|D[x_0, cx_0; P(x)]\| \leqslant \frac{3|c| + 1}{2}\eta_0 + \|D[x_0, cx_0; P(x)]\| = M$$

ceea ce înseamnă că $\|D[x_n, cx_n; P(x)]\|$ este mărginit. Deci dacă în relația (2) scrisă sub forma

$$P(x_n) = D[x_n, cx_n; P(x)]\, (x_n - x_{n+1})$$

trecem la limită, cînd $n \to \infty$, obținem $P(x') = \Theta$, deoarece $P(x)$ este continuă în punctul x^*.

Pe baza teoremei 1 se demonstrează cu uşurinţă următoarea teoremă, în care condiţiile sînt îmbunătăţite :

TEOREMA 2. *Dacă sînt satisfăcute condiţiile :*

1°. *există un punct* $x_0 \in X$ *şi o constantă* $c \neq 0$, $c \neq 1$ *pentru care operaţia liniară* $D[x_0, cx_0; P(x)]$ *admite inversul* $\Gamma_0 = \overset{-1}{D}[x_0, cx_0; P(x)]$;

2°. *este cunoscută delimitarea*

$$\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leqslant \eta_0;$$

3°. $\|\Gamma_0 D[w, u, v; P(x)]\| \leqslant \widetilde{K}$ *pentru orice* u, v, w, *din sfera* S;

4°. $\widetilde{h}_0 = \eta_0 \widetilde{K}(1 + |c|) \leqslant \frac{1}{4}$,

atunci ecuaţia (1) are o soluţie x^* către care converge şirul (x_n) dat de algoritmul (2) şi rapiditatea convergenţei este caracterizată de inegalitatea

$$\|x^* - x_n\| \leqslant 4 \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \left(\frac{4}{9}\right)^{2^n - 1} (4\widetilde{h}_0)^{2^n - 1} \eta_0$$

Demonstraţie. Se arată că din condiţiile teoremei 2 rezultă condiţiile teoremei 1 pentru ecuaţia $\widetilde{P}(x) = \Theta$, unde $\widetilde{P}(x) = \Gamma_0 P(x)$, [4].

Observaţie. Teoremele 1 şi 2 sînt valabile şi în cazul cînd în locul condiţiei 4° luăm condiţia $\|D[u, v; P(x)] - D[v, w; P(x)]\| \leqslant K\|u - w\|$ respectiv $\|\Gamma_0 \{D[u, v; P(x)] - D[v, w; P(x)]\}\| \leqslant \widetilde{K}\|u - w\|$.

TEOREMA 3. *Dacă condiţiile teoremei 1 sînt satisfăcute şi* $|c| \leqslant \frac{3}{4}$, *atunci în sferele* $S : \|x - x_0\| \leqslant \left(\frac{3}{2} + |c|\right)\eta_0$ *şi* $\overline{S} : \|x - cx_0\| \leqslant \left(\frac{3}{2} + |c|\right)\eta_0$ *ecuaţia* (1) *are o singură soluţie.*

Demonstraţie. În adevăr, fie $\tau \neq x^*$ o soluţie a ecuaţiei (1) care se află în sferele S şi $\overline{S}$, adică pentru care avem

$$\|\tau - x_0\| \leqslant \left(\frac{3}{2} + |c|\right)\eta_0 \text{ şi } \|\tau - cx_0\| \leqslant \left(\frac{3}{2} + |c|\right)\eta_0.$$

Avem

$$\|\tau - x_{n+1}\| = \|\tau - \Gamma_n P(\tau) - x_n + \Gamma_n P(x_n)\| \leqslant B_n K \|\tau - x_n\| \, \|\tau - cx_n\|$$

şi

$$\|\tau - cx_{n+1}\| = \|\tau - \Gamma_n P(\tau) - cx_n + c\Gamma_n P(x_n)\| \leqslant B_n K \|\tau - x_n\| \, \|\eta - cx_n\|,$$

de unde obţinem

$$\|\tau - x_{n+1}\| \leqslant \eta_{n+1} \left(\frac{3}{2} + |c|\right)^{2^{n+1}} \eta_0 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{9}{4} \eta_0 \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} (4h_0)^{2^{n+1} - 1} \left[\frac{4}{9}\left(\frac{3}{2} + |c|\right)\right]^{2^{n+1}}.$$

Deci dacă $\frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}+|c|\right)\leqslant 1$, sau $|c|\leqslant\frac{3}{4}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\tau$. Deoarece avem şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$, din unicitatea limitei rezultă că $x^*=\tau$, ceea ce era de demonstrat.

Observaţie. Dacă $|c|\leqslant\frac{7}{4}$, atunci ecuaţia (1) are o singură soluţie care aparţine sferelor $\|x-x_0\|\leqslant\frac{3}{2}\eta_0$ şi $\|x-cx_0\|\leqslant\left(\frac{1}{2}+|c|\right)\eta_0$. Demonstrarea acestei afirmaţii se face în mod analog cu demonstrarea teoremei 3.

TEOREMA 4. *Dacă sînt satisfăcute condiţiile*

1°. $\|\overset{-1}{D}[u, cu; P(x)]\|\leqslant B$ *pentru orice* u *din sfera* $\|x-x_0\|\leqslant s_1$, unde $s_1=\frac{1}{BK|c|}\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} h^{2^k}+|c|\right)$;

2°. *avem delimitarea*

$$\|P(x_0)\|\leqslant\eta<+\infty;$$

3°. $\|D[u, v, w; P(x)]\|\leqslant K$ *pentru orice* u, v, w *din sfera* $\|x-x_0\|\leqslant s_1$;

4°. $h=B^2\eta K|c|<1$,

atunci ecuaţia (1) *are o soluţie* x^* *în sfera* $\|x-x_0\|\leqslant s$, *unde* $s=\frac{1}{BK|c|}\sum\limits_{k=0}^{\infty} h^{2^k}$, *la care converge şirul* (x_n) *dat de algoritmul* (2) *şi rapiditatea convergenţei se caracterizează prin inegalitatea*

$$\|x^*-x_n\|\leqslant\frac{1}{BK|c|}\sum_{k=n}^{\infty} h^{2^k}.$$

Demonstraţie. Din relaţia (2) respectiv din generalizarea formulei (6) obţinem

$$\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant B\|P(x_n)\| \tag{13}$$

$$\|x_{n+1}-cx_n\|\leqslant B|c|\,\|P(x_n)\|. \tag{14}$$

Din formula lui Newton

$$\|P(x_{n+1})\|\leqslant K\|x_{n+1}-cx_n\|\,\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant B^2|c|K\|P(x_n)\|^2. \tag{15}$$

Pe baza relaţiei (15) inegalităţile (13) şi (14) devin

$$\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant\frac{h^{2^n}}{BK|c|} \quad \text{şi} \quad \|x_{n+1}-cx_n\|\leqslant\frac{h^{2^n}}{BK}. \tag{16}$$

Folosind prima inegalitate din (16) avem

$$\|x_{n+p}-x_n\|\leqslant\frac{h^{2^n}}{BK|c|}\left[1+h^{2^n}+\ldots+h^{2^n(2^{p-1}-1)}\right], \tag{17}$$

de unde rezultă că există $x^*=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Dacă în inegalitatea (17) facem $p \to \infty$, obţinem inegalitatea care caracterizează rapiditatea convergenţei şirului (x_n)..

Din inegalitatea (17), dacă punem $n = 0$ şi $p = n$, obţinem

$$\|x_0 - x_n\| \leqslant \frac{1}{BK\,|c|}\,(h + h^2 + \ldots + h^{2^n - 1}) \leqslant \frac{1}{BK\,|c|} \sum_{k=0}^{\infty} h^{2^k} = s \leqslant s_1$$

deci că punctele x_n aparţin sferei $\|x - x_0\| \leqslant s_1$ pentru orice n. În mod analog avem pentru orice n

$$\|x_0 - cx_n\| \leqslant \|x_0 - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - cx_n\| \leqslant \frac{1}{BK\,|c|}\left(\sum_{k=0}^{\infty} h^{2^k} + |c|\right) = s_1,$$

şi deci punctele cx_n aparţin sferei $\|x - x_0\| \leqslant s_1$.

Faptul că x^* este soluţia ecuaţiei $P(x) = \Theta$ rezultă din egalitatea $x_n - x_{n+1} = \overset{-1}{D}\,[x_n,\ cx_n;\ P(x)]\,P(x_n)$, deoarece $\|\overset{-1}{D}\,[x_n,\ cx_n;\ P(x)]\|$ este mărginit.

Teorema 5. *Dacă condiţiile* 1°—3° *ale teoremei* 4 *sînt satisfăcute,* $|c| \geqslant 1$, *iar condiţia* 4° *se înlocuieşte cu condiţia mai tare* $h < \alpha$, *unde* α *este rădăcina ecuaţiei*

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k} \tag{18}$$

atunci soluţia x^* *a ecuaţiei* (1) *este unică în sfera* $\|x - x_0\| \leqslant s$.

Demonstraţie. În adevăr, fie $\tau \neq x^*$ o soluţie a ecuaţiei (1) care se, află în sfera $\|x - x_0\| \leqslant s$. Din formula lui Newton obţinem

$$0 = \|\overset{-1}{D}\,[x_0, x^*;\ P(x)]\ [P(\tau) - P(x^*)]\| \geqslant |1 - BK\|\tau - x_0\||\ \|\tau - x^*\|$$

de unde, dacă $1 - BK\|\tau - x_0\| > 0$, avem $\tau = x^*$, deci soluţia ecuaţiei (1) este unică.

Însă

$$1 - BK\|\tau - x_0\| \geqslant 1 - BKs = 1 - B^2K\eta \sum_{k=0}^{\infty} h^{2^k - 1} \geqslant$$

$$\geqslant 1 - B^2K\eta\,|c| \sum_{k=0}^{\infty} h^{2^k - 1} = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} h^{2^k},$$

şi deci, dacă h este mai mică decît rădăcina ecuaţiei (18), avem $1 > BK\|\tau - x_0\|$, ceea ce era de demonstrat.

Valoarea aproximativă a numărului α este egală cu 0,62.

Primită la redacţie la 5 iunie 1967

Universitatea „Babeş-Bolyai" Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. Л. В. Канторович, *О методе Ньютона*. Труды мат. Инст-та. В. А. Стеклова, **28**, 104—144 (1949).

2. А. С. Сергеев, *О методе хорд*. Сибирский математический журнал, **II**, *2*, март-апрель (1961).

3. С. Ул, М, *Обобщение метода Стеффенсена для решения нелинейных операторных уравнений*. Журнал вычислительной мат. и мат. физики. **4**, *6*, 1093—1097 (1964).

4. B. Jankó, M. Balázs, *Despre metoda coardei pentru rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare în spaţii normate*. St. cerc. mat., **19**, *10* (1967).

ECUAȚII FUNCȚIONALE NELINIARE ÎN SPAȚII BANACH ȘI PROBLEME LA LIMITĂ

DE

V. BARBU

(Iași)

În această lucrare se expun rezultate privitoare la teoria operatorilor monotoni (neliniari) introduși de Minty și Browder. Se dau teoreme de existență pentru ecuații operaționale neliniare, se stabilește o teoremă privind inegalitățile variaționale.

În ultimul paragraf se fac aplicații la teoria ecuațiilor cu derivate parțiale.

INTRODUCERE

Expunerea de față constituie o prezentare succintă a principalelor rezultate privind rezolvarea ecuațiilor funcționale neliniare pe baza metodei lui Minty-Browder. Posibilitatea evitării ipotezei de compacitate în studiul ecuațiilor funcționale neliniare prin utilizarea unor ipoteze de monotonie a fost observată de G. Minty [35], [36] care stabilește și primele rezultate de această natură.

F. Browder aplică aceste rezultate în studiul problemelor la limită eliptice neliniare, dezvoltînd teoria lui Minty într-un cadru foarte general. Cu excepția unor teoreme din §§ 2 și 3, rezultatele expuse în această lucrare sînt cunoscute, ele găsindu-se eventual într-o formă mai particulară în lucrările lui Minty, Browder, Lions și alții. Deși majoritatea acestor rezultate se mențin adevărate și pe spații local convexe, fapt observat de altfel recent de Brezis [22], totuși atît din motive de economie cît și avînd în vedere aplicațiile, am preferat să facem expunerea în cadrul spațiilor Banach; excepție face teorema 3.1.

Pentru lectura acestei lucrări cititorului îi sînt necesare cunoștințe de bază din analiza funcțională și teoria distribuțiilor.

În § 1 sînt demonstrate în ipoteze de monotonie teoreme de surjecție pentru operatori neliniari coercitivi $T: X \to X^*$, unde X este un spațiu Banach reflexiv și X^* adjunctul său. Teorema 1.1, sub forma sa particulară 1.2, aparține lui Browder [4] care extinde astfel un rezultat similar obținut de Minty [36] pentru aplicații monotone și continue în

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 2, P. 137–164, BUCUREȘTI, 1968

spaţii Hilbert. Teorema 1.3 a fost stabilită de Leray-Lions [29] şi prezintă avantajul particular faţă de 1.1 de a nu cere verificarea unor condiţii de compacitate.

În § 2 sînt studiate într-un cadru diferit unele probleme din secţiunea precedentă. Teorema 2.2 a fost stabilită pentru prima oară de Minty [37]. Ea a fost generalizată în diverse direcţii de către Browder [5], [12], căruia de fapt îi aparţine şi teorema 2.1. Teoremele 2.1 şi 2.2 au avantajul de a localiza soluţiile ecuaţiilor funcţionale, ceea ce le face utile în obţinerea unor teoreme de punct fix [8].

Definiţia stabilităţii, aşa cum apare în această secţiune, aparţine lui Kasriel şi Nashed [25] iar teorema 2.3, deşi nouă, se înscrie pe linia unor rezultate stabilite de aceşti autori.

Paragraful 3 este consacrat rezolvării inecuaţiilor variaţionale în spaţii Banach, înglobînd rezultate din teoria ecuaţiilor neliniare şi din calculul variaţional. Primele rezultate în acest sens au fost obţinute în cazul liniar de Lescarret [28].

Teorema 3.1 din care se obţine în particular rezultatul lui Browder (teorema 3.2) este nouă şi prezintă avantajul de a îngloba unele rezultate de calcul variaţional în forma lor cea mai generală (Browder [14]).

Ca metodă generală de demonstraţie pentru teoremele din secţiunile 1, 2, 3 a fost metoda proiecţiilor în forma utilizată de Vishik [39] în problemele eliptice neliniare.

În §§ 4 şi 5 am dat unele aplicaţii ale rezultatelor precedente în stabilirea unor teoreme de existenţă din teoria ecuaţiilor eliptice şi parabolice neliniare. Teoremele 4.1, 4.2, 5.1, în condiţii puţin diferite au fost stabilite pentru prima oară de Vishik [39], [40] şi regăsite pe baza unor teoreme generale de surjecţie de către Browder [4], [6] şi Leray-Lions [29].

1. OPERATORI NELINIARI MONOTONI. TEOREME DE SURJECŢIE

Fie X spaţiu Banach, X^* dualul său şi T o aplicaţie neliniară de la X în X^*. În cele ce urmează vom desemna prin $D(T)$ şi $R(T)$ domeniul respectiv codomeniul său. Vom nota de asemenea cu X_w respectiv X^*_w spaţiile X şi X^* în topologiile slabe $\sigma(X, X^*)$ respectiv $\sigma(X^*, X)$.

DEFINIŢIE. Operatorul T se numeşte *finit continuu*, dacă T este continuu de la orice subspaţiu finit dimensional al lui X la X^*_w. În particular, dacă T este continuu de la X în X^*_w, el se va numi *demicontinuu*.

Dacă domeniul $D(T)$ al operatorului T este convex şi dacă pentru orice $u, v \in D(T)$ funcţia

$$t \to T(tu + (1 - t)v), \ t \in [0,1]$$

este continuă de la $[0,1]$ în X^*_w, operatorul T se numeşte *hemicontinuu*.

Amintim de asemenea că un operator $C : X \to X^*$ se numeşte *complet continuu*, dacă este continuu de la X_w în X^*.

DEFINIŢIE. Operatorul $T : D(T) \subset X \to X^*$ se numeşte *monoton* dacă pentru orice $u, v \in D(T)$ are loc relaţia

$$\mathrm{Re}\,(Tu - Tv, u - v) \geqslant 0. \tag{1.1}$$

În particular, dacă operatorul T este diferențiabil Fréchet pe domeniul convex $D(T)$, atunci condiția (1.1) este echivalentă cu pozitivitatea diferențialei Fréchet $\delta T(u\,;h)$ în fiecare punct u al domeniului.

DEFINIȚIE. Operatorul $T: X \to X^*$ se numește *semimonoton* dacă există o aplicație $S: X \times X \to X^*$, astfel încît $Tu = S(u, u)$, unde:

a) Pentru orice $v \in X$, aplicația $u \to S(u, v)$ este monotonă.

b) Pentru orice $u \in X$, aplicația $v \rightharpoonup S(u, v)$ este complet continuă.

TEOREMA 1. *Fie X spațiu Banach reflexiv și T operator semimonoton și finit continuu de la X în X^*. Presupunem că T este coercitiv în sensul următor:*

$$\mathrm{Re}\,(Tu, u) \geqslant C(\|u\|)\|u\|, \quad \forall u \in X, \tag{1.2}$$

unde $C(r)$ este funcție reală cu $\lim\limits_{r\to\infty} C(r) = \infty$.

Atunci operatorul T este surjectiv ($R(T) = X^*$).

Vom demonstra în prealabil:

LEMA 1.1. *Fie T operator hemicontinuu de la mulțimea liniară și densă $D(T) \subset X$ la X^*. Presupunem că pentru $u_0 \in D(T)$ și $w \in X^*$ are loc relația*

$$\mathrm{Re}\,(Tu - w, u - u_0) \geqslant 0, \quad \forall u \in D(T) \tag{1.3}$$

Atunci $Tu_0 = w$.

Demonstrație. Fie u un element arbitrar din X și $u_t = u_0 + tu$, $t \in (-\infty, \infty)$.

Notăm cu $\varphi(t)$ funcția $\mathrm{Re}\,(Tu_t - w, v)$.

Dacă în expresia (1.3) luăm $u = u_t$, se obține

$$t\varphi(t) \leqslant 0, \quad \forall t \in (-\infty, \infty).$$

Întrucît T este hemicontinuu, funcția $\varphi(t)$ este continuă pe axa reală și deci $\varphi(0) = 0$. Elementul v fiind arbitrar și deoarece $D(T)$ este dens în X, urmează atunci $Tu_0 = w$.

LEMA 1.2. *Fie T o aplicație continuă de la spațiul finit dimensional X în X^*. Presupunem*

$$\mathrm{Re}\,(Tu, u) \geqslant C(\|u\|)\,\|u\|, \quad \forall u \in X, \tag{1.2}$$

unde $\lim\limits_{r\to\infty} C(r) = \infty$. *Atunci T este surjectiv.*

Demonstrație. Putem admite că $X = X^* = H$, H fiind spațiu Hilbert. Fie w un element arbitrar din H și $\{T_t\}$ familia de aplicații

$$T_t = tT + (1 - t)\,I, \quad t \in [0,1]. \tag{1.4}$$

Din relația (1.2) rezultă următoarea evaluare pentru soluțiile ecuației $T_t u = w$:

$$\inf\,\{\|u\|, C(\|u\|)\} \leqslant 2\,\|w\|. \tag{1.5}$$

Există prin urmare $r > 0$, astfel încît $T_t u \neq w$ pentru $\|u\| \geqslant r$. Deci $w \overline{\in} T_t(\mathrm{Fr}\ B(0, r))$ pentru $t \in [0, 1]$, unde am notat prin $B(0, r)$ sfera $\{u\,;\, \|u\| \leqslant r\}$. Rezultă atunci că gradul topologic $\gamma(T_t, w, B(0, r))$ al aplicațiilor T_t în punctul w relativ la domeniul $B(0, r)$ este constant pentru $t \in [0,1]$. (v. G. Marinescu [34]).

Deci $\gamma\ (T, w,\ B(0, r)) = \gamma(I, w, B(0, r)) = 1$ şi prin urmare ecuaţia $Tu = w$ admite măcar o soluţie.

Demonstraţia teoremei 1.1. Este suficient să demonstrăm că $O \in R(T)$. Pentru aceasta considerăm Δ mulţimea subspaţiilor finit dimensionale ale lui X şi corespunzător fiecărui $F \in \Delta$ desemnăm prin P_F operatorul de injecţie de la F la X şi cu $P_F^* : F^* \to X^*$ adjunctul său. Notăm de asemenea

$$T_F = P_F^*\, T P_F.$$

Este uşor de văzut că operatorul $T_F : F \to F^*$ este continuu şi coercitiv. Conform lemei 1.2 există atunci $u_F \in F$ astfel încît $T_F u_F = 0$.

Fie $\mathcal{M} = \{u_F\,;\ T_F u_F = 0\,;\ F \in \Delta\}$. Din relaţia

$$\text{(1.6)} \qquad \operatorname{Re}\,(T_F u_F, u_F) = \operatorname{Re}(T u_F,\ u_F) \geqslant C\,(\|u_F\|)\,\|u_F\|$$

mulţimea $\mathcal{M}$ rezultă mărginită; $\mathcal{M} \subset B\,(0, M)$, unde am desemnat prin $B(0, M)$ sfera $\{u\,;\ \|u\| \leqslant M\}$.

Fie

$$f_u(v) = \operatorname{Re}\,(S\,(u,\ v),\ u - v).$$

Deoarece aplicaţia $S : X \times X \to X^*$ este complet continuă în raport cu variabila secundă, funcţia $f_u(v)$ rezultă continuă în topologia slabă a lui X, deci pentru orice F din Δ mulţimea :

$$\mathcal{M}_F = \{v \in X\,;\ f_u(v) \geqslant 0,\ \forall u \in F\} \cap B\,(0, M)$$

ste slab închisă. Familia de mulţimi $\{\mathcal{M}_F\,;\ F \in \Delta\}$ are proprietatea intersecţiei finite. Într-adevăr, dacă $F_j \in \Delta$, $j = 1, 2, \ldots, n$, luînd $F_0 = \bigcup\limits_{j=1}^{n} F_j$ există, conform unei observaţii de mai sus $u_{F_0} \in B(0,\ M)$, astfel încît $T_{F_0} u_F = 0$, sau

$$\text{(1.7)} \qquad (S(u_{F_0},\ u_{F_0}), u_{F_0} - u) = (\,T u_{F_0},\ u_{F_0} - u), \quad \forall u \in F_0$$

Aplicaţia S fiind monotonă în raport cu primul argument, urmează

$$\text{(1.8)} \qquad \operatorname{Re}(S\,(u_{F_0},\ v) - S(u, v), u_{F_0} - u) \geqslant 0, \quad \forall u, v \in X.$$

Din relaţiile (1.7) şi (1.8) va rezulta atunci

$$\text{(1.9)} \qquad f_u(u_{F_0}) = \operatorname{Re}\,(S\,(u,\ u_{F_0}),\ u - u_{F_0}) \geqslant 0, \quad \forall u \in F_0.$$

Deci $u_{F_0} \in \bigcap\limits_{j=1}^{n} \mathcal{M}_{F_j}$.

Deoarece sfera $B(0,\ M)$ este slab compactă (X este spaţiu reflexiv), rezultă existenţa unui element $u_0 \in \bigcap\limits_{F \in \Delta} \mathcal{M}_F$; adică :

$$\text{(1.10)} \qquad \operatorname{Re}\,(S\,(u,\ u_0),\ u - u_0) \geqslant 0, \forall u \in X.$$

Conform lemei 1.1 urmează atunci $S(u_0,\ u_0) = 0$ şi cu aceasta teorema este completă demonstrată.

Un caz particular al acestei teoreme este :

TEOREMA 1.2. *Fie X spaţiu Banach reflexiv, X^* dualul său şi T operator finit continuu de la X la X^*. Presupunem :*

a) *Există* $C : X \to X^*$ *complet continuu astfel încît* $T + C$ *să fie monoton*;

b) T *este coercitiv*:

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \operatorname{Re}(Tu, u)/\|u\| = \infty.$$

Atunci T *este surjectiv.*

Demonstrație. Se observă că $Tu = S(u, u)$, unde $S(u, v) = (T + C)u - Cv$. Teorema este atunci o consecință imediată a teoremei 1.1.

COROLAR. *Fie* T *o aplicație finit continuă de la* X *la* X^* *astfel încît*:

$$\operatorname{Re}(Tu - Tv, u - v) \geqslant C(\|u - v\|)\,\|u - v\|; \quad \forall u, v \in X, \tag{1.8}$$

$C(r)$ *fiind o funcție continuă, pozitivă, cu* $\lim_{r \to \infty} C(r) = \infty$. *Atunci*

a) T *este surjectivă și biunivocă.*

b) T^{-1} *este continuu și există o funcție monoton crescătoare* $h(r)$ *cu* $h(0) = 0$, *astfel încît*

$$\|T^{-1}w - T^{-1}\overline{w}\| \leqslant h(\|w - \overline{w}\|). \tag{1.9}$$

Demonstrație. a) T este surjectivă. Într-adevăr, din (1.8) rezultă

$$\operatorname{Re}(Tu, u) \geqslant (C(\|u\|) - \|T(0)\|)\,\|u\|,$$

deci T este coercitiv. Fiind și monoton, conform teoremei (1.2), $R(T) = X$.

b) Biunivocitatea este evidentă. Inegalitatea (1.9) se verifică luînd $h(R) = \sup\{r;\ C(r) \leqslant R\}$.

Observații. 1) Dacă $X = X^* = H$ este spațiu Hilbert, un rezultat mai tare este dat de următoarea teoremă (Browder [3]):

Fie T o aplicație demicontinuă de la spațiul Hilbert H în el însuși, astfel încît pentru orice $u, v \in H$,

$$\operatorname{Re}(Tu - Tv, u - v) \geqslant C\max(\|u\|, \|v\|)\,\|u - v\|^2, \tag{1.10}$$

unde $C(r)$ este o funcție pozitivă necrescătoare cu

$$\int_1^\infty C(r)\,\mathrm{d}r = \infty.$$

Atunci T este aplicație biunivocă de la H pe H și admite invers continuu.

Fără a intra în amănunte menționăm că teorema se demonstrează direct, verificînd că $R(T)$ este simultan închis și deschis în spațiul H. Ultimul fapt rezultă pe baza unei teoreme de prelungire a aplicațiilor contractante într-un spațiu Hilbert (Browder [2]).

Vom stabili acum o variantă relativ mai generală a teoremei 1.1 și în același timp mai avantajoasă din punct de vedere aplicativ.

DEFINIȚIE. Dacă T este o aplicație de la X la X^*, T se numește *cvasimonotonă*, dacă există o aplicație $S : X \times X \to X^*$ astfel încît $Tu = S(u, u)$ pentru toți $u \in X$ și:

a) Pentru orice $v \in X$, aplicația $u \to S(u, v)$ este *monotonă*, *hemicontinuă* și mărginită.

b) Dacă $\{u_j\}$ este un şir slab convergent la u din X şi dacă $(S(u_j, u_j) - S(u, u_j), u_j - u) \to 0$, atunci pentru orice v din X, $S(v, u_j)$ converge slab la $S(v, u)$.

c) Dacă u_j este slab convergent la u şi $S(u, u_j)$ converge slab lui u' din X^*, atunci $(S(u, u_j), u_j)$ converge la (u', u).

Observaţie. Se verifică imediat că o aplicaţie semimonotonă este cvasimonotonă.

TEOREMA 1.3. *Fie X spaţiu Banach reflexiv, separabil şi T un operator finit continuu şi mărginit definit de la X în X^*.*

Presupunem :

1) *T coercitiv*

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \operatorname{Re}(Tu, u)/\|u\| = \infty,$$

2) *T cvasimonoton.*

Atunci T este surjectiv.

Demonstraţia teoremei 1.3. Vom utiliza o variantă a metodei proiecţiilor (metoda lui Galerkin) (Lions [31]). Din lema 1.2 rezultă teorema adevărată pentru orice spaţiu X finit dimensional.

Fie $w_1, w_2, \ldots, w_m, \ldots$ un şir de elemente din X astfel încît $\bigcup\limits_m X_m$ să fie dens în X, unde am notat prin X_m spaţiul generat de $(w_1, w_2, \ldots, w_m)$. Dacă $f \in X^*$, există $u_m \in X_m$ astfel încît

$$(1.11) \qquad (Tu_m, w) = (f, w), \quad \forall w \in X_m.$$

Într-adevăr, fie $P_m : X_m \to X$ operatorul de injecţie de la X_m în X şi P_m^* adjunctul său. Dacă notăm $T_m = P_m TP_m$, atunci T_n este operator continuu şi coercitiv de la X_m în X_m^*.

Deoarece $(Tu_m, w) = (T_m u_m, w)$ şi $(f, w) = (P_m f, w)$ pentru orice $w \in X_m$, ecuaţia (1.11) este echivalentă atunci cu ecuaţia (1.12)

$$T_m u = P_m f$$

care conform lemei 1.2 are soluţie.

Revenim la relaţia (1.11) în care luăm $w = u_m$. Se obţine atunci

$$|(Tu_m, u_m)| \leqslant \|f\| \, \|u_m\|.$$

Deci $\|u_m\| \leqslant C_1$, $\|Tu_m\| \leqslant C_2$ şi întrucît X este reflexiv, putem presupune u_m slab convergent la un element $u \in X_m$.

De asemenea Tu_m este slab convergent în X^* şi limita sa, conform relaţiei (1.11), nu poate fi decît f. Fie $S : X \times X \to X^*$, $S(u, u) = Tu$ aplicaţia existentă din definiţia cvasimonotoniei. Întrucît şirul $S(u, u_m)$ este mărginit, îl vom presupune, fără a restrînge generalitatea, slab convergent la $u' \in X$. De aici rezultă, printr-un calcul direct :

$$(1.13) \qquad \lim_{m \to \infty} (S(u_m, u_m) - S(u, u_m), u - u_m) = 0.$$

Deoarece T este cvasimonoton, urmează $S(v, u_m)$ slab convergent la $S(v, u)$ iar $(S(v, u_m), u_m)$ convergent la $(S(v, u), u)$ oricare ar fi $v \in X$.

Din relaţia

$$(1.14) \qquad \operatorname{Re}(S(u_m, u_m) - S(v, u_m), u_m - v) \geqslant 0$$

rezultă atunci, prin trecere la limită,

$$\mathrm{Re}\,(f - S\,(v, u), u - v) \geqslant 0, \quad \forall v \in X. \tag{1.15}$$

Deci conform lemei 1.1, $S(u, u) = Tu = f$.

Necesitatea cuprinderii în schema noastră a ecuaţiilor de evoluţie în spaţii Banach impune studierea aplicaţiilor de tipul $T = L + T_0$, unde L este operator liniar nemărginit iar T_0 operator neliniar. Rezultatul principal în acest sens este dat de:

TEOREMA 1.4. *Fie X spaţiu Banach reflexiv şi T o aplicaţie monotonă de la $D(T)\subset X$ în X^*, cu $D(T)$ liniar şi dens în X. Presupunem $T = L + T_0$, unde:*

a) *L — operator liniar, închis şi dens de la X în X^* astfel ca L să fie închiderea restricţiei sale la $D(L)\bigcap D(L^*)$;*

b) *$T_0 : X \rightarrow X^*$ este operator finit continuu şi mărginit;*

c) $\lim\limits_{\|u\|\rightarrow\infty} \mathrm{Re}(Tu, u)/\|u\| = \infty$ *(T este coercitiv).*

Atunci T este surjectiv.

Demonstraţie. Fie Δ mulţimea subspaţiilor finit dimensionale F ale lui $D(T) = D(L)$. Utilizînd notaţiile şi adoptînd raţionamentul făcut cu ocazia demonstraţiei teoremei 1.1, rezultă existenţa unui element $u_0 \in \bigcap\limits_{F\in\Delta} \mathfrak{M}_F$, unde am desemnat prin $\mathfrak{M}_F$ mulţimea slab închisă

$$\{v \in X\,;\ (Tu, u - v) \geqslant 0\,;\ \forall u \in F\} \bigcap B\,(0, M). \tag{1.16}$$

Deci

$$(Tu, u - u_0) \geqslant 0, \quad \forall u \in D\,(T). \tag{1.17}$$

Dacă vom demonstra că $u_0 \in D(T)$, teorema va rezulta atunci ca o consecinţă a lemei 1.1. Considerăm pentru aceasta un element arbitrar $v \in D(L) \bigcap D(L^*)$ şi $F_0 \in \Delta$ care conţine pe v. Atunci

$$0 = (T_{F_0} u_{F_0}, v) = (Tu_{F_0}, v) = (Lu_{F_0}, v) + T_0 u_{F_0}, v).$$

Deoarece $\|u_{F_0}\| \leqslant M$, urmează $|(T_0 u_{F_0}, v)| \leqslant M_1 \|v\|$ şi deci:

$$|(u_{F_0}, L^*v)| \leqslant M_1 \|v\|, \tag{1.18}$$

inegalitate care se păstrează pentru orice $u \in V_{F_0} \bigcup\limits_{F_0\subset F} \{u_F\,;\ T_F u_F = 0\,;$ $F \in \Delta\}$ deci şi pentru u_0 care aparţine închiderii slabe a mulţimii V_{F_0}. (A se vedea demonstraţia teoremei 1.1).

Deci:

$$|(u_0, L^*v)| \leqslant M_1 \|v\|, \qquad \forall v \in D\,(L) \bigcap D\,(L^*). \tag{1.19}$$

Întrucît L este închiderea restricţiei sale la $D(L)\bigcap D(L^*)$, urmează atunci $\|(u_0, L^*v)\| \leqslant M_1 \|v\|$ pentru orice $v \in D(L)$, deci $u_0 \in D(L^{**}) = D(L)$, (L fiind închis). Cu aceasta teorema este demonstrată.

Un rezultat mai general este dat de

TEOREMA 1.5. *Fie X spaţiu Banach reflexiv, separabil şi T o aplicaţie neliniară de la $D(T)\subset X$ în X^*. Presupunem $T = L + T_0$, unde:*

a) *L este operator liniar, închis şi dens de la $D(L)\subset X$ în X^*, cu* $L = -L^*$.

b) *$T_0 : X \to X^*$ este operator finit continuu, mărginit şi cvasimonoton.*

c) $\lim\limits_{\|u\| \to \infty} \operatorname{Re}(T_0u, u)/_{\|u\|} = \infty$.

Atunci T este surjectiv.

Demonstraţie. Considerăm $\{X_m\}$ un şir crescător de subspaţii finit dimensionale din $D(T) = D(L)$, astfel încît $\bigcup\limits_m X_m$ să fie dens în X.

Fie $f \in X^*$. Utilizînd argumentele din demonstraţia teoremei 1.3, rezultă existenţa unui şir $\{u_m\} \subset D(T)$ astfel încît

$$(Tu_m, w) = (f, w), \qquad \forall w \in X_m. \tag{1.20}$$

Deoarece $\{u_m\}$ este mărginit, putem presupune că u_m converge slab la un element $u \in X$. Să demonstrăm că $u \in D(L) = D(T)$. Deoarece $D(L) = D(L^*)$, din relaţia (1.20) rezultă

$$|(u, L^*w)| \leqslant (\|T_0u_m\| + \|f\|)\, \|w\|, \quad \forall w \in D(L).$$

Prin urmare $u \in D(L^{**}) = D(L)$.

Să observăm că operatorul T este cvasimonoton. Într-adevăr, dacă $T_0u = S_0(u, u)$, atunci este uşor de verificat că $S(u, v) = S_0(u, v) + Lu$ verifică condiţiile *a*), *b*), *c*) din definiţia cvasimonotoniei. Cu această observaţie, demonstraţia teoremei 1.5 se continuă reluînd cuvînt cu cuvînt demonstraţia teoremei 1.3.

DEFINIŢIE. Operatorul neliniar $T : X \to Y$ se numeşte *K monoton* dacă :

$$\operatorname{Re}(Tu - Tv, K(u - v)) \geqslant 0, \quad \forall u, v \in X, K \in \alpha(X, Y).$$

Prin analogie cu rezultatele stabilite pînă în prezent se pot obţine imediat teoreme de surjecţie pentru operatorii K monotoni. Pentru amănunte trimitem, cititorul la lucrările lui Petryshin [38], Kachurovsky [23] şi Agaev [1].

Menţionăm de asemenea că o parte din rezultatele expuse pot fi formulate şi pentru unele categorii de spaţii Banach nereflexive (în particular pentru spaţii uniform convexe). Rezultatele principale din acest punct de vedere se găsesc în lucrarea [14] a lui Browder.

2. ECUAŢII FUNCŢIONALE NELINIARE ÎN SPAŢII BANACH. STABILITATEA SOLUŢIILOR. OPERATORI COMPLEX-MONOTONI

Fie X_1, X_2 două spaţii local convexe în dualitate prin intermediul funcţionalei biliniare (u, v) şi T o aplicaţie de la X_1 la X_2. Monotonia, semimonotonia şi continuitatea finită a operatorului T au aceeaşi semnificaţie ca şi în secţiunea $I - a$.

Dacă u este un element arbitrar din X_1 şi S o submulţime a sa, vom spune că S înfăşoară punctul u, dacă : *a*) $u \overline{\in} S$; *b*) orice rază cu centrul în u intersectează mulţimea S o singură dată. În particular, sfera $S(u_0\,; r) = \{u, \|u - u_0\| = r\}$ înfăşoară centrul u_0.

Cu aceasta putem formula următorul rezultat:

TEOREMA 2.1. *Fie* (X_1, X_2) *un sistem dual şi* $T: X_1 \to X_2$ *o aplicaţie semimonotonă şi finit continuă iar* K *o submulţime slab compactă din* X_1. *Fie* $u_0 \in K$ *şi* S *o submulţime a lui* K *care înfăşoară punctul* u_0. *Presupunem că pentru* $w \in X_2$ *are loc relaţia*:

$$\mathrm{Re}\,(w - Tu,\ u_0 - u) \geqslant 0 \tag{2.1}$$

pentru $\forall u \in S$. *Atunci există* $u_1 \in K$ *astfel încît* $Tu_1 = w$.

LEMA 2.1. *Fie* (X_1, X_2) *un sistem dual cu* X_1 *spaţiu finit dimensional şi* $T: X_1 \to X_2$ *o aplicaţie continuă. Fie* K *o mulţime mărginită din* X_1 *care conţine punctul* O *şi* S *o submulţime a sa ce înfăşoară originea. Dacă*

$$\mathrm{Re}\,(Tu, u) \geqslant 0, \tag{2.2}$$

pentru orice $u \in S$, *există* $u_1 \in K$, *astfel încît* $Tu_1 = 0$.

Demonstraţie. Putem presupune $X_1 = X_2 = H$, cu H spaţiu Hilbert. Notăm cu D mulţimea punctelor din K care sînt înfăşurate de S. Evident, D este mulţime deschisă a cărei frontieră este S.

Considerăm $T_t = (1 - t)\,T + tI$, $t \in [0,1]$. Din relaţia (2.2) urmează:

$$\mathrm{Re}\,(Tt, u, u) \geqslant t\,\|u\|^2, \quad t \in [0,1) \tag{2.3}$$

pentru $u \in S = \partial D$. Deci $T_t u \neq 0$ pe frontiera domeniului D pentru $t \neq 0$.

Dacă operatorul $T_0 = T$ are un zero pe S, lema este demonstrată; în caz contrar urmează că $\{0\}$ nu aparţine mulţimii $T_t(\partial D)$, $t \in [0,1]$ deci: $\gamma(T_t, 0, D)$ este constant, egal cu 1 ($\gamma(T, 0, D) = 1$). Prin urmare există $u_1 \in D$, astfel încît $Tu_1 = 0$.

Demonstraţia teoremei 2.1. Efectuînd translaţia $v = u - u_0$ şi luînd $T_1 v = T(u - u_0) - w$, putem reduce demonstraţia teoremei la cazul $w = 0$, şi $u_0 = 0$.

Fie

$$\mathfrak{M}_u = K \cap \{v \in X_1;\ (S(u, v),\ u - v) \geqslant 0\}$$

(S este aplicaţia care intervine în definiţia semimonotoniei). Pentru u variabil în X_1, $\mathfrak{M}_u$ va reprezenta o familie de mulţimi slab închise conţinute în mulţimea slab compactă K. Vom demonstra că $\{\mathfrak{M}_u;\ u \in X_1\}$ are proprietatea intersecţiei finite. Fie pentru aceasta $(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ un sistem finit de elemente din X_1 şi F_0 spaţiul finit dimensional generat de această bază. Notăm cu P proiecţia lui X_1 pe F_0 şi cu P^* adjunctul său. Dacă F_0^* este codomeniul lui P, este uşor de văzut că (F_0, F_0^*) formează un sistem dual. Facem notaţiile

$$T_0 = P^*\,T,\ S_0 = S \cap F_0, \quad C_0 = C \cap F_0. \tag{2.4}$$

Operatorul T_0 este definit de la F_0 la F_0^* şi pentru $u \in S_0$,

$$\mathrm{Re}\,(T_0 u, u) = \mathrm{Re}\,(Tu, u) \geqslant 0. \tag{2.5}$$

Întrucît mulţimea S_0 înfăşoară originea, lema 2.1 asigură existenţa unui element $u_0 \in C \cap F_0$, astfel încît $P^* T u_0 = 0$ sau $(Tu_0, v) = 0$, pentru orice $v \in F_0$. Din relaţia

$$(S(u_0, u_0) - S(v, u_0),\ v - u_0) \geqslant 0, \quad \forall v \in F_0 \tag{2.6}$$

urmează :

$$(2.7)\qquad (S(v, u_0), v - u_0) \geqslant 0, \quad \forall v \in F_0.$$

Deci

$$u_0 \in \bigcap_{j=1}^{r} \mathcal{M}\, u_j .$$

Urmează atunci existenţa unui element $u_1 \in \bigcap_{u \in X_1} \mathcal{M}\, u$. Adică

$$(2.8)\qquad \operatorname{Re}(S(u_1, v), u_1 - v) \geqslant 0, \quad \forall v \in X_1.$$

Conform lemei 1.1 (adevărată după cum uşor se observă şi în cazul spaţiilor local convexe în dualitate), rezultă atunci $S(u_1, u_1) = Tu_1 = 0$.

O consecinţă imediată a teoremei precedente este următoarea variantă mai precisă a teoremei 1.1 :

TEOREMA 2.2. *Fie X spaţiu Banach reflexiv, X^* dualul său şi $T : X \to X^*$ aplicaţie semimonotonă şi finit continuă. Presupunem că pentru $w \in X^*$, $u_0 \in X$ şi $R > 0$,*

$$(2.9)\qquad \operatorname{Re}(Tu - w, u - u_0) \geqslant 0,$$

oricare ar fi $u \in S(u_0, R) = \{u ; \|u - u_0\| = R\}$. Atunci există $u_1 \in B_R = \{u ; \|u - u_0\| \leqslant R\}$ astfel încît $Tu_1 = w$.

Demonstraţie. Se aplică teorema 2.1 sistemului dual (X, X^*), luînd $K = B_R$ şi $S = S(u_0, R)$.

Observaţii : 1) Din teorema 2.2 se poate regăsi imediat teorema 1.1. Într-adevăr, dacă T este operator coercitiv, atunci $\operatorname{Re}(Tu - w, u) \geqslant (C(\|u\|) - \|w\|)\|u\|$ şi deci relaţia (2.9) este verificată pe sfera $S(0, R)$, cu $R \geqslant C^{-1}(\|w\|)$. Presupunînd în plus T semimonoton şi finit continuu, rezultă din teorema precedentă $T^{-1}w$ nevid.

2) Alegînd convenabil sistemul dual (X_1, X_2), teorema 2.1 ne poate oferi diverse cazuri particulare considerate în lucrările lui Browder [5] şi Gossez [27]. Unele aplicaţii ale teoremei 2.2 şi teoremei de punct fix derivate de ea pot fi găsite în lucrările [8] şi [12] ale lui Browder.

Fie X un spaţiu Banach reflexiv, X^* dualul său şi K o anumită clasă de aplicaţii de la X în X^*, pe care este definită o topologie τ.

DEFINIŢIE. Fie $T_0 \in K$ şi $w_0 \in X^*$. Vom spune că soluţia u_0 a ecuaţiei

$$(2.10)\qquad T_0 u = w_0$$

este stabilă relativ la (K, τ), dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există Ω o vecinătate a lui T_0 şi $r > 0$, astfel încît pentru $T \in \Omega$ şi $w \in B(w_0, r) = \{w ; \|w - w_0\| \leqslant r\}$, ecuaţia $Tu = w$ admite o soluţie $u \in B(u_0, \varepsilon)$. Dacă pentru orice $u_0 \in X$, u_0 este soluţie stabilă a ecuaţiei $T_0 u = T_0 u_0$, atunci T_0 este operator stabil relativ la (K, τ).

În cele ce urmează vom lua drept clasă K, mulţimea K' a operatorilor finit continui şi semimonotoni de la X în X^*, topologizată prin intermediul familiei de vecinătăţi :

$$(2.11)\qquad \Omega(T_0 ; u_0, \varepsilon, d) = \{T \in K' ; \|(T - T_0)u\| \leqslant d ; \quad \forall u \in \overline{B}(u_0, \varepsilon)\},$$

ε şi d fiind constante pozitive arbitrare.

Teorema 2.3. *Fie T_0 o aplicație finit continuă de la X în X^*. Presupunem :*

$$(2.12)\qquad \operatorname{Re}(T_0u - T_0v,\, u - v) \geqslant C(\|u - v\|)\,\|u - v\|, \quad u, v \in X$$

unde $C(r)$ este funcție reală, pozitivă, monoton crescătoare.

Atunci T_0 este operator stabil relativ la (K', τ).

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm stabilitatea soluției u_0 a ecuației $T_0u = 0$. Considerăm atunci relația evidentă :

$$(2.13)\qquad \operatorname{Re}(w - Tu,\, u_0 - u) = \operatorname{Re}(w,\, u_0 - u) + \\ + \operatorname{Re}(T_0u - Tu,\, u_0 - u) + \operatorname{Re}(T_0u_0 - T_0u,\, u_0 - u);$$

Pentru $w \in \overline{B}(\theta, r)$ $T \in \Omega(T_0, u_0, \varepsilon, d)$ și $u \in S(u_0; \varepsilon)$ urmează atunci :

$$(2.14)\qquad \operatorname{Re}(w - Tu,\, u_0 - u) \geqslant C(\varepsilon) - d\varepsilon - r\varepsilon.$$

Alegînd $d, r > 0$ suficient de mici, astfel încît $d + r \leqslant C(\varepsilon)$, rezultă, conform teoremei 2.2, că ecuația $Tu = w$ admite o soluție $u_1 \in B(u_0, \varepsilon)$. Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Observație. Alte rezultate privind stabilitatea în raport cu alte clase (K, τ) pot fi găsite în lucrarea deja citată a lui Kasriel și Nashed [25]. Din teorema 2.3 se pot deduce și unele fapte privind convergența soluțiilor ecuațiilor funcționale perturbate, regăsind astfel unele rezultate stabilite într-un caz particular de Bui An Ton [20].

Condiția de monotonie intervenea ca esențială în rezultatele stabilite pînă în prezent. În această secțiune vom regăsi o parte din aceste rezultate în ipoteze relativ mai generale din acest punct de vedere.

Fie X spațiu Banach complex, X^* dualul său și T o aplicație (în general neliniară) de la X în X^*.

DEFINIȚIE. Operatorul T se numește complex-monoton dacă :

I. Pentru orice N natural, există o funcție reală strict crescătoare C_N, cu $C_N(0) = 0$, astfel încît :

$$(2.15)\qquad |(Tu - Tv,\, u - v)| \geqslant C_N(\|u - v\|)$$

pentru toți u, v, cu $\|u\|, \|v\| \leqslant N$.

II. Există o funcție reală $C(r) : R_1 \to R_1$, cu $\lim\limits_{r \to \infty} C(r) = \infty$ astfel încît :

$$(2.16)\qquad |(Tu, u)| \geqslant C(\|u\|)\,\|u\|.$$

TEOREMA 2.4. *Fie T operator complex-monoton și finit continuu de la spațiul Banach reflexiv X în dualul său X^*. Atunci T este biunivoc și admite invers continuu $T^{-1} : X^* \to X$.*

Demonstrație. Presupunem mai întîi X spațiu finit dimensional. Din relația (2.15) rezultă $R(T)$ închis, iar din condiția II și din faptul că T este continuu, urmează că contraimaginea oricărui compact din X^* prin aplicația T, este un compact. Deci T este aplicație deschisă și prin urmare $R(T) = X^*$. Continuitatea operatorului T^{-1} rezultă din condiția I.

Cazul general. Este suficient să demonstrăm că $O \in R(T)$. Fie Δ mulţimea subspaţiilor finit dimensionale ale lui X dirijată după incluziune şi pentru fiecare $F \in \Delta$ notăm cu $P_F : F \to X$, operatorul de injecţie de la F în X. Fie

$$T_F = P_F^* T P_F ; \quad F \in \Delta. \tag{2.17}$$

Este uşor de văzut că operatorul $T_F : F \to F^*$ este complex-monoton şi continuu. Conform primului punct al demonstraţiei rezultă existenţa unui $u_F \in F$, $T_E u_F = 0$.

Deoarece

$$C(\|u_F\|) \|u_F\| \leqslant |(Tu_F, u_F)| = |(T_F u_F, u_F)| = 0,$$

din relaţia (2.16) rezultă că mulţimea $\mathcal{M} = \{u_F ; T_F u_F = 0 ; F \in \Delta\}$ este mărginită deci slab compactă (X spaţiu reflexiv). Există prin urmare $u_0 \in X$ astfel încît pentru orice $F_0 \in \Delta$, u_0 să aparţină închiderii slabe a mulţimii

$$\mathcal{M}_{F_0} = \bigcup_{F_0 \subset F} \{u_F\}.$$

Fie F_0, F două elemente din Δ cu $F_0 \subset F$. Din inegalitatea (2.15) rezultă atunci

$$|(Tu_{F_0} - Tu_F, u_{F_0} - u_F)| \geqslant C_M(\|u_{F_0} - u_F\|), \tag{2.18}$$

unde am notat prin M raza sferei care conţine mulţimea $\mathcal{M}$. Deoarece $(Tu_{F_0}, u_{F_0}) = (T_{F_0} u_{F_0}, u_{F_0}) = 0$ şi $(Tu_F, u_{F_0} - u_F) = (T_F u_F, u_{F_0} - u_F) = 0$, din relaţia (2.18) urmează :

$$C_M(\|u_{F_0} - u_F\|) \leqslant |(Tu_{F_0}, u_F)| \tag{2.19}$$

sau

$$\|u_{F_0} - u_F\| \leqslant C_M^{-1}(|(Tu_{F_0}, u_F)|). \tag{2.20}$$

Notăm cu f funcţionala

$$f(u) = \|u - u_{F_0}\| - C_M^{-1}(|(Tu_{F_0}, u)|).$$

Să observăm că $f(u) = \Phi(u, u)$, unde

$$\Phi(u, v) = \|u - u_{F_0}\| - C_M^{-1}(|(Tu_{F_0}, v)|),$$

deci f este semiconvexă (v. paragraful 3). Conform lemei 3.1, mulţimea $\{u : \|u - u_{F_0}\| - C_M^{-1}(|(Tu_{F_0}, u)|) \leqslant 0\}$ este slab închisă. Deoarece $\mathcal{M}_{F_0}$ este conţinută în această mulţime, rezultă :

$$\|u_0 - u_{F_0}\| \leqslant C_M^{-1}(|(Tu_{F_0}, u_0)|), \tag{2.20'}$$

oricare ar fi $F_0 \in \Delta$. Dacă F_0 este un subspaţiu finit dimensional care conţine pe u_0 urmează atunci $(Tu_{F_0}, u_0) = 0$, deci $u_0 = u_{F_0}$. Fie v arbitrar din X şi $F \in \Delta$ astfel încît să conţină pe v şi u. Urmează atunci

$$(Tu_0, v) = (T_F u_0, v) = (T_F u_F, v) = 0. \tag{2.21}$$

Deci $Tu_0 = 0$.

În mod aproape analog (a se vedea şi demonstraţia teoremei 4.1), se demonstrează :

TEOREMA 2.5. *Fie X spaţiu Banach reflexiv şi T o aplicaţie complex-monotonă de la $D(T) \subset X$ în X^*, cu $D(T)$ liniar şi dens în X. Presupunem $T = L + T_0$, unde :*

1) *L este operator liniar, închis şi dens de la X în X^* astfel încît L este închiderea restricţiei sale la $D(L) \cap D(L^*)$.*

2) *$T_0 : X \to X^*$ este finit continuu şi mărginit.*

Atunci T este biunivoc şi admite invers continuu $T^{-1} : X^* \to X$.

În cazul în care $\dim X \geqslant 2$, alte enunţuri mai generale pentru teoremele 2.4 şi 2.5 se găsesc în lucrările [11] şi [17] ale lui Browder.

3. INEGALITĂŢI VARIAŢIONALE NELINIARE

Fie $f(u)$ o funcţională reală definită pe spaţiul Banach X.

DEFINIŢIE. Funcţionala f se numeşte semiconvexă, dacă există $\Phi(u, v$: $X \times X \to R_1$ astfel încît $f(u) = \Phi(u, u)$, unde :

1) Pentru orice $v \in X$ funcţia $u \to \Phi(u, v)$ este convexă şi semicontinuă inferior.

2) Pentru orice mulţime mărginită B din X şi pentru orice şir $\{v_n\}$ slab convergent la $v \in X$, $\Phi(u, v_n) \to \Phi(u, v)$ uniform pentru u din B.

TEOREMA 3.1. *Fie X un spaţiu Banach reflexiv şi $(u, v) \to A(u, v)$ o funcţională (în general neliniară, reală definită pe $X \times X$. Presupunem :*

a) *Pentru orice $u \in X$, funcţionala $v \to A(u, v)$ este semiconvexă; $A(u, 0) = 0$.*

b) *Pentru orice $v \in X$, $u \to A(u, v)$ este finit continuă, uniform pentru v aparţinînd unei mulţimi mărginite din X.*

c) *Pentru orice u, v din X,*

$$A(u, u) + A(v, v) \geqslant A(u, v) + A(v, u), \tag{3.1}$$

$$A\left(., \frac{u+v}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}(A(., u) + A(., v)). \tag{3.2}$$

d) *Există $R > 0$ astfel încît $A(u, u) > 0$ pentru toţi $u \in X$, cu $\|u\| = R$.*

Atunci există $u_0 \in B_R = \{u ; \|u\| \leqslant R\}$ astfel încît :

$$A(v, v) - A(v, u_0) \geqslant 0, \quad \forall v \in X. \tag{3.3}$$

LEMA 3.1. *Fie $f : X \to R_1$ o funcţională semiconvexă. Atunci oricare ar fi $C \in R_1$, mulţimea*

$$\mathfrak{M}_C = \{u ; f(u) \leqslant C\}$$

este închisă în topologia slabă a spaţiului X.

Demonstraţie. Fie $\Phi : X \times X \to R_1$, cu $\Phi(u, u) = f(u)$, funcţionala din definiţia convexităţii şi u_0 un punct din aderenţa slabă a mulţimii $\mathfrak{M}_C$. Considerăm $\{u_k\} \subset \mathfrak{M}_C$ un şir slab convergent la u_0. Din condiţia 2) de semiconvexitate urmează

$$\Phi(u_k, u_0) = \Phi(u_k, u_k) + (\Phi(u_k, u_0) - \Phi(u_k, u_k)) \leqslant C + \varepsilon, \text{ pentru } k \geqslant N(\varepsilon).$$

Mulțimea $\mathcal{M}_\varepsilon = \{u\, ; \, \Phi(u, u_0) \leqslant C + \varepsilon\}$ este închisă și convexă, deci slab închisă.

Întrucît pentru k suficient de mare $u_k \in \mathcal{M}_\varepsilon$, rezultă că $u_0 \in \mathcal{M}_\varepsilon$, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, deci $u_0 \in \mathcal{M}_C$.

Demonstrația teoremei 3.1. 1) *X spațiu Banach finit dimensional.* Presupunem mai întîi că inegalitatea (3.3) are loc în sens strict, adică:

$$A\left(.,\, \frac{u_1 + u_2}{2}\right) < \frac{1}{2}\,(A\,(.,\, u_1) + A\,(.,\, u_2)), \text{ pentru } u_1 \neq u_2. \tag{3.4}$$

Fie

$$r\,(u) = \inf_{v \in B_R} A\,(u,\, v) \tag{3.5}$$

și $q(u)$ punctul de minim; $r(u) = A(u,\, q(u))$.

Din relația (3.4) rezultă univocitatea aplicației $q : B_R - B_R$; în plus operatorul $q(u)$ este și continuu. Fie pentru aceasta $\{u_k\}$ un șir convergent la u_0. Deoarece $r(u)$ este continuă (condiția *b*), urmează că $A\,(u_k,\, q(u_k)) \to \to A(u_0,\, q(u_0))$; de asemenea tot din condiția b) rezultă: $\lim\limits_{k \to \infty} (Au_0,\, q(u_k)) - - A\,(u_k,\, q(u_k)) = 0$. Prin urmare

$$\lim_{k \to \infty} A(u_0,\, q(u_k)) = A(u_0,\, q(u_0)). \tag{3.6}$$

Dacă $\lim\limits_{k \to \infty} q(u_k) = C \neq q(u_0)$, urmează

$$A\,(u_0,\, C) > A\,(u_0,\, q\,(u_0)) + \varepsilon$$

și deoarece A este semiconvexă în raport cu membrul secund, va rezulta, conform lemei (3.1),

$$A\,(u_0,\, q\,(u_k)) > A\,(u_0,\, q\,(u_0)) + \varepsilon/2, \quad k > N\,(\varepsilon), \tag{3.7}$$

relație care, conform cu (3.6), este evident absurdă, ceea ce demonstrează continuitatea operatorului $q : B_R \to B_R$.

Conform teoremei lui Brouwer, aplicația $u \to q(u)$ admite un punct fix $u_0 \in B_R$. Din (3.5) rezultă atunci evident

$$A\,(u_0,\, u_0) - A\,(u_0,\, v) \leqslant 0, \quad \forall v \in B_R. \tag{3.8}$$

Luînd în relația de mai sus $v = 0$, urmează $A(u_0,\, u_0) \leqslant 0$ și deci conform condiției d), $\|u_0\| < R$. Să observăm că inegalitatea (3.8) se menține adevărată pentru orice v din $B_{2R - \|u_0\|}$. Pentru aceasta este suficient să înlocuim în (3.8) v cu $\dfrac{u_0 + v}{2} \in B_R$ și să folosim (3.2). Reluînd raționamentul rezultă (3.8) adevărată pentru $v \in B_{R + K(R - \|u_0\|)}$, K fiind un număr natural arbitrar. Deci $A\,(u_0,\, u_0) - A\,(u_0,\, v) \leqslant 0$ pentru orice v din X. Ultima relație combinată cu (3.1) ne dă

$$A\,(v,\, v) - A\,(v,\, u_0) \geqslant 0, \quad \forall v \in X. \tag{3.9}$$

Dacă condiţia (3.4) nu este verificată, aplicăm raţionamentul precedent funcţionalei $L_\varepsilon(u, v) = A(u, v) + \varepsilon\|v\|^2$, $\varepsilon > 0$. Urmează atunci existenţa unei mulţimi $\{u_\varepsilon\} \subset B_R$ astfel încît

$$(3.10) \qquad A(v, u) - A(v, v) \leqslant \varepsilon(\|v\|^2 - \|u_\varepsilon\|^2), \quad \forall v \in X.$$

Dacă notăm cu u_0 un punct limită al mulţimii $\{u_\varepsilon\}$, din relaţia (3.10) şi din semicontinuitatea funcţiei $v \to A(., v)$ rezultă prin trecere la limită

$$(3.11) \qquad (A(v, v) - A(v, u_0) \geqslant 0, \quad \forall v \in X.$$

Cu aceasta teorema este demonstrată în cazul finit dimensional.

2) *Cazul general.* Notăm cu Δ mulţimea subspaţiilor finit dimensionale ale lui X şi pentru $F \in \Delta$ considerăm

$$(3.11) \qquad \mathcal{M}_F = B_R \cap \{u\,;\ A(v, v) - A(v, u) \geqslant 0\,;\quad \forall v \in F\}.$$

Din lema 3.1 şi condiţia a), mulţimile $\mathcal{M}_F$ rezultă slab închise; în plus, familia $\{\mathcal{M}_F\,;\ F \in \Delta\}$ are proprietatea intersecţiei finite. Într-adevăr, dacă $\{F_j\,;\ j = 1, 2, \ldots, n\}$ este un sistem de elemente din Δ, considerăm $F_0 = \bigcup\limits_{j=1}^{n} F_j$. Conform primului punct din demonstraţie, există $u_0 \in B_R \cap F_0$, astfel încît

$$(3.13) \qquad A(v, v) - A(v, u_0) \geqslant 0, \quad \forall v \in F_0.$$

Deci $u_0 \in \bigcap\limits_{j=1}^{n} \mathcal{M}_{F_j}$. Deoarece mulţimea B_R este slab compactă (X spaţiu Banach reflexiv), rezultă că $\bigcap\limits_{F \in \Delta} \mathcal{M}_F \neq \Phi$, Deci există $u_0 \in B_R$ astfel încît

$$(3.14) \qquad A(v, v) = A(v, u_0) \geqslant 0, \quad \forall v \in X.$$

Cu aceasta teorema este complet de demonstrată.

Un caz particular al acestei teoreme este

TEOREMA 3.2. *Fie $T : X \to X^*$ un operator monoton şi finit continuu definit pe spaţiul reflexiv X şi $f : X \to R_1$ funcţională convexă şi semicontinuă inferior, $f(0) = 0$. Presupunem că pentru $w \in X^*$ există $R > 0$ astfel încît:*

$$(3.15) \qquad (Tu - w, u) + f(u) > 0$$

pentru toţi $u \in X$, cu $\|u\| = R$.

Atunci există $u_0 \in B_R = \{u\,;\ \|u\| \leqslant R\}$ astfel încît

$$(3.16) \qquad (Tu - w, u - u_0) \geqslant f(u_0) - f(u), \quad \forall u \in X.$$

Demonstraţie. Se aplică teorema precedentă funcţionalei $A(u, v) = (Tu - w, u) + f(v)$.

Observaţii. 1) În condiţiile teoremei 3.2, inegalitatea (3.16) este echivalentă cu

$$(3.17) \qquad (Tu_0 - w, u - u_0) \geqslant f(u_0) - f(u), \quad \forall u \in X.$$

Într-adevăr, pentru a obține (3.17) din (3.16) luăm în inegalitatea (3.16) $u = u_t = (1 - t)\, u_0 + tx$, x fiind un element arbitrar. Din convexitatea funcționalei f rezultă atunci

$$(Tu_t - w, x - u_0) \geqslant f(u_0) - f(x). \tag{3.18}$$

Deoarece T este finit continuu, pentru $t \to 0$, Tu_t converge slab la Tu_0 și se obține (3.17). Reciproca rezultă imediat din monotonia operatorului T.

2) În teorema 3.2 este suficient, de fapt, să presupunem T hemicontinuu, deoarece, fiind și monoton, rezultă după o observație a lui Kato [26], finit continuu.

Este interesant să semnalăm cîteva cazuri particulare ale teoremelor 3.1 și 3.2 :

a) $A(u, v) = (Tu - w, v)$. Atunci inegalitatea (3.16) revine la ecuația $Tu_0 = w$ (lema 1.) și teorema 3.2 este echivalentă cu 2.2.

b) $A(u, v) = f(v)$. Atunci u_0 este un minim pentru funcționala f și din teorema 3.2 rezultă

COROLAR. *Fie $f : X \to R_1$ o funcțională convexă, semicontinuă inferior definită pe spațiul reflexiv X. Dacă $\lim\limits_{\|u\| \to \infty} f(u) = \infty$, atunci f admite un punct minim pe spațiul X.*

DEFINIȚIE. Funcționala $f : X \to R_1$ se numește diferențiabilă în $u_0 \in X$, dacă există un element $f(u_0) \in X^*$ astfel încît pentru orice $h \in X$

$$f(u_0 + h) - f(u_0) = (f'(u_0), h) + 0(\|h\|).$$

Fie $f : X \to R_1$ diferențiabilă pe spațiul X și u_1, u_2 două elemente arbitrare din X. Considerăm $u_t = tu_1 + (1 - t)\, u_2$ și notăm cu $\varphi(t)$ funcția $f(u_t)$. Presupunem că $f' : X \to X^*$ este monoton :

$$(f'(u) - f'(v), u - v) \geqslant 0, \quad \forall u, v \in X.$$

Atunci derivata $\varphi'(t) = (f(u_t), u_2 - u_1)$ a funcției $\varphi(t)$ este monoton crescătoare pe intervalul $[0,1]$, deci $\varphi(t)$ este convexă. Sau :

$$f(tu_1 + (1 - t)\, u_2) \leqslant tf(u_1) + (1 - t)\, f(u_2), \quad t \in [0,1].$$

În concluzie, o condiție suficientă de convexitate pentru funcționala diferențiabilă $f : X \to R_1$ este ca derivata sa $f' : X \to X^*$ să fie monotonă.

Menționăm de asemenea că punctele de minim al unei funcționale diferențiabile sînt soluții ale ecuației $f'(u) = 0$.

Observație. Menționăm că pentru spații Banach reflexive particulare (de exemplu pentru spații uniform convexe) teorema 3.2 se menține adevărată și în condiții de semimonotonie pentru operatorul T. Formularea exactă și demonstrarea acestui rezultat se găsește în lucrarea [19] a lui Browder.

Alte generalizări ale acestei teoreme în cazul spațiilor local convexe pot fi găsite în lucrarea deja menționată a lui Brezis [22].

4. PROBLEME NELINIARE ELIPTICE LA LIMITĂ

Fie Ω un domeniu mărginit și deschis din R_n. În cele ce urmează vom folosi notația D_j pentru simbolul de derivare $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, ..., n$ și $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, unde α este multiindicele $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$.

Dacă m este întreg pozitiv și $1 < p < \infty$, notăm cu $W_p^m(\Omega)$ spațiul Sobolev

$$W_p^m(\Omega) = \{u\,;\ D^\alpha u \in L_p(\Omega)\,;\ |\alpha| \leqslant m\} \tag{4.1}$$

derivata D^α fiind considerată în sensul teoriei distribuțiilor. $W_p^m(\Omega)$ este spațiu Banach reflexiv cu norma definită de

$$\|u\|_{m,p} = \Big\{ \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \Big\}^{1/p}. \tag{4.2}$$

Vom presupune că frontiera $\partial\Omega$ a domeniului Ω este suficient de regulată, astfel încît imersiunea $W_p^m(\Omega) \subset W_p^{m-1}(\Omega)$ să fie complet continuă (Ω este domeniu Sobolev).

Notăm cu $C_0^\infty(\Omega)$ spațiul funcțiilor indefinit derivabile cu suport compact în Ω și cu $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$ aderența acestui spațiu în $W_p^m(\Omega)$.

Pentru $u \in L^p(\Omega)$ și $v \in L^q(\Omega)$ $(1/p + 1/q = 1)$ vom nota:

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)\,\overline{v}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Considerăm operatorul diferențial de formă divergentă

$$Au = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^\alpha D^\alpha A_\alpha(x, u, ..., D^m u), \tag{4.3}$$

unde A_α sînt funcții numerice definite pe $\Omega \times R_N$.

Presupunem:

I. A_α sînt măsurabile în x și continue în raport cu $(u, Du, ..., D^m u)$. Există $p > 1$, o constantă C și o funcție $g(x) \in L_q(\Omega)$ $(1/p + 1/q = 1)$ astfel încît:

$$|A_\alpha(x, \xi)| \leqslant C\Big(\sum_{|\alpha| \leqslant m} |\xi|^{p-1} + g(x)\Big), \tag{4.4}$$

unde $\xi = \{\xi_\alpha\,;\ |\alpha| \leqslant m\}$.

Condiția I fiind îndeplinită, corespunzător lui A considerăm funcționala $a(u, v)$ definită pe $W_p^m(\Omega) \times W_p^m(\Omega)$:

$$a(u, v) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (A_\alpha(x, u, ..., D^m u), D^\alpha v). \tag{4.5}$$

Fie V un subspațiu închis din $W_p^m(\Omega)$ astfel încît

$$\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega) \subset V \subset W_p^m(\Omega).$$

Problemă. Dat fiind $f \in V^*$, să se găsească $u \in V$ astfel încît pentru orice $v \in V$,

$$a(u, v) = (f, v). \tag{4.6}$$

Observații. 1°. Problema de mai sus este de tip Dirichlet (respectiv Neumann) dacă $V = \overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega)$ (respectiv $W^m_p(\Omega)$). Într-adevăr, dacă $u \in C^{2m}(\Omega)$ este soluție clasică a ecuației $Au = f$, ea va fi soluție a problemei (4.6) dacă și numai dacă: 1) $u \in V$, 2) $(Au, v) = a(u, v)$, $\forall v \in V$. Dacă $V = \overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega)$ și Ω are frontiera $\partial\Omega$ suficient de regulată, condiția 1) exprimă tocmai faptul $u/\partial\Omega = 0$, iar 2) este identic verificată în virtutea acestui fapt. Dacă $V = W^m_p(\Omega)$ condiția 1) este verificată de la sine pe cînd 2) transformată prin intermediul formulei lui Green impune verificarea de către funcția $u(x)$ a unor condiții de tip Neumann pe frontiera domeniului Ω.

2°. Considerăm pe spațiul V funcționala reală

$$J(u) = \int_\Omega F(x, u, Du, \ldots, D^m u)\mathrm{d}x, \tag{4.7}$$

unde F este funcție numerică diferențiabilă în raport cu ansamblul argumentelor $p_\alpha = D^\alpha u$.

Notăm $F_\alpha = F/\partial p_\alpha$ și presupunem:

$$|F(x, \xi)| \leqslant C(g(x) + |\xi|^p), \quad g \in L_p(\Omega), \tag{4.8}$$

$$|F_2(x, \xi)| \leqslant C_1(g_1(x) + |\xi|^{p-1}) \quad g_1 \in L_q(\Omega). \tag{4.9}$$

Atunci J este diferențiabilă pe spațiul V și:

$$(J'(u), h) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (F_\alpha(x, u, \ldots, D^m u), D^\alpha h), \quad h \in V. \tag{4.10}$$

Conform unei observații făcute în secțiunea precedentă, punctele de minim ale funcționalei J pe spațiul V vor verifica ecuația:

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} (F_\alpha(x, u, \ldots, D^m u), D^\alpha h) = 0 \quad \forall h \in V. \tag{4.11}$$

Deci sînt soluții, cu condiții nule pe spațiul V, ale ecuației Euler-Lagrange:

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^\alpha D^\alpha F_\alpha(x, u, \ldots, D^m u) = 0. \tag{4.12}$$

TEOREMA 4.1. *Fie A un operator diferențial de forma* (4.3) *și V un subspațiu închis al lui $W^m_p(\Omega)$; $\overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega) \subset V \subset W^m_p(\Omega)$. Presupunem îndeplinită condiția* I *și în plus*:

1) $\lim\limits_{\|u\|_{m,p} \to \infty} \operatorname{Re} a(u, u)/\|u\|_{m,p} = \infty$;

2) *Pentru orice* $u, v \in V$

$$\{\operatorname{Re} a(u, u-v) - a(v, u-v) + b(u, u-v) - b(v, u-v)\} \geqslant 0, \tag{4.13}$$

cu $b(u, v) = \sum\limits_{|\gamma| \leqslant m-1} (B_\gamma(x, u, \ldots, D^{m-1}u), D^\gamma v)$, *unde funcțiile* B_γ *verifică condiția* I.

Atunci există $u \in V$ *soluție a problemei la limită* (4.6).

Observație. Dacă funcțiile reale A_α și B_γ sînt diferențiabile, condiția (4.13) poate fi înlocuită cu

$$(4.13)' \qquad \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} A_{\alpha\beta}(x, \xi^n)\,\eta_\alpha\eta_\beta \geqslant - \sum_{|\gamma|, \delta| \leqslant m-1} B_{\gamma\delta}(x, \bar{\xi}^*)\,\eta_\gamma\eta_\delta,$$

unde am notat : $A_{\alpha\beta} = \partial A_\alpha/\partial p_\alpha$, $B_{\gamma\delta} = \partial B_\gamma/\partial p_\delta$.

Demonstrația teoremei 4.1. Din condiția 4.1 rezultă

$$(4.14) \qquad |a(u, v)| \leqslant K(\|u\|_{m,p})\,\|v\|_{m,p}, \quad \forall v \in V.$$

Există deci $T : V \to V^*$ astfel încît $(Tu, v) = a(u, v)$ pentru orice $u, v \in V$. Problema (4.6) devine astfel echivalentă cu ecuația $Tu = f$. Vom demonstra că operatorul T verifică condițiile teoremei 1.2.

1°. T este demicontinuu. Fie $u_k \to u$ în V ; deoarece T este operator mărginit (relația (4.14)), pentru a demonstra că Tu_k este slab convergent la Tu, este suficient să arătăm că are loc acest lucru pentru un subșir al său. Deoarece $u_k \to u$, în $W_m^p(\Omega)$ există $\{u_{n_k}\} \subset \{u_k\}$ astfel încît $D^\alpha u_{n_k} \to D^\alpha u$ a.p.t. și deci $A_\alpha(x, u_{n_k}, \ldots, D^m u_{n_k}) \to A_\alpha(x, u, \ldots, D^m u)$ a.p.t. în Ω. Din relația (4.4) și din teorema de convergență a lui Lebesgue rezultă atunci că $A_\alpha(x, u_{n_k}, \ldots, D^m u_{n_k})$ converge la $A_\alpha(x, u, \ldots, D^m u)$ în topologia slabă a spațiului $L_q(\Omega)$, deci :

$$(Tu_{n_k} v) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (A, (x, u_{n_k}, \ldots, D^m u_{n_k}), D^\alpha v) \to$$

$$\to \sum_{|\alpha| \leqslant m} (A_\alpha(x, u, \ldots, D^m u), D^\alpha v) = (Tu, v), \quad \forall v \in V.$$

2°. Operatorul T este coercitiv conform ipotezei 1).

3°. Evident, $|b(u, v)| \leqslant K_1(\|u\|_{m,p})\|v\|_{m-1,p}$. Dacă notăm cu $\tilde{V}$ spațiul V înzestrat cu topologia $W_p^{m-1}(\Omega)$, rezultă atunci existența unui operator $C : V \to \tilde{V}^* \subset V^*$, astfel încît : $b(u, v) = (Cu, v)$, $\forall v \in V$. Operatorul $C : V \to V^*$ este complet continuu. Într-adevăr, dacă u_k este slab convergent în V, la $u \in V$, deoarece incluziunea $V \subset \tilde{V}$ este complet continuă, șirul $\{u_k\}$ este convergent în topologia tare a spațiului $\tilde{V}$ deci Tu_k converge slab în spațiul $\tilde{V}^*$ la Tu. (Demicontinuitatea operatorului $T : \tilde{V} \to \tilde{V}^*$ rezultă în mod similar cu punctul 1°). Deci Tu_k este convergent la Tu în spațiul V. Din condiția (4.13) rezultă evident $T + C$ monoton pe spațiul V.

Condițiile teoremei 1.2 fiind îndeplinite, operatorul T este surjectiv și cu aceasta teorema 4.1 este complet demonstrată.

Fie $\xi = (\eta, \zeta)$ unde $\eta = \{\xi_\alpha ; |\alpha| \leqslant m - 1\}$ și $\zeta = \{\xi_\alpha ; |\alpha| = m\}$. Cu această precizare putem formula următorul rezultat mai general privind rezolvarea problemei la limită (4.6).

TEOREMA 4.2. *Presupunem verificate următoarele condiții* :

1) $A_\alpha(x, \xi)$ *măsurabile în* x *și continue în raport cu* ξ. *Există* $g(x) \in L_q(\Omega)$ *și* $C > 0$, *astfel încît* :

$$(4.4)' \qquad |A_\alpha(x, \eta, \zeta)| \leqslant C(|\eta|^{p-1} + |\zeta|^{p-1} + g(x))$$

2) $\lim\limits_{\|u\|_{m,p}\to\infty} \operatorname{Re} a(u, u)/\|u\|_{m,p} = \infty$,

3) *Pentru* $|\eta|$ *mărginit și* $|\zeta| \to \infty$:

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, \eta, \zeta)\zeta_\alpha/|\zeta| + |\zeta|^{p-1} \to \infty, \quad \text{a.p.t. în } \Omega. \tag{4.15}$$

4) *Pentru* $\zeta \neq \zeta^*$ *și pentru aproape toți* $x \in \Omega$:

$$\sum_{|\alpha|=m} (A_\alpha(x, \eta, \zeta^*) - A_\alpha(x, \eta, \zeta)(\zeta^*_\alpha - \zeta_\alpha) > 0. \tag{4.16}$$

Atunci există $u \in V$ *soluție a problemei la limită* (4.6).

În prealabil menționăm următorul rezultat care se poate verifica prin calcul direct:

LEMA 4.1. *Dacă* $u_n \to u$ *în* $W_p^{m-1}(\Omega)$ *și* $v \in W_p^m(\Omega)$, *atunci* $A_\alpha(x, u_n, \ldots, D^{m-1}u_n, D^m v) \to A(x, u, \ldots, D^{m-1}u, D^m v)$ *în* $L_q(\Omega)$ $(1/p + 1/q = 1)$.

Demonstrația teoremei 4.2. Considerăm funcționala $a(u, w; v) = \sum_{|\alpha|=m} (A_\alpha(x, w, \ldots, D^{m-1}w, D^m u), D^\alpha v) + \sum_{|\alpha|<m} (A(x, w, \ldots, D^m w), D^\alpha v) = a_1(u, w, v) + a_2(w, v)$.

Condiția I fiind îndeplinită, există $S: V \times V \to V^*$ astfel încît $a(u, w; v) = (S(u, w), v)$. Vom demonstra că operatorul $T = S(u, u): V \to V^*$ verifică condițiile teoremei 1.3. Ne vom opri apoi doar asupra condiției de cvasimonotonie.

a) $(S(u, w) - S(w, w), u - w) = a_1(u, w; u - w) - a_1(w, w; u - w)$ evident pozitivă conform condiției (4.16). Faptul că $u \to S(u.,)$ este hemicontinuă rezultă pe baza unui raționament deja folosit.

b) Fie u_n slab convergent la $u \in V$, astfel încît $a_1(u_n, u_n, u_n - u) - a_1(u, u_n, u_n - u) \to 0$. Urmează atunci:

$$\sum_{|\alpha|=m} (A_\alpha(x, u_n, \ldots, D^m u_n) - A_\alpha(x, u_n, \ldots, D^{m-1}u_n, D^m u_n), D^\alpha u_n - \\ - D^\alpha u) \to 0. \tag{4.17}$$

Notăm

$$B_n(x) = \sum_{|\alpha|=m} [A_\alpha(x, u_n, \ldots, D^m u_n) - \\ - A_\alpha(x, u_n, \ldots, D^{m-1}u_n, D^m u)]\,[D^\alpha u_n - D^\alpha u]$$

Deoarece $\{u_n\}$ este mărginit în $W_p^m(\Omega)$, există $\{u_k\} \subset \{u_n\}$ astfel încît $u_k \to u$ în $W_p^{m-1}(\Omega)$, deci $D^\alpha u_k(x) \to D^\alpha u(x)$ a.p.t. în Ω pentru $|\alpha| \leqslant m - 1$. Să observăm că $D^m u_k(x)$ converge a.p.t. la $D^m u(x)$. Fie pentru aceasta $\zeta_k = D^m u_k(x)$ și $\zeta = D^m u(x)$, unde x este un punct fix din Ω și ζ^* un punct limită al șirului ζ_k. Evident, $|\zeta^*| < \infty$, deoarece în caz contrar, din condiția (4.4) ar rezulta:

$$B_k(x) \geqslant \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, \eta_k, \zeta_k)\zeta_{k\alpha} - C(|\zeta_k|^{p-1} + |\eta_k|^{p-1} + g(x))$$

și deci conform relației (4.16) $\lim\limits_{k\to\infty} B_k(x) = \infty$, ceea ce este absurd. Deoarece $B_n(x) \to 0$, rezultă atunci a.p.t. în Ω,

$$\sum_{|\alpha|=m} [A_\alpha(x, u, Du, \ldots, D^{m-1}u, \zeta) + A_\alpha(x, u, \ldots, D^{m-1}u, \zeta^*)]\,[\zeta_\alpha - \zeta^*_\alpha] = 0$$

adică : $\zeta^* = \zeta$. Prin urmare $A_\alpha(x, u_k, \ldots, D^m u_k(x))$ converge a.p.t. în Ω la $A_\alpha(x, u, \ldots, D^m u)$, deci :

$$(4.18) \qquad A_\alpha(x, u_k, \ldots, D^m u_k) \to A_\alpha(x, u, \ldots, D^m u) \text{ în } L_q(\Omega) \text{ slab.}$$

Deoarece din orice subşir din $\{u_n\}$ se poate extrage unul astfel încît (4.18) să aibă loc, urmează :

$$(4.19) \qquad A_\alpha(x, u_n, \ldots, D^m u_n) \to A_\alpha(x, u, \ldots, D^m u) \text{ în } L_q(\Omega) \text{ slab.}$$

Deci $u_n \to u$ în $W_p^{m-1}(\Omega)$ şi conform lemei (4.1) pentru orice $v \in V$, şirul $A_\alpha(x, u_n, \ldots, D^{m-1}u_n, D^m v)$ converge la $A_\alpha(x, u, \ldots, D^{m-1}u, D^m v)$ în spaţiul $L_q(\Omega)$. Adică $S(v, u_n) \to S(v, u)$ în V_{w^*}.

c) Fie $\{u_n\}$ slab convergent la $u \in V$ şi $S(v, u_n)$ convergent la $u' \in V$ în topologia slabă a spaţiului V^*. Rezultă atunci că $u_n \to u$ în $W_p^{m-1}(\Omega)$ şi conform lemei 4.1, $A_\alpha(x, u_n, \ldots, D^{m-1}u_n, D^m v) \to A_\alpha(x, u, \ldots, D^{m-1}u, D^m v)$ în $L_q(\Omega)$; adică :

$$(4.20) \qquad a_1(v, u_n, u_n) \to a_1(v, u, u).$$

Pe de altă parte

$$a_2(u, u_n) = (S(v, u_n), u) - a_1(v, u_n, u) \to (v', u) - a_1(v, u, u).$$

Deoarece $a_2(u - u_n, u_n) \to 0$, rezultă atunci $(S(v, u_n), u_n) = a_1(v, u_n, u_n) + a_2(u_n, u_n) \to (v', u)$. Condiţiile teoremei 1.3 fiind satisfăcute, teorema 4.2 este complet demonstrată.

Observaţie. Teoremele 4.1 şi 4.2 pot fi regăsite studiind problema minimizării funcţionalei (4.7) pe spaţiul V, pe baza rezultatelor stabilite în secţiunea 3. O asemenea problemă este studiată de Browder în [14]. Alte rezultate privind existenţa şi unicitatea soluţiilor problemei variaţionale (4.6) se găsesc în lucrarea citată a lui Vîshik [40].

5. PROBLEME NELINIARE PARABOLICE LA LIMITĂ

Fie Ω un domeniu deschis şi mărginit din R_n, $S = [t_0, t_1]$ un interval al axei reale şi V un subspaţiu închis din $W_p^m(\Omega)$; $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega) \subset V \subset W_p^m(\Omega)$.

Ca şi în secţiunea precedentă, vom presupune incluziunea $W_p^m(\Omega) \to W_p^{m-1}(\Omega)$ compactă. Notăm cu $L^p(S, V)$ spaţiul funcţiilor $u : S \to V$ pentru care $\int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|_{m,p}^p \, dt < \infty$, normat cu :

$$\|u\| = \left(\int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|_{m,p}^p \, dt \right)^{1/p}, \quad p \geqslant 2.$$

Considerăm operatorul diferenţial :

$$(5.1) \qquad A(t)u = \sum_{|\alpha| = m} (-1)^\alpha D^\alpha A_\alpha(x, t, u, \ldots, D^m u),$$

unde $A_\alpha(x, t, u, \ldots, D^m u)$ sînt funcţii reale definite pe $\Omega \times R_1 \times R_N$.

Presupunem :

I. Fiecare $A_\alpha(x, t, \xi)$ este măsurabilă în x, t şi continuă în raport cu $\xi = (\xi_\alpha;\ |\alpha| \leqslant m)$. Există $g(x, t) \in L_q(\Omega \times R_1)$ astfel încît a.p.t. în $\Omega \times R_1$

$$(5.2) \qquad |A_\alpha(x, t, \xi)| \leqslant C \Big(\sum_{|\beta| \leqslant m} |\zeta_\beta|^{p-1} + g(x, t) \Big).$$

Condiţia I fiind îndeplinită, asociem operatorului (5.1) familia de forme neliniare :

$$(5.3) \qquad a(t, u, v) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (A_\alpha(x, t, u, (t), \ldots, D^m u(t)), D^\alpha v(t))$$

definite pentru $u, v \in L^p(S, V)$. Notăm :

$$(5.4) \qquad K(u, v) = \int_{t_0}^{t_1} a(t, u(t), v(t))\, \mathrm{d}t.$$

Din relaţia (5.2) rezultă atunci ;

$$(5.5) \qquad |K(u, v)| \leqslant C \|v\| (\|u\| + 1)^{p-1}$$

pentru orice $u, v \in L^p(S, V)$. Fie $Y \subset L^p(S, V)$ spaţiul funcţiilor continue de la S în V şi continuu diferenţiabile de la S la $L_q(\Omega)$ $(1/p + 1/q = 1)$. Notăm :

$$(5.6) \qquad Y_0 = \{u(t) \in Y;\ u(t_0) = 0\};\quad Y_1 = \{u(t) \in Y;\ u(t_1) = 0\}.$$

Evident, spaţiile Y_0 şi Y_1 sînt dense în $L^p(S, V)$.

Considerăm operatorul $L_0 : L^p(S, V) \to (L^p(S, V))$, $L_0 u = \mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ cu domeniul $D(L_0) = Y_0$ şi operatorul $L_1 u = -\, \mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ cu domeniul $D(L_1) = Y_1$. Operatorul liniar $L_1 : L^p(S, V) \to (L^p(S, V)) = L^q(S, V^*)$ este dens iar pentru $u \in D(L_0)$ şi $v \in D(L_1)$ are loc evident relaţia :

$$(5.7) \qquad (L_0 u, v) = (u, L_1 v),$$

deci $L_1 \subset L_0^*$. Operatorul L_0 este prin urmare dens şi deci admite o extensie închisă $L : L^p(S, V) \to (L^p(S, V))$.

Problema 1. *Dat fiind* $f \in (L^p(S, V))^*$ *şi* $u_0 \in L^2(\Omega)$, *să se găsească* $u \in L^p(S, V)$ *cu* $(u - u_0) \in D(L)$ *astfel încît pentru orice* $v \in L^p(S, V)$;

$$(5.8) \qquad (L(u - u_0), v) + K(u, v) = (f, v).$$

Observaţie. Evident, orice soluţie clasică $u \in C^{2m}(\Omega \times S)$ a problemei parabolice la limită :

$$(5.9) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + A(t) u = f(x, t),$$

$$u(t) \in V, \quad t > t_0,$$

$$u(t_0) = u_0$$

este şi soluţie a problemei 1, dacă $(A(t) u, v) = K(u, v)$.

PROBLEMA 2. *Dat fiind* $f\in(L^p(S,\ V))$ *și* $u_0\in L^2(\Omega)$, *să se găsească* $u\in L^p(S,\ V)$, *continuă de la* S *la spațiul* $L^2(\Omega)$ *astfel încît pentru orice* $V\in Y_1$

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t,\ u(t),\ v(t)) - (u(t),\ v'(t))\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (f(t),\ v(t))\,\mathrm{d}t + (u_0,\ v(t_0)). \tag{5.10}$$

LEMA 5.1. *Problemele 1 și 2 sînt echivalente.*

Demonstrație. Fie $u(t)\in L^p(S,\ V)$ soluție a problemei 1 și $z(t) = u(t) - u_0$. Vom demonstra mai întîi că $u(t)\in L^2(\Omega)$, $\forall t\in[0,\ 1]$ și că funcția $u: S\to L^2(\Omega)$ este continuă. Pentru aceasta să observăm că dacă $u\in D(L_0)$, atunci

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant 2\ \mathrm{Re}\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\ u(s)\right)\mathrm{d}s = 2\ \mathrm{Re}(L_0u,\ \chi_t\, u), \tag{5.11}$$

unde am notat cu χ_t funcția caracteristică a intervalului $[t_0,\ t]$. Deci

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \|L_0u\|_{(L^p(S,\ V))^*}\ \|\chi_t u\|_{L^p(S,\ V)}. \tag{5.12}$$

Deoarece $z\in D(L)$, există $\{z_k\}\subset D(L_0)$ astfel încît $z_k\to z$ în $L^p(S,\ V)$ și $L_0z_k\to L_0z$ în $(L^p(S,\ V))$. Din inegalitatea (5.12) rezultă atunci

$$\|z_k(t) - z_j(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \|L_0z_k - L_0z_j\|_{L^p(S,\ V)^*}\ \|\chi_t(z_k - z_j)\|_{L^p(S,\ V)}$$

deci $\{z_k(t)\}$ converge uniform pe S la $z(t)$. Rezultă atunci că $z(t)$ este continuă ca funcție de la S la $L^2(\Omega)$ și în plus are loc relația:

$$\|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = 2\ \mathrm{Re}(Lz,\ \chi_t z). \tag{5.13}$$

Dacă $v\in D(L_1)$ atunci:

$$(L_0z_k,\ v) = (z_k,\ L_1v) = -\int_{t_0}^{t_1}\left(z_k(t),\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t.$$

Trecînd la limită, urmează

$$(Lz,\ v) = -\int_{t_0}^{t_1}\left(u(t),\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1}\left(u_0,\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} (u(t),\ v'(t)\ \mathrm{d}t - (u_0,\ v(t_0)). \tag{5.14}$$

Întrucît $(Lz,\ v) = (f,\ v) - K(u,\ v)$, din relația (5.14) rezultă atunci că u este soluție a problemei 2.

Reciproc, dacă $u(t)$ este soluție a problemei 2, atunci pentru orice $v\in D(L_1)$: $(z,\ L_1v) + K(u,\ v) = (f v,)$. Pentru a demonstra că u este soluție a problemei 1, va fi deci suficient să verificăm că $L_1^* = L$. Deoarece am observat deja că $L_1^*\subseteq L$, rămîne de demonstrat incluziunea $L\subset L_1^*$. Fie pentru aceasta $u \in D(L_1^*)$; fără a restrînge generalitatea, putem presupune : $u(t) = 0$, pentru $t < t_0$. Considerăm regularizată $u_\varepsilon(t) = \varphi_\varepsilon \ast u$, unde $\varphi_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}\varphi(t/\varepsilon)$, cu $\varphi(t) \in C_0^1(R_1)$; $\int \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1$ și $\varphi(t) = 0$ pentru $t < 0$. Rezultă atunci :

$$\frac{\mathrm{d}u_\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi_\varepsilon}{\mathrm{d}t} \ast u = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{d\varphi_\varepsilon(t-s)}{\mathrm{d}s}\, u(s)\,\mathrm{d}s. \tag{5.15}$$

Sau : $\dfrac{\mathrm{d}u_\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t} = (\varphi_\varepsilon \ast L_1^* u)(t)$. Deoarece $u_\varepsilon \in D(L_0)$, trecînd la limită urmează $u_\varepsilon \to u$ în $L^p(S, V)$ și $L_0 u_\varepsilon \to L_1^* u$ în $(L^p(S, V))^* = L^q(S, V)$. Deci : $u \in D(L) = D(L_1^*)$.

Observație. Dacă prelungim funcțiile $u(t)$, $f(t)$ și $t \to a(t, u, v)$ cu *o* pe intervalul $(-\infty, t_0)$ și luăm $v(t) = \varphi(t)v$, unde $\varphi \in C_0^\infty(-\infty, t_0)$, ecuația (5.10) se poate scrie sub forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t), v) + a(t, u(t), v) = (u_0, v)\,\delta + (f, v),\ \forall v \in V, \tag{5.16}$$

δ fiind măsura lui Dirac. Fie $A(t) : V \to V^*$ operatorul definit de relația : $(A(t, u), v) = a(t, u, v)$. Atunci u verifică ecuația

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + A(t)\,u(t) = f(t) + u \otimes \delta$$

în sensul teoriei distribuțiilor vectoriale cu valori în spațiul V^*.

TEOREMA 5.1. *Fie $A(t)$ operator diferențial de forma* 5.1 *și presupunem condiția* I *îndeplinită. Admitem în plus :*

a) Re $a(u, u)/\|u\| \geqslant C(\|u\|)$, *unde $C(r)$ este funcție nenegativă cu* $\lim\limits_{r\to\infty} C(r) = \infty$;

b) *pentru $|\eta|$ mărginit, a.p.t. în Ω :*

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, t, \eta, \zeta)\,\zeta_\alpha/|\zeta| + |\zeta|^{p-1} \to \infty \ \textit{pentru}\ |\zeta| \to \infty$$

c) *Pentru $\zeta \neq \zeta^*$*

$$\sum_{|\alpha|=m} [A_\alpha(x, t, \eta, \zeta) - A_\alpha(x, t, \eta, \zeta^*)]\,[\zeta_\alpha - \zeta_\alpha^*] > 0,$$

a.p.t. în Ω.

Atunci pentru $f \in (L^p(S, V))^*$ și $u_0 \in L^2(\Omega)$ problema 1 (2) *admite o soluție $u \in L^p(S, V)$, cu $u(t_0) = u_0$. În plus $u(t)$ este continuă ca funcție de la S la spațiul $L^2(\Omega)$.*

Vom demonstra în prealabil un rezultat global. Notăm pentru acesta cu $\overline{Y}_0$ spațiul funcțiilor continue de la R_1 la V și continuu diferențiabile de la R_1 în $L_q(\Omega)$, cu suport compact în R_1. Considerăm operatorul $\overline{L}_0 u = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ cu domeniul $D(\overline{L}_0) = \overline{Y}_0$. Ca și în cazul intervalului finit, rezultă că $\overline{L}_0$ admite o extensie închisă :

$$\overline{L} : L^p(R_1, V) \to (L^p(R_1, V))^* = L^q(R_1, V^*).$$

Pentru $u,\ v \in L^p(R_1,\ V)$ definim funcționala

$$\overline{K}(u,\ v) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t,\ u(t),\ v(t))\,\mathrm{d}t.$$

Din condiția I rezultă evident:

$$|\overline{K}(u,\ v)| \leqslant C\|v\|(\|u\| + 1)^{p-1};\ u,\ v \in L^p(R_1,\ V). \tag{5.17}$$

LEMA 5.2. *Pentru orice* $f \in (L^p R_1,\ V))^*$ *există* $u \in L^p(R_1,\ V)$ *astfel încît:* $u \in D(\overline{L})$ *și pentru orice* $v \in L^p(R_1,\ V)$

$$(\overline{L}u,\ v) + \overline{K}(u,\ v) = (f,\ v). \tag{5.18}$$

Demonstrație. Conform relației (5.17), există $T_0 : L^p(R_1,\ V) \to (L^p(R_1,\ V))^*$ astfel încît $(T_0u,\ v) = \overline{K}(u,\ v)$. Problema (5.18) este atunci echivalentă cu:

$$(T_0 + \overline{L})u = f. \tag{5.19}$$

Vom demonstra că operatorul $T = T_0 + \overline{L}$ verifică condițiile teoremei 1.5. Faptul că T_0 este demicontinuu rezultă reluînd un raționament utilizat în demonstrația teoremei 4.1.

Ca și în demonstrația lemei 5.1, rezultă $-L_0 = \overline{L}^*$ și deoarece $\overline{L}_0$ este clasabil, urmează: $\overline{L} = -\overline{L}^*$.

$T_0 : L^p(R_1,\ V) \to L^q(R_1,\ V^*)$ este cvasimonoton. Pentru aceasta considerăm: $\overline{K}(u,\ w,\ v) = \overline{K}_1(u,\ w,\ v) + \overline{K}_2(w,\ v)$, unde:

$$\overline{K}_1(u, w\ v) = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega\times R_1} A_\alpha(x, t, w,\ \ldots, D^{m-1}w, D^m u)\, D^\alpha v\,(t,\ x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$

și

$$\overline{K}_2(u,\ v) = \sum_{|\alpha|<m} \int_{\Omega\times R_1} A_\alpha(x, t, w,\ \ldots, D^m w)\, D^\alpha v(t, x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y.$$

Definim operatorul $S : L^p(R_1,\ V) \times L^p(R_1,\ V) \to L^q(R_1,\ V^*)$ prin relația:

$$(S(u,\ w), v) = K(u,\ w,\ v).$$

Evident, $T_0u = S(u,\ u)$. Dacă u_n converge slab la u în spațiul $L^p(R_1,\ V)$ și $(S(u_n,\ u_n) - S(u, u_n), u_n - u) = K_1(u_n,\ u_n,\ u_n - u) - K_1(u,\ u_n,\ u_n - u) \to 0$, atunci din ipotezele b) și c) rezultă (v. demonstrația teoremei 4.2):

$$A_\alpha(x, t, u_n,\ \ldots, D^{m-1}u_n, D^m u_n) \to A_\alpha(x,\ t, u,\ \ldots, D^m u) \tag{5.20}$$

în topologia slabă a spațiului $L_q(R_1 \times \Omega)$.

Deoarece $W_p^m(\Omega)$ este scufundat complet continuu în $W_p^{m-1}(\Omega)$, același lucru rezultă despre incluziunea $u : L^p(\Delta,\ V) \to L^p(\Delta, W_p^{m-1}(\Omega))$ (Lions [32]), unde Δ este un interval finit arbitrar din R_1. Există deci $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$ convergent în $L^p(R_1,\ W_p^{m-1}(\Omega))$ la u. Din relația (5.20) rezultă însă că $\{u_n\}$ converge la u în $L^p(R_1, W_p^{m-1}(\Omega))$ și deci conform lemei (4.1):

$$A_\alpha(x, t, u_n, \ldots, D^{m-1}u_n, D^m v) \to A_\alpha(x, t, u, \ldots, D^{m-1}u, D^m v)$$

în $L_q(R_1 \times \Omega)$, oricare ar fi $v \in L^p(R_1, V)$; deci $S(v, u_n) \to S(v, u)$ în $(L^p(R_1, V))^*$ slab.

Celelalte condiții care intervin în definiția cvasimonotoniei se verifică în mod similar.

Observație. Soluția $u \in L^p(R_1, V)$ a problemei (5.18) este continuă ca funcție de la R_1 în spațiul $L^2(\Omega)$. Într-adevăr, dacă $u \in D(\overline{L})$, atunci:

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = 2\mathrm{Re}\,(\overline{L}u, \chi_t u), \tag{5.21}$$

unde χ_t este funcția caracteristică a intervalului $(-\infty, t)$. Relația (5.21) se demonstrează similar cu (5.13).

Demonstrația teoremei 5.1. Fără a restrînge generalitatea vom presupune $u_0 = 0$. Fie $f \in (L^p(S, V))^* = L^q(S, V^*)$ și $\bar{f}(t)$ funcția

$$\bar{f}(t) = \begin{cases} f(t) & , \quad t \in S, \\ 0 & , \quad t \in S. \end{cases}$$

Problema globală

$$\overline{K}(u, v) + (\overline{L}u, v) = (\bar{f}, v), \forall v \in L^p(R, V) \tag{5.22}$$

admite o soluție $\tilde{u} \in D(\overline{L}) \subset L^p(R_1, V)$.

Dacă în (5.22) luăm $v = \chi_t \tilde{u}$, rezultă pentru $t \leqslant t_0$

$$(\overline{L}\tilde{u}, \chi_t \tilde{u}) = -\overline{K}(\tilde{u}, \chi_t \tilde{u}) = -\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} a(t, \chi_t \tilde{u}, \chi_t \tilde{u})\,\mathrm{d}t,$$

deci $\mathrm{Re}(\overline{L}\tilde{u}, \chi_t \tilde{u}) \leqslant 0$, pentru $t \leqslant t_0$.

Din relația (5.21) urmează atunci $\|\tilde{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant 0$, $t < t_0$; deci $u(t) = 0$ pe intervalul $(-\infty, t_0)$.

Notăm cu $u(t)$ restricția funcției $\tilde{u}(t)$ la intervalul $S = [t_0, t_1]$. Vom demonstra că $u(t)$ este soluție a problemei 2. Fie $v \in Y_1$; fără a restrînge generalitatea, vom admite că v este restricția unei funcții $\bar{v} \in \overline{Y}_0$. Rezultă atunci:

$$\overline{K}(\tilde{u}, \bar{v}) + \left(\tilde{u}, \frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t}\right) = (\bar{f}, \bar{v}).$$

Deci

$$K(u, v) + (u, L_1 v) = (f, v).$$

Deoarece $u(t)$ este continuă de la R_1 în spațiul $L^2(\Omega)$ și întrucît $u(t) = 0$, pentru $t \leqslant t_0$, urmează $u(t_0) = 0$.

Observație. Un rezultat similar cu teorema 5.1 este stabilit de Lions [32] utilizînd o metodă de regularizare eliptică. Alte rezultate de aceeași natură au fost demonstrate de Vishik [40].

F. Browder [7], [8] demonstrează, pe baza teoremei 1.4 și a altora derivate din ea, teoreme de existență pentru ecuații de evoluție neliniare în spații Banach. Tot în ipoteze de monotonie, rezultate similare pentru ecuații de evoluție neliniare de ordinul I și II sînt stabilite de Lions și Strauss [33].

Primită la redacție la 25 august 1967

Facultatea de matematică și mecanică
Universitatea „Al. I. Cuza” Iași

BIBLIOGRAFIE

1. Г. Н. Агаев, *О разрешимости нелинейных операторных уравнений в пространстве Банаха*. ДАН СССР, **174**, *6*, 1239—1241 (1967).
2. Browder F. E., *The solvability of nonlinear functional equations*. Duke Math. J., **30**, 557—566 (1963).
3. — *Variational boundary value problems for quasi-linear elliptic equation*. I, II, III, Proc. Nat. Acad. Sci., **50**, 31—37, 592—598, 794—798 (1963).
4. — *Non-linear elliptic boundary value probtems*. Bull. Amer. Math. Soc.,**69**, 862—874 (1963).
5. — *Non-linear elliptic boundary value problems*. II. Trans. Amer. Math. Soc., **117**, 530—554 (1965).
6. — *Strongly non-linear parabolic boundary value problems*. Amer. J. Math., **86**, 339—357 (1964).
7. — *Non-linear equations of evolution*. Ann. Math., **80**, 485—523 (1964).
8. — *Existence of periodic solutions for non-linear equations of evolution*. Proc. Nat. Acad. Sci., **53**, 1100—1103 (1965).
9. — *Non-linear initial value problems*. Ann. Math., **82**, 51—87 (1965).
10. — *Remarks on non-linear functional equations*. Proc. Nat. Acad. Sci., **51**, 985—989 (1964).
11. — *Remarks on non-linear functional equations*. II, III. Illinois J. Math., **9**, 608—616; 617—622 (1965).
12. — *Mapping Theorems for non compact non-linear operators in Banach space*. Proc. Nat. Acad. Sci., **54**, 337.
13. — *Continuity properties of monoton nonlinear operators in Banach space*. Bull. Amer. Math. Soc., **70**, 551—553 (1964).
14. — *Variational methods for non-linear elliptic eigenvalue problems*. Bull. Amer. Math. Soc., **71**, 176—183 (1965).
15. — *Non-linear elliptic equations in non-reflexive Banach spaces*. Bull. Amer. Math. Soc., **72**, 89—95 (1966).
16. — *Non-linear monotone operators and convex sets in Banach spaces*. Bull. Amer. Math. Soc., **71**, 781—785 (1965).
17. — *Further remarks on non-linear functional equations*. Illinois J. of Math., **10**, 275—287 (1966).
18. — *On the unifications of the calculus of variations and the theory of monotone non-linear operators in Banach space*. Proc. Nat. Acad. Sci., **56**, 419 (1966).
19. — *Existence and approximations of solutions of non-linear variational inequalities*. Proc. Nat. Acad. Sci., **56**, 1080 (1966).
20. Bui An Ton, *Singular perturbations of non-linear elliptic and parabolic variational boundary value problems*. Canadian Journal of Mathematics, **XVIII**, *4*, 861—872 (1966).
21. Brezis H. *Une généralisation des opérateurs monotones*. C.R. Acad. Sci., Paris, **264**, 683—686 (1967).
22. — *Inéquations d'évolution abstraites*. C.R. Acad. Sci. Paris, **264**, 732—735 (1967).
23. Качуровский Р. И., *О монотонных операторах и выпуклых функционалах*. УМН, 15, *4*, 213 (1960).
24. — *Монотонные нелинейные операторы в Банаховых пространств*. ДАН. СССР, **163**, 559—562 (1965), *3*, стр.
25. Kasriel R., Nashed M., *Stability of solutions of same classes of non-linear operators equations*. Proc. Amer. Math. Soc., **87**, 1037—1042 (1966).

26. Kato T., *Demicontinuity, hemicontinuity and monotonicity.* Bull. Amer. Math. Soc., **70**, 548–550 (1964).

27. Gossez J. P., *Rermaques sur les opérateurs monotones.* Bull. de la Classe des Sci. Acad. Royale de Belgique, **9**, 1073–1077 (1966).

28. Lescarret Ch., *Cas d'addition des applications monotones maximales dans un espace de Hilbert.* C.R. Acad. Sci. Paris, **261**, 1160–1162 (1965).

29. Leray J., Lions L., *Quelques résultats de Vishik sur les problèmes elliptiques non-linéaires par les méthodes de Minty-Browder.* Bull. de la Soc. Math. de France, **93**, 97–107 (1965).

30. Lions J. L., Stampacchia G., Inéquations variationnelles noncoercitives. C.R. Acad. Sci. Paris, **261**, 25–27 (1965).

31. Lions J. L., *Équations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites.* Springer-Verlag, Berlin, 1961.

32. — *Sur certaines équations paraboliques non-linéaires.* Bull de la Soc. Math. de France, **93**, 155 (1965).

33. Lions J. L., Strauss W., *Some non-linear evolution equations.* Bull. de la Soc. Math. de France, **93**, 43 (1965).

34. Marinescu G., *Spații vectoriale topologice și pseudo-topologice.* Ed. Academiei, București, 1959.

35. Minty G. I., *Monotone (non-linear) operators in Hilbert space.* Duke Math. J., **29**, 341–346 (1962).

36. — *On the maximal domain of a monotone function.* Michigan Math. J., **8**, 135–137 (1961)

37. — *On a ,,monotonicity'' method for the solutions of the nonlinear equations in Banach spaces.* Proc. Nat. Acad. Sci., **50**, 1083–1041 (1963).

38. Petryshin W. V., *On the extension and the solution of non-linear operators equations.* Illinois J. Math., **10**, 255–273 (1966).

39. ВИШИК И. М., *Квазилинейные сильно эллипт. системы дифф. уравнений имеющие дивергентую форму.* Труды Моск. матем. общества, Т. **12**, 125—184 (1963).

40. — *О разрешимости краевых задач для квазилинейных параблических уравнений высших порядков.* Матем. сб., **59(101)** 289—325 (1964).

ASUPRA VALUĂRILOR SEMIINELELOR DE TRANSFORMĂRI INTERIOARE

DE

FLORICA BUCUR

În lucrare se arată cum pot fi reconstituite punctele unei varietăți riemanniene compacte V, pornind de la semiinelul $I(V, S^2)$, definit în [3] și cum pot fi definiți anumiți invarianți algebrici ai unei aplicații interioare folosind același semiinel.

Fie V o suprafață riemanniană. În [3] am arătat interesul pe care îl prezintă pentru studiul varietății V un anume invariant algebric $I(V, S^2)$, semiinelul transformărilor interioare definite pe V cu valori în S^2 ([3], pag. 255). În lucrarea citată am arătat în particular că dacă V_1 și V_2 sînt două suprafețe orientabile compacte, atunci ele sînt omeomorfe dacă și numai dacă $I(V_1, S^2)$ și $I(V_2, S^2)$ sînt izomorfe.

Varietățile vor fi presupuse de obicei compacte, deși unele rezultate sînt valabile chiar fără această ipoteză.

În lucrarea de față îmi propun să adîncesc acest rezultat în două direcții și anume:

I. Semiinelul $I(V, S^2)$ fiind dat, voi arăta cum poate fi reconstruită varietatea V (V compact), și anume punctele varietății V.

II. Voi arăta cum pot fi descriși în termeni algebrici, folosind semiinelele $I(V_1, S^2)$, $I(V_2, S^2)$, unii invarianți ai transformării interioare $f : V_1 \to V_2$ (gradul aplicației, indicele de ramificare al unui punct $x \in V_1$ deasupra lui $y_1 = f(x)$).

PROPOZIȚIE. *Fie* $f \in I(V_1, V_2)$, (V_1, V_2 *suprafețe orientabile*), *cu alte cuvinte o transformare interioară definită pe suprafața compactă* V_1 *cu valori în suprafața compactă* V_2. *În aceste condiții* f *induce un omomorfism* ([3], *pag. 252–254*)

$$f^* : I(V_2, S^2) \to I(V_1, S^2)$$

Dacă f *nu este constantă, atunci* f^* *este un monomorfism.*

Demonstrație. Fie $\varphi_1, \varphi_2 \in I(V_2, S^2)$ astfel încît $f^*(\varphi_1) = f^*(\varphi_2)$. Va trebui să dovedim că în aceste condiții $\varphi_1 = \varphi_2$. Observăm în primul rînd că

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 2, P. 165–167, BUCUREȘTI, 1968.

f este o aplicaţie pe V_2. În adevăr, f fiind o transformare interioară diferită, de aplicaţia constantă, rezultă că $f(V_1)$ este o submulţime deschisă a lui V_2. V_1 fiind compactă, $f(V_1)$ este şi închisă în V_2 (f e continuă).

Rezultă că $f(V_1)$ este în acelaşi timp închisă şi deschisă în V_2. Cum $f(V_1) \neq \emptyset$ şi V_2 este conexă, rezultă că $f(V_1) = V_2$.

Să presupunem acum că $\varphi_1 \neq \varphi_2$ deşi $f^*(\varphi_1) = f^*(\varphi_2)$.

Prin definiţie, pentru orice $x \in V_1$, avem $f^*(\varphi_i)(x) = \varphi_i(f(x))$ $i = 1,2$.

Dacă $\varphi_1 \neq \varphi_2$ rezultă că există un punct $y \in V_2$ aşa încît $\varphi_1(y) \neq \varphi_2(y)$. Dar f fiind *pe*, rezultă că există $x \in V_1$ aşa încît $f(x) = y$. Avem însă $f^*(\varphi_1) = f^*(\varphi_2)$ de unde rezultă $(f^*(\varphi_1))(x) = (f^*(\varphi_2))(x)$ adică $\varphi_1(f(x)) = \varphi_2(f(x))$ sau $\varphi_1(y) = \varphi_2(y)$ ceea ce este absurd.

Deci $f^* : I(V_2, S^2) \to I(V_1, S^2)$ este de fapt un monomorfism (o scufundare a lui $I(V_2, S^2)$ în $I(V_1, S^2)$).

Soluţia la problema I utilizează noţiunea de valuare a unui semiinel ([3], pag. 257) pe care o amintim. Se numeşte valuare a semiinelului $I(V, S^2)$ orice aplicaţie $\nu : I(V, S^2) - 0 \to Z$ (pe Z) care îndeplineşte următoarele condiţii:

1) $\nu(x \cdot y) = \nu(x) + \nu(y)$

2) $\nu(x + y) \geqslant \min(\nu(x), \nu(y))$

3) Dacă $\alpha : I(V, S^2) \to I(V, S^2)$ este un automorfism indus de un automorfism al lui V, atunci

$$\nu(x) = \nu(\alpha(x)).$$

Am demonstrat că orice punct x al varietăţii V defineşte o valuare $\nu_x : I(V, S^2) - 0 \to Z$ a semiinelului $I(V, S^2)$ ([3], pag. 257). Vom demonstra acum, în cazul genului zero, reciproca şi anume că orice valuare a semiinelului $I(V, S^2)$ defineşte un punct al varietăţii V, astfel încît mulţimea punctelor lui V (pentru cazul genului zero) se pune în corespondenţă biunivocă cu mulţimea valuărilor semiinelului $I(V, S^2)$.

Demonstraţie. Fie $\nu : I(V, S^2) - 0 \to Z$ o valuare a lui $I(V, S^2)$. Vom demonstra că există un punct $x \in V$ aşa încît $\nu = \nu_x$. Din definiţie rezultă că există un element $\pi \in I(V, S^2) - 0$ astfel încît $\nu(\pi) = 1$. Să considerăm pe V o structură analitică τ în raport cu care π este o funcţie analitică.

O astfel de structură analitică există conform unei teoreme fundamentale a lui S. Stoilow. Rezultă deci că π este o funcţie raţională pe varietatea analitică (V, τ).

Fie K corpul funcţiilor raţionale asociate structurii analitice (V, τ). K este un corp de grad de transcendenţă 1 peste corpul numerelor complexe. Este evident că ν defineşte o valuare pe corpul K deoarece $K \subseteq I(V, S^2)$ (aplicaţia $\nu : I(K, S^2) - 0 \to Z$ este *pe*, K conţine elementul π ce trece în 1). Pe de altă parte, o teoremă cunoscută de algebră ([2], § 81, pag. 282) ne asigură că orice valuare definită pe un corp de grad de transcendenţă 1 este determinată în mod unic de un punct al lui V. Fie x un astfel de punct. Ne rămîne să demonstrăm că $\nu = \nu_x$. Dar avem $\nu = \nu_x$ pe K. Pe de altă parte, dacă $f \in I(V, S^2)$, f aparţine la un corp de grad de transcendenţă 1 peste C şi aplicînd teorema fundamentală de uniformizare, rezultă că există un automorfism α indus de un omeomorfism al lui V astfel încît $\alpha(f) \in K$. Deci

$$\nu(f) = \nu(\alpha f) = \nu_x(\alpha f) = \nu_x(f).$$

TEOREMĂ : *Dacă* $f : V_1 \rightarrow V_2$ *este interioară și neconstantă, atunci conform propoziției demonstrate la începutul lucrării* :

$$f^* : I(V_2, S^2) \rightarrow I(V_1, S^2)$$

este un monomorfism. Fie ν_0 *o valuare a lui* $I(V_2, S^2)$. *Se consideră toate valuările pe* $I(V_1, S^2)$, $(\nu_i)_{i \in I}$ *care au proprietatea*

$$\nu_i/I(V_2, S^2) = e_i \nu_0 , \; e_i \in Z^+$$

Aceste valuări sînt în număr finit. Fie acestea $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ și indicii $e_1, e_2, \ldots, e_r$ respectivi.

În aceste condiții, $n =$ gradul lui $f = e_1 + e_2 + \ldots + e_r$.

REMARCĂ. Dacă $\nu_0 = \nu_{y_0}$, $y_0 \in V_2$ și $\nu_i = \nu_{x_i}$, $x_i \in V_1$, atunci $f(x_i) = y_0$, $i = 1, 2, \ldots, r$ și e_i este indicele de ramificare al punctului x_i deasupra lui y_0 prin aplicația f.

Demonstrația acestei teoreme se face ținînd cont în primul rînd de următoarea teoremă : Dacă τ_2 este o structură analitică pe V_2 și $f : V_1 \rightarrow V_2$ este o transformare interioară, atunci există o structură analitică pe V_1 fie aceea τ_1, astfel încît $f : V_1 \rightarrow V_2$ devine o transformare analitică de la (V_1, τ_1) la (V_2, τ_2). ([3], pag. 263).

Folosind acest rezultat ne putem reduce cu ușurință la un simplu calcul algebric și putem utiliza o teoremă a lui C. Chevalley de funcții algebrice de o variabilă ([1], cap. IV, § 1, teorema 1).

Primită la redacție la 3 septembrie 1967

Institutul de construcții
București

BIBLIOGRAFIE

1. C. CHEVALLEY, *Introduction to the theory of algebraic functions of one variable*. Amer. Math. Soc., (1951).
2. B. L. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, I, Springer-Verlag 1950.
3. FL. BUCUR, *Asupra unei clase de transformări interioare*. St. cerc. mat. **18**, 243–266 (1966).

ASUPRA FLUCTUAȚIEI SUMELOR DE VARIABILE ALEATOARE DEPENDENTE

DE

H. COHN

Se dau cîteva teoreme care extind la cazul unei clase de procese staționare regulate rezultatele lui Chung K. L. și Fuchs W. H. [1] referitoare la sumele de variabile aleatoare independente și identic repartizate. Se extind apoi aceste rezultate la o clasă generală de variabile dependente care conțin, printre altele, lanțurile cu legături complete ergodice.

1. Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un cîmp de probabilitate, $\{x_n\}_{n\in N^*}$ un șir de variabile aleatoare care formează un proces staționar în sens restrîns, $\mathcal{K}_m^n$ σ — algebra minimală în raport cu care sînt măsurabile variabilele aleatoare $x_m, \ldots, x_n$ și $S_n = x_1 + \ldots + x_n$.

În cele ce urmează vom lua în considerație următoarea condiție: (C) : Există un număr natural n_0 astfel încît :

$$|P(A\,|\,\mathcal{K}_1^n) - P(A)| < \frac{1}{2}$$

aproape sigur pentru orice $A \in \mathcal{K}_{n_0+n}^{\infty}$ și orice $n \in N^*$.

Unele proprietăți ale proceselor aleatoare care satisfac condiția (C) sînt studiate în [2], [3]. Așa-numitele procese m-dependente, precum și o clasă de procese staționare considerată de I. A. Ibraghimov [4], sînt exemple de procese aleatoare care satisfac condiția (C) de mai sus.

Vom reaminti două definiții

DEFINIȚIA 1. Valoarea x se numește recurentă dacă pentru orice $\delta > 0$, avem $P(|S_n - x| < \delta \ i.\text{o.}) = 1$.

Prin i.o. înțelegem o infinitate de ori.

DEFINIȚIA 2. Valoarea x se numește posibilă dacă pentru fiecare $\delta > 0$, există un număr n astfel ca $P(|S_n - x| < \delta) > 0$.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 2, P. 169-172, BUCUREȘTI, 1968

TEOREMA 1. *Mulțimea R a tuturor valorilor recurente este un grup aditiv închis.*

Demonstrație. Faptul că R este o mulțime închisă rezultă din definiția valorilor recurente.

Să demonstrăm aditivitatea. Fie $x \in R$ și $y \in R$ și să presupunem prin absurd că $x - y \notin R$. Atunci am avea:

$$q = P(|S_n - (x - y)| < 2\delta \text{ cel mult pentru un număr finit de } n) = 1$$

pentru un anumit δ, deoarece mulțimea a cărei probabilitate este considerată mai sus, aparține în mod evident σ-algebrei $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n^{\infty}$ și conform legii $O-I$ pentru variabile aleatoare care satisfac condiția (C), singura valoare a lui q diferită de 0 este $q = 1$.

Mai departe, întrucît o valoare recurentă este *a fortiori* o valoare posibilă, există un $k > 0$ astfel încît

$$p = P(|S_k - y| < \delta) > 0.$$

Prin urmare

$$P(|S_n - x| < \delta \text{ cel mult pentru un număr finit de } n) \geqq$$

$$\geqq P(|S_k - y| < \delta, |S_{n+k} - (x - y)| < 2\delta \text{ cel mult pentru un număr finit de } n) =$$

$$= P(|S_k - y| < \delta)\left[P(|S_n - (x - y)| < 2\delta \text{ cel mult pentru un număr finit de } n) - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}p.$$

Dar această relație contrazice ipoteza cu privire la recurența lui x.

TEOREMA 2. *Sau, nici o valoare nu este recurentă, sau toate valorile sînt recurente.*

Această teoremă rezultă din teorema de mai sus în același mod ca în [1].

TEOREMA 3. *O condiție necesară și suficientă pentru existența valorilor recurente este*

$$U(h) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| < h) = \infty \quad \textit{pentru } h > 0 \tag{1}$$

Demonstrație. Trebuie să cercetăm, după teorema de mai sus, dacă O este recurent sau nu. În cazul în care $O \in R$ vom avea în mod necesar relația (1), căci în caz contrar din $U(h) < \infty$ ar rezulta, conform lemei lui Borel-Cantelli, că $P(|S_n| < h \text{ i.o.}) = 0$ ceea ce este absurd.

Să presupunem acum că $U(h) = \infty$. Fie

$$r(h) = P(|S_n| < h \text{ cel mult pentru un număr finit de } n).$$

Atunci vom avea :

$$1 \geqq r(h) \geqq \sum_{k=1}^{\infty} P\,|S_k| < h, |S_n - S_k| \geqq 2h\,(n = k+1, k+2, \ldots)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[P(|s_k| < h)\,(P(|S_n| \geqq 2h\,(n = 1, 2, \ldots) - \frac{1}{2} \right] = U(h) \left[q(2h) - \frac{1}{2} \right].$$

Dar, conform legii $O-1$, $q(2h)$ poate fi, sau O, sau 1, iar numai valoarea O corespunde relației (1).

Pe de altă parte,

$$r(h) \leqq \sum_{m > \frac{1}{k}} \sum_{k=1}^{\infty} P\left(|S_k| < h - \frac{1}{m}, |S_n| > h(n = k+1, k+2, \ldots) \right) + q(2h) \leqq$$

$$\leqq \sum_{m > \frac{1}{k}} P\left(|S_n - S_k| \geqq \frac{1}{m}\,(n = k+1, k+2, \ldots) = \sum_{m > \frac{1}{k}} q \left(\frac{1}{m} \right) = 0$$

și teorema este demonstrată.

TEOREMA 4. *Dacă* $E(x_n) < \infty$, *atunci există valori recurente dacă și numai dacă* $E(x_n) = 0$.

Demonstrația acestei teoreme rezultă din cea de mai sus și se găsește în [1].

O consecință a acestei proprietăți este următoarea : (stabilită de M. Rosenblatt [6]) :

COROLAR. *Dacă* $E(x_n) = 0$, *atunci*

$$P\,(\limsup S_n = -\infty) = P\,(\limsup S_n = +\infty) = 1.$$

2. Extinderea la cazul proceselor aleatoare uniform ergodice.

În cele ce urmează ne vom ocupa de o clasă de variabile aleatoare care satisfac următoarea condiție :

$$|P(X_{m+k+1}, \ldots, X_{m+k+l}) \in B^l \,|\, \mathcal{K}_1^m) - P_{1,l}^{\infty}(B^l)| < \varepsilon_k$$

pentru orice $B^l \in \mathcal{B}^l$ și 1, $k \in N^*$ și $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$.

DEFINIȚIE. Procesul stocastic $\{x_n\}_{n \in N^*}$ care satisface condiția (C) se numește uniform ergodic.

Se poate vedea cu ușurință că măsurile $(P_{1,l}^{\infty})_{l \in N^*}$ sînt probabilități și :

$$P_{1,l}^{\infty}(R^k \times B^{l-k}) = P_{1,l}^{\infty}(B^{l-k} \times R^k).$$

Această relație pune în evidență staționaritatea măsurilor limită.

Pentru m, $n \in N^*$ să notăm prin $P_{m,n}^{\infty}$ funcția definită pe $\mathcal{B}^{m-n+1}$ prin relația

$$P_{m,n}^{\infty}(B^{m-n+1}) = P_{1,\,m-n+1}^{\infty}(B^{m-n+1}).$$

Considerăm acum următoarele funcții de repartiție:

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(a_{t_1},\ldots,a_{t_n}) = P^{\infty}_{t_1,\, t_n}((x_{t_1},\ldots,x_{t_n}) \mid x_{t_1} < a_{t_1},\ldots,x_{t_n} < a_{t_n})$$

unde $t_1, \ldots, t_n \in N^*$, $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ și $a_{t_1},\ldots,a_{t_n} \in R$.

Din binecunoscuta teoremă a lui Kolmogorov, obținem că există un cîmp de probabilitate și un șir de variabile aleatoare $\{\eta_n\}_{n\in N^*}$ definite pe acest cîmp astfel încît repartițiile corespunzătoare acestui proces aleator să fie $(F_{t_1,\ldots,t_n};\ t_1, \ldots t_n \in N^*)$.

Acest proces este staționar în sens restrîns. În [3] se arată că este îndeplinită următoarea condiție de regularitate:

$$|P^{\infty}(A \mid \mathfrak{M}_1^k) - P^{\infty}(A)| < \varepsilon_n$$

aproape singur în raport cu P^{∞} pentru orice $A \in \mathfrak{M}_{k+n}^{\infty}$, $\mathfrak{M}_m^n$ fiind σ-algebra minimală în raport cu care sînt măsurabile variabilele aleatoare $\eta_m, \ldots, \eta_n$. Unele proprietăți ale acestui proces staționar au fost studiate de I. A. Ibraghimov [4].

Din cele spuse mai sus se poate deduce că dacă mulțimea A aparține σ-algebrei $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n^{\infty}$, atunci avem:

$$P((x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in A) = P^{\infty}((\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots) \in A).$$

De aici se obține ca o consecință imediată că rezultatele enunțate la punctul 1 cu privire la procesele staționare în sens restrîns care satisfac condiția (C) sînt valabile și pentru procesele uniform ergodice.

Primită la redacție la 21 iunie 1967

Centrul de statistică matematică al
Academiei Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. Chung K. L., Fuchs W. H., *On the distribution of values of sums of random variables.* Mem. Amer. Math. Soc., **6**, 1–12 (1954).
2. Cohn H., *On a class of dependent random variables.* Rev. Roumaine math. pures et appliquées, 1593–1606 (1965).
3. Cohn H., *Teoreme limită pentru procese stocastice.* St. cerc. mat., **18**, 7 (1966).
4. Ибрагимов И. А., *Некоторые предельные теоремы для стационарных процессов.* Теория вероятностей, 1962, p. 361—392.
5. Prahbu N. U., *Stochastic processes.* New York, 1965.
6. Rosenblatt M., *On the oscilation of sums of random variables.* Trans. Amer. Math. Soc., **72**, 165–178 (1952).

CERCETĂRI ASUPRA SERIILOR TRIGONOMETRICE

VII. CALCULUL COEFICIENŢILOR SERIEI FOURIER ASOCIATĂ UNEI FUNCŢII NEINTEGRABILE DE SINGULARITĂŢI ALGEBRICO-LOGARITMICE OARECARE

DE

MARIANA CRAIU şi MARCEL ROŞCULEŢ

Fie $f(x)$ o funcţie definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulţime $\mathfrak{M}$ de măsură nulă, neintegrabilă pe $[-\pi, \pi]$ iar $P(x)$ un polinom care are în $[-\pi, \pi]$ zerourile $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ de ordinele de multiplicitate $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$ astfel încît $f(x).P(x)$ să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$.

În această lucrare se arată cum pot fi calculaţi coeficienţii seriei Fourier asociată funcţiei f, numerele ξ_k, γ_k fiind oarecare.

CAPITOLUL I

T(x) POLINOM IMPAR

1.1. În această lucrare ne ocupăm de seria Fourier asociată une funcţii $f(x)$, definită pe $[-\pi, \pi]$, în afară de o mulţime $\mathfrak{M}$ de măsură nulă, neintegrabilă pe $[-\pi, \pi]$. Dacă $P(x)$ este un polinom oarecare care are rădăcinile reale $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ de ordine de multiplicitate $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$, în intervalul $[-\pi, \pi]$, cu γ_i numere întregi, pozitive oarecare, punem funcţiei $f(x)$ condiţia ca produsul $P(x) f(x)$ să fie integrabil pe $[-\pi, \pi]$.

Această condiţie cere ca într-o vecinătate V a punctului ξ_k, $f(x)$ să fie de forma

$$f(x)=\frac{g(x)}{(x-\xi_k)^{\gamma_k+\delta_k}\ln^{\eta_k}|x-\xi_k|}, \quad 0 \leqslant \delta_k < 1, \tag{1.1}$$

$\eta_k \in R$, cu $g(x)$ mărginită în V.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 2, P. 173 – 187, BUCUREŞTI, 1968

Fie polinomul trigonometric

$$T(x) = \frac{u_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} (u_k \cos kx + v_k \sin kx) \tag{1.2}$$

care are în $[-\pi, \pi]$ rădăcinile $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$, de ordinele de multiplicitate $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$, cu numărul m minim, deci $T(x)$ astfel ales să fie unic.

Ținînd seama că produsul $P(x)f(x)$ este integrabil pe $[-\pi, \pi]$ urmează că produsul $T(x)f(x)$ este de asemenea integrabil pe $[-\pi, \pi]$, deci funcției $T(x)f(x)$ i se poate asocia o serie Fourier

$$T(x)f(x) \simeq \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \tag{1.3}$$

cu

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, T(x) \cos kx \,\mathrm{d}x \\ \beta_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, T(x) \sin kx \,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.3'}$$

Dacă punem :

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \equiv T(x)\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right] \tag{1.4}$$

seria :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1.5}$$

obținută prin identificare din (1.4) se numește seria trigonometrică asociată funcției neintegrabile $f(x)$, [1], [2].

1.2. Identificînd în (1.4) obținem următorul sistem infinit de ecuații liniare în a_k și b_k

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2} u_0 a_0 + a_1 u_1 + \ldots + a_m u_m + b_1 v_1 + \ldots b_m v_m \\ \alpha_k &= \frac{a_0}{2} u_k + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{m+k} a_p (u_{k-p} + u_{k+p}) + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{m+k} b_p (v_{k+p} - v_{k-p}) \\ & k = 1, 2, 3, \ldots, u_{-p} = u_p, \quad v_{-p} = -v_p, \ p = 1, \ldots, m \end{aligned} \tag{1.6}$$

și

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{a_0 v_k}{2} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{m+k} a_p (v_{k+p} + v_{k-p}) + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{m+k} b_p (u_{k-p} - u_{k+p}) \\ & k = 1, 2, 3, \ldots, u_{-p} = u_p, \quad v_{-p} = -v_p, \ p = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Rezolvat în raport cu a_k, b_k se observă că pot fi determinaţi în afară de $2m$ dintre ei care rămîn parametri arbitrari. Putem să considerăm arbitrari fie $a_0, a_1, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_{m-1}$, fie $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, b_1, b_2, \dots, b_m$.

Am demonstrat următoarea teoremă:

TEOREMA 1.2.1. *Coeficienţii seriei Fourier* (1.5) *asociată unei funcţii neintegrabile* f, *care îndeplineşte condiţiile enunţate în paragraful 1, sînt determinaţi în afară de 2 m dintre ei, care rămîn arbitrari.*

Coeficienţii depind liniar de aceşti parametri care pot fi luaţi fie $a_0, a_1, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_{m-1}$, *fie* $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, b_1, b_2, \dots, b_m$.

1.3. Fără a restrînge generalitatea, putem presupune că $f(x)$ este definit pe $[0, \pi]$, deci $T(x)$ este polinom în sinus sau polinom în cosinus, după cum prelungim pe $f(x)$ pe $[-\pi, \pi]$ impar sau par.

Din această cauză, deoarece sistemul (1.6) + (1.7) devine mult mai simplu, vom considera în cele ce urmează $T(x)$ polinom în sinus sau în cosinus.

În acest capitol vom presupune că $T(x)$ este un polinom oarecare în $\sin x$. Dacă

$$T(x) = v_1 \sin x + v_2 \sin 2x + \dots + v_m \sin mx, \tag{1.8}$$

atunci sistemul (1.6) + (1.7) devine cu $v_m = 1$,

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_{m-1}v_{m-1} + b_m \\ \alpha_k &= \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{m+k} b_p(v_{k+p} - v_{k-p}) \\ \beta_k &= \frac{a_0 v_k}{2} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{m+k} a_p(v_{k+p} + v_{k-p}) \\ k &= 1, 2, 3, \dots \qquad p = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \tag{1.9}$$

şi se observă că se descompune în două sisteme de tip triunghiular în a_k şi b_k care pot fi rezolvate din aproape în aproape.

Dacă luăm: $a_0 = a_1 = \dots = a_m = 0$, $b_1 = b_2 = \dots = b_{m-1} = 0$, atunci obţinem soluţia:

$$\begin{aligned} b_m^* &= 2\xi_0 \frac{\alpha_0}{2}, \quad \text{cu } \xi_0 = 1 \\ b_{m+1}^* &= 2\xi_0\alpha_1 - 2\xi_1 \frac{\alpha_0}{2}, \quad \text{cu } \xi_1 = v_{m-1} \\ b_{m+2}^* &= 2\xi_0\alpha_2 - 2\xi_1\alpha_1 + 2\xi_2 \frac{\alpha_0}{2}, \quad \text{cu } \xi_2 = v_{m-1}^2 - v_{m-2} \\ b_{m+3}^* &= 2\xi_0\alpha_3 - 2\xi_1\alpha_2 + 2\xi_2\alpha_1 - 2\xi_3 \frac{\alpha_0}{2}, \quad \text{cu } \xi_3 = v_{m-1}^3 - v_{m-1}v_{m-2} + v_{m-3} \end{aligned} \tag{1.10}$$

şi, în general:

$$(1.11)\qquad b^*_{m+p+1} = 2\xi_0\alpha_{p+1} - 2\xi_1\alpha_p + \ldots + 2(-1)^p\xi_p\alpha_1 + 2(-1)^{p+1}\xi_{p+1}\frac{\alpha_0}{2},$$

unde $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p+1}$ sînt legate prin relaţia de recurenţă:

$$(1.12)\qquad \xi_{p+1} = \xi_p v_{m-1} - \xi_{p-1} v_{m-2} + \ldots + (-1)^p \xi_0 v_{m-p-1}$$

care, ţinînd seama că $v_m = 1$, se scrie

$$(1.12')\qquad v_m\xi_{p+1} + v_{m-1}\xi_p + v_{m-2}\xi_{p-1} + \ldots + (-1)^{p+1}\xi_0 v_{m-p-1} = 0.$$

Pentru a^*_{m+p} obţinem în mod asemănător:

$$(1.13)\qquad \begin{aligned} a^*_{m+1} &= -2\beta_1\eta_1, \text{ cu } \eta_1 = 1 \\ a^*_{m+2} &= -2\beta_2\eta_1 + 2\beta_1\eta_2, \text{ cu } \eta_2 = v_{m-1} \\ a^*_{m+3} &= -2\beta_3\eta_1 + 2\beta_2\eta_2 - 2\beta_1\eta_3, \text{ cu } \eta_3 = v^2_{m-1} - v_{m-2} \end{aligned}$$

şi, în general:

$$(1.14)\qquad a^*_{m+p+1} = -2\beta_{p+1}\eta_1 + 2\beta_p\eta_2 - \ldots + 2(-1)^{p+1}\beta_1\eta_{p+1},$$

unde $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p+1}$ sînt legaţi prin relaţia de recurenţă:

$$(1.15)\qquad \eta_{p+1} = \eta_p v_{m-1} - \eta_{p-1} v_{m-2} + \ldots + (-1)^{p-1}\eta_1 v_{m-p}.$$

Se observă că, dacă punem $\eta_0 = 0$, relaţia (1.15) se scrie:

$$b_m\eta_{p+1} - v_{m-1}\eta_p + v_{m-2}\eta_{p-1} - \ldots + (-1)^p\eta_1 v_{m-p} + (-1)^{p+1}\eta_0 v_{m-p-1} = 0.$$

Ţinînd seama că $f(x)$ poate fi prelungit pe $[-\pi, 0]$ par sau impar, putem să enunţăm:

TEOREMA 1.3.1. *Fie $f(x)$ o funcţie impară definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulţime $\mathfrak{M}$ de măsură nulă, neintegrabilă pe $[-\pi, \pi]$ astfel ca funcţia*

$$T(x)f(x), \quad x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

cu $T(x)$ dat de (1.8) *să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$. Coeficienţii $b^*_1, b^*_2, \ldots$ ai seriei Fourier*

$$b^*_1 \sin x + b^*_2 \sin 2x + \ldots + b^*_s \sin sx + \ldots$$

ataşată funcţiei $f(x)$ cu $b^*_1 = b^*_2 = \ldots = b^*_{m-1} = 0$ sînt daţi de

$$b^*_{m+p+1} = 2\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k\xi_k\alpha_{p-k+1}, \qquad p = -1, 0, +1, \ldots$$

cu ξ_k definiţi de (1.12).

TEOREMA 1.3.2. *Fie $f(x)$ o funcţie pară, definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulţime $\mathfrak{M}$ de măsură nulă, neintegrabilă pe $[-\pi, \pi]$ astfel ca funcţia*

$$T(x)f(x), \qquad x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

cu $T(x)$ dat de (1.8) *să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$.*

Coeficienții $a_0^*, a_1^*, a_2^*, \ldots$ *ai seriei Fourier*

$$\frac{a_0^*}{2} + a_1^* \cos x + a_2^* \cos 2x + \ldots + a_s^* \cos sx + \ldots$$

atașată funcției $f(x)$ *cu* $a_0^* = a_1^* = \ldots = a_m^* = 0$ *sînt dați de*

$$a_{m+p+1}^* = 2 \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^k \eta_k,\ \beta_{p-k+2} \qquad p = 0, 1, 2, \ldots$$

cu η_k *dați de* (1.15).

1.4. Dacă considerăm de astă dată $a_k \neq 0$, $k = 0, 1, \ldots, m$ $b_h \neq 0$, $h = 1, 2, \ldots, m-1$, atunci soluția sistemului (1.9) este dată de:

$$b_{m+p} = b_{m+p}^* + b_1 \zeta_{1,p} + b_2 \zeta_{2,p} + \ldots + b_{m-1} \zeta_{m-1,p}$$

$$a_{m+p} = a_{m+p}^* + \frac{1}{2} a_0 \theta_{0,p} + a_1 \theta_{1,p} + \ldots + a_m \theta_{m,p},$$

cu b_{m+p}^*, a_{m+p}^* dați de (1.11) și (1.14) iar $\zeta_{k,p}$ dați de

$$\zeta_{k,0} = -v_k \xi_0,$$

$$\zeta_{k,1} = -v_{k-1} \xi_0 + v_k \xi_1 - v_{k+1} \xi_0,$$

$$\zeta_{k,2} = -v_{k-2} \xi_0 + v_{k-1} \xi_1 - v_k \xi_2 + v_{k+1} \xi_1 - v_{k+2} \xi_0,$$

și, în general,

$$\begin{aligned} \zeta_{k,p} = &-v_{k-p}\xi_0 + v_{k-p+1}\xi_1 - \ldots + (-1)^{p-2} v_{k-1}\xi_{p-1} + (-1)^p v_k \xi_p + \\ &+ (-1)^p v_{k+1}\xi_{p-1} + \ldots + v_{k+p-1}\xi_1 - v_{k+p}\xi_0 \end{aligned} \tag{1.17}$$

iar $\theta_{k,p}$ dați de

$$\theta_{k,1} = -v_{k-1}\xi_0 + v_{k+1}\xi_0$$

$$\theta_{k,2} = -v_{k-2}\xi_0 + v_{k-1}\xi_1 - v_{k+1}\xi_1 + v_{k+2}\xi_0$$

și, în general,

$$\begin{aligned} \theta_{k,p} = &- v_{k-p}\xi_0 + v_{k-p+1}\xi_1 - \ldots (-1)^{p-2} v_{k-1}\xi_{p-1} + \\ &+ (-1)^{p-1} v_{k+1}\xi_{p-1} + \ldots - v_{k+p-1}\xi_1 + v_{k+p}\xi_0, \end{aligned} \tag{1.18}$$

unde $\xi_0 = 1$, $\xi_1 = v_{m-1}$, $\xi_2 = v_{m-1}^2 - v_{m-2}$, și, în general,

$$\xi_{p+1} = \xi_p v_{m-1} - \xi_{p-1} v_{m-2} + \ldots + (-1)^p \xi_0 v_{m-p-1}. \tag{1.19}$$

În (1.17), (1.18) și (1.19) dacă $k - p < 0$, se înlocuiește v_{k-p} cu $-v_{p-k}$; de asemenea se ține seama că $v_0 = 0$, $v_m = 1$ și $v_{m+p} = 0$, pentru $p > 0$ (întreg).

Ţinînd seama că $f(x)$ poate fi prelungit pe $[-\pi, 0]$ par sau impar, putem să enunţăm :

TEOREMA 1.4.1. *Fie $f(x)$ o funcţie impară definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulţime $\mathfrak{M}$ de măsură nulă, neintegrabilă pe $[-\pi, \pi]$ astfel ca funcţia*

$$T(x)f(x), \qquad x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

cu $T(x)$ dat de (1.8) să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$.

Coeficienţii $b_1, b_2, \ldots$ ai seriei Fourier

$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_s \sin sx + \ldots$$

ataşată funcţiei $f(x)$ sînt daţi de :

$$b_{m+k} = b^*_{m+k} + b_1 \zeta_{1.k} + b_2 \zeta_{2.k} + \ldots + b_{m-1} \zeta_{m-1.k}$$

cu b^*_{m+k}, $k = 0, 1, 2, \ldots$ daţi de (1.11) iar $\zeta_{s.k}$ de (1.17), $b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}$ fiind $m - 1$ parametri arbitrari.

TEOREMA 1.4.2. *Fie $f(x)$ o funcţie pară, definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulţime $\mathfrak{M}$ de măsură nulă, neintegrabilă pe $[-\pi, \pi]$ astfel ca funcţia*

$$T(x)f(x), \qquad x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

cu $T(x)$ dat de (1.8) să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$

Coeficienţii $a_0, a_1, a_2, \ldots,$ ai seriei Fourier

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_s \cos sx + \ldots$$

ataşată funcţiei $f(x)$ sînt daţi de:

$$a_{m+k} = a^*_{m+k} + \frac{1}{2} a_0 \theta_{0.k} + a_1 \theta_{1.k} + \ldots + a_m \theta_{m.k}$$

cu a^*_{m+k}, $k = 1, 2, \ldots,$ daţi de (1.14) iar $\theta_{s.k}$ de (1.18) $a_0, a_1, \ldots, a_m$ fiind $m + 1$ parametri arbitrari.

1.5. În acest aliniat vom considera polinomul ($T(x)$ de forma

$$T(x) = v_{m-1} \sin(m-1)x + \sin mx \tag{1.18}$$

cu scopul de a obţine forma integrală a coeficienţilor seriei ataşate lui $f(x)$.

În această situaţie, formulele de recurenţă (1.12) şi (1.15) devin respectiv :

$$\xi_{p+1} = v^p_{m-1}, \quad \eta_p = v^{p-1}_{m-1} \tag{1.19}$$

şi coeficienţii a_{m+p}, v_{m+p} sînt daţi de

$$\begin{aligned} a_{m+p} &= -2\beta_p + 2\beta_{p-1} v_{m-1} - \ldots + 2(-1)^p \beta_1 v^{p-1}_{m-1} \\ b_{m+p} &= 2\alpha_p - 2\alpha_{p-1} v_{m-1} + \ldots + 2(-1)^p \frac{\alpha_0}{2} v^p_{m-1} \end{aligned} \tag{1.20}$$

Ținînd seamă de expresiile (1.3′) ale lui α_k și β_k urmează că: a_{m+p}, b_{m+p} sînt dați de:

$$(1.21)\qquad a_{m+p} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,T(t)\,A_p(t)\,\mathrm{d}t, \qquad b_{m+p} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,T(t)\,B_p(t)\,\mathrm{d}t,$$

unde

$$A_p(t) = -2\,[\sin pt - v_{m-1}\sin(p-1)\,t + \ldots + (-1)^{p-1}v_{m-1}^{p-1}\sin t]$$

și

$$(1.22)\qquad B_p(t) = 2\cos pt - v_{m-1}\cos(p-1)\,t + \ldots + (-1)^p\,\frac{v_{m-1}^p}{2}$$

deci

$$A_p(t) = -2\,\frac{(-1)^{p+1}v_{m-1}^{p+1}\sin t + v_{m-1}\sin(p+1)\,t + \sin pt}{v_{m-1}^2 + 2v_{m-1}\cos t + 1}$$

$$(1.22')\qquad B_p(t) = \frac{(-1)^p v_{m-1}^{p+2} - (-1)^p v_{m-1}^p + 2v_{m-1}\cos(p+1)\,t + 2\cos pt}{v_{m-1}^2 + 2v_{m-1}\cos t + 1}$$

$f(x)$ fiind definită pe $[0, \pi] - \mathcal{M}$, $\mathcal{M} \subset [0, \pi]$; dacă prelungim pe $f(x)$ par pe $[-\pi, \pi]$, atunci în (1.21) obținem $\bar{b}_{m+p} = 0$; dacă prelungim pe $f(x)$ impar pe $[-\pi, \pi]$, $a_{m+p} = 0$.

Am demonstrat

TEOREMA 1.5.1. *Fie $f(x)$ o funcție impară definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulțime $\mathcal{M}$ de măsură nulă, neintegrabilă pe $[-\pi, \pi]$ astfel ca funcția*

$$[\sin mx + h\sin(m-1)\,x]\,f(x), \qquad x \in [-\pi, \pi] - \mathcal{M}$$

cu m număr natural, h număr real, oarecare, să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$; coeficienții $\bar{b}_1^*, \bar{b}_2^*, \ldots$ ai seriei Fourier

$$(1.23)\qquad \bar{b}_1^*\sin x + \bar{b}_2^*\sin 2x + \ldots + \bar{b}_s^*\sin sx + \ldots$$

atașată funcției $f(x)$, unde

$$\bar{b}_1^* = 0,\ \bar{b}_2^* = 0, \ldots, b_{m-1}^* = 0$$

sînt dați de

$$b_{m+k}^* = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{(-1)^k h^{k+2} - (-1)^k h^k + 2h\cos(k+1)\,t + 2\cos kt}{h^2 + 2h\cos t + 1}\,f(t)\,T(t)\,\mathrm{d}t$$

$$(1.24)\qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

TEOREMA 1.5.2. *Fie $f(x)$ o funcție pară definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulțime $\mathcal{M}$ de măsură nulă, neintegrabilă pe $[-\pi, \pi]$ astfel ca funcția:*

$$[\sin mx + h\sin(m-1)\,x]\,f(x), \qquad x \in [-\pi, \pi] - \mathcal{M}$$

cu m număr natural, h număr real, oarecari, să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$; *coeficienții* $a_0^*, a_1^*, \ldots$ *ai seriei Fourier*

$$\frac{a_0^*}{2} + a_1^* \cos x + a_2^* \cos 2x + \ldots + a_s^* \cos sx + \ldots \tag{1.25}$$

atașată functiei $f(x)$, *unde*

$$a_0^* = 0,\ a_1^* = 0, \ldots, a_m^* = 0$$

sînt dați de

$$a_{m+k}^* = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{(-1)^{k+1} h^{k+1} \sin t + h \sin(k+1)t + \sin kt}{h^2 + 2h\cos t + 1} f(t)\, T(t)\, dt \tag{1.26}$$

pentru $k = 1, 2, 3, \ldots$

1.6. Coeficienții $\zeta_{k.p}$ pentru $T(x)$ dat de (1.8) sînt

$$\zeta_{k.p} = (-1)^{p-m+k} v_{m-1}^{p-m+k} [v_{m-1}^2 - 1], \tag{1.27}$$

unde $k = 1, 2, \ldots, m-1$ iar $p = 0, 1, 2, \ldots$

Dacă $p - m + k < 0$, atunci $v_{m-1}^{p-m+k} = 0$ și

$$\zeta_{k.p} = -v_{m-1}, \text{ dacă } p + k = m - 1. \tag{1.27'}$$

Coeficienții $\theta_{k.p}$ definiți de (1.18) sînt dați de

$$\theta_{k.p} = (-1)^{p-m+k-1} v_{m-1}^{p-m+k} (v_{m-1}^2 - 1) \tag{1.28}$$

pentru $k = 0, 1, \ldots, m-2$ și $k + p > m - 1$.

Pentru $k + p = m - 1$,

$$\theta_{k.p} = v_{m-1}$$

și

$$\theta_{m-1.p} = (-1)^{p-1} v_{m-1}^{p-1}. \tag{1.28'}$$

Pentru $k + p < m$ se consideră $v_{m-1}^{p+k-m-1} = 0$.

Putem să enunțăm

TEOREMA 1.6.1. *Fie* $f(x)$ *o funcție impară definită pe* $[-\pi, \pi]$ *în afară de o mulțime* $\mathfrak{M}$ *de măsură nulă, neintegrabilă pe* $[-\pi, \pi]$ *astfel ca funcția*

$$[\sin mx + h \sin(m-1)x] f(x), \qquad x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

cu m număr natural, h număr real, oarecare, să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$.

Seria Fourier asociată funcției $f(x)$ *este de forma*

$$f(x) \sim S^*(x) + \lambda_1 \sigma_1(x) + \lambda_2 \sigma_2(x) + \ldots + \lambda_{m-1}\sigma_{m-1}(x) \tag{1.29}$$

unde $S^*(x)$ *este seria Fourier* (1.23) *iar* $\sigma_1(x), \sigma_2(x) \ldots \sigma_{m-1}(x)$ *sînt* $m-1$ *serii trigonometrice independente de* $f(x)$ *date de*

$$\sigma_k(x) = \sin kx + \zeta_{k.0} \sin mx + \zeta_{k.1} \sin(m+1)x + \ldots \tag{1.30}$$

$k = 1, 2, \ldots, m-1$ *iar* $\zeta_{k.p}$, *dați de formulele* (1.27) *și* (1.27′). *Asemănător avem*

TEOREMA 1.6.2. *Fie $f(x)$ o funcție pară definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulțime $\mathfrak{M}$ de măsură nulă, neintegrabilă pe $[-\pi, \pi]$ astfel ca funcția*

$$[\sin mx + h \sin (m-1)x] f(x), \qquad x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

cu m număr natural, h număr real, oarecare, să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$. Seria Fourier asociată funcției $f(x)$ este de forma

$$f(x) \sim S(x) + \mu_0 S_0(x) + \mu_1 S_1(x) + \ldots + \mu_m S_m(x),$$

unde $S(x)$ este seria Fourier (1.25) iar $S_0(x), S_1(x), \ldots, S_m(x)$ sînt serii trigonometrice independente de $f(x)$ care au expresiile:

$$S_k(x) = \cos kx + \theta_{k,1} \cos (m+1)x + \theta_{k,2} \cos (m+2)x + \ldots, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m$$

iar $\theta_{k,p}$ sînt dați de (1.28) și (1.28′).

CAPITOLUL II

T(x) POLINOM PAR

2.1. Să considerăm polinomul $T(x)$ dat de

$$T(x) = \frac{u_0}{2} + u_1 \cos x + u_2 \cos 2x + \ldots + u_m \cos mx, \tag{2.1}$$

în această situație sistemul (1.6) și (1.7) în a_p, b_p se scrie

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2} u_0 a_0 + a_1 u_1 + \ldots + a_m u_m \\ \alpha_k &= \frac{a_0}{2} u_k + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{m+k} a_p (u_{k-p} + u_{k+p}) \\ \beta_k &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{m+k} b_p (u_{k-p} - u_{k+p}) \end{aligned} \tag{2.2}$$

cu $k = 1, 2, \ldots$ și $u_{-p} = u_p$, iar $u_p = 0$ dacă $p > m$. Vom lua în cele ce urmează $u_m = 1$.

Dacă luăm $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$ și $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, obținem soluția:

$$\begin{aligned} a_m^* &= 2\lambda_0 \frac{\alpha_0}{2} \text{ cu } \lambda_0 = 1, \\ a_{m+1}^* &= 2\lambda_0 \alpha_1 - 2\lambda_1 \frac{\alpha_0}{2}, \text{ cu } \lambda_1 = u_{m-1}, \\ a_{m+2}^* &= 2\lambda_0 \alpha_2 - 2\lambda_1 \alpha_1 + 2\lambda_2 \frac{\alpha_0}{2}, \text{ cu } \lambda_2 = u_{m-1}^2 - u_{m-2} \\ a_{m+3}^* &= 2\lambda_0 \alpha_3 - 2\lambda_1 \alpha_2 + 2\lambda_2 \alpha_1 - 2\lambda_3 \frac{\alpha_0}{2}, \text{ cu } \lambda_3 = u_{m-1}^3 - u_{m-1} u_{m-2} + u_{m-3} \end{aligned} \tag{2.3}$$

și, în general,

$$(2.3') \quad a^*_{m+p} = 2\lambda_0\alpha_p - 2\lambda_1\alpha_{p-1} + \dots + 2(-1)^p\lambda_{p-1}\alpha_1 + 2(-1)^{p+1}\lambda_p\frac{\alpha_0}{2},$$

unde numerele $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}$ sînt legate prin relația de recurență

$$(2.4) \quad \lambda_{p+1} = \lambda_p u_{m-1} - \lambda_{p-1}u_{m-2} + \dots + (-1)^p\lambda_0 u_{m-p-1}$$

și, care ținînd seama că $u_m = 1$, se scrie:

$$(2.4') \quad u_m\lambda_{p+1} - u_{m-1}\lambda_p + u_{m-2}\lambda_{p-1} + \dots + (-1)^{p+1}\lambda_0 u_{m-p-1} = 0.$$

Pentru b^*_{m+p} obținem în mod asemănător

$$(2.5) \quad \begin{aligned} b^*_{m+1} &= 2\beta_1\mu_1, \text{ cu } \mu_1 = 1 \\ b^*_{m+2} &= 2\mu_1\beta_2 - 2\mu_2\beta_1, \text{ cu } \mu_2 = u_{m-1} \\ b^*_{m+3} &= 2\mu_1\beta_3 - 2\mu_2\beta_2 + 2\mu_3\beta_1, \text{ cu } \mu_3 = u^2_{m-1} - u_{m-2}, \end{aligned}$$

și, în general,

$$(2.5') \quad b^*_{m+p} = 2\beta_p\mu_1 - 2\beta_{p-1}\mu_2 + \dots + 2(-1)^p\beta_1\mu_p$$

unde numerele $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p+1}$ sînt legate prin relația de recurență

$$(2.6) \quad \mu_{p+1} = \mu_p u_{m-1} - \mu_{p-1}u_{m-2} + \dots + (-1)^{p-1}\mu_1 u_{m-p}.$$

Dacă punem $\mu_0 = 0$, relația de mai sus se scrie:

$$(2.6') \quad u_m\mu_{p+1} - u_{m-1}\mu_p + u_{m-2}\mu_{p-1} - \dots + (-1)^{p+1}\mu_0 v_{m-p-1} = 0.$$

Avînd în vedere că $f(x)$ poate fi prelungit pe $[-\pi, 0]$ par sau impar, putem să enunțăm:

TEOREMA 2.1.1. *Fie $f(x)$ o funcție impară definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulțime $\mathfrak{M}$ de măsură nulă, neintegrabilă pe $[-\pi, \pi]$ astfel ca funcția*

$$T(x)f(x), \qquad x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

cu $T(x)$ dată de (2.1) să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$.

Coeficienții $b^*_1, b^*_2, \dots$ ai seriei Fourier

$$b^*_1 \sin x + b^*_2 \sin 2x + \dots + b^*_s \sin sx + \dots$$

atașată funcției $f(x)$, cu $b^*_1 = b^*_2 = \dots \pm b^*_m = 0$ sînt dați de

$$(2.7) \quad b^*_{m+p+1} = 2\sum_{s=1}^{p+1}(-1)^{s-1}\beta_{p-s+2}\mu_s, \qquad p = 0, 1, 2, \dots,$$

cu μ_s definiți de (2.6).

TEOREMA 2.1.2. *Fie $f(x)$ o funcție pară, definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulțime $\mathfrak{M}$ de măsură nulă, neintegrabilă pe $[-\pi, \pi]$ astfel ca funcția:*

$$T(x)\cdot f(x), \qquad x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

cu $T(x)$ dat de (2.1) să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$.

Coeficienţii $a_0^*, a_1^*, \ldots$ *ai seriei Fourier*

$$\frac{a_0^*}{2} + a_1^* \cos x + a_2^* \cos 2x + \ldots + a_s^* \cos sx + \ldots$$

ataşată funcţiei $f(x)$ *cu* $a_0^* = a_1^* = \ldots = a_{m-1}^* = 0$ *sînt daţi de*

$$a^*_{m+p+1} = 2 \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \lambda_k \alpha_{p-k+1}, \quad p = -1, 0, 1, \ldots \tag{2.8}$$

cu λ_k *daţi de* (2.3).

2.2. Dacă considerăm acum $a_k \neq 0$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $b_h \neq 0$, $h = 1, 2, \ldots, m$, atunci soluţia sistemului (2.2) este:

$$b_{m+p} = b^*_{m+p} + \theta_{1,p} b_1 + \theta_{2,p} b_2 + \ldots + \theta_{m,p} b_m, \quad p = 1, 2, \ldots \tag{2.9}$$

cu b^*_{m+p} dat de (2.5′) şi $\theta_{k,p}$ daţi de:

$$\theta_{k.1} = -u_{k-1}\mu_1 + u_{k+1}\mu_1$$

$$\theta_{k.2} = -u_{k-2}\mu_1 + u_{k-1}\mu_2 - u_{k+1}\mu_2 + u_{k+2}\mu_1$$

şi, în general,

$$\begin{aligned} \theta_{k,p} = {} & -u_{k-p}\mu_1 + u_{k-p+1}\mu_2 - \ldots + (-1)^{p-2} u_{k-1}\mu_p + \\ & + (-1)^{p-1} u_{k+1}\mu_p + \ldots - u_{k+p-1}\mu_2 + u_{k+p}\mu_1, \end{aligned} \tag{2.10}$$

unde

$$\mu_1 = 1, \ \mu_2 = u_{m-1}, \ \mu_3 = u^2_{m-1} - u_{m-2}, \ldots$$

şi, în general,

$$\mu_{p+1} = \mu_p u_{m-1} - \mu_{p-1} u_{m-2} + \ldots + (-1)^{p-1} \mu_1 u_{m-p}. \tag{2.11}$$

La soluţia găsită trebuie să adăugăm

$$a_{m+p} = a^*_{m+p} + \frac{a_0}{2} \zeta_{0,p} + a_1 \zeta_{1,p} + \ldots + a_{m-1} \zeta_{m-1,p}, \quad p = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.12}$$

cu a^*_{m+p} daţi de (2.3′) şi $\zeta_{k,p}$ de:

$$\zeta_{k,0} = -u_k \lambda_0$$

$$\zeta_{k,1} = -u_{k-1}\lambda_0 + u_k \lambda_1 - u_{k+1}\lambda_0,$$

$$\zeta_{k,2} = -u_{k-2}\lambda_0 + u_{k-1}\lambda_1 - u_k \lambda_2 + u_{k+1}\lambda_1 - u_{k+2}\lambda_0$$

şi, în general,

$$\begin{aligned} \zeta_{k,p} = {} & -u_{k-p}\lambda_0 + u_{k-p+1}\lambda_1 + \ldots + (-1)^{p-2} u_{k-1}\lambda_{p-1} + \\ & + (-1)^{p-1} u_k \lambda_p + (-1)^p u_{k+1}\lambda_{p-1} + \ldots + u_{k+p-1}\lambda_1 - u_{k+p}\lambda_0, \end{aligned} \tag{2.13}$$

unde

$$\lambda_0 = 1, \ \lambda_1 = u_{m-1}, \ \lambda_2 = u^2_{m-1} - u_{m-2}, \ldots$$

şi, în general,

$$\lambda_{p+1} = \lambda_p u_{m-1} - \lambda_{p-1} u_{m-2} + \ldots + (-1)^p \lambda_0 u_{m-p-1}. \tag{2.14}$$

În toate aceste cazuri se va lua $u_{-k} = u_k$ și $u_{m+1} = u_{m+2} = \ldots = 0$. Sîntem în măsură să enunțăm

Teorema 2.2.1. *Fie $f(x)$ o funcție impară definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulțime $\mathfrak{M}$ de măsură nulă, neintegrabilă pe $[-\pi, \pi]$ astfel ca funcția*

$$T(x)\, f(x), \quad x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

cu $T(x)$ dat de (2.1) *să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$. Coeficienții $b_1, b_2, \ldots$ ai seriei Fourier*

$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_s \sin sx + \ldots.$$

atașată funcției $f(x)$ sînt dați de :

$$b_{m+k} = b^*_{m+k} + \theta_{1.k} b_1 + \theta_{2.k} b_2 + \ldots + \theta_{m.k} b_m \tag{2.15}$$

cu b^*_{m+k}, $k = 1, 2, 3, \ldots$, dați de (2.5′) *iar $\theta_{s.k}$ de* (2.10), *$b_1, b_2, \ldots, b_m$ fiind m parametri arbitrari.*

Teorema 2.2.2. Fie *$f(x)$ o funcție pară, definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulțime $\mathfrak{M}$ de măsură nulă neintegrabilă pe $[-\pi, \pi]$, astfel încît funcția*

$$T(x) f(x), \quad x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

cu $T(x)$ dat de (2.1) *să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$*

Coeficienții $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ai seriei Fourier

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_s \cos sx + \ldots$$

atașată funcției $f(x)$ sînt dați de :

$$a_{m+k} = a^*_{m+k} + \frac{a_0}{2} \zeta_{0.k} + a_1 \zeta_{1.k} + \ldots + a_{m-1} \zeta_{m-1.k} \tag{2.16}$$

cu a^*_{m+k}, $k = 0, 1, 2, \ldots$, dați de (2.3′) *iar $\zeta_{s.k}$ de* (2.13), *$a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ fiind m parametri arbitrari.*

2.3. Vom considera în continuare polinomul $T(x)$ de forma

$$T(x) = u_{m-1} \cos(m-1) + \cos mx \tag{2.17}$$

și vom determina în acest caz forma integrală a coeficienților seriei atașate lui $f(x)$.

În acest caz formulele de recurență (2.4) și (2.6) devin :

$$\lambda_{p+1} = \lambda_p u_{m-1} \quad \text{și} \quad \mu_{p+1} = \mu_p u_{m-1} \tag{2.18}$$

deci

$$\lambda_p = u^p_{m-1}, \quad \mu_p = u^{p-1}_{m-1}. \tag{2.18′}$$

Coeficienții a^*_{m+p}, b^*_{m+p} devin

$$a^*_{m+p} = 2\alpha_p - 2u_{m-1}\alpha_{p-1} + \ldots + 2(-1)^{p-1} u^{p-1}_{m-1} \alpha_1 + 2(-1)^p u^p_{m-1} \frac{\alpha_0}{2} \tag{2.19}$$

și

$$b^*_{m+p} = 2\beta_p - 2\beta_{p-1} u_{m-1} + \ldots + 2(-1)^{p-1} \beta_1 u^{p-1}_{m-1}. \tag{2.20}$$

Avînd în vedere expresiile lui α_k și β_k, avem:

$$a^*_{m+p} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, T(t)\, C_p(t)\, \mathrm{d}t,$$

$$b^*_{m+p} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, T(t)\, D_p(t)\, \mathrm{d}t,$$

unde

$$C_p(t) = \tag{2.21}$$

$$= 2\left[\cos pt - u_{m-1}\cos(p-1)t + \ldots + (-1)^{p-1}u_{m-1}^{p-1}\cos \iota + \frac{(-1)^p u_{n-1}^p}{2}\right],$$

(și

$$D_p(t) = 2\,[\sin pt - u_{m-1}\sin(p-1)t + \ldots + (-1)^{p-1}u_{m-1}^{p-1}\sin t]. \tag{2.21'}$$

Însumînd, obținem

$$C_p(t) = \frac{(-1)^p u_{m-1}^{p+2} + 2u_{m-1}\cos(p+1)t + 2\cos pt - (-1)^p u_{m-1}^p}{u_{m-1}^2 + 2u_{m-1}\cos t + 1}$$

$$D_p(t) = 2\,\frac{(-1)^{p+1}u_{m-1}^{p+1}\sin t + u_{m-1}\sin(p+1)t + \sin pt}{u_{m-1}^2 + 2u_{m-1}\cos t + 1}.$$

Am demonstrat următoarele

TEOREMA 2.3.1. *Fie $f(x)$ o funcție impară definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulțime $\mathfrak{M}$ de măsură nulă neintegrabilă pe $[-\pi, \pi]$ astfel ca funcția*

$$[\cos mx + l\cos(m-1)x]\, f(x), \quad x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

cu m număr natural, l număr real, să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$; coeficienții $b_1^*, b_2^*, \ldots$ ai seriei Fourier

$$b_1^* \sin x + b_2^* \sin 2x + \ldots + b_s^* \sin sx + \ldots \tag{2.22}$$

unde $b_1^* = b_2^* = \ldots = b_m^* = 0$, sînt dați de

$$b^*_{m+k} = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(-1)^{p+1}l^{p+1}\sin t + l\sin(p+1)t + \sin pt}{l^2 + 2l\cos t + 1}\, T(t)\, f(t)\, \mathrm{d}t, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.22'}$$

TEOREMA 2.3.2. *Fie $f(x)$ o funcție pară definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulțime $\mathfrak{M}$ de măsură nulă, neintegrabilă pe $[-\pi, \pi]$ astfel ca funcția*

$$[\cos mx + l\cos(m-1)x] f(x), \quad x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$; coeficienții seriei Fourier

$$\frac{a_0^*}{2} + a_1^* \cos x + a_2^* \cos 2x + \ldots + a_s^* \cos sx + \ldots. \tag{2.23}$$

atașată funcției $f(x)$, *unde*

$$a_0^* = a_1^* \ldots = a_{m-1}^* = 0$$

sînt dați de

$$(2.23')\quad a_{m+k}^* = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(-1)^p l^{p+2} + 2l\cos(p+1)t + 2\cos pt - (-1)^p l^p}{l^2 + 2l\cos t + 1} f(t)\,T(t)\mathrm{d}t$$

pentru $k = 0, 1, 2, \ldots$

2.4. Coeficienții $\theta_{k,p}$ din (2.10) pentru $T(x)$ dat de (2.17) au expresiile

$$(2.24)\quad \theta_{k,p} = (-1)^{k+p-m-1}\, u_{m-1}^{k+p-m}\,(u_{m-1}^2 - 1),\ k=1,2,\ldots,m-2;\ p=1,2,\ldots$$

$$(2.24')\qquad \theta_{m-1,p} = (-1)^{p-1}\, u_{m-1}^{p-1},\ \ \theta_{m,p} = (-1)^p\, u_{m-1}^p.$$

Dacă $k + p - m = -1$ se va lua $k + p - m = 1$ și pentru $k + p < m - 1$ se va lua $v^{k+p-m} = 0$.

La fel coeficienții $\zeta_{k,p}$ dați de (2.13) au expresiile

$$(2.25)\quad \zeta_{k,p} = (-1)^{k+p-m}\, u_{m-1}^{k+p-m}\,(u_{m-1}^2 - 1),\ k=0,1,\ldots,m-1;\ p=0,1,2,\ldots$$

În cazul în care $k + p - m = -1$ se va lua $u_{m-1}^{-1} = u_{m-1}$ iar dacă $k + p < m - 1$ se va lua $u_{m-1}^{k+p-m} = 0$.

Un calcul direct ne conduce la

TEOREMA 2.4.1. *Fie* $f(x)$ *o funcție impară definită pe* $[-\pi, \pi]$ *în afară de o mulțime* $\mathfrak{M}$ *de măsură nulă, neintegrabilă pe* $[-\pi, \pi]$ *astfel ca funcția*

$$[\cos mx + h\cos(m-1)x]f(x), \qquad x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$.

Seria Fourier asociată funcției $f(x)$ *este de forma*

$$f(x) \sim S^*(x) + \lambda_1\sigma_1(x) + \ldots + \lambda_m\sigma_m(x)$$

unde $S^*(x)$ *este seria Fourier* (2.22) *cu coeficienții dați de* (2.22′) *iar* $\sigma_1(x), \ldots$ $\ldots, \sigma_m(x)$ *sînt m serii trigonometrice independente de* $f(x)$ *care au expresiile*

$$\sigma_k(x) = \sin kx + \theta_{k,1}\sin(m+1)x + \theta_{k,2}\sin(m+2)x + \ldots$$

$$k = 1, 2, \ldots, m,\ \textit{cu}\ \theta_{k,p}\ \textit{dați de}\ (2.24)\ \textit{și}\ (2.24').$$

TEOREMA 2.4.2. *Fie* $f(x)$ *o funcție pară definită pe* $[-\pi, \pi]$ *în afară de o mulțime* $\mathfrak{M}$ *de măsură nulă, neintegrabilă pe* $[-\pi, \pi]$ *astfel ca funcția*

$$[\cos mx + l\cos(m-1)x]f(x),\ x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

cu m număr natural, l număr real oarecare, să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$.

Seria Fourier asociată funcției $f(x)$ *este de forma*

$$f(x) \sim S(x) + \mu_0 S_0(x) + \ldots + \mu_{m-1} S_{m-1}(x)$$

unde $S(x)$ *este seria Fourier* (2.23) *iar* $S_0(x), S_1(x), \ldots, S_{m-1}(x)$ *sînt serii trigonometrice independente de* $f(x)$ *care au expresiile*

$$S_k(x) = \cos kx + \zeta_{k,0} \cos mx + \zeta_{k,1} \cos (m+1)\, x + \ldots,\ k = \\ = 0, 1, 2, \ldots, m-1 \text{ cu } \zeta_{k,p} \text{ dați de } (2.25).$$

Primită la redacție la 14 iunie 1967

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu Dej", București
Institutul de matematică al Academiei Republicii Socialiste România, Str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. Marcel N. Roșculeț, *Recherches sur les séries trigonométriques IV. Sur la série de Fourier attachée à une fonction nonintégrable.* Rev. Roum. math. pures et appl., **11** *2*, (1966).
2. Mariana Craiu, *Proprietăți ale seriei Fourier asociată unei funcții neintegrabile de singularități date.* St. cercet. mat., **19**, *3* (1967).

O PROPRIETATE DE COMUTATIVITATE A PSEUDOREZOLVANTEI

DE

DUMITRU GAŞPAR

Se dă o condiţie ca o funcţie pseudorezolvantă $R(\lambda)$ să comute cu un element x într-un singur punct : $R(\lambda_0)x = x R(\lambda_0)$.

Vom nota prin $\mathfrak{L}$ o algebră Banach (necomutativă) cu element unitate. Utilizăm noţiunile şi notaţiile din [1] : Să considerăm în $\mathcal{K} \times \mathfrak{L}$ ($\mathcal{K}$-mulţimea numerelor complexe) clasele de echivalenţă faţă de relaţia de asociere :

$$(\alpha, a) \circ (\beta, b) \Leftrightarrow a - b = -(\alpha - \beta) ab \text{ şi } a - b = -(\alpha - \beta) ba.$$

Să notăm mulţimea acestor clase de echivalenţă cu $\mathfrak{L}_e$. Pentru $t \in \mathfrak{L}_e$ vom defini mulţimea rezolvantă : $\rho(t) = \{\lambda \mid \exists\, a \in \mathfrak{L} : (\lambda, a) \in t\}$; dacă $(\lambda, a) \in t$, atunci notăm : $a = R(\lambda, t)$.

Funcţia $R(\lambda, t)$ (care se vede că e definită pe $\rho(t)$) se numeşte pseudorezolvanta elementului $t \in \mathfrak{L}_e$[1].

Pentru un spaţiu Banach oarecare $\mathfrak{X}$, $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ este algebra operatorilor liniari şi mărginiţi pe $\mathfrak{X}$, iar $\mathcal{L}_e(\mathfrak{X})$ este mulţimea acelor operatori liniari T pe $\mathfrak{D}_T \subset \mathfrak{X}$ cu valori in $\mathfrak{X}$ pentru care : $\rho(T) = \{\lambda \mid (\lambda I - T)^{-1} \in \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})\} \neq \emptyset$.

Ne propunem rezolvarea următoarei probleme puse în [1], pag. 32 :

Dacă pentru $t_0 \in \mathfrak{L}_e$ şi $x \in \mathfrak{L}$, există $\lambda_0 \in \rho(t_0)$ cu $x R(\lambda_0, t_0) = = R(\lambda_0, t_0) x$, în ce condiţii are loc : $x R(\lambda, t_0) = R(\lambda, t_0) x, \forall \lambda \in \rho(t_0)$.

Răspunsul este asemănător cu cel dat în [1], pentru problema analogă în cazul algebrei $\mathcal{L}_e(\mathfrak{X})$.

Avem nevoie în prealabil de o

LEMĂ. *Fie* $t_0 \in \mathfrak{L}_e$ *astfel ca* $R(\lambda, t_0)$ *nu este divizor la stînga al lui* 0. *Există atunci un operator* $T \in \mathcal{L}_e(\mathfrak{L})$ *cu :* $\rho(T) \supseteq \rho(t_0)$ *şi* $R(\lambda, T) y = R(\lambda, t_0) y$, $\forall \lambda \in \rho(t_0), \forall y \in \mathfrak{L}$.

Demonstraţie. Fie $\lambda_0 \in \rho(t_0)$. Din $R(\lambda_0, t_0) x = 0 \Rightarrow x = 0$ se deduce că operatorul $R_0 : R_0 x = R(\lambda_0, t_0) x \; (x \in \mathfrak{L})$ de înmulţire cu $R(\lambda_0, t_0)$ este

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 2, P. 189–190, BUCUREŞTI, 1968

biunivoc; evident că $R_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{L})$. Să considerăm atunci operatorul liniar R_0^{-1} pe $R(\lambda_0, t_0)\mathfrak{L}$ şi să definim:

$$T = \lambda_0 I - R_0^{-1}.$$

Se vede că: $\mathfrak{D}_T = R(\lambda_0, t_0)\mathcal{L}$ şi $\mathfrak{R}_T = \mathfrak{L}$.

Deoarece: $\lambda_0 \in \rho(T)$, avem că $T \in \mathcal{L}_e(\mathfrak{L})$. Fie acum $\lambda \in \rho(t_0)$, altfel arbitrar. Avem:

$$\begin{aligned}&(\lambda I - T)\,R(\lambda, t_0)\,y = (\lambda_0 I - T + (\lambda - \lambda_0) I)\,R(\lambda, t_0)\,y =\\ &= (R_0^{-1} + (\lambda - \lambda_0) I)\,(R(\lambda_0, t_0) - (\lambda - \lambda_0)\,R(\lambda_0, t_0)\,R(\lambda, t_0))\,y =\\ &= y + [(\lambda - \lambda_0)\,R(\lambda_0, t_0) - (\lambda - \lambda_0)\,R(\lambda, t_0) - (\lambda -\\ &- \lambda_0)^2\,R(\lambda_0, t_0)\,R(\lambda, t_0)]\,y = y, \forall y \in \mathfrak{L}.\end{aligned}$$

De asemenea:

$$\begin{aligned}&R(\lambda, t_0)\,(\lambda I - T)\,y = R(\lambda, t_0)\,(\lambda_0 I - T + (\lambda - \lambda_0) I)\,y =\\ &= (R(\lambda_0, t_0) - (\lambda - \lambda_0)\,R(\lambda, t_0)\,R(\lambda_0, t_0))\,(R_0^{-1} + (\lambda - \lambda_0) I)\,y =\\ &= y - (\lambda - \lambda_0)\,R(\lambda, t_0)\,y + (\lambda - \lambda_0)\,R(\lambda_0, t_0)\,y - (\lambda -\\ &- \lambda_0)^2\,R(\lambda, t_0)\,R(\lambda_0, t_0)\,y = y, \forall y \in \mathfrak{D}_T.\end{aligned}$$

Aşadar: $\rho(t_0) \subseteq \rho(T)$ şi pentru $\lambda \in \rho(t_0)$ avem:

$$R(\lambda, T)\,y = R(\lambda, t_0)\,y, \quad \forall y \in \mathfrak{L}.$$

Acum putem enunţa:

TEOREMĂ. *Dacă pentru* $t_0 \in \mathfrak{L}_e$, $R(\lambda, t_0)$ *nu e divizor la stînga al lui zero, atunci are loc implicaţia*:

$$x\,R(\lambda_0, t_0) = R(\lambda_0, t_0)\,x \Rightarrow x\,R(\lambda, t_0) = R(\lambda, t_0)\,x, \forall \lambda \in \rho(t_0).$$

Demonstraţie. Să ataşăm pseudorezolvantei $R(\lambda, t_0)$ operatorul $T \in \mathcal{L}_e(\mathfrak{L})$ construit în lemă. Notînd cu X operatorul (din $\mathcal{L}(\mathfrak{L})$): $Xy = xy$, $y \in \mathfrak{L}$, avem:

$$\begin{aligned}X\,R(\lambda_0, T)\,y &= X\,R(\lambda_0, t_0)\,y = x\,R(\lambda_0, t_0)\,y =\\ &= R(\lambda_0, t_0)\,xy = R(\lambda_0, T)\,Xy, \forall y \in \mathfrak{L}\end{aligned}$$

deci pentru $\lambda_0 \in \rho(t_0) \subseteq \rho(T)$ are loc $XR(\lambda_0, T) = R(\lambda_0, T)X$. Dar $R(\lambda_0, T)$ nu este divizor la stînga al lui zero în $\mathcal{L}(\mathfrak{L})$ (din aceeaşi proprietate a lui $R(\lambda_0, t_0)$ în $\mathfrak{L}$), deci putem aplica rezultatul din [1, exc. 5.5] pentru $\mathcal{L}_e(\mathfrak{L})$ şi:

$$XR(\lambda, T) = R(\lambda, T)\,X, \forall \lambda \in \rho(T)\,(\supseteq \rho(t_0)).$$

Reţinînd aceasta pentru $\lambda \in \rho(t_0)$: $x\,R(\lambda, t_0) = X\,R(\lambda, T)\,e = R(\lambda, T)\,Xe = R(\lambda, t_0)\,x$ şi teorema este demonstrată.

Primită la redacţie la 15 septembrie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. FOIAŞ C., *Teoria spectrală în Algebre Banach (necomutative) axată pe noţiunea de rezolventă.* Seminar Miron Nicolescu, Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1959–1960.

ASUPRA MIŞCĂRII UNUI FLUID COMPRESIBIL PERFECT CONDUCTOR ÎN JURUL UNUI PROFIL SUBȚIRE CU GROSIME

DE

DOREL HOMENTCOVSCHI

Se consideră curgerea liniarizată, hiperbolică a unui fluid compresibil nevîscos în jurul unui profil subțire izolator. Problema determinării cîmpului magnetic din interiorul profilului (presupus cu grosime) se separă de cea exterioară, reducîndu-se la rezolvarea unei probleme de tip Hilbert cu coeficienți constanți. În exterior variabilele mişcării se obțin din condiția de racordare a cîmpului magnetic pe profil.

INTRODUCERE

Studiul curgerii fluidului compresibil în jurul profilelor subțiri fără grosime a fost făcut de J. E. Mc. Cune şi E. L. Resler Jr. în [1] pentru fluidul perfect conductor şi de Lazăr Dragoş în [2] şi [3] pentru R_M finit. Dat fiind că profilele nu au grosime, nu poate fi vorba de un cîmp magnetic în interiorul lor, iar condițiile la limită impun racordarea inducției cîmpului magnetic de pe extrados cu cel de pe intrados. Dacă profilul are grosime, trebuie considerat şi cîmpul magnetic din interiorul lui, care uneori [4] poate să ia valori mari, neputînd fi neglijat. De aceea racordarea cîmpului magnetic de pe extrados cu cel de pe intrados nu este totdeauna oportună şi atunci cînd e făcută implică o nouă aproximație. În cele ce urmează vom elimina acest neajuns, în regimul de curgere hiperbolic, prin determinarea cîmpului magnetic din interiorul profilului. Este drept că problema implică un oarecare grad de dificultate prin reprezentarea conformă a interiorului profilului pe semiplan. Totuşi se poate înlocui profilul prin două arce de cerc, care să-l aproximeze cît mai bine, pe care se vor impune condițiile la limită. Problema poate fi tratată pentru cazul general al cîmpurilor orientate arbitrar, însă pentru simplificarea calculelor vom considera aici cazul cîmpurilor ortogonale.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 2, P. 191–198, BUCUREŞTI, 1968

1. ECUAȚII DE BAZĂ. REPREZENTAREA SOLUȚIEI GENERALE

Fie un curent de fluid nevîscos, compresibil, perfect conductor, de viteză $\vec{V}_0$ la mari distanțe, în mișcare staționară în jurul unui profil subțire cu grosime. Curgerea fluidului, presupusă plană, are loc în ambianța unui cîmp magnetic omogen, de inducție $\vec{B}_0$, perpendicular pe direcția fluidului la infinit.

Vom alege un sistem de axe fix, cu originea în mijlocul profilului, orientat astfel ca axa Ox să coincidă cu direcția vitezei fluidului la infinit iar axa Oy să aibă direcția cîmpului magnetic neperturbat.

Fie ecuația profilului

$$y = Y_{\pm}(x), \quad -L \leqslant x \leqslant +L$$

(semnul + corespunzînd extradosului.)

Se notează prin $\vec{V}^*$, ρ^*, P^* variabilele mecanice și fie $\vec{B}^*$ inducția cîmpului magnetic. În cele ce urmează vom utiliza variabilele adimensionale:

$$\vec{V} = \frac{\vec{V}^*}{V_0} \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho^*}{\rho_0} \quad P = \frac{P^* - P_0}{\frac{1}{2}\rho_0 V_0^2} \quad \vec{B} = \frac{\vec{B}^*}{B_0}.$$

S-a luat ca unitate de măsură a densității, densitatea ρ_0 a fluidului neperturbat, iar originea scării presiunilor este fixată la P_0, valoarea presiunii fluidului la mari distanțe. Dat fiind că profilul este subțire ($|Y_{\pm}(x)| \ll 1$), vom admite că el perturbă puțin mișcarea de bază și ecuațiile care descriu mișcarea fluidului pot fi liniarizate. Notînd perturbațiile cu litere mici, curgerea fluidului va fi descrisă de următoarele ecuații:

$$M^2 \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}\right) \tag{1.2}$$

$$\frac{y v_y}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} = 0 \tag{1.4}$$

$$b_y + v_x = 0. \tag{1.5}$$

Vom căuta soluția acestui sistem de ecuații sub formă de unde simple. Fie

$$h_y = F(x - \alpha y).$$

Din ecuațiile (1.1), (1.2), (1.4) și (1.5) se obține succesiv

$$h_x = \alpha F(x - \alpha y), \quad v_x = -F(x - \alpha y)$$

$$v_y = -\frac{1}{\alpha}\left[1 - M^2 + \frac{M^2}{A^2}(1 + \alpha^2)\right]F(x - \alpha y)$$

$$p = \left[1 - \frac{1}{A^2}(1 + \alpha^2)\right]F(x - \alpha y).$$

Din (1.3) se obține următoarea ecuație bipătrată pentru determinarea lui α

$$\alpha^4 - \alpha^2(A^2 + M^2 - 1) + A^2M^2 - A^2 - M^2 = 0.$$

Discriminantul corespunzător ecuației de gradul doi este

$$\Delta = (A^2 + M^2 - 1)^2 + 4(-A^2M^2 + A^2 + M^2) =$$
$$= (A^2 - M^2 - 1)^2 + 4A^2 > 0.$$

Vom pune de asemenea în evidență suma și produsul rădăcinilor

$$\Sigma = A^2 + M^2 - 1$$
$$\Pi = A^2M^2 - A^2 - M^2$$

Dacă $A^2M^2 - A^2 - M^2 < 0$, cum, $\Pi < 0$, ecuația va avea două rădăcini reale și două imaginare, fiecare variabilă a curgerii avînd deci o parte hiperbolică și o parte eliptică.

În domeniul $A^2M^2 - A^2 - M^2 > 0$, cum avem și $\Pi > 0$ și $\Sigma > 0$, ecuația va avea patru rădăcini reale, iar sistemul de ecuații va fi în acest domeniu de tip hiperbolic (complet).

Vom nota cele patru rădăcini

$$\alpha_{1,2} = \pm R = \pm\left[\frac{A^2 + M^2 - 1 + \sqrt{(A^2 - M^2 - 1)^2 + 4A^2}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha_{3,4} = \pm S = \pm\left[\frac{A^2 + M^2 - 1 + \sqrt{(A^2 - M^2 - 1)^2 + 4A^2}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

În regimul complet hiperbolic, de care ne vom ocupa mai jos, soluția generală a sistemului admite următoarea reprezentare:

(1.6)

$$v_x = -F_+(x - Ry) - F_-(x + Ry) - G_+(x - Sy) - G_-(x + Sy)$$

$$v_y = -\frac{1}{R}\left[1 - M^2 + \frac{M^2}{A^2}(1 + R^2)\right][F_+(x - Ry) - F_-(x + Ry)] -$$
$$-\frac{1}{S}\left[1 - M^2 + \frac{M^2}{A^2}(1 + S^2)\right][G_+(x - Sy) - G_-(x + Sy)],$$

(1.7)

$$b_x = R[F_+(x - Ry) - F_-(x + Ry)] + S[G_+(x - Sy) - G_-(x + Sy)],$$
$$b_y = F_+(x - Ry) + F_-(x + Ry) + G_+(x - Sy) + G_-(x + Sy).$$

$$(1.8)\qquad \begin{aligned} p = &\left[1 - \frac{1}{A^2}(1 + R^2)\right][F_+(x - Ry) + F_-(x + Ry)] + \\ &+ \left[1 - \frac{1}{A^2}(1 + S^2)\right][G_+(x - Sy) + G_-(x + Sy)], \end{aligned}$$

unde F_+, F_-, G_+, G_-, sînt funcții arbitrare.

În interiorul profilului, presupus izolator, nu vom avea curenți

$$\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} = 0.$$

Totodată admitem că nu avem poli magnetici

$$\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} = 0.$$

Prin urmare, în interiorul profilului, inducția magnetică complexă

$$(1.9)\qquad b(z) = b_x - ib_y$$

este o funcție olomorfă de variabila complexă $z = x + iy$.

2. CONDIȚII LA LIMITĂ

I) Vom admite că perturbațiile sînt produse numai de profil și că nu se pot propaga prin el. Condiția de anulare a lor la mari distanțe o vom utiliza sub forma

$$(2.1)\qquad \lim_{x \to \pm\infty} (\vec{v}, \vec{b}, p) = 0.$$

Pentru alegerea familiei de caracteristici corecte pentru fiecare semiplan, vom impune condiția ca, pentru M crescător, caracteristicile să fie deviate în aval în tot planul.

II) Condiția la limită cinematică o vom scrie sub forma

$$(2.2)\qquad v_y(x, y) = Y'_{\pm}(x) \qquad \text{pentru } y = Y_{\pm}(x), \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

III) *Condițiile la limită pentru cîmpul magnetic.* Vom admite că pe profil nu avem curenți de suprafață. Astfel ambele componente ale inducției cîmpului magnetic (tangentă la profil și normală) fiind continue vom avea

$$(2.3)\qquad \begin{aligned} &b_x(x, y+) = b_x(x, y-) \\ &b_y(x, y+) = b_y(x, y-) \qquad \text{pentru } y = Y_{\pm}(x), \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1, \end{aligned}$$

unde prin $\vec{b}(x, y+)$ și $\vec{b}(x, y-)$ s-au notat valorile limită ale inducției cîmpului magnetic din fluid și respectiv din interiorul profilului.

Din calcul rezultă

$$\frac{\partial R}{\partial M} > 0 \qquad \frac{\partial S}{\partial M} > 0$$

astfel că avînd în vedere condiţia la limită I), sîntem conduşi la următoarea alegere :

$$F_-(x + Ry) = G_-(x + Sy) = 0 \qquad \text{pentru } y > 0$$

$$F_+(x - Ry) = G_+(x - Sy) = 0 \qquad \text{pentru } y < 0.$$

Din (1.7) mai avem

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(x - \varepsilon Ry) &= \varepsilon \frac{b_x(x, y) - \varepsilon S b_y(x, y)}{R - S} \\ G_\varepsilon(x - \varepsilon Sy) &= -\varepsilon \frac{b_x(x, y) - \varepsilon R b_y(x, y)}{R - S} \end{aligned} \tag{2.4}$$

ε fiind egal cu 1 pentru semiplanul superior şi cu —1 pentru cel inferior.

Impunînd condiţia (2.4) pe axa $y = 0$, obţinem

$$F_\varepsilon(x) = \varepsilon \frac{b_x(x, Y_\varepsilon(x)) - \varepsilon S b_y(x, Y_\varepsilon(x))}{R - S}$$

$$G_\varepsilon(x) = -\varepsilon \frac{b_x(x, Y_\varepsilon(x)) - \varepsilon S b_y(x, Y_\varepsilon(x))}{R - S},$$

expresii ce determină complet mişcarea în funcţie de valorile inducţiei cîmpului magnetic pe profil care a rămas astfel singura necunoscută a problemei.

3. DETERMINAREA CÎMPULUI MAGNETIC PE PROFIL

Condiţia la limită cinematică, avînd în vedere expresiile (1.6), se transcrie sub forma

$$-\frac{\varepsilon}{R}\left[1 - M^2 + \frac{M^2}{A^2}(1 + R^2)\right] F_\varepsilon(x - \varepsilon Ry) - \frac{\varepsilon}{S}\left[1 - M^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{M^2}{A^2}(1 + S^2)\right] G_\varepsilon(x - \varepsilon Sy) = Y'_\varepsilon(x) \quad \text{cu } y = Y_\varepsilon(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

sau, ţinînd cont de (2.4),

$$\gamma b_x(x, y+) + \varepsilon \delta b_y(x, y+) = Y'_\varepsilon(x) \tag{3.1}$$

cu

$$\gamma = \frac{A^2 M^2 - A^2 - M^2}{A^2} \frac{1}{RS} + \frac{M^2}{A^2} > 0$$

$$\delta = \frac{A^2 M^2 - A^2 - M^2}{A^2} \frac{R + S}{RS} > 0.$$

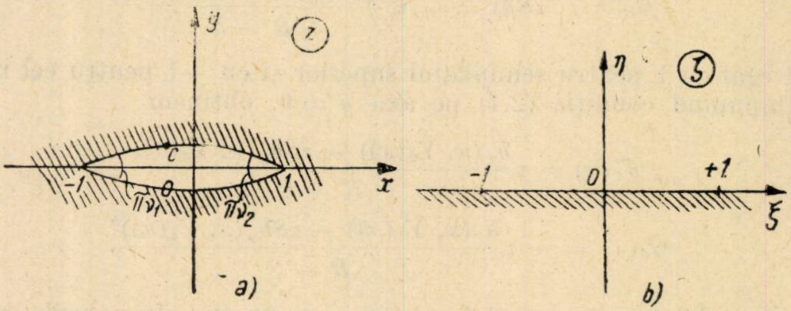
Cum componentele inducţiei cîmpului magnetic trebuie să fie continui pe profil, se obţine

$$\gamma b_x(x, y-) + \varepsilon\delta b_y(x, y-) = Y'_\varepsilon(x) \tag{3.2'}$$
$$y = Y(x), \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

În definitiv, avînd în vedere expresia (1.9) am obţinut următoarea problemă la limită : Să se determine funcţia $b(z)$ olomorfă în interiorul profilului cu condiţia la limită

$$\operatorname{Re}\{(\gamma - i\varepsilon\delta)(b_x - ib_y)\} = Y'_\varepsilon(x). \tag{3.2'}$$

Presupunem că am reprezentat conform interiorul profilului pe semiplanul superior astfel ca punctele -1 şi $+1$ să rămînă pe loc, iar punctul c cu $Y'_+(c) = 0$ să treacă în punctul de la infinit din semiplan şi fie $z = z(\zeta)$ funcţia ce realizează această reprezentare (figură).



Prin această transformare, $b(z) = b(z(\zeta))$ devine o funcţie olomorfă de $\zeta = \xi + i\eta$ în semiplanul superior. Pe frontieră vom avea :

$$\operatorname{Re}\{(\gamma - i\delta)(b_x - ib_y)\} = Y'_-(x(\xi)) = f(\xi) \text{ pentru } |\xi| < 1 \quad \eta = 0$$
$$\operatorname{Re}\{(\gamma + i\delta)(b_x - ib_y)\} = Y'_+(x(\xi)) = f(\xi) \text{ pentru } |\xi| > 1 \quad \eta = 0$$

sau notînd

$$\beta = \begin{cases} \gamma - i\delta = re^{-i\mu\pi} & \text{dacă } |\xi| < 1 \\ \gamma + i\delta = re^{+i\mu\pi} & \text{dacă } |\xi| > 1 \end{cases} \qquad \text{cu } 0 < \mu < \frac{1}{2}$$

vom avea

$$\operatorname{Re}\{\beta b(\zeta)\} = f(\xi) \qquad \text{pentru } \eta = 0. \tag{3.3}$$

Vom căuta un factor regulator real $\rho(\xi)$ astfel ca $\beta\rho(\xi) = R(\xi)$ să fie valoarea la limită a unei funcţii $R(\zeta)$ analitică în semiplanul superior. Astfel

$$\{\ln|R(\zeta)| + i \arg R(\zeta)\}_{\eta=0} = \ln r\rho(\xi) + i \arg \beta$$

iar de aici

$$\arg R(\zeta) = \begin{cases} \mu\pi \text{ pentru } \xi < -1 & \eta = 0 \\ -\mu\pi \text{ pentru } -1 < \xi < 1 & \eta = 0 \\ \mu\pi \text{ pentru } \xi > 1 & \eta = 0. \end{cases}$$

Se obţine

$$R(\zeta) = \mathrm{e}^{i\mu\pi}(\zeta + 1)^{2\mu}(\zeta - 1)^{-2\mu}$$

cu determinarea care pentru $\zeta = 0$ ia valoarea $\mathrm{e}^{-i\mu\pi}$. În definitiv

$$\rho(\xi) = \frac{\mathrm{e}^{i\mu\pi}}{\beta}\left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^{2\mu}.$$

Din condiţia la limită (3.3) pusă sub forma

$$\mathrm{Re}\,\{R(\zeta)\,b(\zeta)\}_{\eta=0} = \rho(\xi)\,f(\xi) \tag{3.4}$$

se obţine

$$R(\zeta)\,b(\zeta) = \frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho(\xi)\,f(\xi)}{z-\xi}\,\mathrm{d}\xi + ik \tag{3.5}$$

iar de aici

$$b(\zeta) = \left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)^{2\mu}\left[\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^{2\mu}\frac{f(\xi)}{\beta}\,\frac{\mathrm{d}\xi}{z-\xi} + ik\mathrm{e}^{-i\mu\pi}\right] \tag{3.6}$$

cum $0<2\mu<1$, urmează că singularitatea soluţiei ce apare în punctul $\zeta = -1$ este integrabilă. Soluţia găsită îndeplineşte condiţia lui Kutta-Jukovski. Avem posibilitatea să determinăm constanta k astfel ca să nu avem nici şoc de intrare (viteza finită la bordul de atac). Pentru aceasta vom cere ca paranteza mare din (3.6) să se anuleze pentru $\zeta = -1$.

Pe axă vom avea

$$\left(\frac{t+1}{t-1}\right)\frac{f(t)}{\beta} + \frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^{2\mu}\frac{f(\xi)}{\beta}\,\frac{\mathrm{d}\xi}{t-\xi} + ik\mathrm{e}^{-i\mu\pi} = h(\xi)$$

iar de aici pentru $t = -1$

$$k\mathrm{e}^{-i\mu\pi} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi)}{\beta}\,\frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi-1)^{2\mu}(\xi+1)^{1-2\mu}}. \tag{3.7}$$

Expresia (3.7) introdusă în (3.6) ne conduce la următoarea expresie a inducţiei magnetice complexe

(3.8)

$$b(\zeta) = \frac{i}{\pi}(\zeta-1)^{2\mu}(\zeta+1)^{1-2\mu}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi)}{\beta}\,\frac{1}{(\xi-1)^{2\mu}(\xi+1)^{1-2\mu}}\,\frac{\mathrm{d}\xi}{\zeta-\xi}.$$

Prin aceasta problema este complet rezolvată.

Ne mai interesează comportarea soluţiei în vecinătatea punctelor -1 şi $+1$ din planul fizic. Se notează prin $\pi\nu_1$ şi $\pi\nu_2$ unghiurile făcute de curbele $Y_+(x)$ şi $Y_-(x)$ în punctele -1 şi $+1$ respectiv ($0 < \nu_1, \nu_2 < \nu_{\max} < 1$).

În jurul punctelor anguloase funcţia $\zeta(z)$ are un comportament de forma [5].

$$\zeta + 1 = (z + 1)^{\frac{1}{\nu_1}} F_1(z)$$

$$\zeta - 1 = (z - 1)^{\frac{1}{\nu_2}} F_2(z),$$

unde $F_1(z)$ şi $F_2(z)$ sînt funcţii olomorfe în vecinătatea punctelor -1 şi $+1$ respectiv şi nenule.

Introduse în (3.8) va rezulta

$$b(z) = (z - 1)^{\frac{2\mu}{\nu_1}} (z + 1)^{\frac{1-2\mu}{\nu_2}} F(z)$$

cu $F(z)$ mărginită şi nenulă în vecinătatea punctelor -1 şi $+1$. Urmează deci că inducţia magnetică complexă (şi de aici şi celelalte variabile ale mişcării), va continua să se anuleze la ambele borduri.

Primită la redacţie la 21 iunie 1967

Universitatea din Bucureşti, Facultatea de matematică şi mecanică, Str. Academiei nr. 14.

BIBLIOGRAFIE

1. J. E. Mc. Cune, E. L. Resler Jr., J. Aerospace Sc., **27**, 7 (1960).
2. Lazăr Dragoş, A.I.A.A. Journal (july-august 1967).
3. Lazăr Dragoş, Atti dell'Acad. Naz. dei Lincei, martie (1967).
4. K. Stewartson, J. Fluid. Mech., **8**, 82 (1960).
5. Caius Jacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Bucarest-Paris, 1959.

MIŞCAREA FLUIDELOR VÎSCOASE ELECTROCONDUCTOARE ÎN JURUL PROFILELOR SUBŢIRI (I)

DE

N. MARCOV

Se consideră mişcarea plană permanentă a fluidelor vîscoase, incompresibile, electroconductoare în jurul profilelor subţiri. Ecuaţiile neliniare ale problemei sînt liniarizate prin metoda lui Oseen. Problema este redusă la rezolvarea unei ecuaţii de tip Fredholm. În cazul profilului în forma unui arc de elipsă, pentru numere Reynolds mici, se dă o soluţie aproximativă a acestei ecuaţii integrale.

1. *Introducere.* Problema mişcării magnetohidrodinamice a fluidelor vîscoase, incompresibile, electroconductoare în jurul unei plăci plane, a fost studiată de către H. P. Greenspan, G. F. Carrier şi H. Cabannes, [1], [2], [3], în cadrul aproximaţiei lui Oseen şi prin utilizarea transformatelor Fourier. În lucrarea [4] această problemă este reluată pentru cazul incidenţei oarecari a plăcii plane.

În cele ce urmează este considerată mişcarea plană în jurul unor profile subţiri, viteza fluidului, la infinit, fiind paralelă cu cîmpul magnetic. Liniarizarea ecuaţiilor dă posibilitatea reprezentării funcţiei de curent şi a funcţiei de forţă în raport cu o funcţie armonică şi cu două funcţii care satisfac unor ecuaţii Oseen, reprezentare obţinută de către Hirowo Yosinobu, [5], prin particularizarea cazului tridimensional. Reprezentînd prin potenţiali funcţia de curent şi funcţia de forţă, se obţine ecuaţia integrală (1), § 6. Această ecuaţie se reduce la o ecuaţie de tip Fredholm de speţa doua.

Drept aplicaţie este considerată, în cazul numerelor Reynolds mici, mişcarea în jurul profilului subţire avînd forma unui arc de elipsă.

2. *Ecuaţiile de mişcare.* Se consideră mişcarea permanentă a fluidelor vîscoase, incompresibile, electroconductoare în jurul unor profile subţiri. Fluidul este presupus omogen, avînd vîscozitatea ν, conductibilitatea

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 2, P. 199–211, BUCUREŞTI, 1968

electrică σ_e şi permeabilitatea magnetică μ_e. În variabilele adimensionale, într-un sistem cartezian drept, ecuaţiile de mişcare, [6], sînt

$$(1)\qquad (\vec{V}\ \mathrm{grad})\vec{V} = -\ \mathrm{grad}\ P + \frac{1}{\mathrm{Re}}\ \Delta\vec{V} + R_H(\vec{H}\ \mathrm{grad})\ \vec{H},\ \mathrm{div}\ \vec{V} = 0$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{H} = R_M(\vec{E} + \vec{V}\times\vec{H}),\ \mathrm{rot}\ \vec{E} = 0,\ \mathrm{div}\ \vec{H} = 0$$

$$P = p + \frac{1}{2}R_H(H^2 - 1),$$

unde

$$(2)\qquad \mathrm{Re} = LV_\infty/\nu,\ R_M = \sigma_e\mu_e LV_\infty,\quad R_H = \mu_e H_\infty^2/\rho V_\infty^2.$$

Mărimile reale din planul fizic dimensional au expresiile

$$Lx,\ Ly,\ V_\infty\vec{V},\ p_\infty + \rho V_\infty^2 p,\ H_\infty\vec{H},\ \mu_e V_\infty H_\infty\vec{E}.$$

Mărimea L reprezintă o lungime caracteristică profilului, iar V_∞, H_∞ caracterizează mărimea vitezei şi, respectiv, mărimea cîmpului magnetic la infinit. Se consideră că la infinit viteza şi cîmpul magnetic au direcţia axei Ox:

$$\vec{V}|_\infty = \vec{H}|_\infty = \vec{i}.$$

În cele ce urmează se presupune mişcarea plană, şi anume

$$(3)\qquad \vec{V} = (1 + u)\vec{i} + v\vec{j},\quad \vec{H} = (1 + h_x)\vec{i} + h_y\vec{j},$$

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ fiind versorii axelor sistemului $Oxyz$, iar funcţiile u, v, h_x, h_y fiind funcţii de variabilele x, y.

Introducînd în ecuaţiile de mişcare şi neglijînd produsele în care intervin mărimile de perturbaţie u, v, h_x, h_y sau derivatele lor, obţinem

$$(4)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\ \Delta u + R_H\frac{\partial}{\partial x}h_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\ \Delta v + R_H\frac{\partial}{\partial x}h_y$$

$$(5)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial}{\partial x}h_x + \frac{\partial}{\partial y}h_y = 0$$

$$(6)\qquad \frac{\partial}{\partial x}h_y - \frac{\partial}{\partial y}h_x = R_M(h_y - v),\quad P = p + R_H h_x$$

cîmpul electric fiind constant şi, prin condiţiile de la infinit, nul.

Din relaţiile (4), (5) rezultă că funcţia P este armonică. Fie funcţia Q conjugata armonică a funcţiei P:

$$(7)\qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y},\quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Din relațiile (5) de continuitate introducem funcția de curent pentru cîmpul vitezelor de perturbație, respectiv funcția de forță pentru cîmpul magnetic de perturbație

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad h_x \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad h_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{8}$$

Înlocuind (7) și (8) în (4) rezultă

$$\Delta\psi = -\mathrm{Re} R_H \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathrm{Re} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mathrm{Re}\, Q \tag{9}$$

presupunînd în plus că funcția Q se anulează la infinit :

$$P + iQ = \frac{\alpha_0}{z} + \frac{\alpha_1}{z^2} + \dots, \quad z = x + iy.$$

Fie funcția de variabilă complexă

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}(\chi_1 + i\chi) = \int (P + iQ)\mathrm{d}z$$

astfel încît

$$P = \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad Q = \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad \Delta\chi = 0 \tag{10}$$

În felul acesta, înlocuind (8) în (6) și (10) în (9), se obține următorul sistem de ecuații

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \mathrm{R}_M \frac{\partial \varphi}{\partial x} - R_M \frac{\varphi\psi}{\partial x} \\ \Delta\psi &= -\mathrm{Re}\, R_H \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathrm{Re} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial x} \\ \Delta\chi &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

$$p = \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial \chi}{\partial y} - R_H \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{12}$$

3. *Separarea ecuațiilor*. Sistemul de ecuații (11), § 2, printr-o transformare liniară a funcțiilor φ, ψ, χ, poate fi adus la o formă diagonală. Se obține reprezentarea ($\delta \neq 0$)

$$\begin{aligned} \varphi\delta &= (a - b)\widetilde{\varphi} + b\widetilde{\psi} - a\widetilde{\chi} \\ \psi\delta &= (a - b)\widetilde{\varphi} + (b - c)\widetilde{\psi} + (c - a)\widetilde{\chi} \\ \chi &= 2\widetilde{\varphi}, \end{aligned} \tag{1}$$

funcțiile $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\psi}$, $\widetilde{\chi}$ verificînd ecuațiile

$$\Delta\widetilde{\varphi} = 0, \quad \Delta\widetilde{\psi} = 2a \frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial x}, \quad \Delta\widetilde{\chi} = 2b \frac{\partial \widetilde{\chi}}{\partial x}. \tag{2}$$

Constantele $2a$, $2b$ sînt rădăcinile ecuației

$$\lambda^2 - (\mathrm{Re} + R_M)\lambda + \mathrm{Re}R_M(1 - \mathrm{R}_H) = 0$$

$$4a = \mathrm{Re} + R_M - \sqrt{(\mathrm{Re} - R_M)^2 + 4\,\mathrm{Re}R_M R_H} \tag{3}$$

$$4b = \mathrm{Re} + R_M + \sqrt{(\mathrm{Re} - R_M)^2 + 4\mathrm{Re}\,R_M R_H}$$

$$2c = \mathrm{Re}\,(1 - R_H), \qquad \delta = c(b - a).$$

Din relația (10), § 2 și din relația precedentă acesteia, rezultă că derivatele funcției χ se anulează la infinit. Deoarece u, v, h_x, h_y trebuie să se anuleze la infinit, este necesar ca derivatele prime ale funcțiilor ψ și φ să se anuleze la infinit. Determinantul sistemului (1) fiind diferit de zero, rezultă că derivatele prime ale funcțiilor $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$, $\tilde{\chi}$ se anulează la infinit :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\chi}\} = 0 \text{ la infinit.} \tag{4}$$

4. *Condițiile la limită.* Presupunem că mișcarea are loc în jurul unui profil subțire caracterizat în planul xOy prin arcul neted

$$x = x(t),\ y = y(t), \qquad t \in [0, l] \tag{1}$$

t fiind coordonata curbilinie, iar lL fiind lungimea profilului în planul dimensional.

Fluidul fiind vîscos, aderă la peretele profilului, astfel încît viteza fluidului este nulă pe obstacol :

$$u = -1,\ v = 0 \text{ pe profil.} \tag{2}$$

Alegînd sensul de parcurs al profilului pentru t crescător, se poate considera, [7], vecinătatea stîngă și vecinătatea dreaptă a profilului. Dacă prin profil, pe direcția axei Oz, trece un curent de suprafață, atunci componenta tangențială a cîmpului magnetic este discontinuă. Componenta normală a cîmpului magnetic trebuie să fie continuă. Rezultă următoarele condiții de salt

$$[\vec{h} \cdot \vec{\tau}] = -I(s), \qquad [\vec{h} \cdot \vec{n}] = 0.$$

Notînd cu $\theta(s)$ unghiul tangentei la profil cu axa Ox, aceste condiții se scriu

$$[h_x - ih_y] = -I(s)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} - i\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right) = -I(s)\mathrm{e}^{-i\theta(s)}, \tag{3}$$

unde

$$[h] = h_+ - h_-.$$

Funcția $I : [0, l] \to R$ caracterizează densitatea liniară a curenților care trec prin profil și este presupusă hölderiană.

5. *Reprezentarea prin potențiali a cîmpului magnetic și a cîmpului vitezelor.* Reprezentăm funcția de curent ψ și funcția de forță φ printr-o suprapunere de soluții particulare. Trecem la coordonatele polare r, θ.

Soluţia fundamentală în origine a ecuaţiei lui Oseen $\Delta G = 2aG_x$ este funcţia $K_0(|a|r) \exp(ar \cos\theta)$. Funcţia $\Theta(ar, \theta) \exp(ar \cos\theta)$ verifică ecuaţia lui Oseen dar este neuniformă. Funcţiile K_0 şi Θ satisfac ecuaţiilor

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} K_0(|a|r) - a\Theta = -|a| \frac{\sin\theta}{r} K_1(|a|r) - a\Theta \tag{1}$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} K_0(|a|r) + aK_0(|a|r) = |a| \frac{\cos\theta}{r} K_1(|a|r) + aK_0(|a|r).$$

Funcţiile K_0, K_1 sînt funcţiile Bessel de argument imaginar, [8]. Funcţia Θ are expresia

$$\Theta(ar, \theta)e^{ar\cos\theta} = \theta + \sin\theta \int_0^{ar} K_0(|z|)e^{z\cos\theta}\, dz. \tag{2}$$

Fiind date două puncte ale arcului (1), § 4, însemnăm

$$\xi = i\eta = x(s) - x(t) + i\{y(s) - y(t)\} = \rho e^{i\omega} \operatorname{sgn}(s-t) \tag{3}$$

Arcul fiind neted, distanţa ρ dintre aceste puncte şi unghiul ω pe care îl formează coarda determinată de aceste puncte, cu axa Ox, sînt funcţii continue, [7].

Pentru un punct din plan şi pentru un punct al arcului, punem

$$\widetilde{x} + i\widetilde{y} = x - x(t) + i\{y - y(t)\} = \widetilde{r}e^{i\widetilde{\theta}}. \tag{4}$$

Funcţia $\widetilde{\theta}$ ca funcţie de x, y trebuie considerată funcţie continuă şi pentru aceasta este necesar să se introducă corespunzător o tăietură în planul xOy. În particular, dacă punctul (x, y) tinde la un punct s al obstacolului, rezultă

$$\widetilde{\theta} = \begin{cases} \omega & \text{pentru } s > t \\ \omega \pm \pi & \text{pentru } s < t \end{cases}$$

semnul + (−) corespunzînd valorii limită la stînga (respectiv dreapta) obstacolului.

Deoarece prin relaţiile (4), § 3, derivatele prime ale funcţiilor $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\psi}$, $\widetilde{\chi}$, funcţii care satisfac ecuaţiilor (2), § 3, se anulează la infinit, considerăm următoarele expresii

$$\widetilde{\varphi} = \int_0^l \{A_1(t)\widetilde{\theta} - B_1(t)\lg\widetilde{r}\}\, dt \tag{5}$$

$$\widetilde{\psi} = \int_0^l \{A_2(t)\Theta(a\widetilde{r}, \widetilde{\theta}) + B_2(t)K_0(|a|\widetilde{r})\}e^{a\widetilde{x}}\, dt$$

$$\widetilde{\chi} = \int_0^l \{A_3(t)\Theta(b\widetilde{r}, \widetilde{\theta}) + B_3(t)K_0(b\widetilde{r})\}e^{b\widetilde{x}}\, dt.$$

Ținînd seama de relațiile (1) și (2), prin derivare, obținem

$$(6)\quad \left(\frac{\partial}{\partial y}+i\frac{\partial}{\partial x}\right)\widetilde{\varphi}=\int_0^l \overline{C_1(t)}\,\frac{\mathrm{e}^{-i\widetilde{\theta}}}{\widetilde{r}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi i}\int_0^l\{-2\pi i\,\overline{C_1(t)}\,\mathrm{e}^{-i\theta(t)}\}\,\frac{\mathrm{d}z_0}{z_0-z}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+i\frac{\partial}{\partial x}\right)\widetilde{\psi}=\int_0^l\{\overline{C_2(t)}\mathrm{e}^{-i\widetilde{\theta}}K_1(|a|\widetilde{r})\,|a|+aC_2(t)K_0(|a|\widetilde{r})\}\mathrm{e}^{a\widetilde{x}}\,\mathrm{d}t$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+i\frac{\partial}{\partial x}\right)\widetilde{\chi}=\int_0^l\{\overline{C_3(t)}\,\mathrm{e}^{-i\widetilde{\theta}}K_1(b\widetilde{r})b+bC_3'(t)K_0(b\widetilde{r})\}\mathrm{e}^{b\widetilde{x}}\,\mathrm{d}t,$$

unde

$$C_1=A_1+iB_1,\ \ldots$$

Trecem la limită în aceste expresii pentru

$$x+iy\to x(s)+iy(s),\qquad s\in(0,l).$$

Valorile limită la stînga (dreapta) arcului ale acestor expresii sînt date de relațiile

$$(7)\quad \left(\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial y}+i\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x}\right)(s)=\mp\,\pi i\overline{C_1(s)}\mathrm{e}^{-i\theta(s)}+\int_0^l\overline{C_1(t)}\,\frac{1}{\xi+i\eta}\,\mathrm{d}t$$

$$\left(\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial y}+i\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial x}\right)(s)=\mp\,\pi i\overline{C_2(s)}\mathrm{e}^{-i\theta(s)}+$$

$$+\int_0^l\{\overline{C_2(t)}\frac{|a|\rho}{\xi+i\eta}K_1(|a|\rho)+aC_2(t)K_0(|a|\rho)\}\mathrm{e}^{a\xi}\,\mathrm{d}t$$

$$\left(\frac{\partial\widetilde{\chi}}{\partial y}+i\frac{\partial\widetilde{\chi}}{\partial x}\right)(s)=\mp\,\pi i\overline{C_3(s)}\mathrm{e}^{-i\theta(s)}+$$

$$+\int_0^l\{\overline{C_3(t)}\,\frac{b\rho}{\xi+i\eta}K_1(b\rho)+bC_3(t)K_0(b\rho)\}\mathrm{e}^{b\xi}\mathrm{d}t$$

integralele fiind considerate în sensul valorii principale.

Din relațiile (8), § 2, (1), § 3 și (7) rezultă următoarele expresii pentru cîmpul magnetic și pentru cîmpul vitezelor de perturbație :

$$(8)\quad h\delta=(h_x-ih_y)\delta=(a-b)\int_0^l\overline{C_1(t)}\,\frac{\mathrm{e}^{-i\widetilde{\theta}}}{\widetilde{r}}\,\mathrm{d}t+$$

$$+\,b\int_0^l\{\overline{C_2(t)}\mathrm{e}^{-i\widetilde{\theta}}|a|K_1(|a|\widetilde{r})+C_3(t)aK_0(|a|)\widetilde{r})\}\mathrm{e}^{a\widetilde{x}}\,\mathrm{d}t-$$

$$-\,a\int_0^l\{\overline{C_3(t)}\mathrm{e}^{-i\widetilde{\theta}}bK_1(b\widetilde{r})+C_3(t)bK_0(b\widetilde{r})\}\mathrm{e}^{b\widetilde{x}}\,\mathrm{d}t$$

$$(9)\quad w\delta = (u - iv)\delta = (a - b)\int_0^l \overline{C_1(t)}\,\frac{e^{-i\tilde{\theta}}}{\tilde{r}}\,dt +$$
$$+ (b - c)\int_0^l \{\overline{C_2(t)}e^{-i\tilde{\theta}}\,|a|K_1(|a|\tilde{r}) + C_2(t)\,aK_0(|a|\tilde{r})\}e^{a\tilde{x}}dt +$$
$$+ (c - a)\int_0^l \{\overline{C_3(t)}e^{-i\tilde{\theta}}bK_1(b\tilde{r}) + C_3(t)b\,K_0(b\tilde{r})\}\,e^{b\tilde{x}}\,dt.$$

Deoarece cîmpul vitezelor şi cîmpul magnetic trebuie să verifice condiţiile la limită (2), (3), §4, prin relaţiile (7), (8) rezultă

$$[h]\delta = -2\pi i e^{-i\theta(s)}\{(a-b)\overline{C_1(s)} + b\overline{C_2(s)} - a\overline{C_3(s)}\} = -I(s)e^{-i\theta(s)}\,\delta$$
$$[w]\delta = -2\pi i\, e^{-i\theta(s)}\{(a-b)\overline{C_1(s)} + (b-c)\overline{C_2(s)} + (c-a)\overline{C_3(s)}\} = 0$$

astfel încît se obţine

$$(10)\qquad \overline{C_1(s)} = \overline{C(s)} + \frac{b-c}{2\pi i}I(s)$$
$$\overline{C_2(s)} = \overline{C(s)} - \frac{a-b}{2\pi i}I(s)$$
$$\overline{C_3(s)} = \overline{C(s)}\quad,\quad C = A + iB$$

Cu aceste expresii, pentru funcţiile C_1, C_2, C_3, funcţiile de curent φ, ψ sînt funcţii uniforme deoarece se arată că integranţii din reprezentările integrale ale acestor funcţii (relaţiile (1), § 3, (6), (3)) sînt funcţii periodice în raport cu $\tilde{\theta}$.

6. *Ecuaţiile integrale ataşate problemei la limită.* Impunem vitezei date de relaţia (9), § 5, condiţia la limită (2), § 4. Prin relaţiile (6), (7), (10), § 5, rezultă

$$(1)\quad (a-b)\int_0^l \overline{C(t)}\,\frac{1}{\xi + i\eta}\,dt +$$
$$+(b-c)\int_0^l \left\{\overline{C(t)}\,\frac{|a|\rho}{\xi + i\eta}\,K_1(|a|\rho) + C(t)a\,K_0(|a|\rho)\right\}e^{a\xi}\,dt +$$
$$+(c-a)\int_0^l \left\{\overline{C(t)}\,\frac{b\rho}{\xi + i\eta}\,K_1(b\rho) + C(t)\,bK_0(b\rho)\right\}e^{b\xi}\,dt = -\delta\{1 + T(s)\},$$

unde

$$T(s) = (a-b)\,(b-c)\,\frac{1}{2\delta\pi i}\int_0^l I(t)\,\frac{1}{\xi + i\eta}\,dt -$$
$$-(a-b)\,(b-c)\,\frac{1}{2\pi\delta i}\int_0^l I(t)\left\{\frac{|a|\rho}{\xi + i\eta}\,K_1(|a|\rho) - aK_0(|a|\rho)\right\}e^{a\xi}\,dt.$$

Funcțiile ξ, η, ρ de variabilele s, t sînt date în (3), § 5. Funcția $I(t)$, deci funcția $T(s)$, este presupusă cunoscută.

Nucleul ecuației integrale (1) avînd singularitatea logaritmică, însemnăm

$$F(s) = -\frac{1}{\pi}\int_0^l C(t)\lg|s-t|\mathrm{d}t.$$

Inversînd această relație, așa cum se arată în [9], rezultă

$$C(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{t(l-t)}}\int_0^l F'(\tau)\sqrt{\tau(l-\tau)}\,\frac{\mathrm{d}\tau}{t-\tau} + \frac{\Gamma}{\pi\sqrt{t(l-t)}}, \tag{2}$$

unde

$$\Gamma = \int_0^l C(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{\lg\frac{l}{4}}\int_0^l \frac{F(s)\mathrm{d}s}{\sqrt{s(l-s)}}.$$

Înlocuind (2) și relația precedentă în (1), rezultă

$$\pi F(s) - \int_0^l M(s,\tau)F'(\tau)\mathrm{d}\tau - \int_0^l N(s,\tau)\overline{F'(\tau)}\mathrm{d}\tau = \\ = -\{1 + T(s) + \Gamma G(s) + \overline{\Gamma}H(s)\}, \tag{3}$$

unde

$$M(s,\tau) = \frac{1}{\pi\delta}\int_0^l \{(\bar{b}-c)aK_0(|a|\rho)e^{a\xi} + (c-a)bK_0(b\rho)e^{a\xi} + \\ + c(\bar{b}-a)\lg|s-t|\}\sqrt{\frac{\tau(l-\tau)}{t(l-t)}}\,\frac{\mathrm{d}t}{\tau-t}$$

$$N(s,\tau) = \frac{1}{\pi\delta}\int_0^l \frac{\rho}{\xi+i\eta}\Big\{(b-c)|a|K_1(|a|\rho)e^{a\xi} + (c-a)bK_1(b\rho)e^{b\xi} + \\ + \frac{a-b}{\rho}\Big\}\sqrt{\frac{\tau(l-\tau)}{t(l-t)}}\,\frac{\mathrm{d}t}{\tau-t}$$

$$G(s) = \frac{1}{\pi\delta}\int_0^l \{(b-c)aK_0(|a|\rho)e^{a\xi} + (c-a)\bar{b}K_0(b\rho)e^{b\xi} + \\ + c(\bar{b}-a)\lg|s-t|\}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(l-t)}}$$

$$H(s) = \frac{1}{\pi\delta}\int_0^l \frac{\rho}{\xi+i\eta}\Big\{(b-c)|a|K_1(|a|\rho)e^{a\xi} + (c-a)bK_1(\bar{b}\rho)e^{b\chi} + \\ + \frac{a-b}{\rho}\Big\}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(l-t)}}.$$

Din această ecuație rezultă că funcția $F(s)$ depinde liniar în raport cu constantele Γ, $\bar{\Gamma}$. O dată determinată funcția $F(s)$, constantele Γ, $\bar{\Gamma}$ se determină din ultima relație (2).

În cazul

$$b \ll 1$$

dezvoltînd în serie funcțiile Bessel și funcțiile exponențiale, se obțin, în afara unui termen aditiv de ordinul b lg b, expresiile

$$(4) \qquad \begin{aligned} M(s,\ \tau) &= \frac{1}{\pi}\int_0^l \lg\frac{|s-t|}{\rho}\sqrt{\frac{\tau(l-\tau)}{t(l-t)}}\,\frac{\mathrm{d}t}{\tau-t} \\ N(s,\ \tau) &= \frac{1}{\pi}\int_0^l \frac{\xi}{\xi+i\eta}\sqrt{\frac{\tau(l-\tau)}{t(l-t)}}\,\frac{\mathrm{d}t}{\tau-t} \\ G(s) &= \frac{1}{\pi}\int_0^l \lg\frac{|s-t|}{\rho}\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(l-t)}} - \delta_1 \\ H(s) &= \frac{1}{\pi}\int_0^l \frac{\xi}{\xi+i\eta}\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(l-t)}}, \end{aligned}$$

unde

$$\delta_1 = \gamma + \frac{1}{\delta}\left\{(b-c)a\lg\frac{1}{2}|a| + (c-a)b\lg\frac{1}{2}b\right\}, \qquad \gamma = 0{,}577\ \ldots$$

7. *Rezistența la înaintarea profilului.* Cunoscînd din [9] expresia efortului dinamic unitar exercitat de fluid asupra profilului

$$\vec{T} = -p\vec{n} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial\vec{V}}{\partial n},$$

se obține pentru rezistența hidrodinamică expresia

$$(1) \quad R_x + iR_y = \oint\{\vec{T}\cdot\vec{i} + i\,\vec{T}\cdot\vec{j}\}\,\mathrm{d}s = \oint\left\{ip + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Omega\right\}\mathrm{d}z, \quad z = x + iy$$

unde

$$(2) \qquad \Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\Delta\psi = \mathrm{Re}\left\{R_H\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial\chi}{\partial x}\right\}.$$

În cazul considerat aici cîmpul electric este nul, iar tensorul tensiunii magnetice are componentele

$$T_{ij}^{(m)} = R_H\left\{\frac{1}{2}H^2\delta_{ij} - H_iH_j\right\}.$$

Rezistența corespunzătoare are expresia

$$R_x^{(m)} + iR_y^{(m)} = R_H\oint\frac{i}{2}H^2\mathrm{d}z + (H_x + iH_y)(\vec{H}\cdot\vec{n})\mathrm{d}s.$$

Neglijînd patratele perturbaţiilor, se obţine

$$R_x^{(m)} + iR_y^{(m)} = iR_H \oint (h_x + ih_y)\mathrm{d}\bar{z}. \tag{3}$$

În cazul profilului subţire, rezistenţa magnetohidrodinamică are expresia

$$\mathfrak{R}_x + i\mathfrak{R}_y = -\int_0^l \left[ip + \frac{1}{\mathrm{Re}}\ \Omega\right]\mathrm{e}^{i\theta(s)}\,\mathrm{d}s - iR_H \int_0^l [h_x + ih_y]\mathrm{e}^{-i\theta(s)}\mathrm{d}s. \tag{4}$$

Din relaţiile (12), § 2, (2) şi (3), § 4,

$$-\left[ip + \frac{1}{\mathrm{Re}}\ \Omega\right] = R_H[ih_x + h_y] + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[-i\frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{\partial\chi}{\partial x}\right] =$$

$$= -iR_H I(s)\mathrm{e}^{-i\theta(s)} - \frac{2i}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y} + i\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x}\right]$$

astfel încît prin (7), (10), § 5,

$$\mathfrak{R}_x + i\mathfrak{R}_y = -\frac{4\pi}{\mathrm{Re}}\int_0^l \overline{C(s)}\mathrm{d}s + 2i\frac{b-c}{\mathrm{Re}}\int_0^l I(s)\mathrm{d}s \tag{5}$$

rezistenţa reală fiind $\rho V_\infty^2 L(\mathfrak{R}_x + i\mathfrak{R}_y)$.

Pentru cazul curenţilor de suprafaţă nuli

$$R_x + iR_y = -\frac{4\pi}{\mathrm{Re}}\int_0^l \overline{C(s)}\mathrm{d}s = -4\pi\bar{\Gamma}/\mathrm{Re}. \tag{6}$$

8. *Mişcarea în jurul unui profil avînd forma unui arc de elipsă, pentru cazul $b \ll 1$.* Presupunem că mişcarea are loc în jurul unui arc de elipsă caracterizat de semiaxele

$$L, \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\,L$$

şi de unghiurile polare β, $\beta + l$. Incidenţa acestui arc o vom indica prin unghiul α. Astfel în planul adimensional, ecuaţiile arcului vor fi

$$x(t) + iy(t) = \left\{\cos(t+\beta) + i\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\sin(t+\beta)\right\}\mathrm{e}^{i\alpha}, \tag{1}$$

$$t \in [0, l], \quad 0 < l < 2\pi.$$

Pentru mărimile ξ, η, ρ se obţin expresiile

$$\xi + i\eta = 2i\sin\frac{s-t}{2}\left\{\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\cos\frac{1}{2}s_1 + i\sin\frac{1}{2}s_1\right\}\mathrm{e}^{i\alpha} \tag{2}$$

$$\rho = 2\left|\sin\frac{s-t}{2}\right|\{1-\varepsilon\cos s_1\}^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}$$

$$\frac{\xi}{\xi + i\eta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\cos s_1 - \varepsilon - i\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin s_1}{1-\varepsilon\cos s_1}\,\mathrm{e}^{-2i\alpha}$$

$$s_1 = s + t + 2\beta.$$

Presupunem excentricitatea mică şi considerăm în următoarele dezvoltări doar termenii scrişi

$$\lg\frac{|s-t|}{\rho}=\frac{1}{6}\left(\frac{s-t}{4}\right)^2+\frac{1}{180}\left(\frac{s-t}{4}\right)^4+\ldots+\lg\sqrt{1+\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{2}\cos s_1+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{8}(1+\cos 2s_1)+\ldots,\quad \frac{\xi}{\xi+i\eta}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\Big\{\mathrm{e}^{-is_1}+\frac{\varepsilon}{2}(\mathrm{e}^{-2is_1}-1)+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{4}(\mathrm{e}^{-3is_1}-\mathrm{e}^{-is_1})+\ldots\Big\}\mathrm{e}^{-2i\alpha}.$$

Înlocuind în (4), § 6, şi efectuînd substituţia $s,\ t,\ \tau\to\sigma,\ \theta,\ \vartheta$

$$s=\frac{l}{2}(1-\cos\sigma),\ \ldots \tag{3}$$

se obţine

$$M(\sigma,\vartheta)=M_0(\theta)+M_1(\vartheta)\cos\sigma+M_2(\vartheta)\cos 2\sigma+M_3(\vartheta)\cos 3\sigma+ \tag{4}$$

$$+\operatorname{Re}\left\{\frac{\varepsilon}{2}N_1(\vartheta)\mathrm{e}^{i\frac{l}{2}\cos\sigma}+\frac{\varepsilon^2}{8}N_2(\vartheta)\,\mathrm{e}^{il\cos\sigma}\right\}$$

$$N(\sigma,\vartheta)=-\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{\varepsilon^2}{4}\right)N_1(\vartheta)\mathrm{e}^{i\frac{l}{2}\cos\sigma}+\frac{\varepsilon}{2}N_2(\vartheta)\mathrm{e}^{il\cos\sigma}+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon^2}{4}N_3(\vartheta)\mathrm{e}^{i\frac{3l}{2}\cos\sigma}\right\}\cdot\mathrm{e}^{-2i\alpha}$$

$$G(\sigma)=\delta_1+\left(a_0+\frac{9}{4}a_1\right)+\left(\frac{1}{2}a_0+2a_1\right)\cos 2\sigma+\frac{1}{8}a_1\cos 4\sigma+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}J_0\left(\frac{l}{2}\right)\cos\left(\frac{l}{2}\cos\sigma-l-2\beta\right)+\frac{\varepsilon^2}{8}+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{8}J_0(l)\cos\,(l\,\cos\sigma-2l-4\beta)$$

$$H(\sigma)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{\varepsilon^2}{4}\right)J_0\left(\frac{l}{2}\right)\mathrm{e}^{i\left(\frac{l}{2}\cos\sigma-l-2\beta\right)}-\frac{\varepsilon}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon}{2}J_0(l)\mathrm{e}^{i(l\cos\sigma-2l-4\beta)}+\frac{\varepsilon^2}{4}J_0\left(\frac{3l}{2}\right)\mathrm{e}^{i\left(\frac{3l}{2}\cos\sigma-3l-6\beta\right)}\right\}\cdot\mathrm{e}^{-2i\alpha},$$

unde

$$N_j(\vartheta)=\frac{\sin\vartheta}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{i\frac{jl}{2}\cos\theta}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta-\cos\vartheta}\times\mathrm{e}^{-j(l+2\beta)i},\quad j=1,2,3$$

$$M_0(\vartheta)=\left(\frac{1}{2}a_0+2a_1\right)\sin 2\vartheta+\frac{1}{4}a_1\sin 4\vartheta$$

$$M_1(\vartheta) = -(2a_0 + 6a_1)\sin\vartheta - a_1 \sin 3\vartheta$$

$$M_2(\vartheta) = +\frac{3}{2}a_1 \sin 2\vartheta, \quad M_3(\vartheta) = -a_1 \sin\vartheta$$

$$a_0 = \frac{1}{6}\left(\frac{l}{4}\right)^2, \quad a_1 = \frac{1}{180}\left(\frac{l}{4}\right)^4 .$$

Pentru curenți de suprafață nuli, ecuația aproximativă este

$$\pi F(\sigma) = -\{1 + \Gamma G(\sigma) + \bar{\Gamma} H(\sigma)\} + \int_0^\pi M(\sigma, \vartheta) F'(\vartheta) d\vartheta + \tag{5}$$
$$+ \int_0^\pi N(\sigma, \vartheta)\overline{F'(\vartheta)} d\vartheta.$$

Nucleele acestei ecuații fiind degenerate, se obține soluția

$$\pi F(\sigma) = -\{1 + \Gamma G(\sigma) + \bar{\Gamma} H(\sigma)\} + \Gamma_0 + \Gamma_1 \cos\sigma + \Gamma_2 \cos 2\sigma + \tag{6}$$
$$+ \Gamma_3 \cos 3\sigma + \Gamma_4 e^{i\frac{l}{2}\cos\sigma} + \frac{\varepsilon}{4}\bar{\gamma}_1 e^{-i\frac{l}{2}\cos\sigma} + e\,\Gamma_5 e^{il\cos\sigma} -$$
$$-\frac{\varepsilon^2}{8}\gamma_3 e^{i\frac{3l}{2}\cos\sigma} e^{-2i\alpha} + \frac{\varepsilon^2}{16}\bar{\gamma}_2 e^{-il\cos\sigma}$$

constantele determinîndu-se din condițiile

$$\Gamma_j = \int_0^\pi M_j(\vartheta) F'(\vartheta) d\vartheta, \quad j = 0, 1, 2, 3 \tag{7}$$

$$\gamma_j = \int_0^\pi N_j(\vartheta)\overline{F'(\vartheta)} d\vartheta, \quad j = 1, 2, 3$$

$$\Gamma_4 = \frac{\varepsilon}{4}\int_0^\pi N_1(\vartheta) F'(\vartheta) d\vartheta - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right) e^{-2i\alpha}\gamma_1$$

$$\Gamma_5 = \frac{\varepsilon}{16}\int_0^\pi N_2(\vartheta) F'(\vartheta) d\vartheta - \frac{1}{2} e^{-2i\alpha}\gamma_2$$

$$-\Gamma \lg\frac{l}{4} = \int_0^\pi F(\sigma) d\sigma.$$

Înlocuind (6) în (2), § 6, rezultă

$$\pi\frac{l}{2} C(t) = \frac{1}{\sin\theta}\left\{\Gamma\left[1 - (a_0 + 4a_1)\cos 2\theta - \frac{1}{2}a_1 \cos 4\theta\right] + \right. \tag{8}$$
$$\left. + \Gamma_1 \cos\theta + 2\Gamma_2 \cos 2\theta + 3\Gamma_3 \cos 3\theta\right\} - \Gamma\, \mathrm{Re}\left\{\frac{i}{2} J_0\left(\frac{l}{2}\right) e^{-(l+2\beta)i} A\left(\frac{l}{2}, \theta\right) + \right.$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{8}J_0(l)\,e^{-2(l+2\beta)i}A(l,\theta)\Big\}+\frac{1}{2}\overline{\Gamma}\Big\{\Big(1-\frac{\varepsilon^2}{4}\Big)J_0\Big(\frac{l}{2}\Big)e^{-(l+2\beta)i}A\Big(\frac{l}{2},\theta\Big)+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}J_0(l)e^{-2(l+2\beta)i}A(l,\theta)+\frac{\varepsilon^2}{4}J_0\Big(\frac{3l}{2}\Big)\varepsilon^{-3(l+2\beta)i}A\Big(\frac{3l}{2},\theta\Big)\Big\}e^{-2i\alpha}+$$

$$+\Gamma_4A\Big(\frac{l}{2},\theta\Big)+\frac{\varepsilon}{4}\overline{\gamma}_1A\Big(-\frac{l}{2},\theta\Big)+\varepsilon\Gamma_5A(l,\theta)-\frac{\varepsilon^2}{8}\gamma_3A\Big(\frac{3l}{2},\theta\Big)+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{16}\overline{\gamma}_2A(-l,\theta),$$

unde

$$t=\frac{l}{2}(1-\cos\theta)$$

$$A(z,\theta)=\frac{1}{\sin\theta}\{J_0(z)\cos\theta+iJ_1(z)\cos 2\theta\}iz-$$

$$-2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\{J_{2n}(z)\sin 2n\theta+iJ_{2n+1}(z)\sin(2n+1)\theta\}iz.$$

Rezistența la înaintare are expresia

$$R_x-iR_y=-\frac{4\pi\Gamma}{\mathrm{Re}}\,. \tag{9}$$

Primită la redacție la 29 iunie 1967

Universitatea din București
Facultatea de matematică și mecanică
Str. Academiei nr. 14.

BIBLIOGRAFIE

1. H. P. Greenspan, G. F. Carrier, *The magnetohydrodynamic flow past a flat plate.* J. Fluid Mech., **6**, 77 (1959).
2. H. P. Greenspan, *Flat Plate in Magnetohydrodynamic Flow.* Phys. Fluids, **3**, 581 (1960).
3. H. Cabannes, *Magnétodynamique des fluides.* Paris, 1965.
4. L. Dragoș et N. Marcov, *L'écoulement des fluides visqueux, electroconducteurs, en présence d'une plaque plane.* J. de Mécanique.
5. Hirowo Yosinobu, *A liniarized Theory of Magnetohydrodynamic Flow past a Fixed Body in a Parallel Magnetic.* Field. J. Phys. Soc. Japan, **15**, 175 (1960).
6. L. Dragoș, *Introducere în magnetodinamica fluidelor.* Ed. Academiei, București (în curs de publicare).
7. Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения.* Москва, 1962.
8. G. N. Watson, *Theory of Bessel Functions.* Cambridge 1922.
9. W. Schmeidler, *Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik.* Leipzig, 1955.
10. C. Iacob, *Introduction Mathématique à la Mécanique des Fluides.* Bucarest-Paris, 1959.

MIŞCAREA FLUIDELOR VÎSCOASE ÎN JURUL UNOR PROFILE SUBŢIRI (II)

DE

N. MARCOV

Se consideră mişcarea plană permanentă a fluidelor vîscoase, incompresibile în jurul unor profile subţiri. Ecuaţiile neliniare ale problemei sînt liniarizate prin metoda lui Oseen. Problema este redusă la soluţionarea unei ecuaţii de tip Fredholm. În cazul profilului arc de cerc, pentru numere Reynolds mici, se dă o soluţie aproximativă a acestei ecuaţii integrale.

1. *Introducere.* Una din problemele importante ale mişcării fluidelor vîscoase este problema mişcării în jurul unei plăci plane. Această problemă a fost reluată recent de către Ko Tamada şi Tosio Miyagi [1], [2], [3], [4]. Astfel, în cadrul aproximaţiei lui Oseen, a fost studiată comportarea soluţiei ecuaţiei integrale corespunzătoare, în vecinătatea extremităţilor plăcii. Au fost obţinute expresiile analitice ale soluţiei pentru cazul numerelor Reynolds mici sau mari, aproximîndu-se corespunzător nucleul ecuaţiei integrale. Pentru numere Reynolds oarecari finite este dat procedeul calculului numeric al soluţiei.

În cele ce urmează este considerată mişcarea în jurul unor profile subţiri. Utilizînd aproximaţia lui Oseen, se reprezintă prin potenţiali cîmpul vitezelor de perturbaţie. Impunînd condiţia aderenţei fluidului, se obţine ecuaţia integrală (21). Nucleul avînd singularitate logaritmică, această ecuaţie se reduce la o ecuaţie de tip Fredholm de speţa a doua.

Drept aplicaţie, pentru numere Reynolds mici, este considerat cazul profilului arc de cerc.

2. *Ecuaţiile de mişcare.* Se consideră mişcarea permanentă a fluidelor vîscoase incompresibile în jurul unor profile subţiri. În variabilele adimensionale, într-un sistem cartezian drept, ecuaţiile de mişcare sînt

$$(1)\qquad (\vec{V}\ \text{grad})\,\vec{V} = -\,\text{grad}\ p + \frac{1}{\text{Re}}\,\Delta\vec{V},\quad \text{div}\ \vec{V} = 0,\quad \text{Re} = LV_\infty/\nu$$

mărimile reale avînd expresiile

$$Lx, \quad Ly, \quad V_\infty \vec{V}, \quad p_\infty + \rho V_\infty^2 p.$$

Presupunem că mişcarea este plană, la infinit viteza avînd direcţia axei Ox:

$$\vec{V} = (1+u)\vec{i} + v\vec{j}, \tag{2}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ fiind versorii axelor sistemului $Oxyz$, iar u, v, p fiind funcţii de x, y. Introducînd (2) în (1), în aproximaţia lui Oseen, se obţine sistemul liniar

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta u, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta v \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

Din aceste relaţii rezultă că presiunea dinamică p este funcţie armonică. Fie q conjugata armonică a funcţiei p

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x}. \tag{5}$$

Pentru a satisface ecuaţia de continuitate, introducem funcţia de curent ψ

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{6}$$

Introducînd (5), (6) în (3) rezultă

$$\Delta\psi = \mathrm{Re}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \mathrm{Re}\, q + \text{const. } (0). \tag{7}$$

Deoarece funcţia p se anulează la infinit, aceeaşi condiţie se poate impune şi funcţiei q. Cu această condiţie şi cu condiţia anulării la infinit a perturbaţiilor, constanta din relaţia de mai sus este nulă.

Fie funcţia de variabilă complexă

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}(\varphi_1 + i\varphi) = \int (p + iq)\,\mathrm{d}z, \quad z = x + iy$$

astfel încît

$$p = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad q = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \Delta\varphi = 0. \tag{8}$$

Din relaţiile (7) şi (8) se obţine reprezentarea, [5],

$$\psi = -\frac{1}{\mathrm{Re}}\varphi + \chi, \quad \Delta\varphi = 0, \quad \Delta\chi = \mathrm{Re}\frac{\partial \chi}{\partial x}. \tag{9}$$

Deoarece derivatele prime ale funcției de curent ψ se anulează la infinit, iar din relația (8) rezultă că și derivatele prime ale funcției φ se anulează la infinit, din (9) se obține

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)(\varphi, \chi) = 0 \quad \text{la infinit.} \tag{10}$$

Fluidul fiind vîscos, aderă la peretele profilului, astfel încît se impun condițiile

$$u = -1, \quad v = 0 \quad \text{pe profil.} \tag{11}$$

3. *Reprezentarea prin potențiali a cîmpului vitezelor de perturbație.* Trecem la coordonatele polare r, θ. Soluția fundamentală în origine a ecuației lui Oseen $\Delta\chi = 2a\, \chi_x$ $(a > 0)$ este funcția $K_0(ar) \exp(ar \cos\theta)$. Funcția $\Theta \exp(ar \cos\theta)$ dată de ecuațiile

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Theta}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} K_0(ar) - a\,\Theta = -\frac{a}{r}\sin\theta\, K_1(a\,r) - a\,\Theta \\ \frac{\partial\Theta}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial x} K_0(ar) + a K_0(ar) = \frac{a}{r}\cos\theta\, K_1(ar) + a K_0(ar) \end{aligned} \tag{12}$$

verifică ecuația lui Oseen, dar este neuniformă:

$$\Theta(ar, \theta)\, e^{ar\cos\theta} = \theta + \sin\theta \int_0^{ar} K_0(z)\, e^{z\cos\theta}\, dz. \tag{13}$$

Funcțiile K_0, K_1 sînt funcțiile Bessel de argument imaginar, speța a doua și de ordin zero respectiv unu, [6].

Presupunem că mișcarea are loc în jurul unui profil subțire caracterizat în planul xOy prin arcul neted

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (0, l), \tag{14}$$

t fiind coordonata curbilinie, iar lL fiind lungimea profilului în planul dimensional. Alegînd sensul de parcurs al profilului pentru t crescător, se poate considera, [7], vecinătatea stîngă și vecinătatea dreaptă a profilului.

Fiind date două puncte ale arcului, însemnăm

$$\xi + i\eta = x(s) - x(t) + i\,\{y(s) - y(t)\} = \rho\, e^{i\omega} \operatorname{sgn}(s - t), \tag{15}$$

ρ fiind distanța dintre aceste puncte. Pentru un punct din plan și pentru un punct al profilului punem

$$\tilde{x} + i\tilde{y} = x - x(t) + i\,\{y - y(t)\} = \tilde{r} e^{i\tilde{\theta}}. \tag{16}$$

Funcția $\tilde{\theta}$ ca funcție de x, y trebuie considerată funcție continuă și pentru aceasta trebuie să se introducă corespunzător o tăietură în planul (x, y).

Ținînd seama de ecuațiile (9) și condițiile (10), considerăm următoarele reprezentări

$$\varphi = \int_0^l \{A_1(t)\,\widetilde{\theta} - B_1(t)\lg\widetilde{r}\}\,\mathrm{d}t \tag{17}$$

$$\chi = \int_0^l a\,\{A_2(t)\,\Theta(a\,\widetilde{r},\,\widetilde{\theta}) + B_2(t)\,K_0(a\,\widetilde{r})\}\,\mathrm{e}^{a\widetilde{x}}\,\mathrm{d}t, \quad a = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}.$$

Prin derivare și ținînd seamă de relațiile (12), rezultă

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \int_0^l \overline{C_1(t)}\,\frac{\mathrm{e}^{-i\widetilde{\theta}}}{\widetilde{r}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}\int_0^l \{-2\pi i\,\overline{C_1(t)}\,\mathrm{e}^{-i\theta(t)}\}\,\frac{\mathrm{d}\mathfrak{z}}{\mathfrak{z} - z} \tag{18}$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial y} + i\,\frac{\partial\chi}{\partial x} = \int_0^l a\,\{\overline{C_2(t)}\,\mathrm{e}^{-i\widetilde{\theta}}\,K_1(a\,\widetilde{r}) + C_2(t)\,K_0)\,(a\,\widetilde{r})\}\,\mathrm{e}^{a\widetilde{x}}\,\mathrm{d}t,$$

unde

$$C_1 = A_1 + i\,B_1, \quad C_2 = A_2 + i\,B_2\,.$$

Valorile limită la stînga (dreapta) profilului ale acestor expresii sînt

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)(s) = \mp\,\pi i\,\overline{C_1(s)}\,\mathrm{e}^{-i\theta(s)} + \int_0^l \overline{C_1(t)}\,\frac{\mathrm{d}t}{\xi + i\eta} \tag{19}$$

$$\left(\frac{\partial\chi}{\partial y} + i\,\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)(s) = \mp\,\pi i\,\overline{C_2(s)}\,\mathrm{e}^{-i\theta(s)} +$$

$$+ \int_0^l a\left\{\overline{C_2(t)}\,\frac{\rho}{\xi + i\eta}\,K_1(a\rho) + C_2(t)\,K_0(a\rho)\right\}\mathrm{e}^{a\xi}\,\mathrm{d}t$$

integralele fiind considerate în sensul valorii principale, iar $\theta(s)$ fiind unghiul tangentei, la profil, cu axa Ox.

Din relațiile (6), (9), (18) se obține reprezentarea cîmpului vitezelor de perturbație, [1],

$$u - iv = -\,\frac{1}{\mathrm{Re}}\int_0^l \overline{C_1(t)}\,\frac{\mathrm{e}^{-i\widetilde{\theta}}}{\widetilde{r}}\,\mathrm{d}t + \int_0^l a\,\{\overline{C_2(t)}\,\mathrm{e}^{-i\widetilde{\theta}}\,K_1(a\,\widetilde{r}) + \tag{20}$$

$$+ C_2(t)\,K_0(a\widetilde{r})\}\,\mathrm{e}^{a\widetilde{x}}\,\mathrm{d}t.$$

Considerăm saltul acestei expresii, pe profil. Deoarece componentele u, v sînt continue la trecerea peste profil, rezultă

$$[u - iv] = 2\pi i\,\left\{\frac{1}{\mathrm{Re}}\,\overline{C_1(s)} - \overline{C_2(s)}\right\}\mathrm{e}^{-i\theta(s)} = 0 \tag{20'}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\,C_1 = C_2 \equiv \frac{2}{\mathrm{Re}}\,C.$$

Cu aceste expresii pentru funcțiile C_1, C_2, funcția de curent ψ dată de relațiile (9) și (17) este uniformă.

4. *Ecuaţia integrală ataşată problemei la limită.* Impunem vitezei (20) condiţia la limită (11). Prin relaţiile (19) rezultă

$$\int_0^l \left[\left\{\overline{C(t)}\frac{\rho}{\xi+i\eta}K_1(a,\rho)+C(t)K_0(a\rho)\right\}e^{a\xi}-\frac{\overline{C(t)}}{a(\xi+i\eta)}\right]dt=-1, \tag{21}$$

funcţiile ξ, η, ρ fiind date în (15).

Nucleul acestei ecuaţii avînd singularitate logaritmică, însemnăm

$$F(s)=-\frac{1}{\pi}\int_0^l C(t)\lg|s-t|\,dt.$$

Prin inversare, [8], rezultă

$$C(t)=\frac{1}{\pi\sqrt{t(l-t)}}\int_0^l F'(\tau)\sqrt{\tau(l-\tau)}\frac{d\tau}{t-\tau}+\frac{\Gamma}{\pi\sqrt{t(l-t)}}, \tag{22}$$

unde

$$\Gamma=\int_0^l C(t)\,dt=-\frac{1}{\lg\frac{l}{4}}\int_0^l\frac{F(s)\,ds}{\sqrt{s(l-s)}}\cdot$$

Înlocuind în ecuaţia (20),

$$\begin{aligned}\pi F(s)-\int_0^l M(s,\tau)F'(\tau)\,d\tau-\int_0^l N(s,\tau)\overline{F'(\tau)}\,d\tau=\\=-\{1+\Gamma G(s)+\bar\Gamma H(s)\}\end{aligned} \tag{23}$$

unde

$$M(s,\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^l\{K_0(a\rho)e^{a\xi}+\lg|s-t|\}\sqrt{\frac{\tau(l-\tau)}{t(l-t)}}\frac{dt}{\tau-t}$$

$$N(s,\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^l\frac{1}{\xi+i\eta}\left\{\rho K_1(a\rho)e^{a\xi}-\frac{1}{a}\right\}\sqrt{\frac{\tau(l-\tau)}{t(l-t)}}\frac{dt}{\tau-t}$$

$$G(s)=\frac{1}{\pi}\int_0^l\{K_0(a\rho)e^{a\xi}+\lg|s-t|\}\frac{dt}{\sqrt{t(l-t)}}$$

$$H(s)=\frac{1}{\pi}\int_0^l\frac{1}{\xi+i\eta}\left\{\rho K_1(a\rho)e^{a\xi}-\frac{1}{a}\right\}\frac{dt}{\sqrt{t(l-t)}}\cdot$$

În cazul numerelor Reynolds mici, dezvoltînd în serie funcţiile Bessel şi funcţiile exponenţiale, se obţin, în afara unui termen aditiv de ordinul a lg a, expresiile

$$M(s,\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^l \lg\frac{|s-t|}{\rho}\sqrt{\frac{\tau(l-\tau)}{t(l-t)}}\,\frac{\mathrm{d}t}{\tau-t}\tag{24}$$

$$N(s,\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^l \frac{\xi}{\xi+i\eta}\sqrt{\frac{\tau(l-\tau)}{t(l-t)}}\,\frac{\mathrm{d}t}{\tau-t}$$

$$G(s)=\frac{1}{\pi}\int_0^l \lg\frac{|s-t|}{\rho}\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(l-t)}}-\left\{\gamma+\lg\frac{1}{2}a\right\}$$

$$H(s)=\frac{1}{\pi}\int_0^l \frac{\xi}{\xi+i\eta}\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(l-t)}},\quad \gamma=0{,}577\ldots$$

5. *Rezistența la înaintarea profilului*. Efortul dinamic unitar $\vec{T}$ exercitat de fluidul vîscos incompresibil asupra unui obstacol, are expresia, [9],

$$\vec{T}=-p\vec{n}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\,\frac{\partial\vec{V}}{\partial n},$$

$\vec{n}$ fiind normala exterioară la conturul obstacolului. Proiectînd pe axe

$$\vec{T}\cdot\vec{i}=-p\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\,\frac{\partial u}{\partial n},\quad \vec{T}\cdot\vec{j}=p\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\,\frac{\partial v}{\partial n}.$$

Din ecuația de continuitate (4) rezultă

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\Omega\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s},\quad \frac{\partial v}{\partial n}=\Omega\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}n}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s},$$

unde prin definiție și prin (7), (8)

$$\Omega=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=-\Delta\psi=\mathrm{Re}\,v-\frac{\partial\varphi}{\partial x}.\tag{25}$$

Deoarece viteza are valoare constantă pe profilul de aripă, rezistența la înaintare are expresia

$$R_x+i\,R_y=\oint\{\vec{T}\cdot\vec{i}+i\,\vec{T}\cdot\vec{j}\}\,\mathrm{d}s=\oint\left(ip+\frac{1}{\mathrm{Re}}\,\Omega\right)\mathrm{d}z,\quad z=x+iy.\tag{26}$$

În cazul profilului subțire

$$R_x+i\,R_y=-\int_0^l\left\{i\,[p]+\frac{1}{\mathrm{Re}}\,[\Omega]\right\}e^{i\theta(s)}\,\mathrm{d}s.$$

Saltul presiunii p se obține din relația (8) și relațiile (19), (20′), iar saltul vîrtejului Ω analog din (25), astfel încît

$$R_x+i\,R_y=-\frac{i}{\mathrm{Re}}\int_0^l\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}+i\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]e^{i\theta(s)}\,\mathrm{d}s=-\frac{4\pi}{\mathrm{Re}}\int_0^l\overline{C(s)}\,\mathrm{d}s.\tag{27}$$

Rezistența reală are expresia $\rho\,V_\infty^2\,L\,(R_x+iR_y)$.

6. *Mişcarea în jurul unui profil de aripă în forma unui arc de cerc pentru numere Reynolds mici.* Presupunem că mişcarea are loc în jurul unui profil de aripă în forma unui arc de cerc. Arcul de cerc este caracterizat, în planul dimensional, de raza L şi de deschiderea la centru l. Incidenţa profilului o vom caracteriza prin unghiul α. Astfel ecuaţiile profilului vor fi

$$x(t) + iy(t) = \{\cos t + i \sin t\} \, e^{i\alpha}, \quad t \in [0, l], \quad 0 < l < 2\pi. \tag{28}$$

Pentru mărimile ξ, η, ρ se obţin expresiile

$$\xi + i\eta = 2i \sin \frac{s-t}{2} \, e^{\frac{s+t}{2} i} \, e^{i\alpha}, \quad \rho = 2 \left| \sin \frac{s-t}{2} \right| \tag{29}$$

$$\frac{\xi}{\xi + i\eta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-(s+t+2\alpha)i}.$$

Pentru numere Reynolds mici vom rezolva ecuaţia (23) cu nucleele (24):

$$\pi F(s) = -\{1 + \Gamma G(s) + \bar{\Gamma} H(s)\} + \tag{30}$$

$$+ \int_0^l M(s, \tau) F'(\tau) \, d\tau \int_0^l N(s, \tau) \overline{F'(s)} \, d\tau,$$

unde

$$M(s, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^l \lg \frac{s-t}{2 \sin \frac{s-t}{2}} \sqrt{\frac{\tau(l-\tau)}{t(l-t)}} \frac{dt}{\tau - t}$$

$$N(s, \tau) = -\frac{1}{2} N(\tau) \, e^{-\left(s - \frac{l}{2}\right) i},$$

$$N(\tau) = e^{-(l+2\alpha)i} \frac{1}{\pi} \int_0^l e^{-\left(t - \frac{l}{2}\right) i} \sqrt{\frac{\tau(l-\tau)}{t(l-t)}} \frac{dt}{\tau - t}$$

$$G(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^l \lg \frac{s-t}{2 \sin \frac{s-t}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t(l-t)}} - \left\{\gamma + \lg \frac{1}{2} a\right\}$$

$$H(s) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} J_0\left(\frac{l}{2}\right) e^{-\left(s + \frac{l}{2} + 2\alpha\right) i}.$$

Aproximăm nucleul şi termenul liber al acestei ecuaţii, reţinînd primii doi termeni ai dezvoltării

$$\lg \frac{x}{\sin x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} B_{2n} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!\,2n} = \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{180} x^4 + \ldots \qquad x \in [0, \pi)$$

în care B_{2n} sînt numerele lui Bernoulli.

Trecînd de la variabilele s, t, τ la variabilele σ, θ, ϑ prin relațiile

$$s = \frac{l}{2}(1 - \cos \sigma), \ldots \tag{31}$$

se obține următoarea ecuație

$$\pi F(\sigma) = -\{1 + \Gamma G(\sigma) + \bar{\Gamma} H(\sigma)\} + \tag{32}$$

$$+ \int_0^\pi M(\sigma, \vartheta) F'(\vartheta)\, d\vartheta + \int_0^\pi N(\sigma, \vartheta) \overline{F'(\vartheta)}\, d\vartheta,$$

unde

$$M(\sigma, \vartheta) = M_0(\vartheta) + M_1(\vartheta)\cos\sigma + M_2(\vartheta)\cos 2\sigma + M_3(\vartheta)\cos 3\sigma$$

$$M_0(\vartheta) = \left(\frac{1}{2} a_0 + 2a_1\right)\sin 2\vartheta + \frac{1}{4} a_1 \sin 4\vartheta$$

$$M_1(\vartheta) = -(2a_0 + 6a_1)\sin\vartheta - a_1 \sin 3\vartheta$$

$$M_2(\vartheta) = \frac{3}{2} a_1 \sin 2\vartheta, \quad M_2(\vartheta) = -a_1 \sin\vartheta$$

$$N(\sigma, \vartheta) = -\frac{1}{2} N(\vartheta) e^{i \frac{l}{2} \cos\sigma}, \quad N(\vartheta) = e^{-(l+2\alpha)i} \frac{\sin\vartheta}{\pi} \int_0^\pi \frac{e^{i \frac{l}{2} \cos\theta}\, d\theta}{\cos\theta - \cos\vartheta}$$

$$G(\sigma) = -\left\{\gamma + \lg \frac{1}{2} a\right\} + \left(a_0 + \frac{9}{4} a_1\right) + \left(\frac{1}{2} a_0 + 2a_1\right)\cos 2\sigma + \frac{1}{8} a_1 \cos 4\sigma$$

$$H(\sigma) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} J_0\left(\frac{l}{2}\right) e^{-(l+2\alpha)i}\, e^{i \frac{l}{2} \cos\sigma}$$

$$a_0 = \frac{1}{6}\left(\frac{l}{4}\right)^2, \quad a_1 = \frac{1}{180}\left(\frac{l}{4}\right)^4.$$

Nucleele acestei ecuații fiind degenerate, soluția este de forma

$$\pi F(\sigma) = -\{1 + \Gamma G(\sigma) + \bar{\Gamma} H(\sigma)\} + \Gamma_0 + \Gamma_1 \cos\sigma + \tag{33}$$

$$+ \Gamma_2 \cos 2\sigma + \Gamma_3 \cos 3\sigma + \Gamma_4 e^{i \frac{l}{2} \cos\sigma}.$$

Constantele Γ, Γ_j, $j = 0, 1, 2, 3, 4$, sînt date de sistemul

$$\Gamma_j = \int_0^\pi M_j(\vartheta) F'(\vartheta)\, d\vartheta, \quad j = 0, 1, 2, 3; \quad \Gamma_4 = -\frac{1}{2}\int_0^\pi N(\vartheta) \overline{F'(\vartheta)}\, d\theta \tag{34}$$

căruia i se alătură ultima relație (22)

$$\Gamma \cdot \lg \frac{4}{l} = \int_0^\pi F(\sigma)\, d\sigma.$$

Înlocuind (33) în (22) rezultă

$$\pi \frac{l}{2} C(t) = \frac{1}{\sin\theta} C_1(\theta) + C_2(\theta), \quad t = \frac{l}{2}(1 - \cos\theta), \quad \theta \in (0, \pi), \tag{35}$$

unde

$$C_1(\theta) = \Gamma + (\Gamma_1 + J_0 \Gamma_5)\cos\theta + \{-(a_0 + 4a_1)\Gamma + 2\Gamma_2 +$$
$$+ iJ_1J_5\}\cos 2\theta + 3\Gamma_3 \cos 3\theta - \frac{1}{2} a_1 \Gamma \cos 4\theta$$

$$C_2(\theta) = -2\Gamma_5 \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \{J_{2n} \sin 2n\theta + i J_{2n+1} \sin(2n+1)\theta\}$$

$$J_n = J_n\left(\frac{l}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad \Gamma_5 = i \frac{l}{2}\left(\Gamma_4 + \frac{1}{2} J_0 \, \mathrm{e}^{-(l+2\alpha)i}\right).$$

Rezistența la înaintare are expresia

$$R_x - i R_y = -\frac{4\pi\Gamma}{\mathrm{Re}}, \tag{36}$$

Primită la redacție la 29 iunie 1967

Universitatea din București
Facultatea de matematică și mecanică,
Str. Academiei nr. 14.

BIBLIOGRAFIE

1. Ko Tamada, Tosio Miyagi, *Laminar Viscous Flow past a Flat Plate set normal to the Stream, with Special Reference to High Reynolds Numbers.* J. Phys. Soc. Japan, **17**, 373 (1962).
2. Tosio Miyagi, *Oseen Flow past a Flat Plate Inclined to the Uniform Stream.* J. Phys. Soc. Japan, **19**, 1063 (1964).
3. Ko Tamada, Tosio Miyagi, *On the Viscous Flow past a Tangential Flat Plate.* J. Phys. Soc. Japan, **20**, 454 (1965).
4. Ko Tamada, Tosio Miyagi, *Oseen Flow Past a Finite Flat Plate.* Phys. Fluids, **9**, 1976 (1966).
5. L. M. Milne-Thomson, *Theoretical Hydrodynamics.* London, 1938.
6. G. N. Watson, *Theory of Bessel Functions.* Cambridge, 1922.
7. Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные Интегральные Уравнения.* Москва, 1962.
8. W. Schmeidler, *Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik.* Leipzig, 1955.
9. C. Iacob, *Introduction Mathématique à la Mécanique des Fluides.* Bucarest-Paris, 1959.

[illegible]

[illegible] (21) [illegible] (22) rezultă

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

Primită în redacție la [illegible]

[illegible]
Facultatea de matematică și [illegible]
[illegible]

BIBLIOGRAFIE

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

CLASIFICAREA GRUPURILOR LUI LIE REALE NEINTEGRABILE CU CINCI PARAMETRI

DE

I. MATEI

În această lucrare se dau forme canonice pentru grupurile lui Lie reale neintegrabile cu cinci parametri. Se arată că există şase structuri distincte de astfel de grupuri, două dintre acestea fiind cu vector de structură diferit de zero, iar celelalte patru cu vector de structură nul.

Ecuaţiile de structură ale unui grup G_r sînt de forma

$$(X_h X_k) = c^s_{hk} X_s \tag{1}$$

în care constantele de structură c^s_{hk} satisfac identităţile lui Lie:

$$L^m_{hkl} \equiv c^s_{hk}c^m_{sl} + c^s_{kl}c^m_{sh} + c^s_{lh}c^m_{sk} = 0 \tag{2}$$

Se ştie [1], [2] că putem asocia acestui grup, tensorii

$$c_h = c^\alpha_{\alpha h} \text{ (vectorul de structură)} \tag{3}$$

$$c_{hk} = c^\alpha_{h\beta}c^\beta_{k\alpha} \text{ (tensorul pătratic de structură)} \tag{4}$$

$$c_{hkl} = c^\alpha_{h\beta}c^\beta_{k\gamma}c^\gamma_{l\alpha} \text{ (tensorul cubic de structură)} \tag{5}$$

şi că au loc egalităţile

$$c_\alpha c^\alpha_{hk} = 0 \tag{6}$$

$$c_{h\alpha}c^\alpha_{kl} + c_{k\alpha}c^\alpha_{hl} = 0 \tag{7}$$

$$c_{k\alpha}c^\alpha_{lh} = c_{klh} - c_{khl}\,. \tag{8}$$

Considerînd un grup G_5, vom distinge două cazuri, după cum vectorul de structură este diferit de zero sau nu.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 2, P. 223-235, BUCUREŞTI, 1968

1. GRUPURI G_5 REALE NEINTEGRABILE CU VECTOR DE STRUCTURĂ DIFERIT DE ZERO

Vectorul de structură fiind diferit de zero, poate fi adus la forma canonică

$$c_h = \delta^5_h, \qquad (h = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{9}$$

şi formulele (6) arată că avem

$$c^5_{hk} = 0, \qquad (h, k = 1, 2, 3, 4, 5). \tag{10}$$

Rezultă că grupul $G_5\,(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ admite subgrupul invariant $G_4\,(X_1, X_2, X_3, X_4)$. Pentru ca grupul G_5 să fie neintegrabil, trebuie ca subgrupul invariant $G_4\,(X_1, X_2, X_3, X_4)$ să fie neintegrabil. Se ştie însă că în real există numai două structuri de grup G_4 neintegrabil [2], anume

$$\begin{gathered}(X_1X_2) = \varepsilon X_3\,,\ (X_2X_3) = X_1\,,\ (X_3X_1) = X_2 \qquad (\varepsilon = \pm 1)\\ (X_1X_4) = (X_2X_4) = (X_3X_4) = 0,\end{gathered} \tag{11}$$

prin urmare avem de determinat grupurile G_5 avînd grupul G_4 cu structura (11) ca subgrup invariant.

Dacă facem schimbarea de operatori

$$\overline{X}_i = X_i\,,\ \overline{X}_5 = X_5 + \varepsilon\, c^3_{25}X_1 + c^1_{35}X_2 - c^1_{25}X_3\,, \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{12}$$

care păstrează ecuaţiile (11) şi forma canonică (9) a vectorului de structură, ne reducem la a avea în plus faţă de (9) şi (10),

$$c^1_{25} = c^3_{25} = c^1_{35} = 0. \tag{13}$$

Ecuaţiile de structură ale grupurilor G_5 căutate sînt date de (11) şi

$$\begin{aligned}(X_1X_5) &= c^1_{15}X_1 + c^2_{15}X_2 + c^3_{15}X_3 + c^4_{15}X_4\\ (X_2X_5) &= c^2_{25}X_2 + c^4_{25}X_4\\ (X_3X_5) &= c^2_{35}X_2 + c^3_{35}X_3 + c^4_{35}X_4\\ (X_4X_5) &= c^1_{45}X_1 + c^2_{45}X_2 + c^3_{45}X_3 + c^4_{45}X_4\end{aligned} \tag{14}$$

în care, ţinînd seama de (9), avem

$$c^1_{15} + c^2_{25} + c^3_{35} + c^4_{45} = 1. \tag{15}$$

Scriind identităţile lui Jacobi $(X_1\,X_2\,X_5) = 0$, $(X_2\,X_3\,X_5) = 0$, $(X_3\,X_1\,X_5) = 0$, $(X_1\,X_4\,X_5) = 0$, $(X_2\,X_4\,X_5) = 0$, se determină cu uşurinţă toate constantele de structură din (14). Obţinem astfel grupurile G_5 neintegrabile, avînd ecuaţiile de structură:

$$\begin{gathered}(X_1X_2) = \varepsilon X_3,\ (X_2X_3) = X_1,\ (X_3X_1) = X_2 \qquad (\varepsilon = \pm 1)\\ (X_1X_4) = (X_2X_4) = (X_3X_4) = (X_1X_5) = (X_2X_5) = (X_3X_5) = 0\\ (X_4X_5) = X_4\,.\end{gathered} \tag{I}$$

Putem enunţa

TEOREMA 1. *Grupurile lui Lie G_5 reale neintegrabile cu vector de structură diferit de zero pot fi aduse la a avea ecuațiile de structură (I).*

2. GRPURI G_5 REALE NEINTEGRABILE CU VECTOR DE STRUCTURĂ NUL

În acest caz, reducînd tensorul pătratic c_{hk} la forma canonică:

$$c_{hk} = \varepsilon_h \, \delta^h_k, \tag{16}$$

ecuațiile (7), (8) devin

$$\varepsilon_h \, c^h_{kl} + \varepsilon_k \, c^k_{hl} = 0 \tag{17}$$

$$\varepsilon_k c^k_{lh} = c_{klh} - c_{khl} \tag{18}$$

și avem de considerat mai multe posibilități în funcție de rangul tensorului pătratic.

2.1. TENSORUL c_{hk} DE RANG $\rho = 5$

Avem deci

$$\varepsilon_1 \, \varepsilon_2 \, \varepsilon_3 \, \varepsilon_4 \, \varepsilon_5 \neq 0. \tag{19}$$

Vom arăta că acest caz este imposibil.

Mai întîi, din (17) pentru $k = h$, rezultă

$$c^h_{hl} = 0 \quad (h = \text{indice fix}), \tag{20}$$

adică toate constantele de structură cu doi indici egali sînt nule. De asemenea, ecuațiile (17) pentru $l \neq m$ se scriu

$$\varepsilon_h \, c^h_{kl} + \varepsilon_k \, c^k_{hl} = 0, \quad \varepsilon_h \, c^h_{km} + \varepsilon_k \, c^k_{hm} = 0 \tag{21}$$

și deoarece ε_h, ε_k nu sînt nule, rezultă că avem

$$c^h_{kl} \, c^k_{hm} - c^h_{km} \, c^k_{hl} = 0. \tag{22}$$

Ținînd seama de (20) și (22), ecuațiile (16) cu $h \neq k$ se scriu

$$\begin{aligned}
c_{12} &\equiv 2(c^3_{14}c^4_{23} + c^4_{15}c^5_{24} + c^5_{13}c^3_{25}) = 0\\
c_{13} &\equiv 2(c^2_{14}c^4_{32} + c^4_{15}c^5_{34} + c^5_{12}c^2_{35}) = 0\\
c_{14} &\equiv 2(c^2_{13}c^3_{42} + c^3_{15}c^5_{43} + c^5_{12}c^2_{45}) = 0\\
c_{15} &\equiv 2(c^2_{13}c^3_{52} + c^3_{14}c^4_{53} + c^4_{12}c^2_{54}) = 0\\
c_{23} &\equiv 2(c^1_{24}c^4_{31} + c^4_{25}c^5_{34} + c^5_{21}c^1_{35}) = 0\\
c_{24} &\equiv 2(c^1_{23}c^3_{41} + c^3_{25}c^5_{43} + c^5_{21}c^1_{45}) = 0\\
c_{25} &\equiv 2(c^1_{23}c^3_{51} + c^3_{24}c^4_{53} + c^4_{21}c^1_{54}) = 0\\
c_{34} &\equiv 2(c^1_{32}c^2_{41} + c^2_{35}c^5_{42} + c^5_{31}c^1_{45}) = 0\\
c_{35} &\equiv 2(c^1_{32}c^2_{51} + c^2_{34}c^4_{52} + c^4_{31}c^1_{54}) = 0\\
c_{45} &\equiv 2(c^1_{42}c^2_{51} + c^2_{43}c^3_{52} + c^3_{41}c^1_{53}) = 0.
\end{aligned} \tag{23}$$

În ceea ce priveşte identităţile (2) ale lui Lie, ele sînt identic satisfăcute dacă m este egal cu unul din indicii h, k, l, iar dacă m este diferit de cei trei indici, avem următoarele ecuaţii distincte :

$$\begin{aligned} L^2_{345} &\equiv c^1_{34}c^2_{15} + c^1_{45}c^2_{13} + c^1_{53}c^2_{14} = 0 \\ L^3_{451} &\equiv c^2_{45}c^3_{21} + c^2_{51}c^3_{24} + c^2_{14}c^3_{25} = 0 \\ L^4_{512} &\equiv c^3_{51}c^4_{32} + c^3_{12}c^4_{35} + c^3_{25}c^4_{31} = 0 \\ L^5_{123} &\equiv c^4_{12}c^5_{43} + c^4_{23}c^5_{41} + c^4_{31}c^5_{42} = 0 \\ L^1_{234} &\equiv c^5_{23}c^1_{54} + c^5_{34}c^1_{52} + c^5_{42}c^1_{53} = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Aceste ecuaţii se mai pot scrie ţinînd seama de (17), şi sub forma

$$\begin{aligned} L^2_{345} &\equiv -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}(c^1_{34}c^1_{25} + c^1_{45}c^1_{23} + c^1_{53}c^1_{24}) = 0 \\ L^3_{451} &\equiv -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}(c^2_{45}c^2_{31} + c^2_{51}c^2_{34} + c^2_{14}c^2_{35}) = 0 \\ L^4_{512} &\equiv -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_4}(c^3_{51}c^3_{42} + c^3_{12}c^3_{45} + c^3_{25}c^3_{41}) = 0 \\ L^5_{123} &\equiv -\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_5}(c^4_{12}c^4_{53} + c^4_{23}c^4_{51} + c^4_{31}c^4_{52}) = 0 \\ L^1_{234} &\equiv -\frac{\varepsilon_5}{\varepsilon_1}(c^5_{23}c^5_{14} + c^5_{34}c^5_{12} + c^5_{42}c^5_{13}) = 0 \cdot \end{aligned} \tag{25}$$

Deoarece constantele de structură cu indici distincţi nu pot fi şi ele toate nule, căci aceasta ar însemna c_{hk} de rang $\rho = 0$, putem presupune $c^1_{23} \neq 0$ şi ecuaţiile (17) arată că c^2_{13}, c^3_{12} sînt de asemenea, diferite de zero. Rezultă că putem face schimbarea de operatori

$$\begin{aligned} \overline{X}_1 &= c^1_{23}X_1 + c^4_{23}X_4 + c^5_{23}X_5, \quad \overline{X}_4 = X_4 \\ \overline{X}_2 &= c^2_{31}X_2 + c^4_{31}X_4 + c^5_{31}X_5, \quad \overline{X}_5 = X_5 \\ \overline{X}_3 &= c^3_{12}X_3 + c^4_{12}X_4 + c^5_{12}X_5. \end{aligned} \tag{26}$$

Vom arăta că în urma acestei transformări, ecuaţiile de structură ale grupului G_5 capătă o formă simplă, incompatibilă cu ipoteza că rangul tensorului pătratic este $\rho = 5$. Avem

$$\begin{aligned} (\overline{X}_1\overline{X}_2) = {} & c^1_{23}c^2_{31}\overline{X}_3 + (c^4_{23}c^2_{31}c^1_{42} + c^5_{23}c^2_{31}c^1_{52} + c^4_{23}c^5_{31}c^1_{45} + c^5_{23}c^4_{31}c^1_{54})\, X_1 + \\ & + (c^1_{23}c^4_{31}c^2_{14} + c^1_{23}c^5_{31}c^2_{15} + c^4_{23}c^5_{31}c^2_{45} + c^5_{23}c^4_{31}c^2_{54})\, X_2 + \\ & + (c^1_{23}c^4_{31}c^3_{14} + c^1_{23}c^5_{31}c^3_{15} + c^4_{23}c^2_{31}c^3_{42} + c^5_{23}c^2_{31}c^3_{52} + c^4_{23}c^5_{31}c^3_{45} + c^5_{23}c^4_{31}c^3_{54})\, X_3 + \\ & + (c^1_{23}c^5_{31}c^4_{15} + c^5_{23}c^2_{31}c^4_{52})\, X_4 + (c^1_{23}c^4_{31}c^5_{14} + c^4_{23}c^2_{31}c^5_{42})\, X_5 . \end{aligned} \tag{27}$$

Să arătăm mai întîi că coeficienții operatorilor X_1, X_2 în această ecuație sînt nuli. Într-adevăr, pentru coeficientul operatorului X_1, dacă notăm acest coeficient cu M, avem

$$M = c^4_{23}\,(c^2_{31}c^1_{42} + c^5_{31}c^1_{45}) + c^5_{23}\,(c^2_{31}c^1_{52} + c^4_{31}c^1_{54})\,.$$

Ținînd seama de (22) și (23) avem

$$\begin{aligned} M &= c^4_{23}\,(c^1_{32}c^2_{41} + c^5_{31}c^1_{45}) + c^5_{23}\,(c^1_{32}c^2_{51} + c^4_{31}c^1_{54}) = \\ &- c^4_{23}c^2_{35}c^5_{42} - c^5_{23}c^2_{34}c^4_{52} = - c^4_{23}c^5_{32}c^2_{45} - c^5_{23}c^4_{32}c^2_{54} = 0. \end{aligned}$$

În mod analog coeficientul N al operatorului X_2 este nul. În ceea ce privește coeficientul P al operatorului X_3 în (27), avem

$$P = c^4_{31}\,(c^1_{23}c^3_{14} + c^5_{23}c^3_{54}) + c^5_{31}\,(c^1_{23}c^3_{15} + c^4_{23}c^3_{45}) + c^2_{31}\,(c^4_{23}c^3_{42} + c^5_{23}c^3_{52})$$

sau, ținînd seama de (23),

$$\begin{aligned} P &= c^4_{31}\,(-c^1_{23}c^3_{41} - c^3_{25}c^5_{43}) + c^5_{31}\,(-c^1_{23}c^3_{51} - c^3_{24}c^4_{53}) + c^2_{31}\,(c^4_{23}c^3_{42} + c^5_{23}c^3_{52}) = \\ &= c^4_{31}c^5_{21}c^1_{45} + c^5_{31}c^4_{21}c^1_{54} + c^2_{31}\,(c^4_{23}c^3_{42} + c^5_{23}c^3_{52}) \end{aligned}$$

Avem însă, ținînd seama de (17) și (25),

$$\begin{aligned} &c^4_{31}c^5_{21}c^1_{45} + c^5_{31}c^4_{21}c^1_{54} = c^1_{45}\,(c^4_{31}c^5_{21} - c^5_{31}c^4_{21}) = \\ &\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_4}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_5}\,c^1_{45}\,(c^1_{34}c^1_{25} + c^1_{53}c^1_{24}) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_5}\,c^4_{15}c^1_{45}c^1_{23} = c^4_{15}c^5_{14}c^1_{23} \end{aligned}$$

deci

$$P = c^4_{15}c^5_{14}c^1_{23} + c^2_{31}c^4_{23}c^3_{42} + c^2_{31}c^5_{23}c^3_{52} \tag{28}$$

Notînd cu A, B coeficienții operatorilor X_4, X_5 în (27), avem

$$(\overline{X}_1\overline{X}_2) = c^1_{23}c^2_{31}\,\overline{X}_3 + P\,X_3 + A\,X_4 + B\,X_5\,. \tag{29}$$

Înlocuind X_3 cu valoarea dedusă din (26), obținem

$$(\overline{X}_1\overline{X}_2) = \overline{c}^3_{12}\,\overline{X}_3 + \lambda\,X_4 + \mu\,X_5\,, \tag{30}$$

unde

$$\overline{c}^3_{12} = c^1_{23}c^2_{31} + \frac{P}{c^3_{12}},\ \lambda = A - P\,\frac{c^4_{12}}{c^3_{12}},\ \mu = B - P\,\frac{c^5_{12}}{c^3_{12}}. \tag{31}$$

Să arătăm că coeficienții λ, μ sînt nuli. Datorită simetriei demonstrăm afirmația numai pentru unul dintre acești coeficienți. Avem

$$\lambda = c^1_{23}c^5_{31}c^4_{15} + c^5_{23}c^2_{31}c^4_{52} - \frac{c^4_{12}}{c^3_{12}}\,(c^4_{15}c^5_{14}c^1_{23} + c^2_{31}c^4_{23}c^3_{42} + c^2_{31}c^5_{23}c^3_{52})\,.$$

Ținînd seama de (17) putem scrie

$$\lambda = c^1_{23}c^5_{31}c^4_{15} + c^5_{23}c^2_{31}c^4_{52} - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}\,c^4_{15}c^5_{14}c^4_{12} - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}\,c^4_{23}c^3_{42}c^4_{12} - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}\,c^5_{23}c^3_{52}c^4_{12}\,,$$

deci

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \lambda = \varepsilon_1 \varepsilon_2 c^1_{23}c^5_{31}c^4_{15} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 c^5_{23}c^2_{31}c^4_{52} - \varepsilon_2 \varepsilon_3 c^4_{15}c^5_{14}c^4_{12} - \varepsilon_1 \varepsilon_3 c^4_{23}c^3_{42}c^4_{12} -$$

$$- \varepsilon_1 \varepsilon_3 c^5_{23}c^3_{52}c^4_{12} = \varepsilon_2 \varepsilon_3 c^3_{12}c^5_{31}c^4_{15} - \varepsilon_1 \varepsilon_3 c^3_{21}c^5_{23}c^4_{52} - \varepsilon_2 \varepsilon_3 c^4_{15}c^5_{14}c^4_{12} -$$

$$- \varepsilon_1 \varepsilon_3 c^4_{23}c^3_{42}c^4_{12} - \varepsilon_1 \varepsilon_3 c^5_{23}c^3_{52}c^4_{12} = \varepsilon_2 \varepsilon_3 c^4_{15} (c^3_{12}c^5_{31} - c^5_{14}c^4_{12}) -$$

$$- \varepsilon_1 \varepsilon_3 c^5_{23} (c^3_{21}c^4_{52} + c^3_{52}c^4_{12}) - \varepsilon_1 \varepsilon_3 c^4_{23}c^3_{42}c^4_{12}.$$

Avem însă

$$c^3_{12}c^5_{31} - c^5_{14}c^4_{12} = c^5_{13}c^3_{21} + c^5_{14}c^4_{21} = - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_5} (c^1_{53}c^3_{21} + c^1_{54}c^4_{21}) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_5} c^3_{54}c^4_{23}$$

$$c^3_{52}c^4_{12} + c^3_{21}c^4_{52} = c^4_{21}c^3_{25} - c^4_{25}c^3_{21} = - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_4} (c^2_{41}c^3_{25} - c^2_{45}c^3_{21}) =$$

$$= - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_4} (c^2_{41}c^3_{25} + c^2_{54}c^3_{21}) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_4} c^2_{15}c^3_{24}$$

şi deci

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \lambda = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}{\varepsilon_5} c^4_{15}c^3_{54}c^4_{23} - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}{\varepsilon_4} c^5_{23}c^2_{15}c^3_{24} - \varepsilon_1 \varepsilon_3 c^3_{42}c^4_{12}$$

sau

$$\varepsilon_2 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \lambda = \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 c^4_{15}c^3_{54}c^4_{23} - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_5 c^5_{23}c^2_{15}c^3_{24} - \varepsilon_3 \varepsilon_4 \varepsilon_5 c^4_{23}c^3_{42}c^4_{12}$$

sau

$$\varepsilon_2 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \lambda = \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_5 c^4_{15}c^5_{34}c^3_{24} - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_5 c^5_{23}c^2_{15}c^3_{24} + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_5 c^2_{43}c^3_{42}c^4_{12}$$

sau

$$\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3} \lambda = c^4_{15}c^5_{34}c^3_{24} - c^5_{23}c^2_{15}c^3_{24} + c^2_{43}c^3_{42}c^4_{12} = c^4_{15}c^5_{34}c^3_{24} + c^3_{24} (c^2_{15}c^5_{32} + c^4_{12}c^2_{34}) =$$

$$= c^4_{15}c^5_{34}c^3_{24} - c^3_{24}c^4_{15}c^5_{34} = 0.$$

Aşadar ecuaţia (29) are o formă simplă şi din cauza simetriei putem scrie

$$(32) \qquad (\overline{X}_1\overline{X}_2) = \bar{c}^3_{12}\overline{X}_3, \ (\overline{X}_2\overline{X}_3) = \bar{c}^1_{23}\overline{X}_1, \ (\overline{X}_3\overline{X}_1) = \bar{c}^2_{31}\overline{X}_2.$$

În continuare

$$(\overline{X}_1\overline{X}_4) = c^1_{23} (X_1X_4) + c^5_{23} (X_5X_4) =$$

$$= c^5_{23}c^1_{54}X_1 + (c^1_{23}c^2_{14} + c^5_{23}c^2_{54})X_2 + (c^1_{23}c^3_{14} + c^5_{23}c^3_{54})X_3 + c^1_{23}c^5_{14}X_5.$$

Ţinînd seama de (26), această ecuaţie este de forma

$$(33) \qquad (\overline{X}_1\overline{X}_4) = \bar{c}^1_{14}\overline{X}_1 + \bar{c}^2_{14}\overline{X}_2 + c^3_{14}\overline{X}_3 + \nu X_4 + \tau X_5.$$

Vom arăta că coeficienţii ν, τ sînt nuli. Avem

$$\nu = -\frac{c^5_{23}c^1_{54}c^4_{23}}{c^1_{23}} - \frac{(c^1_{23}c^2_{14} + c^5_{23}c^2_{54})c^4_{31}}{c^2_{31}} - \frac{(c^1_{23}c^3_{14} + c^5_{23}c^3_{54})c^4_{12}}{c^3_{12}} =$$

$$= \frac{c^5_{23}c^1_{54}c^4_{23}}{c^1_{23}} - \frac{\varepsilon_2\,(c^1_{23}c^2_{14} + c^5_{23}c^2_{54})c^4_{31}}{\varepsilon_1\,c^1_{23}} - \frac{\varepsilon_3\,(c^1_{23}c^3_{14} + c^5_{23}c^3_{54})c^4_{12}}{\varepsilon_1 c^1_{23}}$$

deci

$$\begin{aligned} -\varepsilon_1\nu\,c^1_{23} &= \varepsilon_1\,c^5_{23}c^1_{54}c^4_{23} + \varepsilon_2\,(c^1_{23}c^2_{14} + c^5_{23}c^2_{54})c^4_{31} + \varepsilon_3\,(c^1_{23}c^3_{14} + c^5_{23}c^3_{54})c^4_{12} = \\ &= \varepsilon_1\,c^5_{23}c^1_{54}c^4_{23} - (\varepsilon_1\,c^1_{23}c^1_{24} + \varepsilon_5\,c^5_{23}c^5_{24})c^4_{31} - (\varepsilon_1\,c^1_{23}c^1_{34} + \varepsilon_5\,c^5_{23}c^5_{34})c^4_{12} = \\ &= \varepsilon_1\,c^5_{23}c^1_{54}c^4_{23} - \varepsilon_1\,c^1_{23}\,(c^1_{24}c^4_{31} + c^1_{34}c^4_{12}) - \varepsilon_5\,c^5_{23}\,(c^5_{24}c^4_{31} + c^5_{34}c^4_{12}) = \\ &= \varepsilon_1\,c^5_{23}c^1_{54}c^4_{23} - \varepsilon_5\,c^5_{23}c^4_{23}c^5_{41} = -\,\varepsilon_5\,c^5_{23}c^5_{14}c^4_{23} - \varepsilon_5\,c^5_{23}c^4_{23}c^5_{41} = 0\,. \end{aligned}$$

Pe aceeaşi cale se arată că şi coeficientul τ este nul şi deci datorită simetriei avem

$$(\overline{X}_i\overline{X}_4) = \overline{c}^s_{i4}\,\overline{X}_s\,,\ (\overline{X}_i\overline{X}_5) = \overline{c}^s_{i5}\,\overline{X}_s\,, \qquad (i, s = 1,\ 2,\ 3). \tag{34}$$

În sfîrşit avem

$$(\overline{X}_4\overline{X}_5) = c^1_{45}X_1 + c^2_{45}X_2 + c^3_{45}X_3 =$$

$$\frac{c^1_{45}}{c^1_{23}}\,\overline{X}_1 + \frac{c^2_{45}}{c^2_{31}}\,\overline{X}_2 + \frac{c^3_{45}}{c^3_{12}}\,\overline{X}_3 - p\,X_4 - q\,X_5\,,$$

unde

$$p = \frac{c^1_{45}c^4_{23}}{c^1_{23}} + \frac{c^2_{45}c^4_{31}}{c^2_{31}} + \frac{c^3_{45}c^4_{12}}{c^3_{12}} = -\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_1\,c^1_{23}}\,(c^4_{15}c^4_{23} + c^4_{25}c^4_{31} + c^4_{35}c^4_{12}) = 0$$

$$q = \frac{c^1_{45}c^5_{23}}{c^1_{23}} + \frac{c^2_{45}c^5_{31}}{c^2_{31}} + \frac{c^3_{45}c^5_{12}}{c^3_{12}} = -\frac{\varepsilon_5}{\varepsilon_1 c^1_{23}}\,(c^5_{41}c^5_{23} + c^5_{42}c^5_{31} + c^5_{43}c^5_{12}) = 0.$$

Aşadar ecuaţiile de structură ale grupului G_5, ţinînd seama de (32) şi (34), sînt de forma

$$(X_hX_k) = c^s_{hk}\,X_s\,, \qquad (s = 1,\ 2,\ 3). \tag{35}$$

În acest caz însă grupul G_5 admite subgrupul invariant $G_4(X_1, X_2, X_3, X_4)$ şi deoarece tensorul pătratic al unui grup G_4 este totdeauna degenerat [2], rezultă că şi tensorul pătratic al grupului G_5 este degenerat, deoarece se ştie [3] că dacă un grup G_r admite un subgrup invariant G_m $(m < r)$ avînd tensorul pătratic de rang mai mic decît m, atunci rangul tensorului pătratic al lui G_r este mai mic decît r.

Am ajuns astfel o la contradicţie cu ipoteza că rangul tensorului pătratic este $\rho = 5$, aşadar rangul tensorului pătratic al unui grup G_5 nu poate fi egal cu 5 şi proprietatea este evident independentă de vectorul de structură, deci

TEOREMA 2. *Tensorul pătratic c_{hk} al unui grup G_5 este totdeauna degenerat, prin urmare nu există grupuri G_5 semisimple.*

2.2. TENSORUL c_{hk} DE RANG $\rho = 4$

Vom arăta că și acest caz este imposibil.

Avem

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \neq 0, \quad \varepsilon_5 = 0. \tag{36}$$

Din ecuațiile (17) deducem

$$c^h_{hl} = 0, \quad c^h_{5l} = 0, \quad (h = 1, 2, 3, 4 ; \; l = 1, 2, 3, 4, 5). \tag{37}$$

Vectorul de structură fiind nul și ținînd seama de (37) avem încă

$$c^5_{5l} = 0. \tag{38}$$

În acest caz avem deci nule toate constantele de structură cu doi indici egali și în plus

$$c^1_{52} = c^1_{53} = c^1_{54} = c^2_{51} = c^2_{53} = c^2_{54} = c^3_{51} = c^3_{52} = c^3_{54} = c^4_{51} = c^4_{52} = c^4_{53} = 0. \tag{39}$$

Ecuațiile (23) neidentic satisfăcute se scriu

$$\begin{aligned} &c_{12} \equiv 2c^3_{14}c^4_{23} = 0, \; c_{14} \equiv 2c^2_{13}c^3_{42} = 0, \; c_{24} \equiv 2c^1_{23}c^3_{41} = 0 \\ &c_{13} \equiv 2c^2_{14}c^4_{32} = 0, \; c_{23} \equiv 2c^1_{24}c^4_{31} = 0, \; c_{34} \equiv 2c^1_{32}c^2_{41} = 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Avem de asemenea

$$\begin{aligned} c_{11} &\equiv 2(c^2_{31}c^3_{21} + c^2_{41}c^4_{21} + c^3_{41}c^4_{31}) = \varepsilon_1 \\ c_{22} &\equiv 2(c^1_{32}c^3_{12} + c^1_{42}c^4_{12} + c^3_{42}c^4_{32}) = \varepsilon_2 \\ c_{33} &\equiv 2(c^1_{23}c^2_{13} + c^1_{43}c^4_{13} + c^2_{43}c^4_{23}) = \varepsilon_3 \\ c_{44} &\equiv 2(c^1_{24}c^2_{14} + c^1_{34}c^3_{14} + c^2_{34}c^3_{24}) = \varepsilon_4. \end{aligned} \tag{41}$$

Constantele de structură care intervin în (41) nu pot fi toate nule și putem presupune $c^1_{23} \neq 0$; din (17) rezultă de asemenea c^2_{13}, c^3_{12} diferite de zero. Ținînd seama de aceasta, ecuațiile (40) dau

$$c^3_{42} = c^3_{41} = c^2_{41} = 0, \tag{42}$$

ceea ce contrazice ultima ecuație din (41). Prin urmare avem

TEOREMA 3. *Tensorul pătratic c_{hk} al unui grup G_5 cu vector de structură nul nu poate avea rangul egal cu 4.*

Observație. Această teoremă nu este adevărată dacă vectorul de structură nu este nul, după cum arată grupurile neintegrabile cu structura (I) care au rangul tensorului pătratic egal cu 4.

2.3. TENSORUL c_{hk} DE RANG $\rho = 3$

În acest caz avem

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \neq 0, \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0 \tag{43}$$

și ecuațiile (17) dau

$$c^h_{hl} = 0, \quad c^h_{4l} = 0, \quad c^h_{5l} = 0, \quad (h = 1, 2, 3 ; \; l = 1, 2, 3, 4, 5). \tag{44}$$

Deoarece vectorul de structură este nul, ținînd seama de (44) avem încă

$$c_{41}^4 + c_{51}^5 = 0,\ c_{42}^4 + c_{52}^5 = 0,\ c_{43}^4 + c_{53}^5 = 0,\ c_{54}^5 = c_{45}^4 = 0. \tag{45}$$

Ecuațiile de structură vor fi prin urmare de forma

$$\begin{aligned}
&(X_1X_2) = c_{12}^3X_3 + c_{12}^4X_4 + c_{12}^5X_5,\ (X_4X_5) = 0\\
&(X_2X_3) = c_{23}^1X_1 + c_{23}^4X_4 + c_{23}^5X_5\\
&(X_3X_1) = c_{31}^2X_2 + c_{31}^4X_4 + c_{31}^5X_5\\
&(X_4X_1) = c_{41}^4X_4 + c_{41}^5X_5, \quad (X_5X_1) = c_{51}^4X_4 + c_{51}^5X_5\\
&(X_4X_2) = c_{42}^4X_4 + c_{42}^5X_5 \quad (X_5X_2) = c_{52}^4X_4 + c_{52}^5X_5\\
&(X_4X_3) = c_{43}^4X_4 + c_{43}^5X_5 \quad (X_5X_3) = c_{53}^4X_4 + c_{53}^5X_5
\end{aligned} \tag{46}$$

cu condițiile (45).

Să observăm că dacă $c_{23}^1 = 0$, ecuațiile (17) dau $c_{31}^2 = c_{12}^3 = 0$ și ecuațiile (46) arată că în acest caz grupul G_5 este integrabil deoarece admite subgrupurile invariante $G_4(X_1, X_2, X_3, X_4) \supset G_3(X_2, X_3, X_4) \supset G_2(X_4, X_5)$.

Vom presupune deci că $c_{23}^1 \neq 0$ și în acest caz deoarece c_{13}^2, c_{12}^3 sînt de asemenea diferite de zero, putem presupune

$$c_{12}^3 = \varepsilon,\ c_{23}^1 = c_{31}^2 = 1, \qquad (\varepsilon = \pm 1). \tag{47}$$

Ținînd seama de (46) și (45) avem

$$\begin{aligned}
L_{314}^5 &\equiv - c_{42}^5 - 2c_{41}^4c_{43}^5 + 2c_{43}^4c_{41}^5 = 0\\
L_{124}^5 &\equiv - \varepsilon c_{43}^5 - 2c_{42}^4c_{41}^5 + 2c_{41}^4c_{42}^5 = 0\\
L_{234}^5 &\equiv - c_{41}^5 - 2c_{43}^4c_{42}^5 + 2c_{42}^4c_{43}^5 = 0
\end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
L_{315}^4 &\equiv - c_{52}^4 - 2c_{43}^4c_{51}^4 + 2c_{41}^4c_{53}^4 = 0\\
L_{125}^4 &\equiv - \varepsilon c_{53}^4 - 2c_{41}^4c_{52}^4 + 2c_{42}^4c_{51}^4 = 0\\
L_{235}^4 &\equiv - c_{51}^4 - 2c_{42}^4c_{53}^4 + 2c_{43}^4c_{52}^4 = 0
\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
L_{314}^4 &\equiv - c_{42}^4 - c_{53}^4c_{41}^5 + c_{51}^4c_{43}^5 = 0.\\
L_{124}^4 &\equiv - \varepsilon c_{43}^4 - c_{51}^4c_{42}^5 + c_{52}^4c_{41}^5 = 0\\
L_{234}^4 &\equiv - c_{41}^4 - c_{52}^4c_{34}^5 + c_{53}^4c_{42}^5 = 0.
\end{aligned} \tag{50}$$

Ecuațiile (48) formează un sistem omogen cu necunoscutele c_{41}^5, c_{42}^5, c_{43}^5 iar ecuațiile (49) un sistem omogen cu necunoscutele c_{51}^4, c_{52}^4, c_{53}^4. Determinanții acestor sisteme, dacă notăm

$$2c_{41}^4 = a,\ 2c_{42}^4 = b,\ 2c_{43}^4 = c, \tag{51}$$

sînt

$$(52)\qquad \begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} c & -1 & -a \\ -b & a & -\varepsilon \\ -1 & -c & b \end{vmatrix} = -(a^2+b^2+\varepsilon c^2+\varepsilon) \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} -c & -1 & a \\ b & -a & -\varepsilon \\ -1 & c & -b \end{vmatrix} = -(a^2+b^2+\varepsilon c^2+\varepsilon). \end{aligned}$$

Dacă $\varepsilon = 1$, avem $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$ şi deci aceste sisteme omogene au numai soluţia banală

$$(53)\qquad c^5_{41} = c^5_{42} = c^5_{43} = c^4_{51} = c^4_{52} = c^4_{53} = 0.$$

Ţinînd seama de acestea, ecuaţiile (50) dau

$$(54)\qquad c^4_{41} = c^4_{42} = c^4_{43} = 0.$$

Dacă $\varepsilon = -1$ dar $a^2 + b^2 - c^2 - 1 \neq 0$, avem de asemenea ecuaţiile (53), (54).

În aceste cazuri, făcînd schimbarea de operatori

$$(55)\qquad \begin{aligned} &\overline{X}_1 = X_1 + c^4_{23}X_4 + c^5_{23}X_5,\ \overline{X}_4 = X_4 \\ &\overline{X}_2 = X_2 + c^4_{31}X_4 + c^5_{31}X_5,\ \overline{X}_5 = X_5 \\ &\overline{X}_3 = X_3 + c^4_{12}X_4 + c^5_{12}X_5 \end{aligned}$$

ne reducem la a avea ecuaţiile de structură

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{aligned} &(X_1X_2) = \varepsilon X_3,\ (X_2X_3) = X_1,\ (X_3X_1) = X_2 \quad (\varepsilon = \pm 1) \\ &(X_iX_4) = (X_iX_5) = (X_4X_5) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

Am obţinut astfel încă două tipuri de grup G_5 neintegrabil. Să examinăm şi cazul $\varepsilon = -1$, $a^2 + b^2 - c^2 - 1 = 0$. În acest caz sistemele omogene (48), (49) admit soluţiile nebanale

$$(56)\qquad \begin{aligned} c^5_{41} &= \lambda(ac + b), & c^4_{51} &= \mu(ac - b) \\ c^5_{42} &= \lambda(bc - a), & c^4_{52} &= \mu(bc + a) \\ c^5_{43} &= \lambda(c^2 + 1), & c^4_{53} &= \mu(c^2 + 1). \end{aligned}$$

Înlocuind aceste constante de structură în ecuaţiile (50), obţinem

$$(57)\qquad \begin{aligned} b[1 + 4\lambda\mu(c^2 + 1)] &= 0 \\ c[1 + 4\lambda\mu(c^2 + 1)] &= 0 \\ a[1 + 4\lambda\mu(c^2 + 1)] &= 0. \end{aligned}$$

Deoarece în ipoteza făcută, a, b, c nu pot fi toate nule, rezultă că trebuie să avem

$$(58)\qquad 1 + 4\lambda\mu(c^2 + 1) = 0.$$

Din (58) rezultă că nu putem avea $\lambda = 0$ sau $\mu = 0$ şi prin urmare constantele de structură c^5_{43}, c^4_{53} sînt diferite de zero. În aceste condiţii, făcînd schimbarea de operator

$$\overline{X}_4 = \frac{1}{2\lambda}\left(X_4 - \frac{c^4_{43}}{c^4_{53}} X_5\right) \tag{59}$$

ne reducem la a avea $c = 0$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = -\frac{1}{2}\cdot$

În continuare, schimbînd operatorii X_1, X_2 după formulele

$$\begin{aligned} \overline{X}_1 &= X_1 \cos \omega - X_2 \sin \omega \\ \overline{X}_2 &= X_1 \sin \omega + X_2 \cos \omega \end{aligned} \tag{60}$$

cu $a \cos \omega - b \sin \omega = 0$, ceilalţi operatori rămînînd neschimbaţi, ne reducem la a avea încă $a = 0$ şi deci $b = \varepsilon$ $(\varepsilon = \pm 1)$.

Aşadar vom avea pentru G_5 ecuaţiile de structură

$$\begin{aligned} &(X_1X_2) = -X_3 + c^4_{12}X_4 + c^5_{12}X_5 \\ &(X_2X_3) = X_1 + c^4_{23}X_4 + c^5_{23}X_5 \\ &(X_3X_1) = X_2 + c^4_{31}X_4 + c^5_{31}X_5 \\ &(X_4X_1) = \frac{\varepsilon}{2} X_5,\ (X_4X_2) = \frac{\varepsilon}{2} X_4,\ (X_4X_3) = \frac{1}{2} X_5 \\ &(X_5X_1) = \frac{\varepsilon}{2} X_4,\ (X_5X_2) = -\frac{\varepsilon}{2} X_5,\ (X_5X_3) = -\frac{1}{2} X_4,\ (X_4X_5) = 0. \end{aligned} \tag{61}$$

Să facem acum schimbarea de operatori de forma

$$\begin{aligned} \overline{X}_1 &= X_1 + \alpha X_4 + \beta X_5 \\ \overline{X}_2 &= X_2 + \alpha' X_4 + \beta' X_5 \end{aligned} \tag{62}$$

ceilalţi operatori rămînînd neschimbaţi.
Avem

$$\begin{aligned} (\overline{X}_2X_3) &= \overline{X}_1 + \left(c^4_{23} - \alpha - \frac{\beta'}{2}\right) X_4 + \left(c^3_{25} - \beta + \frac{\alpha'}{2}\right) X_5 \\ (X_3\overline{X}_1) &= \overline{X}_2 + \left(c^4_{31} - \alpha' + \frac{\beta}{2}\right) X_4 + \left(c^5_{31} - \beta' - \frac{\alpha}{2}\right) X_5. \end{aligned} \tag{63}$$

Putem alege α, β, α', β' astfel încît să avem

$$\begin{aligned} &c^4_{23} - \alpha - \frac{\beta'}{2} = 0,\ c^5_{23} - \beta + \frac{\alpha'}{2} = 0 \\ &c^4_{31} - \alpha' + \frac{\beta}{2} = 0,\ c^5_{31} - \beta' - \frac{\alpha}{2} = 0 \end{aligned} \tag{64}$$

deoarece determinantul

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

este diferit de zero.

În felul acesta ne reducem la a avea $c^4_{23} = c^5_{23} = c^4_{31} = c^5_{31} = 0$ şi apoi rezultă

$$L^4_{123} \equiv -\frac{1}{2} c^5_{12} = 0, \quad L^5_{123} \equiv \frac{1}{2} c^4_{12} = 0. \tag{65}$$

Avem deci grupurile G_5 neintegrabile cu structura

$$\text{(III)} \quad (X_1X_2) = -X_3, \ (X_2X_3) = X_1, \ (X_3X_1) = X_2$$
$$(X_4X_1) = \frac{\varepsilon}{2} X_5, \ (X_4X_2) = \frac{\varepsilon}{2} X_4, \ (X_4X_3) = \frac{1}{2} X_5$$
$$(X_5X_1) = \frac{\varepsilon}{2} X_4, \ (X_5X_2) = -\frac{\varepsilon}{2} X_5, \ (X_5X_3) = -\frac{1}{2} X_4, (X_4X_5) = 0$$

Componentele nenule ale tensorului pătratic c_{hk} sînt

$$c_{11} = c_{22} = \frac{5}{2}$$
$$c_{33} = -\frac{5}{2}.$$

Rezumînd, avem

Teorema 4. *Grupurile lui Lie G_5 reale neintegrabile cu vector de structură nul şi tensor pătratic de rang egal cu trei, pot fi reduse la a avea ecuaţiile de structură* (II) *sau* (III).

2.4. TENSORUL c_{hk} DE RANG $\rho = 2$

Avem

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \neq 0, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0. \tag{66}$$

Ecuaţiile (17) dau

$$c^h_{hl} = 0, \ c^h_{3l} = c^h_{4l} = c^h_{5l} = 0, \qquad (h = 1, 2; \ l = 1, 2, 3, 4, 5), \tag{67}$$

adică toate constantele de structură cu indice superior egal cu 1 sau 2 sînt nule. Grupul G_5 este în acest caz integrabil deoarece admite subgrupurile invariante $G_4(X_2, X_3, X_4, X_5) \supset G_3(X_3, X_4, X_5)$ iar $G_3(X_3, X_4, X_5)$ este integrabil, avînd tensorul pătratic de rang zero (componentele acestui tensor fiind aceleaşi din G_6).

2.5. TENSORUL c_{hk} DE RANG $\rho = 1$ SAU 0

Grupurile cu această proprietate sînt integrabile [2]. Proprietatea rezultă din teorema lui Cartan, conform căreia condiţia necesară şi suficientă ca un grup al lui Lie G_r să fie integrabil este ca tensorul cubic de structură să satisfacă relaţia $c_{klh} = c_{khl}$.

Pe baza relaţiilor (7) şi (8) se arată că această condiţie este satisfăcută.

CONCLUZII

Există şase tipuri de grup G_5 neintegrabil în real, ecuaţiile de structură ale acestor grupuri pot fi aduse la formele canonice (I), (II), (III). Primele două tipuri conţinute în (I) au vectorul de structură diferit de zero şi tensorul pătratic de rang $\rho = 4$, iar celelalte patru tipuri conţinute în (II) şi (III) au vectorul de structură nul şi tensorul pătratic de rang $\rho = 3$.

Aceste rezultate extind rezultatele cunoscute pentru grupurile G_2, G_3, G_4 şi anume: grupurile G_2 sînt integrabile, pentru G_3 există două tipuri neintegrabile [1], iar pentru G_4 există de asemenea două tipuri neintegrabile [2].

Primită la redacţie la 14 iunie 1967

Institutul de Construcţii
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. GH. VRĂNCEANU, *Lecţii de geometrie diferenţială* vol. I, Bucureşti, 1962.
2. A. DOBRESCU, *Clasificarea grupurilor lui Lie reale cu patru parametri*. Std. cerc. mat., **14**. 3–4 (1963).
3. A. DOBRESCU, *Propriétés tensorielles des groupes de Lie*. Rev. de math. pures et appliquées, **2**, (1958).

LOGICA CLASICĂ A PROPOZIȚIILOR DE TIP SUPERIOR

DE

GR. C. MOISIL

Se definesc schemele de ordin superior şi secvenţele de ordin superior ale logicii propoziţiilor bivalente şi se dau diferite proprietăţi ale lor.

§ 1. EXPRESII

Expresiile sînt definite în logica propoziţiilor astfel:

1.1. Literele $p, q, r, \ldots, p_1, p_2, \ldots$ (nedeterminatele propoziţionale 1)) sînt expresii;

1.2. Dacă $\mathfrak{A}$ este o expresie, $N\mathfrak{A}$ este de asemenea o expresie 2);

1.3. Dacă $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sînt expresii, $K\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $A\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $C\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $S\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $E\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $R\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $P\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $D\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ sînt expresii 3).

Vom numi $\mathfrak{L}_2$ mulţimea cu două elemente

$$\mathfrak{L}_2 = \{0,1\}.$$

Fiecărei expresii $\mathfrak{E}$ cu n nedeterminate $p, q, \ldots, p_1, \ldots$ îi asociem o funcţie $f_{\mathfrak{E}}$ de n variabile

$$f_{\mathfrak{E}} : \mathfrak{L}_2^n \rightarrow \mathfrak{L}_2$$

astfel:

2.1. Nedeterminatelor $p, q, \ldots, p_1, p_2, \ldots$ le asociem variabilele în $\mathfrak{L}_2 : x, y, \ldots, x_1, x_2, \ldots$

---

1) De obicei se vorbeşte despre „variabilele propoziţionale”.

2) $N\ \mathfrak{A}$ este propoziţia „non $\mathfrak{A}$”.

3) $K\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{B}$ este propoziţia „$\mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{B}$”.
$A\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{B}$ este propoziţia „$\mathfrak{A}$ sau măcar $\mathfrak{B}$”.
$C\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{B}$ este propoziţia „dacă $\mathfrak{A}$ atunci $\mathfrak{B}$”.
$S\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{B}$ este propoziţia „$\mathfrak{A}$ dar nu $\mathfrak{B}$”.
$E\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{B}$ este propoziţia „$\mathfrak{A}$ echivalează cu $\mathfrak{B}$”.
$R\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{B}$ este propoziţia „$\mathfrak{A}$ este contradictorie cu $\mathfrak{B}$”.
$P\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{B}$ este propoziţia „nici $\mathfrak{A}$ nici $\mathfrak{B}$”.
$D\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{B}$ este propoziţia „$\mathfrak{A}$ exclude pe $\mathfrak{B}$”.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 2, P. 237–258, BUCUREŞTI, 1968

2.2. Prin definiţie, cu $t \in \mathfrak{L}_2^n$:

$$\begin{aligned}
f_{N\mathfrak{A}}(t) &= \overline{f_{\mathfrak{A}}(t)} \\
f_{K\mathfrak{A}\mathfrak{B}}(t) &= f_{\mathfrak{A}}(t) \cap f_{\mathfrak{B}}(t) \\
f_{A\mathfrak{A}\mathfrak{B}}(t) &= f_{\mathfrak{A}}(t) \cup f_{\mathfrak{B}}(t) \\
f_{C\mathfrak{A}\mathfrak{B}}(t) &= f_{\mathfrak{B}}(t) : f_{\mathfrak{A}}(t) \\
f_{S\mathfrak{A}\mathfrak{B}}(t) &= f_{\mathfrak{A}}(t) - f_{\mathfrak{B}}(t) \\
f_{E\mathfrak{A}\mathfrak{B}}(t) &= f_{\mathfrak{A}}(t) \,\widetilde{+}\, f_{\mathfrak{B}}(t) \\
f_{R\mathfrak{A}\mathfrak{B}}(t) &= f_{\mathfrak{A}}(t) + f_{\mathfrak{B}}(t) \\
f_{P\mathfrak{A}\mathfrak{B}}(t) &= f_{\mathfrak{A}}(t) \top f_{\mathfrak{B}}(t) \\
f_{D\mathfrak{A}\mathfrak{B}}(t) &= f_{\mathfrak{A}}(t) \perp f_{\mathfrak{B}}(t),
\end{aligned}$$

unde „ $\cap$ ", „ $\cup$ ", „ : ", „ $-$ ", „ $\widetilde{+}$ ", „ $+$ ", „ $\top$ ", „ $\perp$ " sînt funcţiile de două variabile în $\mathfrak{L}_2$ cu valorile în $\mathfrak{L}_2$ definite prin :

$\cap$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\cup$	0	1
0	0	1
1	1	1

:	0	1
0	1	0
1	1	1

$-$	0	1
0	0	0
1	1	0

$\widetilde{+}$	0	1
0	1	0
1	0	1

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\top$	0	1
0	1	0
1	0	0

$\perp$	0	1
0	1	1
1	1	0

iar „ $^{-}$ " este funcţie de o variabilă în $\mathfrak{L}_2$ cu valorile în $\mathfrak{L}_2$ dată de

$$\overline{0} = 1, \quad \overline{1} = 0.$$

Funcţia $f_{\mathfrak{E}}$ este numită *funcţie generată* în $\mathfrak{L}_2$ de expresia $\mathfrak{E}$.

Vom da definiţia semantică a tezelor şi a absurdităţilor logicii clasice.

3.1. O expresie $\mathfrak{E}$ este numită o *teză* dacă funcţia $f_{\mathfrak{E}}$ generată de ea este constanta 1 :

$$f_{\mathfrak{E}} = 1.$$

3.2. O expresie $\mathfrak{E}$ este numită o absurditate dacă funcţia $f_{\mathfrak{E}}$ generată de ea este constanta 0 :

$$f_{\mathfrak{E}} = 0.$$

Exemple. Expresia

$$A\mathfrak{A}N\mathfrak{A}$$

este teză, căci funcţia generată de această expresie este

$$f_{A\mathfrak{A}N\mathfrak{A}}(t) = f_{\mathfrak{A}}(t) \cup f_{N\mathfrak{A}}(t) = f_{\mathfrak{A}}(t) \cup \overline{f_{\mathfrak{A}}(t)} = 1$$

căci în $\mathfrak{L}_2 : \zeta \cup \overline{\zeta} = 1$.

Expresia

$$K\mathfrak{A}N\mathfrak{A}$$

este o absurditate, căci funcţia generată de această expresie este

$$f_{K\mathfrak{A}N\mathfrak{A}}(t) = f_{\mathfrak{A}}(t) \cap f_{N\mathfrak{A}}(t) = f_A(t) \cap \overline{f_A(t)} = 0$$

căci în $\mathfrak{L}_2 : \zeta \cap \overline{\zeta} = 0$.

Vom aminti că în $\mathfrak{L}_2$ se introduce ,,relaţia de incluziune'' scrisă ,,$\subset$'' şi că

$$0 \subset 0 \quad 0 \subset 1 \quad 1 \subset 0$$

sînt valabile; $1 \subset 0$ nu este valabilă.

§ 2. SCHEME DEDUCTIVE DE ORDINUL II

Schemele deductive de ordinul II sînt definite prin:

Un şir de semne Σ de una din formele

1.4. $(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r) \Rightarrow (\mathfrak{B})$

1.5. $\Rightarrow (\mathfrak{B})$

1.6. $(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r) \Rightarrow$

este numit schemă deductivă de ordinul II.

Vom asocia unei scheme deductive de ordinul II anume Σ o incluziune sau o egalitate $\mathcal{J}_\Sigma$ astfel

2.3. Dacă Σ este schema 1.4, atunci $\mathcal{J}_\Sigma$ este

$$f_{\mathfrak{A}_1}(t) \cap \ldots \cap f_{\mathfrak{A}_r}(t) \subset f_{\mathfrak{B}}(t).$$

2.4. Dacă Σ este schema 1.5, atunci $\mathcal{J}_\Sigma$ este[4])

$$f_{\mathfrak{B}}(t) = 1.$$

2.5. Dacă Σ este schema 1.6, atunci $\mathcal{J}_\Sigma$ este[5])

$$f_{\mathfrak{A}_1}(t) \cap \ldots \cap f_{\mathfrak{A}_r}(t) = 0.$$

Vom asocia fiecărei scheme deductive de ordinul II anume Σ o funcţie $f_\Sigma(t)$ de variabile ce corespund prin 2.1 nedeterminatelor ce apar în $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r, \mathfrak{B}$ astfel:

---

[4]) Sau $1 \subset f_B(t)$.

[5]) Sau $f_{\mathfrak{A}_1}(t) \cap \cdots \cap f_{\mathfrak{A}_r}(t) \subset 0$.

2.6. Dacă $\sum$ este de forma 1.4, atunci,

$$f_{\Sigma}(t) = \bar{f}_{\mathfrak{A}_1}(t) \ldots \bar{f}_{\mathfrak{A}_r}(t) \cup f_{\mathfrak{B}}(t).$$

2.7. Dacă $\sum$ este de forma 1.5, atunci

$$f_{\Sigma}(t) = f_{\mathfrak{B}}(t).$$

2.8. Dacă $\sum$ este de forma 1.6, atunci

$$f_{\Sigma}(t) = \bar{f}_{\mathfrak{A}_1}(t) \cup \ldots \cup \bar{f}_{\mathfrak{A}_r}(t).$$

Vom introduce conceptul de scheme deductive de ordinul II valabile prin *definiția* semantică :

3.3. O schemă deductivă de ordinul II și anume $\sum$ este numită o schemă valabilă dacă funcția asociată f_{Σ} este constanta 1.

Teorema I. *Condiția necesară și suficientă ca expresia* $\mathfrak{E}$ *să fie o teză este ca schema* $\Rightarrow \mathfrak{E}$ *să fie valabilă.*

Teorema II. *Condiția necesară și suficientă ca expresia* $\mathfrak{E}$ *să fie o absurditate este ca schema* $\mathfrak{E} \Rightarrow$ *să fie valabilă.*

Demonstrația este imediată comparînd pe 3.1, 3.2 cu 3.3 și 2.7, 2.8.

Deoarece în $\mathfrak{L}_2$ din $\bar{\zeta} \cup \tau = 1$ deduc $\zeta \cap \tau = \zeta \cap (\bar{\zeta} \cup \tau) = \zeta$ deci $\zeta \subset \tau$ și din $\zeta \subset \tau$ deduc $1 = \zeta \cup \bar{\zeta} \subset \bar{\zeta} \cup \tau$, 2.6 – 2.8 comparate cu 2.3 – 2.5 dau :

Teorema III. *Condiția necesară și suficientă ca schema deductivă de ordinul II :* $\sum$ *să fie valabilă, este ca incluziunea* $\mathfrak{J}_{\Sigma}$ *să fie adevărată în* $\mathfrak{L}_2$.

Dacă schema $\sum$ de forma 1.4 este valabilă și dacă $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r$ sînt teze, atunci $f_{\mathfrak{A}_1}, \ldots, f_{\mathfrak{A}_r}$ sînt constantele 1, deci $f_{\mathfrak{B}}$ este constantă 1, deci $\mathfrak{B}$ este teză. Dacă ori de cîte ori $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r$ sînt teze și $\mathfrak{B}$ este teză, atunci ori de cîte ori $f_{\mathfrak{A}_1}, \ldots, f_{\mathfrak{A}_r}$ sînt constanta 1, $f_{\mathfrak{B}}$ este constanta 1, deci $\mathfrak{J}_{\Sigma}$ este adevărată, deci :

Teorema IV. *Condiția necesară și suficientă ca schema deductivă de ordinul II : 1.4 să fie valabilă, este ca ori de cîte ori* $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r$ *sînt teze și* $\mathfrak{B}$ *să fie teză.*

Fie $t = (x_1, \ldots, x_m)$, $x_1, \ldots, x_r$ fiind variabilele corespunzătoare prin 2.1 nedeterminatelor $p_1, \ldots, p_m$ ce intră în expresiile $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r$, $\mathfrak{B}$ și fie $T_{\mathfrak{E}}$ mulțimea lui t pentru care $f_{\mathfrak{E}}(t) = 1$. Incluziunea $\mathfrak{J}_{\Sigma}$ este echivalentă cu

$$T_{\mathfrak{A}_1} \cap \ldots \cap T_{\mathfrak{A}_r} \subset T_{\mathfrak{B}}$$

ceea ce se traduce prin :

Teorema V. *Condiția necesară și suficientă ca schema de ordinul II 1.4 să fie valabilă este ca pentru orice sistem de valori date în* $\mathfrak{L}_2$ *variabilelor* $x_1, \ldots, x_m$ *pentru care* $f_{\mathfrak{A}_1}(t) = \ldots = f_{\mathfrak{A}_r}(t) = 1$ *să avem* $f_{\mathfrak{B}}(t) = 1$.

Teorema VI. *Condiția necesară și suficientă ca schema de ordinul II 1.4 să fie valabilă este ca orice substituție* σ *care aplicată nedeterminatelor* $p_1, \ldots, p_n$ *din* $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r, \mathfrak{B}$ *pentru care* $\sigma\mathfrak{A}_1, \ldots, \sigma\mathfrak{A}_r$ *sînt teze, face ca* $\sigma\mathfrak{B}$ *să fie o teză.*

Teorema VII. *Condiția necesară și suficientă ca schema de ordinul II 1.6 să fie valabilă este ca pentru nici un sistem de valori în* $\mathfrak{L}_2$ *al variabilelor* $x_1, \ldots, x_m$ *să nu avem* $f_{\mathfrak{A}_1}(t) = \ldots = f_{\mathfrak{A}_r}(t) = 1$.

§ 3. FORMA CANONICĂ A SCHEMELOR DEDUCTIVE DE ORDINUL II

Să considerăm schema 1.4; condiția $\mathcal{J}_{\underline{\Sigma}}$ se mai poate scrie

$$f_{K\ldots K\mathfrak{A}_1\ldots\mathfrak{A}_r}(t) \subset f_{\mathfrak{B}}(t)$$

deci notînd cu $\mathfrak{A}$ expresia $K\ldots K\mathfrak{A}_1\ldots\mathfrak{A}_r$ avem

TEOREMA VIII. *Schema 1.4 este în același timp valabilă ca schema*

$$(\mathfrak{A}) \Rightarrow (\mathfrak{B}).$$

Dar schema de mai sus este în același timp valabilă ca schema

$$\Rightarrow (\mathfrak{T})$$

în care am notat cu $\mathfrak{T}$ expresia $C\mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

Analog schema 1.6 este în același timp valabilă cu schema

$$1.7 \qquad (\mathfrak{A}) \Rightarrow,$$

unde $\mathfrak{A}$ este aceeași expresie $K\ldots K\mathfrak{A}_1\ldots\mathfrak{A}_r$ deci, dată fiind schema 1.4, există o schemă de forma 1.5 și o alta de forma 1.7, astfel ca cele trei scheme să fie în același timp valabile. De altfel schema 1.5 este în același timp valabilă ca

$$(N\mathfrak{B}) \Rightarrow$$

iar 1.7 ca

$$\Rightarrow (N\mathfrak{A}).$$

Putem deci enunța teorema:

TEOREMA IX. *Orice schemă deductivă de ordinul II este în același timp valabilă ca o schemă de forma canonică 1.5 și cu o alta de forma canonică 1.7.*

Exemple de scheme deductive de ordinul II:

$$(\mathfrak{A}, C\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \Rightarrow (\mathfrak{B})$$
$$(C\mathfrak{A}\mathfrak{B}, C\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \Rightarrow (C\mathfrak{A}\mathfrak{C})$$
$$(CC\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{A}) \Rightarrow (\mathfrak{A})$$
$$(\mathfrak{A}) \Rightarrow (C\mathfrak{B}\mathfrak{A})$$
$$(C\mathfrak{A}C\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \Rightarrow (CC\mathfrak{A}\mathfrak{B}C\mathfrak{A}\mathfrak{C})$$
$$(C\mathfrak{A}\mathfrak{B}, C\mathfrak{A}\,C\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \Rightarrow (C\mathfrak{A}\mathfrak{C})$$
$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \Rightarrow (K\mathfrak{A}\mathfrak{B})$$
$$(C\mathfrak{A}\mathfrak{B}, C\mathfrak{A}\mathfrak{C}) \Rightarrow (C\mathfrak{A}\,K\mathfrak{B}\mathfrak{C})$$
$$(C\mathfrak{A}\mathfrak{C}\,C\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \Rightarrow (CA\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})$$
$$(\mathfrak{A}, E\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \Rightarrow (\mathfrak{B})$$
$$(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) \Rightarrow (E\mathfrak{A}\mathfrak{B})$$
$$(\mathfrak{A}) \Rightarrow (A\mathfrak{A}\,S\mathfrak{B}\mathfrak{A})$$
$$(C\mathfrak{A}\,A\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \Rightarrow (CS\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})$$

§ 4. DEMONSTRAŢII DIN IPOTEZE

Fie $\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_r$ anume expresii. Un şir de expresii

$$(^*) \qquad \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots, \mathfrak{E}_s$$

este numit o demonstraţie din ipotezele $\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_r$ dacă fiecare $\mathfrak{E}_i$ este de una din formele :

1. $\mathfrak{E}_i$ este una din expresiile $\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_r$.
2. $\mathfrak{E}_i$ este o teză.
3. Există $h < i$, $k < i$ astfel ca $\mathfrak{E}_h$ să fie $C\mathfrak{E}_k\mathfrak{E}_i$.

Vom scrie

$$(\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_r) \vdash \mathfrak{E}$$

dacă există o demonstraţie din ipotezele $\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_r$ astfel ca această demonstraţie să conţină pe $\mathfrak{E}$.

TEOREMA X. *Condiţiile*

$$(\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_r) \Rightarrow (\mathfrak{E})$$

$$(\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_r) \vdash (\mathfrak{E})$$

sînt echivalente

a) Dacă $(\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_r) \vdash (\mathfrak{E})$, atunci există un şir de expresii (*) care îndeplinesc condiţiile 1, 2, 3. Dacă $\mathfrak{E}_i$ satisface condiţia 1 avem

$$(^*) \qquad f_{\mathfrak{H}_1}(t) \cap \dots \cap f_{\mathfrak{H}_r}(t) \subset f_{\mathfrak{E}_i}(t).$$

Dacă $\mathfrak{E}_i$ este o teză, $f_{\mathfrak{E}_i}(t) = 1$, deci condiţia (*) este satisfăcută. Dacă există $h < i$, $k < i$ astfel ca $\mathfrak{E}_h$ să fie $C\mathfrak{E}_k\,\mathfrak{E}_i$, atunci

$$f_{\mathfrak{E}_h}(t) = f_{\mathfrak{E}_i}(t) : f_{\mathfrak{E}_k}(t) ;$$

dar în $\mathfrak{L}_2$ avem după tabela de la p. 2 : $(\alpha : \beta) \cap \beta \subset \alpha$ deci dacă

$$f_{\mathfrak{H}_1}(t) \cap \dots \cap f_{\mathfrak{H}_r}(t) \subset f_{\mathfrak{E}_h}(t)$$

$$f_{\mathfrak{H}_1}(t) \cap \dots \cap f_{\mathfrak{H}_r}(t) \subset f_{\mathfrak{E}_k}(t)$$

atunci

$$f_{\mathfrak{H}_1}(t) \cap \dots \cap f_{\mathfrak{H}_r}(t) \subset f_{\mathfrak{E}_h}(t) \cap f_{\mathfrak{E}_k}(t) = [f_{\mathfrak{E}_i}(t) : f_{\mathfrak{E}_h}(t)] \cap f_{\mathfrak{E}_k}(t) \subset f_{\mathfrak{E}_i}(t)$$

deci schemele $(\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_r) \Rightarrow (\mathfrak{E}_i)$ sînt valabile pentru orice i.

b) Dacă $(\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_r) \Rightarrow (\mathfrak{E})$, atunci $CK \dots K\mathfrak{H}_1 \dots \mathfrak{H}_r\mathfrak{E}$ este o teză, deci şirul de expresii

$$\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_r, C\mathfrak{H}_2C\mathfrak{H}_1K\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2, C\mathfrak{H}_2K\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2K\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2,$$

$$C\mathfrak{H}_3CK\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2KK\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3, CK\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2KK\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3KK\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3$$

. . . .

$$C\mathfrak{H}_rCK \dots K\mathfrak{H}_1 \dots \mathfrak{H}_{r-1}K \dots K\mathfrak{H}_1 \dots \mathfrak{H}_r$$

$$CK \dots K\mathfrak{H}_1 \dots \mathfrak{H}_{r-1}K \dots K\mathfrak{H}_1 \dots \mathfrak{H}_r$$

$$K \dots K\mathfrak{H}_1 \dots \mathfrak{H}_r, CK \dots K\mathfrak{H}_1 \dots \mathfrak{H}_r\mathfrak{E}, \mathfrak{E}$$

este o demonstraţie căci :

$C\mathfrak{B}C\mathfrak{A}K\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ este teză, deci $K\ldots K\mathfrak{H}_1\ldots\mathfrak{H}_r$ este teză, deci, deoarece $CK\ldots K\mathfrak{H}_1\ldots\mathfrak{H}_r\mathfrak{C}$ este teză, $\mathfrak{C}$ este teză, deci

$$(\mathfrak{H}_1,\ldots,\mathfrak{H}_r)\vdash\mathfrak{C}.$$

§ 5. SECVENŢE DE ORDINUL II

Vom defini secvenţele de ordinul II, care sînt generalizări ale schemelor deductive de ordinul II. Un şir de semne $\sum$ de una din formele 1.8, 1.6 sau 1.9 cu

1.8. $$(\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_r)\Rightarrow(\mathfrak{B}_1,\ldots,\mathfrak{B}_s)$$

1.9. $$\Rightarrow(\mathfrak{B}_1,\ldots,\mathfrak{B}_s),$$

$\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{B}_s$ fiind expresii, va fi numit o secvenţă de ordinul II.

Vom asocia unei secvenţe $\sum$ de ordinul II o incluziune $\mathfrak{I}_\Sigma$ astfel : secvenţei I.6 îi asociem incluziunea $\mathfrak{I}_\Sigma$ prin 2.5.

2.9. Secvenţei 1.8 îi asociem incluziunea

$$f_{\mathfrak{A}_1}(t)\cap\ldots\cap f_{\mathfrak{A}_r}(t)\subset f_{\mathfrak{B}_1}(t)\cup\ldots\cup f_{\mathfrak{B}_s}(t).$$

2.10. Secvenţei 1.9 îi asociem incluziunea [6])

$$f_{\mathfrak{B}_1}(t)\cup\ldots\cup f_{\mathfrak{B}_s}(t)=1.$$

Vom asocia fiecărei secvenţe $\sum$ o funcţie $f_\Sigma(t)$ prin 2.11, 2.8 sau 2.12 cu

2.11. Secvenţei 1.8 îi asociem funcţia

$$f_\Sigma(t)=\overline{f_{\mathfrak{A}_1}(t)}\cup\ldots\cup\overline{f_{\mathfrak{A}_r}(t)}\cup f_{\mathfrak{B}_1}(t)\cup\ldots\cup f_{\mathfrak{B}_s}(t).$$

2.12. Secvenţei 1.9 îi asociem funcţia

$$f_\Sigma(t)=f_{\mathfrak{B}_1}(t)\cup\ldots\cup f_{\mathfrak{B}_s}(t).$$

Vom introduce conceptul de secvenţă valabilă prin :

3.4. O secvenţă de ordinul II şi anume $\sum$ este valabilă dacă f_Σ este constanta 1.

TEOREMA XI. *Condiţia necesară şi suficientă ca secvenţa* $\sum$ *să fie valabilă este ca incluziunea asociată* $\mathfrak{I}_\Sigma$ *să fie adevărată în* $\mathfrak{L}_2$.

Demonstraţie ca cea a teoremei III.

Lăsăm pe seama cititorului enunţarea şi demonstrarea teoremelor pentru secvenţele de ordinul II analoge teoremelor V, VI, X, XI pentru schemele deductive de ordinul II.

---

[6]) Sau $1\subset f_{\mathfrak{B}_1}(t)\cup\ldots\cup f_{\mathfrak{B}_s}(t)$.

Exemple de secvențe valabile

$$(\mathfrak{A}) \Rightarrow (S\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$$

$$(S\mathfrak{A}\mathfrak{C}) \Rightarrow (SS\mathfrak{A}\mathfrak{B}S\mathfrak{B}\mathfrak{C})$$

$$(\mathfrak{A}) \Rightarrow (S\mathfrak{A}S\mathfrak{A}\mathfrak{A})$$

$$(S\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \Rightarrow (\mathfrak{A})$$

$$(SS\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \Rightarrow (SS\mathfrak{A}\mathfrak{C}S\mathfrak{B}\mathfrak{C})$$

$$(S\mathfrak{A}\mathfrak{C}) \Rightarrow (SS\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}, S\mathfrak{B}\mathfrak{C})$$

$$(A\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \Rightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$$

$$(S\mathfrak{A}A\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \Rightarrow (S\mathfrak{A}\mathfrak{B}, S\mathfrak{A}\mathfrak{C})$$

$$(SK\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \Rightarrow (S, \mathfrak{A}\mathfrak{B}, S\mathfrak{A}\mathfrak{C}).$$

TEOREMA XII. *Orice secvență de ordinul II este în același timp valabilă cu o secvență de forma 1.5 și ca una de forma 1.7.*

§ 6. ECHIVALENȚELE DE ORDINUL II

Vom defini echivalențele de ordinul II ca fiind șiruri de semne

1.10. $$(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow (\mathfrak{B})$$

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ fiind expresii.

Vom asocia unei echivalențe Σ o egalitate în $\mathfrak{L}_2 : \mathfrak{I}_\Sigma$ care este

2.13. $$f_{\mathfrak{A}}(t) = f_{\mathfrak{B}}(t)$$

și o funcție f_Σ care este

2.14. $$f_\Sigma(t) = f_{\mathfrak{A}}(t) \mp f_{\mathfrak{B}}(t).$$

Vom spune că

3.5. Echivalența de ordinul II : Σ este valabilă dacă $f_\Sigma(t)$ este constanta 1.

TEOREMA XIII. *Condiția necesară și suficientă ca echivalența Σ să fie valabilă este ca egalitatea $\mathfrak{I}_\Sigma$ să fie adevărată în $\mathfrak{L}_2$.*

Lăsăm pe seama cititorilor enunțarea și demonstrarea unor teoreme analoge teoremelor IV, V, VI, X, XI.

Exemple de echivalențe

$$(A\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \Leftrightarrow (A\mathfrak{B}\mathfrak{A}), \quad (K\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \Leftrightarrow (K\mathfrak{B}\mathfrak{A})$$

$$(AA\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \Leftrightarrow (A\mathfrak{A}A\mathfrak{B}\mathfrak{C}), \quad (KK\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \Leftrightarrow (K\mathfrak{A}K\mathfrak{B}\mathfrak{C})$$

$$(A\mathfrak{A}K\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \Leftrightarrow (\mathfrak{A}), \quad (K\mathfrak{A}A\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \Leftrightarrow (\mathfrak{A})$$

$$(A\mathfrak{A}K\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \Leftrightarrow (KA\mathfrak{A}\mathfrak{B}A\mathfrak{A}\mathfrak{C}), \quad (K\mathfrak{A}A\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \Leftrightarrow (AK\mathfrak{A}\mathfrak{B}K\mathfrak{A}\mathfrak{C})$$

$$(NN\mathfrak{A}) \Leftrightarrow (\mathfrak{A})$$

$$(AK\mathfrak{A}N\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \Leftrightarrow (\mathfrak{B}), \quad (KA\mathfrak{A}N\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \Leftrightarrow (\mathfrak{B}).$$

Să observăm că funcţia f_Σ definită prin 2.14 poate fi scrisă

$$f_\Sigma(t) = f_{E\mathfrak{A}\mathfrak{B}}(t)$$

$$f_\Sigma(t) = Nf_{B\mathfrak{A}\mathfrak{B}}(t)$$

deci

TEOREMA XIV. *Orice echivalenţă Σ este în acelaşi timp valabilă ca o echivalenţă de forma*

$$(\mathfrak{T}) \Leftrightarrow (A\mathfrak{A}N\mathfrak{A})$$

şi ca una de forma

$$(\mathfrak{W}) \Leftrightarrow (K\mathfrak{A}N\mathfrak{A}).$$

§ 7. SCHEME DEDUCTIVE DE ORDINUL III

Un şir de semne de forma

1.11. $$(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r) \equiv\!\rangle (\Omega)$$

sau de forma

1.12. $$\equiv\!\rangle (\Omega)$$

sau de forma

1.13. $$(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r) \equiv\!\rangle$$

în care $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r$, Ω sînt scheme deductive de ordinul II, va fi numit schemă deductivă de ordinul III.

Vom asocia unei scheme deductive $\mathfrak{S}$ de ordinul III o incluziune $\mathfrak{J}_{\mathfrak{S}}$ şi anume :

2.15. Dacă $\mathfrak{S}$ este o schemă de forma 1.11, atunci $\mathfrak{J}_{\mathfrak{S}}$ este

$$f_{\Sigma_1}(t) \cap \ldots \cap f_{\Sigma_r}(t) \subset f_\Omega(t).$$

2.16. Dacă $\mathfrak{S}$ este o schemă de forma 1.12, atunci $\mathfrak{J}_{\mathfrak{S}}$ este

$$f_\Omega(t) = 1.$$

2.17. Dacă $\mathfrak{S}$ este o schemă de forma 1.13, atunci $\mathfrak{J}_{\mathfrak{S}}$ este

$$f_{\Sigma_1}(t) \cap \ldots \cap f_{\Sigma_r} = 0.$$

Vom asocia fiecărei scheme deductive de ordinul III şi anume $\mathfrak{S}$ o funcţie $f_{\mathfrak{S}}(t)$ de variabilele ce corespund prin 2.1 nedeterminatelor ce apar în $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r$, Ω astfel :

2.18. Dacă $\mathfrak{S}$ este o schemă de forma 1.11, atunci $f_{\mathfrak{S}}$ este

$$f_{\mathfrak{S}}(t) = \bar{f}_{\Sigma_1}(t) \cup \ldots \cup \bar{f}_{\Sigma_r}(t) \cup f_\Omega(t).$$

2.19. Dacă $\mathfrak{S}$ este o schemă de forma 1.12, atunci $f_{\mathfrak{S}}$ este

$$f_{\mathfrak{S}}(t) = f_\Omega(t).$$

2.20. Dacă $\mathfrak{S}$ este o schemă de forma 1.13, atunci $f_{\mathfrak{S}}$ este

$$\cdot f_{\mathfrak{S}}(t) = \bar{f}_{\Sigma_1}(t) \cup \ldots \cup \bar{f}_{\Sigma_r}(t).$$

Vom introduce conceptul de schemă deductivă de ordinul III valabilă, prin:

3.6. O schemă deductivă de ordinul III și anume $\mathfrak{S}$ este numită schemă valabilă dacă funcția asociată $f_{\mathfrak{S}}(t)$ este constanta 1.

TEOREMA XV. *Condiția necesară și suficientă ca schema de ordinul III*

$$\Rrightarrow (\Omega)$$

să fie valabilă este ca schema de ordinul II

$$\Omega$$

să fie valabilă.

TEOREMA XVI. *Condiția necesară și suficientă ca schema de ordinul III* $\mathfrak{S}$ *să fie valabilă este ca incluziunea* $\mathfrak{J}_{\mathfrak{S}}$ *să fie valabilă.*

Să considerăm din nou schema 1.11 și să presupunem că ea este valabilă, deci incluziunea $\mathfrak{J}_{\mathfrak{S}}$:

$$f_{\Sigma_1}(t) \cap \ldots \cap f_{\Sigma_r}(t) \subset f_{\Omega}(t)$$

este valabilă.

Fie

$$\Sigma_i \equiv (\mathfrak{A}_{i1}, \ldots, \mathfrak{A}_{is_i}) \Rightarrow (\mathfrak{B}_i)$$

$$\Omega \equiv (\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_t) \Rightarrow (\mathfrak{D})$$

deci

$$f_{\Sigma_i}(t) = \bar{f}_{\mathfrak{A}_{i1}}(t) \cup \ldots \cup \bar{f}_{\mathfrak{A}_{is_i}}(t) \cup f_{\mathfrak{B}_i}(t)$$

$$f_{\Omega}(t) = \bar{f}_{\mathfrak{C}_1}(t) \cup \ldots \cup \bar{f}_{\mathfrak{C}_t}(t) \cup f_{\mathfrak{D}}(t).$$

Incluziunea $\mathfrak{J}_{\mathfrak{S}}$, ținînd seama că funcțiile au valorile în $\mathfrak{L}_2$, înseamnă că pentru un t dat, se pot întîmpla două cazuri:

1) Una cel puțin din valorile $f_{\Sigma_i}(t) = 0$; aceasta înseamnă că

$$f_{\mathfrak{A}_{i1}}(t) = \ldots f_{\mathfrak{A}_{is_i}}(t) = 1,$$

$f_{\mathfrak{B}_i}(t) = 0$, deci că incluziunea $\mathfrak{J}_{\Sigma_i}$:

$$f_{\mathfrak{A}_{i1}}(t) \cap \ldots \cap f_{\mathfrak{A}_{is_i}}(t) \subset f_{\mathfrak{B}_i}(t)$$

nu este satisfăcută, deci una cel puțin din incluziunile $\mathfrak{J}_{\Sigma_1}, \ldots, \mathfrak{J}_{\Sigma_r}$ este falsă.

2) Avem $f_{\Sigma_1}(t) = \ldots = f_{\Sigma_r}(t) = f_{\Omega}(t) = 1$ deci pentru fiecare i unul din cazurile de mai jos este valabil

2.1') $\quad f_{\mathfrak{A}_{i\varphi(i)}}(t) = 0$

2.2') $\quad f_{\mathfrak{B}_i}(t) = 1$

şi în plus unul din cazurile de mai jos este valabil

2.1″) există j cu $f_{\mathfrak{C}_j}(t) = 0$

2.2″) $f_{\mathfrak{D}}(t) = 1.$

Atît în cazul 2.1′) cît și în cazul 2.2′) avem

$$f_{\mathfrak{A}_{i1}}(t) \cap \ldots \cap f_{\mathfrak{A}_{is_i}}(t) \subset f_{\mathfrak{B}_i}(t)$$

deci $\mathfrak{J}_{\Sigma_i}$ este valabilă. Din 2.1″) ca și din 2.2″) avem

$$f_{\mathfrak{C}_1}(t) \cap \ldots \cap f_{\mathfrak{C}_t}(t) \subset f_{\mathfrak{D}}(t)$$

deci $\mathfrak{J}_\Omega$ este valabilă.

Deci în cazul 1 una din incluziunile $\mathfrak{J}_{\Sigma_1}, \ldots, \mathfrak{J}_{\Sigma_r}$ este falsă iar în cazul 2, toate incluziunile $\mathfrak{J}_{\Sigma_1}, \ldots, \mathfrak{J}_{\Sigma_r}$ sînt adevărate dar și $\mathfrak{J}_\Omega$ este adevărată. Putem deci afirma

TEOREMA XVII. *Condiția necesară și suficientă ca o schemă deductivă de ordinul III, 1.1^1, să fie valabilă este ca din incluziunile* $\mathfrak{J}_{\Sigma_1}, \ldots, \mathfrak{J}_{\Sigma_r}$ *să deducem în* $\mathfrak{L}_2$ *incluziunea* $\mathfrak{J}$.

§ 8. EXEMPLE DE SCHEME VALABILE DE ORDINUL III

(I) $$[(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r) \Rightarrow (\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_s)] \equiv\rangle$$
$$[(K \ldots K\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_r) \Rightarrow (A \ldots A\mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_s)].$$

Într-adevăr, dacă

$$\Sigma \equiv (\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r) \Rightarrow (\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_s)$$

$$\Omega \equiv (K \ldots K\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_r) \Rightarrow (A \ldots A\mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_s),$$

atunci

$$f_\Sigma(t) = \bar{f}_{\mathfrak{A}_1}(t) \cup \ldots \cup \bar{f}_{\mathfrak{A}_r}(t) \cup f_{\mathfrak{B}_1}(t) \cup \ldots \cup f_{\mathfrak{B}_s}(t)$$

$$f_\Omega(t) = \overline{f_{K \ldots K\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_r}(t)} \cup f_{A \ldots A\mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_s}(t)$$
$$= \overline{f_{\mathfrak{A}_i}(t) \cap \ldots \cap f_{\mathfrak{A}_r}(t)} \cup [f_{\mathfrak{B}_1}(t) \cup \ldots \cup f_{\mathfrak{B}_s}(t)]$$

deci

$$f_\Sigma(t) = f_\Omega(t)$$

deci

$$f_\Sigma(t) \subset f_\Omega(t) \text{ deci (I) şi } f_\Omega(t) \subset f_\Sigma(t) \text{ deci II}:$$

(II) $$[(K \ldots K\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_r) \Rightarrow (A \ldots A\mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{A}_s)] \equiv\rangle$$
$$[(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r) \Rightarrow (\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_s)].$$

Avem

(III) $$((\mathfrak{A}) \Rightarrow\ ) \equiv\rangle (\Rightarrow N\mathfrak{A})$$

(IV) $$(\Rightarrow (\mathfrak{A})) \equiv\rangle ((N\mathfrak{A}) \Rightarrow\ )$$

căci

$$f_{(\mathfrak{A}\Rightarrow)}(t) = \bar{f}_{\mathfrak{A}}(t) = f_{N\mathfrak{A}}(t) = f_{(\Rightarrow(N\mathfrak{A}))}(t)$$

$$f_{(\Rightarrow(\mathfrak{A}))}(t) = f_{\mathfrak{A}}(t) = \bar{\bar{f}}_{\mathfrak{A}}(t) = \bar{f}_{N\mathfrak{A}}(t)$$

$$= f_{(N\mathfrak{A}\Rightarrow)}(t)$$

(V) $$[(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) \Rightarrow (\mathfrak{C})] \equiv\rangle [(\mathfrak{A}) \Rightarrow (C\mathfrak{B}\mathfrak{C})]$$

căci cu

$$\Sigma \equiv (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \Rightarrow (\mathfrak{C})$$

$$\Omega \equiv (\mathfrak{A}) \Rightarrow (C\mathfrak{B}\mathfrak{C})$$

avem

$$f_{\Sigma}(t) = \bar{f}_{\mathfrak{A}}(t) \cup \bar{f}_{\mathfrak{B}}(t) \cup f_{\mathfrak{C}}(t)$$

$$f_{\Omega}(t) = \bar{f}_{\mathfrak{A}}(t) \cup f_{C\mathfrak{B}\mathfrak{C}}(t)$$

$$= \bar{f}_{\mathfrak{A}}(t) \cup [f_{\mathfrak{C}}(t) : f_{\mathfrak{B}}(t)]$$

$$= \bar{f}_{\mathfrak{A}}(t) \cup \bar{f}_{\mathfrak{B}}(t) \cup f_{\mathfrak{C}}(t)$$

căci în $\mathfrak{L}_2 : \alpha : \beta = \alpha \cup \bar{\beta}$.

Am dovedit și

(VI) $$[(\mathfrak{A}) \Rightarrow (C\mathfrak{B}\mathfrak{C})] \equiv\rangle [(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) \Rightarrow (\mathfrak{C})]$$

(VII) $$[(\mathfrak{A}) \Rightarrow (\mathfrak{B},\mathfrak{C})] \equiv\rangle [(S\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \Rightarrow (\mathfrak{C})]$$

(VIII) $$[(S\mathfrak{A}B) \Rightarrow (\mathfrak{C})] \equiv\rangle [(\mathfrak{A}) \Rightarrow (\mathfrak{B},\mathfrak{C})]$$

căci cu

$$\Sigma \equiv (\mathfrak{A}) \Rightarrow (\mathfrak{B},\mathfrak{C})$$

$$\Omega \equiv (S\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \Rightarrow (\mathfrak{C})$$

avem

$$f_{\Sigma}(t) = \bar{f}_{\mathfrak{A}}(t) \cup f_{\mathfrak{B}}(t) \cup f_{\mathfrak{C}}(t)$$

$$f_{\Omega}(t) = \overline{f_{S\mathfrak{A}\mathfrak{B}}(t)} \cup f_{\mathfrak{C}}(t)$$

$$= \overline{f_{\mathfrak{A}}(t) \cap \overline{f_{\mathfrak{B}}(t)}} \cup f_{\mathfrak{C}}(t)$$

$$= \bar{f}_{\mathfrak{A}}(t) \cup f_{\mathfrak{B}}(t) \cup f_{\mathfrak{C}}(t)$$

(IX) $$(\Rightarrow \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \Rightarrow) \equiv\rangle (\Omega)$$

Ω fiind o schemă de ordinul II oarecare.

Cu

$$\Sigma_1 \equiv \Rightarrow \mathfrak{A}$$

$$\Sigma_2 \equiv \mathfrak{A} \Rightarrow$$

avem pentru schema dată $\mathfrak{S}$

$$f_{\mathfrak{S}}(t) = \bar{f}_{\Sigma 1}(t) \cup \bar{f}_{\Sigma 2}(t) \cup f_{\Omega}(t)$$

$$f_{\Sigma 1}(t) = f_{\mathfrak{A}}(t)$$

$$f_{\Sigma_2}(t) = \bar{f}_{\mathfrak{A}}(t)$$

deci

$$f_{\mathfrak{S}}(t) = \bar{f}_{\mathfrak{A}}(t) \cup \bar{\bar{f}}_{\mathfrak{A}}(t) \cup f_{\Omega}(t)$$

$$= 1.$$

§ 9. SCHEMELE FUNDAMENTALE

În acest paragraf vom dovedi cîteva scheme deductive de ordinul III ce joacă un rol fundamental. $\Sigma, \ldots, \Omega, \ldots$ vor fi scheme deductive sau secvențe sau echivalențe de ordinul II, $\mathfrak{A}, \ldots \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ vor fi expresii; dacă $r = 0$, atunci $(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r)$ este mulțimea vidă.

Schema extracției ($\mathrm{Extr}_{\mathrm{III}}$) este

$$(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r) \Rightarrow (\Sigma_i).$$

Într-adevăr,

$$f_{\Sigma 1}(t) \cap \ldots \cap f_{\Sigma_r}(t) \subset f_{\Sigma_i}(t).$$

Schema permutării premiselor ($\mathrm{Perm}_{\mathrm{III}}$)

$$[(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r) \Rightarrow (\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_s)] \equiv\!> $$

$$[(\mathfrak{A}_{\varphi(1)}, \ldots, \mathfrak{A}_{\varphi(r)}) \Rightarrow (\mathfrak{B}_{\psi(1)}, \ldots, \mathfrak{B}_{\psi(s)})].$$

Într-adevăr,

$$f_{\mathfrak{A}_1}(t) \cap \ldots \cap f_{\mathfrak{A}_r}(t) \text{ și } f_{\mathfrak{B}_1}(t) \cup \ldots \cup f_{\mathfrak{B}_s}(t)$$

sînt comutative.

Schema întăririi premiselor (Renf $\mathrm{a}_{\mathrm{III}}$) *și schema întăririi concluziilor*[7] (Renf $\mathrm{c}_{\mathrm{III}}$) sînt schemele

$$[(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r) \Rightarrow (\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_s)] \equiv\!> [(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r) \Rightarrow (\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_s)]$$

$$[(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r) \Rightarrow (\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_s)] \equiv\!> [(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r) \Rightarrow (\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_s)]$$

le se demonstrează grație incluziunilor

$$f_{\mathfrak{A}_0}(t) \cap f_{\mathfrak{A}_1}(t) \cap \ldots \cap f_{\mathfrak{A}_r}(t) \subset f_{\mathfrak{A}_1}(t) \cap \ldots \cap f_{\mathfrak{A}_r}(t)$$

$$f_{\mathfrak{B}_1}(t) \cup \ldots \cup f_{\mathfrak{B}_s}(t) \subset f_{\mathfrak{B}_0}(t) \cup f_{\mathfrak{B}_1}(t) \cup \ldots \cup f_{\mathfrak{B}_s}(t).$$

Din prima se deduce că

$$f_{\mathfrak{A}_1}(t) \cap \ldots \cap f_{\mathfrak{A}_r}(t) \subset f_{\mathfrak{B}_1}(t) \cup \ldots \cup f_{\mathfrak{B}_s}(t)$$

implică

$$f_{\mathfrak{A}_0}(t) \cap f_{\mathfrak{A}_1}(t) \cap \ldots \cap f_{\mathfrak{A}_r}(t) \subset f_{\mathfrak{A}_1}(t) \cup \ldots \cup f_{\mathfrak{A}_r}(t)$$

---

[7] De fapt schema Renf $\mathrm{c}_{\mathrm{III}}$ reprezintă o *slăbire* a concluziei.

iar din a două se deduce că ea implică

$$f_{\mathfrak{A}_1}(t) \cap \ldots \cap f_{\mathfrak{A}_r}(t) \subset f_{\mathfrak{B}_0}(t) \cup f_{\mathfrak{B}_1}(t) \cup \ldots \cup f_{\mathfrak{B}_s}(t).$$

Schema repetării premiselor (Rep $\mathrm{a}_{\mathrm{III}}$) *și schema repetării concluziilor* (Rep $\mathrm{c}_{\mathrm{III}}$).

$$[(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r) \Rightarrow (\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_s)] \Rrightarrow [(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r) \Rightarrow (\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_s)]$$

$$[(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r) \Rightarrow (\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_s)] \Rrightarrow [(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r) \Rightarrow (\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_s)]$$

Demonstrația este imediată și se bazează pe idempotența lui „$\cup$" și „$\cup$".

Schemele înlănțuirii (Ench $_{\mathrm{III}}{}^*$ și Ench $_{\mathrm{III}}{}^{**}$)

$$[(\mathfrak{A}_{11}, \ldots, \mathfrak{A}_{1r_1}) \Rightarrow (\mathfrak{B}_1), \ldots, (\mathfrak{A}_{s1}, \ldots, \mathfrak{A}_{sr_s}) \Rightarrow (\mathfrak{B}_s),$$
$$(\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_s, \mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_t) \Rightarrow (\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_w)]$$
$$\Rrightarrow [(\mathfrak{A}_{11}, \ldots, \mathfrak{A}_{sr_s}, \mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_t) \Rightarrow (\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_w)]$$

$$[(\mathfrak{A}_1) \Rightarrow (\mathfrak{B}_{11}, \ldots, \mathfrak{B}_{1r_1}), \ldots, (\mathfrak{A}_s) \Rightarrow (\mathfrak{B}_{s1}, \ldots, \mathfrak{B}_{sr_s}),$$
$$(\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_t) \Rightarrow (\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_w, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_s)]$$
$$\Rrightarrow [(\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_s) \Rightarrow (\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_w, \mathfrak{B}_{11}, \ldots, \mathfrak{B}_{sr_s})].$$

Într-adevăr, din

$$f_{\mathfrak{A}_{11}}(t) \cap \ldots \cap f_{\mathfrak{A}_{1r_1}}(t) \subset f_{\mathfrak{B}_1}(t).$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$f_{\mathfrak{A}_{s1}}(t) \cap \ldots \cap f_{\mathfrak{A}_{sr_s}}(t) \subset f_{\mathfrak{B}_s}(t)$$

$$f_{\mathfrak{B}_1}(t) \cap \ldots \cap f_{\mathfrak{B}_s}(t) \cap f_{\mathfrak{C}_1}(t) \cap \ldots \cap f_{\mathfrak{C}_w}(t) \subset f_{\mathfrak{D}}(t)$$

deduc

$$f_{\mathfrak{A}_{11}}(t) \cap \ldots \cap f_{\mathfrak{A}_{sr_s}}(t) \cap f_{\mathfrak{C}_1}(t) \cap \ldots \cap f_{\mathfrak{C}_w}(t) \subset f_{\mathfrak{D}}(t)$$

iar din

$$f_{\mathfrak{A}_1}(t) \subset f_{\mathfrak{B}_{11}}(t) \cap \ldots \cap f_{\mathfrak{B}_{1r_1}}(t)$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$f_{\mathfrak{A}_s}(t) \subset f_{\mathfrak{B}_{s1}} \cap \ldots \cap f_{\mathfrak{B}_{sr_s}}(t)$$

$$f_{\mathfrak{C}_1}(t) \cap \ldots \cap f_{\mathfrak{C}_t}(t) \subset f_{\mathfrak{D}_1}(t) \cup \ldots \cup f_{\mathfrak{D}_w}(w) \cup f_{\mathfrak{A}_1}(t) \cup \ldots \cup f_{\mathfrak{A}_s}(t)$$

deduc

$$f_{\mathfrak{C}_1}(t) \cap \ldots \cap f_{\mathfrak{C}_t}(t) \subset f_{\mathfrak{D}_1}(t) \cup \ldots \cup f_{\mathfrak{D}_w}(t) \cup f_{\mathfrak{B}_1}(t) \cup \ldots \cup f_{\mathfrak{B}_{sr_s}}(t).$$

Schemele de echivalență ($\mathrm{Aeq}_{\mathrm{III}}$ 1, $\mathrm{Aeq}_{\mathrm{III}}$ 2, $\mathrm{Aeq}_{\mathrm{III}}$ 3)

$$(\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B}) \Rrightarrow (\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B})$$

$$(\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B}) \Rrightarrow (\mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A})$$

$$(\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}, \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A}) \Rrightarrow (\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B}).$$

Într-adevăr,

$$f_{\mathfrak{A}}(t) \widetilde{+} j_{\mathfrak{B}}(t) \subset f_{\mathfrak{B}}(t) : f_{\mathfrak{A}}(t)$$

$$f_{\mathfrak{A}}(t) \widetilde{+} f_{\mathfrak{B}}(t) \subset f_{\mathfrak{A}}(t) : f_{\mathfrak{B}}(t)$$

din tabloul din § 1; din $f_{\mathfrak{A}}(t) \subset f_{\mathfrak{B}}(t)$ şi $f_{\mathfrak{B}}(t) \subset f_{\mathfrak{A}}(t)$ deduc în $\mathfrak{L}_2 : f_{\mathfrak{A}}(t) = f_{\mathfrak{B}}(t)$.

§ 10. ECHIVALENŢE DE ORDINUL III

1.14. Un şir de semne de forma

$$(\Sigma)\langle\equiv\rangle(\Omega)$$

în care Σ, Ω sînt scheme deductive de ordinul II va fi numit o echivalenţă de ordinul III.

2.21. Dacă $\mathfrak{S}$ este o echivalenţă de ordinul III de tip 1.14, numim $\mathfrak{J}_{\mathfrak{S}}$ egalitate asociată

$$f_{\Sigma}(t) = f_{\Omega}(t).$$

2.22. Dacă $\mathfrak{S}$ este o echivalenţă de ordinul III, numim $f_{\mathfrak{S}}$ funcţia

$$f_{\mathfrak{S}}(t) = f_{\Sigma}(t) \widetilde{+} f_{\Omega}(t).$$

3.7. O echivalenţă de ordinul III $\mathfrak{S}$ va fi calificată drept valabilă pacă $f_{\mathfrak{S}}(t)$ este constanta 1.

TEOREMA XVIII. *Echivalenţa de ordinul III $\mathfrak{S}$ este valabilă dacă egalitatea asociată $\mathfrak{J}_{\mathfrak{S}}$ este adevărată în $\mathfrak{L}_2$.*

TEOREMA XIX. *Echivalenţa de ordinul III $\mathfrak{S}$ este valabilă dacă schemele deductive de ordinul III*

$$(\Sigma)\equiv\rangle(\Omega)$$

$$(\Omega)\equiv\rangle(\Sigma)$$

sînt amîndouă valabile.

TEOREMA XX. *Echivalenţa de ordinul III $\mathfrak{S}$ este valabilă dacă incluziunea $\mathfrak{J}_{\Sigma}$ echivalează cu $\mathfrak{J}$.*

Teoremele X, XIII, XV se pot enunţa astfel

TEOREMA XXI. *Dată fiind o schemă (sau o secvenţă sau o echivalenţă) Σ de ordinul III, există o expresie $\mathfrak{T}$ şi o expresie $\mathfrak{A}$ astfel ca*

$$(\Sigma)\langle\equiv\rangle(\Rightarrow \mathfrak{T})$$

$$(\Sigma)\langle\equiv\rangle(\mathfrak{A} \Rightarrow)$$

să fie valabile.

§ 11. SECVENŢE DE ORDINUL III

Un şir de semne de forma 1.13, 1.15, 1.16

$$(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_s) \equiv\rangle (\Omega_1, \ldots, \Omega_t) \qquad 1.15$$

$$\equiv\rangle (\Omega_1, \ldots, \Omega_t) \qquad 1.16$$

se va numi o secvenţă de ordinul III.

2.23. Dacă $\mathfrak{S}$ este o secvenţă de ordinul III de tip 1.15, numim $\mathfrak{J}_{\mathfrak{S}}$ incluziunea

$$f_{\Sigma_1}(t) \cap \ldots \cap f_{\Sigma_s}(t) \subset f_{\Omega_1}(t) \cup \ldots \cup f_{\Omega_t}(t).$$

2.24. Dacă $\mathfrak{S}$ este o secvenţă de ordinul III de tip 1.13, numim $\mathfrak{J}_{\mathfrak{S}}$ egalitatea

$$f_{\Sigma_1}(t) \cap \ldots \cap f_{\Sigma_s}(t) = 0.$$

2.25. Dacă $\mathfrak{S}$ este o secvenţă de ordinul III de tip 1.16, numim $\mathfrak{J}_{\mathfrak{S}}$ egalitatea

$$f_{\Sigma_1}(t) \cup \ldots \cup f_{\Sigma_t}(t) = 1.$$

2.26. Dacă $\mathfrak{S}$ este o secvenţă de ordinul III de tip 1.15, numim $f_{\mathfrak{S}}(t)$ funcţia

$$f_{\mathfrak{S}}(t) = \bar{f}_{\Sigma_1}(t) \cup \ldots \cup \bar{f}_{\Sigma_r}(t) \cup f_{\Omega_1}(t) \cup \ldots \cup f_{\Omega_t}(t).$$

2.27. Dacă $\mathfrak{S}$ este o secvenţă de ordinul III de tip 1.13, numim $f_{\mathfrak{S}}(t)$ funcţia

$$f_{\mathfrak{S}}(t) = \bar{f}_{\Sigma_1}(t) \cup \ldots \cup \bar{f}_{\Sigma_s}(t).$$

2.28. Dacă $\mathfrak{S}$ este o secvenţă de ordinul III de tip 1.16, numim $f_{\mathfrak{S}}(t)$ funcţia

$$f_{\mathfrak{S}}(t) = f_{\Omega_1}(t) \cup \ldots \cup f_{\Omega_t}(t).$$

3.8. O secvenţă de ordinul III $\mathfrak{S}$ va fi calificată drept valabilă dacă $f_{\mathfrak{S}}(t)$ este constanta 1.

TEOREMA XXII. *Secvenţa $\mathfrak{S}$ este valabilă dacă incluziunea asociată $\mathfrak{J}_{\mathfrak{S}}$ este adevărată în $\mathfrak{L}_2$.*

§ 12. SCHEMELE DE ORDINUL *n*

Vom introduce schemele deductive ($s \leqslant 1$) şi secvenţele ($s > 1$) de ordinul n prin recurenţă; de asemenea echivalenţele de ordinul n. Pentru $n = 2,3$ acestea au fost definite în paragrafele precedente.

Numim secvență de ordinul $n + 1$ un șir de semne de forma

1.17. $$(S_1^n, \ldots, S_r^n) \xrightarrow[n+1]{} (T_1^n, \ldots, T_s^n)$$

sau

1.18. $$\xrightarrow[n+1]{} (T_1^n, \ldots, T_s^n)$$

sau

1.19. $$(S_1^n, \ldots, S_r^n) \xrightarrow[n+1]{},$$

unde $S_1^n, \ldots, T_1^n, \ldots$ sînt secvențe de ordinul n sau echivalențe de ordinul n.

1.20. Șirurile 1.19 precum și acele șiruri 1.17, 1.18 cu $s = 1$ vor fi numite scheme deductive de ord. n.

Numim echivalențe de ordinul $n + 1$ un șir de semne

1.20. $$(S^n) \underset{n+1}{\longleftrightarrow} (T^n),$$

unde S^n, T^n sînt secvențe de ordinul n sau echivalențe de ordinul n.

Vom defini relația asociată I_W.

2.29. Dacă W^{n+1} este schema 1.15, atunci $I_{W^{n+1}}$ este

$$f_{S_1^n}(t) \cap \ldots \cap f_{S_r^n}(t) \subset f_{T_1^n}(t) \cup \ldots \cup f_{T_s^n}(t).$$

2.30. Dacă W^{n+1} este schema 1.16, atunci $I_{W^{n+1}}$ este

$$f_{T_1^n}(t) \cup \ldots \cup f_{T_s^n}(t) = 1.$$

2.31. Dacă W^{n+1} este schema 1.17, atunci $I_{W^{n+1}}$ este

$$f(t)_{S_1^n} \cap \ldots \cap f_{S_r^n}(t) = 0.$$

2.32. Dacă W^{n+1} este schema 1.18, atunci $I_{W^{n+1}}$ este

$$f_{S^n}(t) = f_{T^n}(t).$$

Vom defini funcția asociată $f_{W^{n+1}}(t)$ astfel :

2.33. Dacă W^{n+1} este 1.17, atunci

$$f_{W^{n+1}}(t) = \overline{f_{S_1^n}(t)} \cup \ldots \cup \overline{f_{S_r^n}(t)} \cup f_{T_1^n}(t) \cup \ldots \cup f_{T_s^n}(t).$$

2.34. Dacă W^{n+1} este 1.18, atunci

$$f_{W^{n+1}}(t) = f_{T_1^n}(t) \cup \ldots \cup f_{T_s^n}(t).$$

2.35. Dacă W^{n+1} este 1.19, atunci

$$f_{W^{n+1}}(t) = \overline{f_{S_1^n}(t)} \cup \ldots \cup \overline{f_{S_r^n}(t)}.$$

2.36. Dacă W^{n+1} este 1.20, atunci

$$f_{W^{n+1}}(t) = f_{S^n}(t) \,\widetilde{+}\, f_{T^n}(t).$$

Vom defini secvențele și echivalențele valabile prin :

3.9. Secvența (echivalențe) S^n este valabilă dacă $f_{S^n}(t)$ este constanta 1.

TEOREMA XXIII. *Condiția necesară și suficientă ca schema* $\xrightarrow[n+1]{} S^n$ *să fie valabilă este ca* S^n *să fie valabilă.*

TEOREMA XXIV. *Condiția necesară și suficientă ca* W^{n+1} *dată de 1.17—1.20 să fie valabilă este ca* $\mathfrak{J}w^{n+1}$ *dat de 2.29—2.32 să fie valabilă.*

TEOREMA XXV. *Condiția necesară și suficientă ca* W^{n+1} *dată de 1.17 să fie valabilă este ca ori de cîte ori* $S_1^n, \ldots, S_r^n$ *sînt valabile,* $\xrightarrow[n+1]{} (T_1^n, \ldots, T_s^n)$ *să fie valabilă.*

TEOREMA XXVI. *Condiția necesară și suficientă ca*

$$(S_1^n, \ldots, S_r^n) \xrightarrow[n+1]{} (T_1^n, \ldots, T_s^n)$$

să fie valabilă este ca

$$\{(\xrightarrow[n+1]{} S_1^n), \ldots, (\xrightarrow[n+1]{} S_r^n)\} \xrightarrow[n+2]{} \{(\xrightarrow[n+1]{} T_1^n), \ldots, (\xrightarrow[n+1]{} T_s^n)\}.$$

Într-adevăr, fie

$$P_i^{n+1} \equiv \xrightarrow[n+1]{} S_i^n$$

$$Q_i^{n+1} \equiv \xrightarrow[n+1]{} T_i^n$$

$$V^{n+1} \equiv [(S_1^n, \ldots, S_s^n) \xrightarrow[n+1]{} (T_1^n, \ldots, T_s^n)]$$

$$W^{n+2} \equiv [(\xrightarrow[n+1]{} S_1^n, \ldots, \xrightarrow[n+1]{} S_r^n) \xrightarrow[n+2]{} (\xrightarrow[n+1]{} T_1^n, \ldots, \xrightarrow[n+1]{} T_s^n)]$$

și

$$f_{V^{n+1}}(t) = \overline{f_{S_1^n}(t)} \cup \ldots \cup \overline{f_{S_r^n}(t)} \cup f_{T_1^n}(t) \cup \ldots \cup f_{T_s^n}(t)$$

$$f_{W^{n+2}} = \overline{f_{P_1^{n+1}}(t)} \cup \ldots \cup \overline{f_{P_r^{n+1}}(t)} \cup f_{Q_1^{n+1}}(t) \cup \ldots \cup f_{Q_s^{n+1}}(t).$$

Dar

$$f_{P_i^{n+1}}(t) = f_{S_i^n}(t)$$

$$f_{Q_i^{n+1}}(t) = f_{T_i^n}(t)$$

deci

$$f_{W^{n+2}}(t) = f_{V^{n+1}}(t).$$

Din demonstrație rezultă

TEOREMA XXVII.

$$\{\xrightarrow[n+2]{} [(S_1^n, \ldots, S_r^n) \xrightarrow[n+1]{} (T_1^n, \ldots, T_s^n)]\} \xleftrightarrow[n+3]{}$$

$$\{[(\xrightarrow[n+1]{} S_1^n), \ldots, (\xrightarrow[n+1]{} S_r^n)] \xrightarrow[n+2]{} [(\xrightarrow[n+1]{} T_1^n), \ldots, (\xrightarrow[n+1]{} T_s^n)]\}.$$

TEOREMA XXVIII. *Dată fiind o schemă de ordinul n :* S^n, *există o expresie* $\mathfrak{T}$ *astfel ca*

$$(S^n \xleftrightarrow[n+1]{} (\xrightarrow[n]{} \ldots \Rrightarrow) \Rightarrow \mathfrak{T})$$

să fie valabilă.

TEOREMA XXIX. *Schemele*

$$(S^n \xrightarrow[n+1]{} \xrightarrow[n+2]{} \ldots \xrightarrow[n+2r]{}) \xleftrightarrow[n+2r+1]{} (\xrightarrow[n+2r]{} \ldots \xrightarrow[n+2]{} \xrightarrow[n+1]{} S^n)$$

$$(S^n \xrightarrow[n+1]{} \xrightarrow[n+2]{} \ldots \xrightarrow[n+2r+1]{}) \xleftrightarrow[n+2r+2]{} (\xrightarrow[n+2r+1]{} \ldots \xrightarrow[n+2]{} (S^n \xrightarrow[n+1]{}))$$

$$(S^n \xrightarrow[n+1]{} \xrightarrow[n+2]{} \ldots \xrightarrow[n+2r+1]{}) \xleftrightarrow[n+2r+2]{} ((\xrightarrow[n+2r]{} \ldots \xrightarrow[n+1]{} S^n) \xrightarrow[n+2r+1]{})$$

sînt valabile.

TEOREMA XXX. *Schemele*

$$(\xrightarrow[n+2]{} (S^n \xrightarrow[n+1]{})) \xleftrightarrow[n+3]{} ((\xrightarrow[n+1]{} S^n) \xrightarrow[n+2]{})$$

$$((\xrightarrow[n+1]{} S^n) \xrightarrow[n+2]{} (\xrightarrow[n+1]{} T^n)) \xleftrightarrow[n+3]{} ((T^n \xrightarrow[n+1]{}) \xrightarrow[n+2]{} (S^n \xrightarrow[n+1]{}))$$

$$((\xrightarrow[n+1]{} S^n) \xrightarrow[n+2]{} (T^n \xrightarrow[n+1]{})) \xleftrightarrow[n+3]{} ((\xrightarrow[n+1]{} T^n) \xrightarrow[n+2]{} (S^n \xrightarrow[n+1]{}))$$

$$\xrightarrow[n+2]{} (\xrightarrow[n+1]{} S^n, S^n \xrightarrow[n+1]{})$$

$$(\xrightarrow[n+1]{} S^n, S^n \xrightarrow[n+1]{}) \xrightarrow[n+2]{}$$

$$((\xrightarrow[n+1]{} S^n) \xrightarrow[n+2]{} (T^{n+1}), (S^n \xrightarrow[n+1]{}) \xrightarrow[n+2]{} (T^{n+1})) \xrightarrow[n+3]{} (\xrightarrow[n+2]{} T^{n+1})$$

$$((S^{n+1}) \xrightarrow[n+2]{} (\xrightarrow[n+1]{} T^n), (S^{n+1}) \xrightarrow[n+2]{} (T^n \xrightarrow[n+1]{})) \xrightarrow[n+3]{} (S^{n+1} \xrightarrow[n+2]{})$$

sînt valabile.

§ 13. SCHEMELE FUNDAMENTALE

Schemele date în § 10 au analoge de tip superior a căror valabilitate se va demonstra ca în § 10.

Schema extracției (Extr_{n+1})

$$(S_1^n, \ldots, S_r^n) \xrightarrow[n+1]{} (S_i^n).$$

Schema permutării (Perm_{n+2})

$$[(S_1^n, \ldots, S_r^n) \xrightarrow[n+1]{} (T_1^n, \ldots, T_s^n)] \xrightarrow[n+2]{}$$

$$[(S_{\varphi(1)}^n, \ldots, S_{\varphi(r)}^n) \xrightarrow[n+1]{} (T_{\psi(1)}, \ldots, T_{\psi(s)})].$$

Schema întăririi în antecedent (Renf a_{n+2}) și *în consecvent* (Renf c_{n+2})

$$[(S_1^n, \ldots, S_r^n) \xrightarrow[n+1]{} (T_1^n, \ldots, T_s^n)] \xrightarrow[n+2]{} [(S_0^n, S_1^n, \ldots, S_r^n) \xrightarrow[n+1]{} (T_1^n, \ldots, T_s^n)]$$

$$[(S_1^n, \ldots, S_r^n) \xrightarrow[n+1]{} (T_1^n, \ldots, T_s^n)] \xrightarrow[n+2]{} [(S_1^n, \ldots, S_r^n) \xrightarrow[n+1]{} (T_0^n, T_1^n, \ldots, T_s^n)].$$

Schema repetării în antecedent (Rep a_{n+2}) *și în consecvent* (Rep c_{n+2})

$$[(S_0^n, S_0^n, S_1^n, \ldots, S_r^n) \xrightarrow[n+1]{} (T_1^n, \ldots, T_s^n)] \xrightarrow[n+2]{}$$

$$[(S_0^n, S_1^n, \ldots, S_r^n) \xrightarrow[n+1]{} (T_1^n, \ldots, T_s^n)]$$

$$[(S_1^n, \ldots, S_r^n) \xrightarrow[n+1]{} (T_0^n, T_0^n, T_1^n, \ldots, T_s^n)] \xrightarrow[n+2]{}$$

$$[(S_1^n, \ldots, S_r^n) \xrightarrow[n+1]{} (T_0^n, T_1^n, \ldots, T_s^n)]$$

Schemele de înlănțuire ($\mathrm{Ench}_{n+2}{}^*$, $\mathrm{Ench}_{n+2}{}^{**}$).

$$[(S_{11}^n, \ldots, S_{1r_1}^n) \xrightarrow[n+1]{} (T_1^n), \ldots, (S_{s1}^n, \ldots, S_{sr_s}^n) \xrightarrow[n+1]{} (T_s^n),$$

$$(T_1^n, \ldots, T_s^n, V_1^n, \ldots, V_t^n) \xrightarrow[n+1]{} (W_1^n \ldots, W_W^n)]$$

$$\xrightarrow[n+2]{} [(S_{11}^n, \ldots, S_{sr_s}^n, V_1^n, \ldots, V_t^n) \xrightarrow[n+1]{} (W_1^n, \ldots, W_W^n)]$$

$$[(S_1^n) \xrightarrow[n+1]{} (T_{11}^n, \ldots, T_{1r_1}^n), \ldots, (S_s^n) \xrightarrow[n+1]{} (T_{s1}^n, \ldots, T_{sr_s}^n),$$

$$(V_1^n, \ldots, V_t^n) \xrightarrow[n+1]{} (W_1^n, \ldots, W_W^n, S_1^n, \ldots, S_s^n)]$$

$$\xrightarrow[n+2]{} [(V_1^n, \ldots, V_t^n) \xrightarrow[n+1]{} (W_1^n, \ldots, W_W^n\ T_{11}^n, \ldots, T_{sr_s}^n)] .$$

Schemele echivalenței

$$(S^n \xleftrightarrow[n+1]{} T^n) \xrightarrow[n+2]{} (S^n \xrightarrow[n+1]{} T^n) \qquad \mathrm{Aeq}_{n+2}\,1$$

$$(S^n \xleftrightarrow[n+1]{} T^n) \xrightarrow[n+2]{} (T^n \xrightarrow[n+1]{} S^n) \qquad \mathrm{Aeq}_{n+2}\,2$$

$$(S^n \xrightarrow[n+1]{} T^n,\ T^n \xrightarrow[n+1]{} S^n) \xrightarrow[n+2]{} (S^n \xleftrightarrow[n+1]{} T^n) \qquad \mathrm{Aeq}_{n+2}\,3.$$

Vom menționa cele două scheme de înlănțuire simplă :

$$[(S_1^n, \ldots, S_r^n) \xrightarrow[n+1]{} (T^n), (T^n, V_1^n, \ldots, V_t^n) \xrightarrow[n+1]{} (W_1^n, \ldots, W_W^n)]$$

$$\xrightarrow[n+2]{} [(S_1^n; \ldots, S_r^n, V_1^n, \ldots, V_t^n) \longrightarrow (W_1^n, \ldots, W_W^n)] \qquad (\mathrm{Ench}_{n+2}\,1)$$

$$[(S^n \xrightarrow[n+1]{} (T_1^n, \ldots, T_r^n), (V_1^n, \ldots, V_t^n) \xrightarrow[n+1]{} (W_1^n, \ldots, W_W^n, S)]$$

$$\xrightarrow[n+2]{} [(V_1^n, \ldots, V_t^n) \xrightarrow[n+1]{} (W_1^n, \ldots, W_W^n, T_1^n, \ldots, T_r^n)] \; (\mathrm{Ench}_{n+2}\,2)$$

care sînt cazuri particulare ale lui $\mathrm{Ench}_{n+2}{}^*$ și $\mathrm{Ench}_{n+2}{}^{**}$.

§ 14. DEMONSTRAȚII DIN IPOTEZE

Un șir de secvențe

$$(^*) \qquad S_1^n, \ldots, S_s^n$$

este o demonstrație din ipotezele $H_1^n, \ldots, H_r^n$ dacă fiece S_i^n este de una din formele :

1. S_i^n este una din $H_1^n, \ldots, H_r^n$
2. S_i^n este o schemă valabilă
3. Există un $j < i$ astfel ca $S_j^n \xrightarrow[n+1]{} S_i^n$ să fie Extr_{n+1}, Perm_{n+1}, Renf a_{n+1}, Renf c_{n+1}, Rep a_{n+1}, Rep c_{n+1}, Aeq_{n+1} 1, Aeq_{n+1} 2.
4. Există $h < i$, $k < i$ astfel ca $(S_h^n, S_k^n) \xrightarrow[n+1]{} (S_i^n)$ să fie Ench_{n+1} Ench_{n+1} 2, Aeq_{n+1} 3.

Se deduce că:

Dacă șirul (*) *este o demonstrație din ipotezele* $H_1^n, \ldots, H_r^n$, *atunci*

$$f_{H_1^n}(t) \cap \ldots \cap f_{H_r^n}(t) \subset f_{S_i^n}(t) \tag{**}$$

căci această proprietate este adevărată dacă S_i^n este una din H_i^n din proprietățile implicației, dacă S_i^n este o schemă valabilă căci $f_{S_i^n}(t) = 1$. Dacă există $j < i$ astfel ca $S_j^n \xrightarrow[n+1]{} S_i^n$ să fie Extr_{n+1} $S_j^n \equiv S_i^n$, dacă este Perm_{n+1}, $\text{Renf}_{n+1}\, a$, $\text{Renf}_{n+1}\, c$, Rep a_{n+1}, Rep c_{n+1}, atunci din definiția lui $f_{S_j^n}(t)$ se vede că $f_{S_i^n}(t) = f_{S_j^n}(t)$. Dacă $S_j^n \xrightarrow[n+1]{} S_i^n$ este Aeq_{n+1}, Aeq_{n+2} din $\alpha \mathbin{\widetilde{+}} \beta \subset \alpha : \beta$ și din tranzitivitatea lui „C" se deduce proprietate.

Dacă $(S_h^n, S_k^n) \xrightarrow[n+1]{} (S_i^n)$ este Ench_{n+1} 1, Ench_{n+1} 2, Aeq_{n+1} 3 din

$$f_{H_1^n}(t) \cap \ldots\ldots \cap f_{H_r^n}(t) \subset f_{S_h^n}(t)$$

$$f_{H_1^n}(t) \cap \ldots \cap f_{H_r^n}(t) \subset f_{S_h^n}(t)$$

și din faptul că schemele

$$S_h^n \equiv (T_1^{n-1}, \ldots, T_l^{n-1}) \xrightarrow[n]{} (U^{n-1}) \text{ și}$$

$$S_k^n \equiv (U^{n-1}, V_1^{n-1}, \ldots, V_r^{n-1}) \xrightarrow[n]{} (W_1^n, \ldots, W_W^n)$$

sînt valabile, se deduce

$$f_{S_h^n}(t) \cap f_{S_k^n}(t) \subset f_{S_i^n}(t)$$

deci

$$f_{H_1^n}(t) \cap \ldots \cap f_{H_r^n}(t) \subset f_{S_i^n}(t).$$

Deci

Dacă (*) *este o demonstrație din ipoteze atunci*

$$(H_1^n, \ldots, H_r^n) \xrightarrow[n+1]{} S_i^n$$

pentru orice i.

§ 15. A DOUA DEFINIȚIE SEMANTICĂ

Fie $\mathfrak{B}$ o algebră booleană. Fiecărei expresii $\mathfrak{E}$ cu n nedeterminate $p, q, \ldots, p_1, \ldots$ îi asociem o funcție de n variabile

$$f_{\mathfrak{E}} : \mathfrak{B}^n \longrightarrow \mathfrak{B}$$

prin 2.37 şi 2.2

2.37. Nedeterminatelor $p, q, \ldots, p_1, \ldots$ le asociem variabilele în $\mathfrak{B} : x, y, x_1, \ldots$

Bineînţeles în 2.2 semnele „$\cup$", „$\cap$" „$-$" sînt cele ale algebrei booleene $\mathfrak{B}$ iar „ :", „$-$", „$+$". „$\widetilde{+}$", „$\top$", „$\perp$" sînt definite în $\mathfrak{B}$ prin

$$a : b = a \cup \overline{b}$$

$$a - b = a \cap \overline{b}$$

$$a + b = (a \cap \overline{b}) \cup (\overline{a} \cap b)$$

$$a \widetilde{+} b = (a \cap b) \cup (\overline{a} \cap \overline{b})$$

$$a \top b = \overline{a} \cap \overline{b}$$

$$a \perp b = \overline{a} \cup \overline{b}.$$

Vom asocia fiecărei scheme deductive, echivalenţe sau secvenţe de ordinul II, III, n o funcţie f_S cu argumentele şi valoarea în $\mathfrak{B}$ prin definiţiile 2.6—2.8 resp. 2.11—2.12 resp. 2.14 resp. 2.18—2.20 resp 2.22 resp. 2.26—2.28 resp. 2.33—2.36.

Vom asocia fiecărei scheme deductive, echivalenţe sau secvenţe S de ordinul II, III, n o incluziune (sau egalitate) $\mathcal{I}_S$ prin definiţiile 2.3—2.5 resp. 2.9—2.10 resp. 2.13 resp. 2.15—2.17 resp. 2.21 resp. 2.23—2.25 resp. 2.29—2.32.

Vom spune că o expresie, o schemă deductivă, o echivalenţă sau o secvenţă $\mathcal{S}$ este valabilă în logica clasică după a două definiţie semantică dacă $f_S(t)$ este constanta 1, ceea ce, dacă $\mathfrak{B} = \mathfrak{L}_2$, se reduce la 3.1 — 3.9. Vom spune că o expresie este o absurditate după a două definiţie semantică dacă funcţia generată de ea este constanta 0.

Funcţiile f_S sînt funcţii cu argumentele într-o algebră booleană $\mathfrak{B}$ generate de expresii. Se ştie că o astfel de funcţie este determinată prin valorile pe care ea le ia cînd variabilele iau valorile în $\mathfrak{L}_2 \subset \mathfrak{B}$. Deducem

TEOREMĂ. *Cele două definiţii semantice ale ideilor de teză, absurditate, schemă valabilă în logica clasică sînt echivalente.*

Primită la redacţie la 11 iulie 1967

Institutul de matematică al Academiei Republicii
Socialiste România str. M. Eminescu nr. 47,
Bucureşti

O METODĂ DE TRANSFORMARE A PROCESELOR STRUCTURAL-OMOGENE ÎN ANSAMBLURI STATISTICE

DE

HUBA SZÖCS

(Baia Mare)

Procesele structural-omogene sînt foarte răspîndite în ştiinţă şi tehnică, dar în general nu sînt ergodice. De aceea pentru a le putea supune unei analize statistice se impune transformarea lor în ansambluri statistice cu un număr foarte mare de realizaţii particulare. Autorul prezintă o metodă de transformare originală, denumită de el „metoda ciclizării".

I. Vom numi :

a. Proces stocastic nedegenerat sau cu realizări multiple caracterizat prin existenţa unui spaţiu al eşantioanelor de ordinul $N > 1$

$$\{\xi^{(k)}(t)\} \equiv \xi(k, t)\,; \; k = 1, 2, \ldots, N\,; \qquad -\infty < t < \infty. \tag{1}$$

În cazul acesta există un număr N de realizări particulare simultane, generate de surse identice, avînd acelaşi regim de lucru.

b. Proces stocastic degenerat sau cu realizare unică caracterizat prin existenţa unui spaţiu al eşantioanelor de ordinul $N = 1$

$$\{\xi^{(k)}(t)\} \equiv \xi(t)\,; \; k = 1 = N\,; \qquad -\infty < t < \infty. \tag{2}$$

În cazul acesta unica realizare a procesului se desfăşoară în urma acţiunii a unei singure surse, generator al procesului stocastic.

Cele două clase fundamentale de procese stocastice prin structura lor diferită necesită metode de studiu şi caracterizări diferite. Procesele stocastice nedegenerate pot fi foarte bine caracterizate cu ajutorul mediilor statistice, întrucît ele se încadrează în teoria generală a statisticii matematice şi a probabilităţilor, pe cînd cele din a doua categorie formează o excepţie, putînd fi caracterizate numai cu ajutorul mediilor temporare.

Funcţia densitate de probabilitate şi funcţia de repartiţie se definesc în mod firesc în cazul proceselor nedegenerate, pe cînd în cazul celor degenerate însuşi, noţiunea de probabilitate se defineşte ca raportul a două *intervale de timp*, obținînd evident numai o singură funcție de repartiție a probabilității, dar și aceasta numai dacă admitem ergodicitatea a priori a procesului, fără nici o justificare temeinică. În consecință un proces stocastic degenerat numai atunci poate fi analizat cu ajutorul statisticii matematice dacă în prealabil vom reuși să transformăm printr-un procedeu adecvat, o transformare echivalentă (vezi mai jos metoda ciclizării), unica realizare a procesului într-un ansamblu echivalent de realizări de ordinul $N > 1$: evident, realizările astfel obținute trebuie să fie compatibile din punctul de vedere al *simultaneității*.

II. Vom numi (împreună cu Furduev [1]) *structural-omogene* (sau pe scurt omogene) acele procese pentru care

$$\lim_{T\to\infty} M(t_0, T) = M \tag{3}$$

$$\lim_{T\to\infty} P(t_0, T) = P \tag{4}$$

$$\lim_{T\to\infty} R(t_0, T, \tau) = R(\tau), \tag{5}$$

unde

$$M(t_0, T) = \frac{1}{T}\int_{t_0-\frac{T}{2}}^{t_0+\frac{T}{2}} \xi(t)\,dt \tag{6}$$

$$P(t_0, T) = \frac{1}{T}\int_{t_0-\frac{T}{2}}^{t_0+\frac{T}{2}} \xi^2(t)\,dt \tag{7}$$

$$R(t_0, \tau, T) = \frac{1}{T}\int_{t_0-\frac{T}{2}}^{t_0+\frac{T}{2}} \xi(t)\xi(t-\tau)\,dt \tag{8}$$

iar $t_0 - T/2$ respectiv $t_0 + T/2$ sînt limitele intervalului de mediere $t_0 - \dfrac{T}{2} \leqslant t \leqslant t_0 + \dfrac{T}{2}$, iar τ se numește timpul de întîrziere al semnalului (cantitățile (6) — (8) constituie valoarea medie, puterea medie, respectiv gradul de coerență al semnalului).

Practic (cu mijloace tehnice) nu se poate obține o mărire nelimitată a lui T, de aceea în locul limitelor (3)—(5) vom considera diferențele :

$$\varepsilon_M = |M(t_0, T) - M(t_0, T_0)| \tag{9}$$

$$\varepsilon_P = |P(t_0, T) - P(t_0, T_0)| \tag{10}$$

$$\varepsilon_R = |R(t_0, \tau, T) - R(t_0, \tau, R_0, T_0)|, \tag{11}$$

unde ε_M, ε_P, ε_R sînt niște valori pozitive mici dinainte fixate (de exemplu eroarea absolută a aparatului de măsură), iar T_0 se numește limita omogeneității, care variază între limite foarte largi în funcție de natura procesului studiat.

III. Fie $\{\xi^{(k)}(t)\}$, $k = 1, \ldots, N$, un proces stocastic ergodic. Avem

$$B(\tau) = R(\tau) = R^{(k)}(\tau), \text{ pentru orice } k, \tag{12}$$

unde $B(\tau)$ este funcția de autocoerență, iar $R(\tau)$ funcția de autocorelație a procesului.

Să considerăm *timpul de corelație* [2],

$$\tau_0 = \frac{\int_0^\infty B(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{B(0)} \tag{13}$$

știind că $B(\tau) \leqslant B(0)$ pentru orice τ.

Pentru $\tau > \tau_0$, variabilele $\{\xi^{(k)}(t)\}$ și $\{\xi^{(k)}(t-\tau)\}$ sînt *necorelate*.

Din (12) și (13) rezultă

$$\tau_0 = \frac{\int_0^\infty R(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{R(0)}. \tag{14}$$

Știm însă că dacă realizațiile procesului sînt procese omogene în sensul lui Furduev, atunci

$$R^{(k)}(\tau) \simeq \frac{1}{T_0^{(k)}} \int_0^{T_0} \xi^{(k)}(t)\,\xi^{(k)}(t-\tau)\,\mathrm{d}t,$$

unde $T_0^{(k)} \leqslant T_\xi$ este limita omogeneității, T_ξ fiind durata observației.

Luînd $T_0 = \min\limits_k T_0^{(k)}$, obținem

$$R^{(k)}(\tau) = R(\tau) \simeq \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \xi^{(k)}(t)\,\xi^{(k)}(t-\tau)\,\mathrm{d}t = R(\tau, T_0); \tag{15}$$

limitîndu-ne la intervalul $[0, T_0]$, evident

$$0 \leqslant \tau \leqslant T_0 \tag{16}$$

obținem

$$\tau_0 = \frac{\int_0^{T_0} B(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{B(0)} \simeq \frac{\int_0^{T_0} R(\tau, T_0)\,\mathrm{d}\tau}{R(0, T_0)} = \frac{\int_0^{T_0} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \xi^{(k)}(t)\,\xi^{(k)}(t-\tau)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau}{\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} [\xi^{(k)}(t)]^2 \cdot \mathrm{d}t}.$$

Însă avem

$$R(0, T_0) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [\xi^{(k)}(t)]^2 \mathrm{d}t = P(T_0),$$

unde $P(T_0)$ reprezintă puterea medie a procesului pe intervalul $[0, T_0]$, deci

$$\tau_0 = \frac{\int_0^{T_0} R(\tau, T_0)\,\mathrm{d}\tau}{P(T_0)}. \tag{17}$$

Rezultă că *timpul de corelație* τ_0 și *limita omogeneității* T_0 sînt *mărimi dependente*. Ele pot fi calculate, dacă se cunoaște funcția de autocorelație în timp (funcția de autocoerență) și funcția putere medie a semnalului, precum și limita omogeneității. Aceste mărimi se pot obține experimental cu ajutorul unor aparate de mediere.

Din (16) rezultă

$$\tau_0 \leqslant T_0.$$

Deci procesele $\{\xi^{(k)}(t)\}$ sînt *simultan omogene* și *necorelate*, dacă intervalul de observație T depășește limita omogeneității, adică

$$T > T_0 \geqslant \tau_0. \tag{18}$$

Incoerența sau necorelarea variabilelor $\{\xi^{(k)}(0)\}$ și $\{\xi^{(k)}(T)\}$ deși nu este suficientă ca ele să fie statistic independente, este însă *necesară*. De aceea variabilele respective pot să fie independente numai dacă este satisfăcută condiția (18), pentru aceasta este suficient însă în virtutea lui (18) să cunoaștem limita omogeneității T_0 *nu însă și funcția de autocorelație* a procesului care se obține mai greu.

În virtutea concluziilor stabilite de noi, devine posibilă o analiză mai adîncă a proceselor stocastice:

IV. Să construim acum din realizațiile $\{\xi^{(k)}(t)\}$, $t \in [0, T]$, un proces degenerat, adică un proces cu o realizare unică $\xi(t')$, desfășurîndu-le pe axa timpului. Astfel avem

$$\begin{array}{ll} \xi(t') = \xi^{(1)}(t) & 0 \leqslant t' \leqslant T \\ \xi(t') = \xi^{(2)}(t) & T < t' \leqslant 2T \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \xi(t') = \xi^{(N)}(t) & (N-1)T < t' \leqslant NT. \end{array} \tag{19}$$

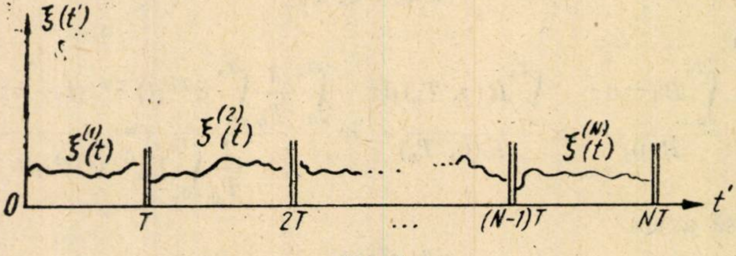


Fig. 1.

În virtutea ergodicității proceselor $\{\xi^{(k)}(t)\}$, întregul proces astfel construit va fi tot ergodic. Valorile medii pe segmente vor fi egale cu valorile medii evaluate pe tot intervalul NT. Într-adevăr, avem:

$$M(NT) = \frac{1}{NT}\int_0^{NT} \xi(t')\,\mathrm{d}t' = \frac{1}{NT}\left[\int_0^{T} \xi(t')\,\mathrm{d}t' + \cdots + \int_{(N-1)T}^{NT} \xi(t')\,\mathrm{d}t' = \right.$$

$$= \frac{1}{N}\left[\frac{1}{T}\int_0^T \xi^{(1)}(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^T \xi^{(2)}(t)\,\mathrm{d}t + \ldots + \frac{1}{T}\int_0^T \xi^{(N)}(t)\,\mathrm{d}t\right] =$$

$$= \frac{1}{N}(M^{(1)}(T) + M^{(2)}(T) + \ldots + M^{(N)}(T)) = \frac{1}{N}\cdot N\cdot M(T)$$

de unde rezultă

$$M(NT) = M(T) \tag{20}$$

ceea ce trebuia demonstrată.

Demonstraţii analoage pot fi date şi pentru celelalte medii temporare.

Am demonstrat astfel că procesul stocastic $\{\xi^{(k)}(t)\}$ nedegenerat poate fi conceput ca un proces $\xi(t')$ degenerat. Evident, aceasta în condiţiile ergodicităţii.

Mai departe vom demonstra că un proces stocastic degenerat $\xi(t)$ poate fi organizat ca un ansamblu statistic, dacă procesul este omogen (ergodicitatea după cum vom vedea nu este o condiţie necesară).

Fie pentru aceasta $\xi(t)$ un proces stocastic omogen. Cunoscînd limita omogeneităţii T_0, să considerăm $T > T_0$. Vom numi T *perioada ciclizării*. Să considerăm procesele (fig. 2).

$$\begin{aligned} &\xi^{(1)}(t') = \xi(t), && 0 \leqslant t < T \\ &\xi^{(2)}(t') = \xi(t), && T \leqslant t < 2T \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \\ &\xi^{(N)}(t') = \xi(t), && (N-1)\,T \leqslant t < NT \end{aligned} \tag{21}$$

drept realizările particulare $\xi^{(k)}(t')$ ale unui proces nedegenerat $\{\xi^{(k)}(t')\}$. În acest caz *mediile temporare pe realizaţii există şi sînt egale*. Într-adevăr,

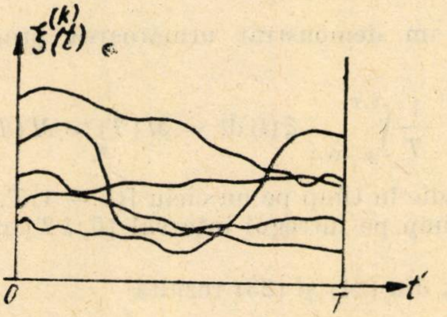


Fig. 2.

pe de o parte fiindcă $\xi(t)$ este omogen cu limita T_0, avem, pentru orice $T > T_0$,

$$\begin{aligned} M(T) &= \frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,\mathrm{d}t \simeq M(T_0) \\ M(2T) &= \frac{1}{2T}\int_0^{2T} \xi(t)\,\mathrm{d}t \simeq M(T_0) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M(NT) &= \frac{1}{NT}\int_0^{NT} \xi(t)\,\mathrm{d}t \simeq M(T_0) \end{aligned} \tag{22}$$

pe de altă parte avem

$$\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,\mathrm{d}t = M(T_0)$$

$$\frac{1}{2T}\int_0^{2T} \xi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2T}\left(\int_0^T \xi(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^{2T} \xi(t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_T^{2T} \xi\, dt\right)$$

de unde, luînd în considerație (22), rezultă

$$M(T_0) = \frac{1}{2}M(T_0) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{T}\int_T^{2T} \xi\,\mathrm{d}t$$

de unde obținem

$$\frac{1}{T}\int_T^{2T} \xi\,\mathrm{d}t = 2\left(M(T_0) - \frac{1}{2}M(T_0)\right) = 2\cdot\frac{1}{2}M(T_0) = M(T_0).$$

Analog am demonstrat că:

$$\frac{1}{T}\int_{2T}^{3T} \xi\,\mathrm{d}t = 3\left(M(T_0) - \frac{2}{3}M(T_0)\right) = 3\cdot\frac{1}{3}M(T_0) = M(T_0)$$

. . . .

$$\frac{1}{T}\int_{(N-1)\cdot T}^{NT} \xi\,\mathrm{d}t = N\left(M(T_0) - \frac{(N-1)\,M(T_0)}{N}\right) = N\cdot\frac{1}{N}M(T_0) = M(T_0).$$

În general am demonstrat următoarea proprietate a proceselor omogene:

$$\frac{1}{T}\int_{(k-1)\cdot T}^{k\cdot T} \xi(t)\,\mathrm{d}t = M(T) \simeq M(T_0) \tag{23}$$

adică valoarea medie în timp pe un ciclu $[(k-1)T, kT]$ este egală cu valoarea medie în timp pe întregul interval $[0, kT]$ respectiv pe intervalul $[0, T_0]$.

Mai departe, din (21) și (23) rezultă

$$M^{(1)}(T) = \frac{1}{T}\int_0^T \xi^{(1)}(t')\,\mathrm{d}t' = \frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,\mathrm{d}t \simeq M(T_0)$$

$$\vdots$$

$$M^{(N)}(T) = \frac{1}{T}\int_0^{NT} \xi^{(N)}(t')\,\mathrm{d}t' = \frac{1}{T}\int_{(N-1)\cdot T}^{NT} \xi(t)\,\mathrm{d}t \simeq M(T_0)$$

de unde

$$M^{(1)}(T) = M^{(2)}(T) = \ldots = M^{(N)}(T) \simeq M(T_0)$$

ceea ce trebuia demonstrată.

O proprietate analogă se poate demonstra și în cazul funcției de autocoerență a procesului.

Fixînd acum un punct (un moment de timp) $t' = t'_0$, echivalent cu momentele

$$t'_0 \sim t'_0 + T \sim \ldots \sim t'_0 + NT$$

valorile variabilei $\xi^{(k)}(t'_0)$ practic sînt necorelate, deci pot fi presupuse independente.

În consecință valorile variabilei $\{\xi^{(k)}(t'_0)\}$ constituie un ansamblu statistic.

V. În concluzie, folosindu-ne de noțiunea de timp de corelație și de noțiunea de limita omogeneității, introducînd metoda ciclizării am reușit să transformăm un proces stocastic degenerat într-un proces stocastic nedegenerat; astfel un proces omogen poate fi analizat și din punctul de vedere al statisticii matematice.

BIBLIOGRAFIE

1. ФУРДУЕВ В. В., *О некоторых основных понятиях сигналов*. Радиотехника, **12**, 4 1957.
2. SPĂTARU AL., *Teoria transmisiunii informației. Semnale și perturbații*. Ed. tehnică, București, 1965.

ASUPRA SINTEZEI FUNCŢIILOR BOOLEENE CU AJUTORUL REŢELELOR DISJUNCTIVE

DE

IOAN TOMESCU

În acest articol se studiază unele probleme privind sinteza funcţiilor booleene cu ajutorul reţelelor disjunctive, utilizate în mod obişnuit pentru sinteza funcţiilor booleene simetrice ([19], [20], [4], [11], [12], [15] etc.) precum şi simplificarea acestor reţele.

Se introduce noţiunea de tip al unei reţele disjunctive şi se dă o condiţie necesară şi suficientă pentru ca o funcţie booleană $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ să fie realizabilă într-o reţea disjunctivă de tipul $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Pe baza teoremelor de simplificare a reţelelor disjunctive prezentate în lucrare se demonstrează că orice funcţie booleană simetrică de n variabile ($n \geqslant 3$) se poate realiza cu un dipol care conţine cel mult $n^2 - 2n + 5$ contacte, evaluare care îmbunătăţeşte rezultatul obţinut de Shannon în [19].

I

În lucrarea de faţă se utilizează notaţiile „$\cup$" şi „$\cdot$" pentru operaţiile „sau", respectiv „şi" dintr-o algebră booleană iar semnul „ $\dotplus$ " pentru suma modulo 2.

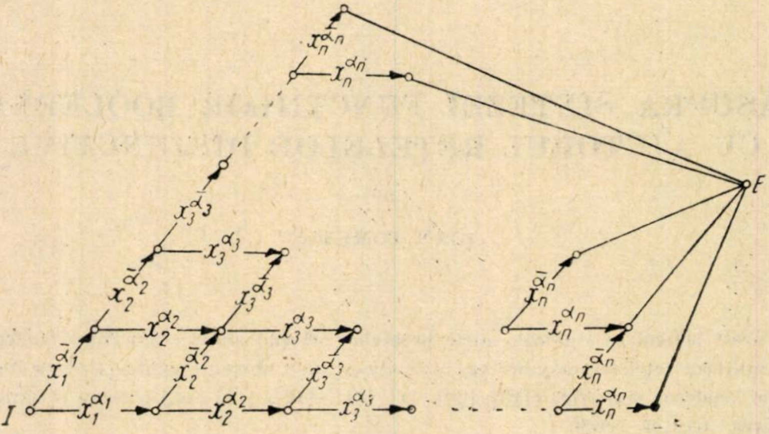
Se defineşte un graf $G = \{X, \Gamma\}$ conex şi antisimetric în modul următor: $X = \{X_i^j \mid i, j = 0, 1, 2, \ldots, n;\ i + j \leqslant n\}$ şi $\Gamma^{-1}(X_0^0) = \emptyset$; $\Gamma(X_i^j) = \{X_{i+1}^j, X_i^{j+1}\}$ pentru $i + j < n$ iar $\Gamma(X_i^j) = \emptyset$ pentru $i + j = n$.

Numim nodul X_0^0 nod iniţial sau intrare a reţelei şi îl notăm cu I iar cele $n + 1$ noduri X_i^j cu $i + j = n$ le numim noduri finale ale reţelei.

Fiind dat un vector $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ cu componente binare, pe fiecare arc al grafului de forma (X_i^j, X_{i+1}^j) cu $i + j = p$ introducem un contact $x_{p+1}^{\alpha_{p+1}}$, iar pe un arc de forma (X_i^j, X_i^{j+1}) cu $i + j = p$ un contact $x_{p+1}^{\bar{\alpha}_{p+1}}$, unde $\alpha_{p+1} \in \{0, 1\}$ pentru $p = 0, 1, \ldots, n - 1$ iar $x_{p+1}^0 = \bar{x}_{p+1}$ şi $x_{p+1}^1 = x_{p+1}$. Se obţine astfel reţeaua din figura 1.

ST. CERC. MAT., TOM. 20 NR. 2, P. 267–282, BUCUREŞTI, 1968

Unind toate nodurile finale într-un nod notat E (ieșirea rețelei) se obține un dipol H a cărui formulă de structură generează funcția $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 1$ deoarece evident în această rețea completă pe drumurile care unesc nodul I cu nodul E se regăsesc toate conjuncțiile componente ale unității.



$x_n^{\bar{\alpha}_n}$
$x_n^{\alpha_n}$
E
$x_3^{\bar{\alpha}_3}$
$x_3^{\alpha_3}$
$x_2^{\bar{\alpha}_2}$
$x_3^{\bar{\alpha}_3}$
$x_2^{\alpha_2}$
$x_3^{\alpha_3}$
$x_1^{\bar{\alpha}_1}$
$x_2^{\bar{\alpha}_2}$
$x_3^{\bar{\alpha}_3}$
$x_n^{\bar{\alpha}_n}$
$x_n^{\alpha_n}$
$x_n^{\bar{\alpha}_n}$
I
$x_1^{\alpha_1}$
$x_2^{\alpha_2}$
$x_3^{\alpha_3}$
$x_n^{\alpha_n}$

Fig. 1

Numerele i și j pot fi interpretate ca niște coordonate ale nodului X_i^j, de exemplu i coordonata în raport cu marginea orizontală a rețelei, iar j coordonata în raport cu marginea oblică a rețelei, așa cum se va proceda în cele ce urmează.

Pentru rețeaua completă din figura 1 numărul de drumuri dintre intrarea I și un nod X_i^j cu $i + j \leqslant n$ este egal cu $\binom{i+j}{i} = \binom{i+j}{j}$. Într-adevăr, pentru a ajunge din I în X_i^j trebuie să parcurgem un drum de lungime $i + j$, parcurgînd în mod obligatoriu i arce orizontale, ceea ce este posibil în $\binom{i+j}{i}$ moduri.

În general, numărul de drumuri dintre nodurile X_i^j și X_r^s este egal cu zero dacă sign $(r - i)$ sign $(s - j) < 0$ și egal cu $\binom{|r-i| + |s-j|}{|r-i|}$ în caz contrar.

Dacă legăm nodul I la polul pozitiv și nodul E la polul negativ al unei surse de curent, se observă că orientarea arcelor rețelei din figura 1 indică tocmai sensul posibil al curentului în fiecare arc, datorită caracterului disjunctiv al rețelei.

În cele ce urmează vom desena rețele disjunctive ce realizează anumite funcții booleene fără a mai indica și orientarea arcelor grafului G.

Notînd cu $\chi(X_i^j, X_r^s)$ conductibilitatea totală dintre nodurile X_i^j și X_r^s ale rețelei, atunci $\chi(X_u^{n-u}, X_v^{n-v}) = 0$ pentru orice $u \neq v$ și deci multipolul astfel obținut avînd ca ieșiri nodurile finale X_i^j cu $i + j = n$ este un multipol disjunctiv.

În general, în rețeaua disjunctivă astfel realizată $\chi(X_i^j, X_r^s) = 0$ dacă sign $(r - i)$ sign $(s - j) < 0$.

Numim reţeaua disjunctivă din figura 1, ca şi orice reţea obţinută cu o construcţie analoagă pornind de la un subgraf parţial al grafului G (cu păstrarea cel puţin a unui nod final) reţea disjunctivă de tipul $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Fiind dată o funcţie booleană de n variabile $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, se pune problema existenţei unui subgraf parţial al grafului G şi a unui sistem α aşa ca $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ să fie realizabilă în reţeaua disjunctivă $\mathfrak{A}$ de tipul α corespunzătoare acestui subgraf parţial, adică $\chi_{\mathfrak{A}}(I, E) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Nodul E a fost obţinut prin unirea tuturor nodurilor finale ale reţelei, analog situaţiei din figura 1.

Reţeaua fiind disjunctivă, pentru toate nodurile X_i^j cu $i + j = n - 1$ de care se leagă atît contactul x_n cît şi $\overline{x}_n$, putem înlocui aceste contacte cu 1 şi conductibilitatea totală dintre I şi E rămîne neschimbată.

Deci toate nodurile X_i^j cu $i + j = n - 1$ le putem contopi în trei noduri : un nod care este legat cu ieşirea E prin contactul 1, un nod care este legat de E prin contactul x_n şi un nod care este legat de E prin contactul $\overline{x}_n$.

Rezultă că numărul contactelor cu care se realizează o funcţie booleană de n variabile într-o astfel de reţea este cel mult egal cu $2(1 + 2 + \ldots + n - 1) + 2 = n^2 - n + 2$ contacte, evaluare obţinută în [19] pentru funcţiile booleene simetrice.

Ţinînd seama de caracterul disjunctiv al reţelei, există relaţia $\chi(X_i^j, X_r^s) = 0$ pentru $i + j = r + s = p$ şi putem deci aplica teorema lui Shannon :

$$\chi(I, E) = \bigcup_{\substack{i,\ j \geqslant 0 \\ i+j=p}} \chi(I, X_i^j)\, \chi(X_i^j, E)$$

pentru orice $p = 1, 2, \ldots, n - 1$, relaţie care ne va folosi la simplificarea reţelelor disjunctive.

În această relaţie, $\chi(I, X_i^j)$ reprezintă conductibilitatea totală a reţelei disjunctive cu intrarea I şi ieşirea X_i^j de tipul $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$, iar $\chi(X_i^j, E)$ reprezintă conductibilitatea totală a reţelei disjunctive cu intrarea X_i^j şi ieşirea E de tipul $(\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n)$, ambele reţele fiind subreţele ale reţelei disjunctive cu intrarea I şi ieşirea E.

Fiind daţi doi vectori cu componente 0 şi 1, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_j)$ şi $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_j)$, se defineşte distanţa Hamming dintre ei şi se notează $w(\beta, \gamma) = \sum_1^j (\beta_i \dotplus \gamma_i)$, adică tocmai numărul poziţiilor binare pe care cei doi vectori diferă.

Teorema 1. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca o funcţie booleană $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ să fie realizabilă într-o reţea disjunctivă de tipul $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ este ca pentru orice vector $a^j = (a_1, a_2, \ldots, a_j)$ cu $3 \leqslant j \leqslant n$ care verifică condiţiile :*

$$\bigcup_{x_{j+1}, \ldots, x_n \in \{0, 1\}} f(a_1, a_2, \ldots, a_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) = 0$$

şi

$$\bigcup_{x_{j+1}, \ldots, x_n \in \{0, 1\}} f(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, \overline{a}_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) = 1$$

să existe relația

$$\bigcup_{x_{j+1},\ldots,x_n\in\{0,1\}} f(b_1, b_2, \ldots, b_{j-1}, a_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) = 0$$

pentru orice vector $b^{j-1} = (b_1, b_2, \ldots, b_{j-1})$ cu proprietatea că $w(b^{j-1}, \alpha^{j-1}) = w(a^{j-1}, \alpha^{j-1})$, unde $\alpha^{j-1} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j-1})$ și

$$\bigcup_{x_j, x_{j+1},\ldots,x_n\in\{0,1\}} f(b_1, b_2, \ldots, b_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) = 1.$$

Demonstrație. Să observăm mai întîi că există o bijecție între mulțimea drumurilor care unesc nodul inițial cu nodurile finale ale grafului G și mulțimea vectorilor cu n componente binare.

Într-adevăr, putem asocia fiecărui drum conceput ca o succesiune de arce, o succesiune de 0 și 1, asociind arcului (X_i^j, X_{i+1}^j) pe α_{i+j+1} și arcului (X_i^j, X_i^{j+1}) pe $\overline{\alpha}_{i+j+1}$ (exponentul variabilei x_{i+j+1} asociate arcului respectiv).

Numărul total de drumuri, conform unei observații anterioare, este egal cu $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Necesitatea. Presupunem că o funcție booleană $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este egală cu conductibilitatea totală a unui dipol disjunctiv obținut dintr-un subgraf parțial al grafului G.

Conductibilitatea dipolului este egală cu disjuncția tuturor conductibilităților asociate drumurilor care unesc nodul I cu nodurile finale ale rețelei.

Dacă nodul X_p^q aparține rețelei disjunctive, atunci de acest nod este legat contactul x_{p+q+1} și $\overline{x}_{p+q+1}$ sau numai unul dintre acestea.

În condițiile date pentru vectorul $a^j = (a_1, a_2, \ldots, a_j)$ rezultă că de nodul X_p^q cu $p + q = j - 1$, extremitate a drumului $(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1})$ căruia îi corespunde succesiunea de contacte $x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \ldots, x_{j-1}^{a_{j-1}}$ se leagă contactul $x_j^{\overline{a}_j}$ și nu se leagă contactul $x_j^{a_j}$.

În caz contrar, în dipolul disjunctiv ar exista cel puțin un drum de lungime n care trece prin arcul pe care este situat contactul $x_j^{a_j}$ și deci $\bigcup\limits_{x_{j+1},\ldots,x_n\in\{0,1\}} f(a_1, a_2, \ldots, a_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) = 1$, ceea ce contrazice ipoteza.

În aceste condiții orice drum $(b_1, b_2, \ldots, b_{j-1})$ de la nodul I la nodul X_p^q cu $p + q = j - 1$, deci care verifică condiția $w(b^{j-1}, \alpha^{j-1}) = w(a^{j-1}, \alpha^{j-1})$ și $\bigcup\limits_{x_j, x_{j+1},\ldots,x_n\in\{0,1\}} f(b_1, b_2, \ldots, b_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) = 1$ se continuă numai cu contactul $x_j^{\overline{a}_j}$ și deci contactul $x_j^{a_j}$ nu apare pe acest drum, adică $\bigcup\limits_{x_{j+1},\ldots,x_n\in\{0,1\}} f(b_1, b_2, \ldots, b_{j-1}, a_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) = 0$.

Suficiența. Fiind dată mulțimea sistemelor de vectori cu n componente 0 și 1 pentru care $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, se construiește subgraful parțial al grafului G pentru care drumurile care unesc nodul I cu nodurile finale corespund (prin aplicația bijectivă descrisă mai sus) cu mulțimea vectorilor pentru care f ia valoarea 1.

Legînd prin procedeul indicat mai sus contacte normal deschise sau normal închise pe laturile grafului, se obține un dipol disjunctiv a cărui conductibilitate este tocmai $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Într-adevăr, aplicînd formula de interpolare lagrangeiană care dă pe f ca o disjuncție de conjuncții și ia în considerare sistemele de valori pentru care $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, se obține o expresie care generează tocmai funcția de lucru a dipolului H construit (ținînd seama de caracterul disjunctiv al rețelei).

Condiția impusă în enunțul teoremei asigură că oricare două drumuri (care corespund unor sisteme de valori pentru care $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$) care ajung într-un nod X_p^q al rețelei cu $p + q = j - 1$ $(3 \leqslant j \leqslant n)$, se continuă sau cu ambele contacte x_j și $\bar{x}_j$ sau numai cu unul din ele, adică nu se introduc conjuncții iredondante în plus față de forma normală disjunctivă dată de formula de interpolare lagrangeiană c.c.t.d.

Dacă o funcție booleană este realizabilă într-o rețea disjunctivă de tipul α, atunci ea este realizabilă și în rețeaua disjunctivă de tipul $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n)$ și dipolii obținuți se corespund printr-o simetrie axială.

Într-adevăr, $w(b^{j-1}; \bar{\alpha}^{j-1}) = w(a^{j-1}, \bar{\alpha}^{j-1})$ dacă și numai dacă $w(b^{j-1}, \alpha^{j-1}) = w(a^{j-1}, \alpha^{j-1})$ pentru orice $j = 3, \ldots, n$ și se aplică teorema 1.

Din teorema 1 mai rezultă că o funcție realizabilă în rețeaua de tipul $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ mai este realizabilă în cel puțin trei rețele de tipul $\beta = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \bar{\alpha}_n)$, $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n)$ și $\bar{\beta} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_{n-1}, \alpha_n)$ (ultima componentă α_n este arbitrară deoarece nu intervine în condiția impusă distanței Hamming).

Condiția ca să existe un vector $a^j = (a_1, a_2, \ldots, a_j)$ cu $3 \leqslant j \leqslant n$ așa ca $\bigcup\limits_{x_{j+1}, \ldots, x_n \in \{0, 1\}} f(a_1, a_2, \ldots, a_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) = 0$ poate fi interpretată ca o ecuație booleană cu necunoscutele $a_1, a_2, \ldots, a_j$ care are soluție dacă și numai dacă este îndeplinită condiția

$$\prod_{x_1, x_2, \ldots, x_j \in \{0, 1\}} \; \bigcup_{x_{j+1}, \ldots, x_n \in \{0, 1\}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Se poate ca o funcție booleană să fie realizabilă într-o rețea disjunctivă de tipul α și să nu fie realizabilă într-o rețea disjunctivă de tipul $\tilde{\alpha}$, iar în diferite rețele disjunctive să se realizeze cu un număr diferit de contacte.

Exemplu. Fie funcția booleană $f = \sum (0, 3, 9, 10, 15)$.

Aplicînd algoritmul lui McCluskey se obține că toți implicanții funcției f sînt implicanți primi și deci forma normală disjunctivă minimă este

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 x_4 \cup \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \cup x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \cup x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \cup \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 .$$

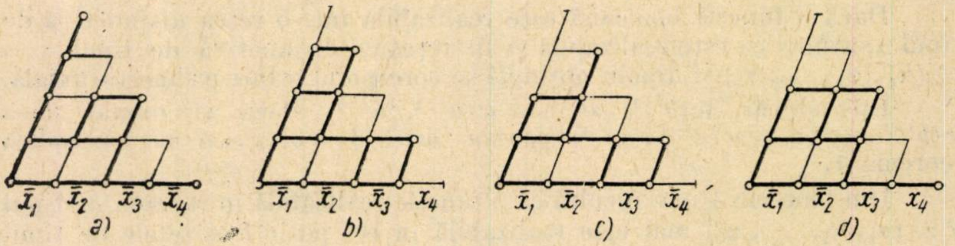
Să căutăm pe baza teoremei 1 rețelele disjunctive în care f este realizabilă. Pentru $j = 3$ singurul sistem (a_1, a_2, a_3) care verifică condițiile $f(a_1, a_2, a_3, 0) \cup f(a_1, a_2, a_3, 1) = 0$ și $f(a_1, a_2, \bar{a}_3, 0) \cup f(a_1, a_2, \bar{a}_3, 1) = 1$ este $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$.

Sistemele (α_1, α_2) care pot conduce la rețele distincte sînt $(0, 0)$ și $(0, 1)$ (deoarece rețeaua de tipul α este izomorfă cu rețeaua de tipul $\bar{\alpha}$).

Ecuația $w((b_1, b_2), (0, 0)) = w((1, 1), (0, 0)) = 2$ are o singură soluție $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$ și deci condițiile teoremei 1 sînt verificate.

O soluţie a ecuaţiei $w((b_1, b_2), (0, 1)) = w((1, 1), (0, 1)) = 1$ care verifică condiţia $\bigcup_{x_3, x_4 \in \{0, 1\}} f(b_1, b_2, x_3, x_4) = 1$ este $b_1 = 0$; $b_2 = 0$ pentru care $f(0, 0, 0, 0) \cup f(0, 0, 0, 1) = 1$, deci în acest caz condiţiile teoremei 1 nu sînt satisfăcute şi f nu este realizabilă în reţeaua de tipul α cu $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$. Rămîne deci soluţia $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0$.

În mod analog se verifică că f este realizabilă pentru toate reţelele cu $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$ şi $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$ şi deci f este realizabilă în reţelele de tipul (0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0) şi (0, 0,1,1) (împreună cu negaţiile lor pentru care se obţin scheme izomorfe). Schemele obţinute sînt desenate în figura 2.



$\bar{x}_1$ $\bar{x}_2$ x_3 $\bar{x}_4$
a)
$\bar{x}_1$ $\bar{x}_2$ $\bar{x}_3$ x_4
b)
$\bar{x}_1$ $\bar{x}_2$ x_3 $\bar{x}_4$
c)
$\bar{x}_1$ $\bar{x}_2$ x_3 x_4
d)

Fig. 2

Pentru reducerea numărului de contacte, putem uni noduri X_i^j cu $i + j = 3$ astfel ca să apară în fiecare schemă numai o singură dată contactul x_4, respectiv $\bar{x}_4$.

De exemplu, pentru figura 2 d) se obţine schema cu 12 contacte din figura 3.

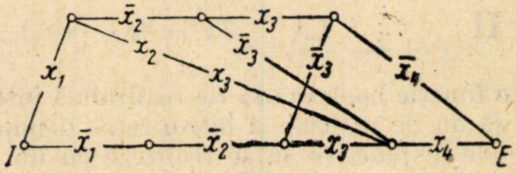


Fig. 3

TEOREMA 2. *Funcţia* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \dotplus x_2 \dotplus \ldots \dotplus x_n$ *(suma modulo 2 de n variabile) este realizabilă într-o reţea disjunctivă de tipul* α, *oricare ar fi vectorul cu componente binare* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Demonstraţie. Pentru funcţia booleană dată în enunţul teoremei există relaţia $\bigcup_{x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_n \in \{0, 1\}} f(a_1, a_2, \ldots, a_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) = 1$ pentru orice $j = 0, 1, \ldots, n - 1$, deoarece $f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \bar{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \overline{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$.

Situîndu-ne în condiţiile ipotezei teoremei 1, rezultă că $j = n$, vectorul $a^n = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ verifică relaţia $\dot{\sum}_1^n a_i = 0$ şi condiţia $a_1 \dotplus a_2 \dotplus \ldots \dotplus a_{n-1} \dotplus \bar{a}_n = 1$ este evident satisfăcută. Fie un vector $b^n = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ cu proprietatea că $w(b^{n-1}, \alpha^{n-1}) = w(a^{n-1}, \alpha^{n-1})$. Condiţia $\bigcup_{x_n \in \{0, 1\}} f(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, x_n) = 1$ este evident satisfăcută.

Există relația $f(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, a_n) = b_1 \dotplus b_2 \dotplus \ldots \dotplus b_{n-1} \dotplus a_n = a_1 \dotplus a_2 \dotplus \ldots \dotplus a_{n-1} \dotplus a_n = 0$ deoarece $w(b^{n-1}, \alpha^{n-1}) = w(a^{n-1}, \alpha^{n-1})$ înseamnă $\dot{\sum}_1^{n-1} b_i \dotplus \dot{\sum}_1^{n-1} \alpha_i = \dot{\sum}_1^{n-1} a_i \dotplus \dot{\sum}_1^{n-1} \alpha_i$ ceea ce implică $\dot{\sum}_1^{n-1} b_i = \dot{\sum}_1^{n-1} a_i$ c.c.t.d.

În mod asemănător se demonstrează de exemplu că funcția $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n$ se realizează numai în rețeaua disjunctivă de tipul $(0, 0, \ldots, 0)$ împreună cu cele trei rețele disjunctive asociate acesteia prin negarea ultimei componente și negarea tuturor componentelor, iar funcția $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n$ se realizează în orice rețea disjunctivă.

TEOREMA 3. *Orice funcție booleană simetrică este realizabilă în rețeaua* $(0, 0, \ldots, 0)$ *și orice funcție simetrică generalizată* $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1^{\sigma_1}, x_2^{\sigma_2}, \ldots, x_n^{\sigma_n})$, *cu* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *funcție simetrică, este realizabilă în rețeaua* $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \ldots, \bar{\sigma}_n)$.

Demonstrație. Situîndu-ne în condițiile ipotezei teoremei 1 cu vectorul $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$, rezultă că vectorii b^{j-1} și a^{j-1} au aceeași pondere (fiind la distanță egală de vectorul α) și deci pot fi obținuți unul din celălalt printr-o permutare a componentelor, deci există $\sigma \in \mathfrak{S}_{j-1}$ așa ca $b_i = a_{\sigma(i)}$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots, j-1$.

Deoarece funcția f este simetrică, rezultă că $f(b_1, b_2, \ldots, b_{j-1}, a_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) = f(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \ldots, a_{\sigma(j-1)}, a_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) = f(a_{\tilde{\sigma}(1)}, a_{\tilde{\sigma}(2)}, \ldots, a_{\tilde{\sigma}(j-1)}, a_{\tilde{\sigma}(j)}, x_{\tilde{\sigma}(j+1)}, \ldots, x_{\tilde{\sigma}(n)}) = f(a_1, a_2, \ldots, a_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) = 0$ pentru orice $x_{j+1}, \ldots, x_n \in \{0, 1\}$, unde $\tilde{\sigma} \in \mathfrak{S}_n$ cu $\tilde{\sigma}(i) = \sigma(i)$ pentru $1 \leqslant i \leqslant j-1$ iar $\tilde{\sigma}(i) = i$ pentru $j \leqslant i \leqslant n$, adică c.c.t.d.

Rețeaua disjunctivă pentru funcția $f(x_1^{\sigma_1}, x_2^{\sigma_2}, \ldots, x_n^{\sigma_n})$ se obține din rețeaua disjunctivă corespunzătoare pentru funcția simetrică $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ prin negarea unor variabile, deci funcția $f(x_1^{\sigma_1}, x_2^{\sigma_2}, \ldots, x_n^{\sigma_n})$ este realizabilă în rețeaua $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \ldots, \bar{\sigma}_n)$.

Amintim că numărul funcțiilor booleene simetrice de n variabile este de 2^{n+1} și numărul funcțiilor booleene simetrice generalizate de n variabile (clasa funcțiilor simetrice generalizate conține clasa funcțiilor simetrice) este de $2^{2^n} - 2^{n+1} + 4$.

În [17] sînt date condiții necesare și suficiente pentru recunoașterea unei funcții booleene simetrice, respectiv simetrice generalizate și anume $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este simetrică dacă și numai dacă $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, x_4, \ldots, x_n) = f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)$ și funcția $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este de același tip cu o funcție simetrică (este simetrică generalizată) dacă și numai dacă cel puțin una din funcțiile $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f(\bar{x}_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3, \ldots, x_n), \ldots, f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{\left[\frac{n}{2}\right]}, x_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}, \ldots, x_n)$ este simetrică.

O funcție booleană simetrică $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este caracterizată de numerele ei de lucru : $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(k \leqslant n+1,\ 0 \leqslant a_i \leqslant n)$ care sînt ponderile sistemelor de vectori binari $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ de lungime n pentru care $f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) = 1$ și se notează $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = S_{a_1, a_2, \ldots, a_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigcup_{\substack{\sigma_1 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_n = a_i \\ i = 1, 2, \ldots, k}} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}$.

De remarcat că singura funcţie booleană simetrică care nu are nici un număr de lucru este funcţia identic egală cu zero şi singura funcţie booleană simetrică care are $n + 1$ numere de lucru : $0, 1, 2, \ldots, n$ este funcţia identic egală cu unu.

Funcţia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \dot{+} x_2 \dot{+} \ldots \dot{+} x_n$ are ca numere de lucru numerele $1, 3, 5, \ldots, n'$, unde $n' = n - 1$ pentru n par şi $n' = n$ pentru n impar.

Se observă că mulţimea celor 2^{n+1} funcţii booleene simetrice de n variabile formează o algebră booleană izomorfă cu algebra booleană a submulţimilor mulţimii $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, funcţia φ care realizează acest izomorfism fiind definită prin egalitatea $\varphi(S_{a_1, a_2, \ldots, a_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subset \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

Prin acest izomorfism funcţiei identic egale cu zero îi corespunde mulţimea vidă, iar funcţiei identic egale cu 1 mulţimea totală.

Din cauza proprietăţilor de simetrie ale funcţiei $S_{a_1, a_2, \ldots, a_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reţeaua disjunctivă de tipul $(0, 0, \ldots, 0)$ care realizează această funcţie are următoarea formă : nodul I este legat de nodurile finale $X^{a_1}_{n-a_1}, X^{a_2}_{n-a_2}, \ldots, X^{a_k}_{n-a_k}$ prin toate drumurile posibile în număr egal cu $\binom{n}{a_1} + \binom{n}{a_2} + \ldots + \binom{n}{a_k}$, iar nodurile finale sînt legate la ieşirea E a dipolului.

În cazul în care la un nod X^q_p sosesc de la intrarea I a reţelei două drumuri care se continuă prin contacte diferite x_{p+q+1}, respectiv $\bar{x}_{p+q+1}$, atunci funcţia booleană rămîne realizabilă în reţeaua respectivă dacă se separă în nodul X^q_p cele două drumuri (de exemplu prin introducerea unor contacte suplimentare sau a unor elemente ventil) ca în figurile 4a) şi 4b).

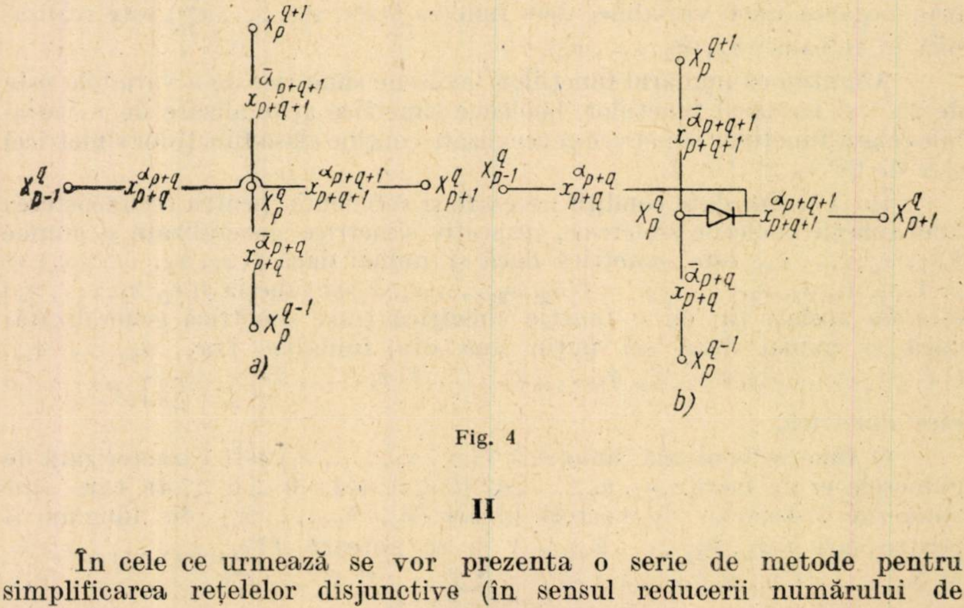

X^{q+1}_p
$x^{\bar{\alpha}_{p+q+1}}_{p+q+1}$
X^q_{p-1}
$x^{\alpha_{p+q}}_{p+q}$
X^q_p
$x^{\alpha_{p+q+1}}_{p+q+1}$
X^q_{p+1}
$x^{\bar{\alpha}_{p+q}}_{p+q}$
X^{q-1}_p
a)
X^{q+1}_p
$x^{\bar{\alpha}_{p+q+1}}_{p+q+1}$
X^q_{p-1}
$x^{\alpha_{p+q}}_{p+q}$
X^q_p
$x^{\alpha_{p+q+1}}_{p+q+1}$
X^q_{p+1}
$x^{\bar{\alpha}_{p+q}}_{p+q}$
X^{q-1}_p
b)

Fig. 4

II

În cele ce urmează se vor prezenta o serie de metode pentru simplificarea reţelelor disjunctive (în sensul reducerii numărului de contacte).

LEMA 1. *Dacă* $\mathfrak{A}$ *este un dipol disjunctiv care realizează funcția booleană* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *și dacă* $\chi_{\mathfrak{A}}(X_p^q, E) = 1$, *rezultă că* $\chi_{\mathfrak{A}}(X_{p+1}^q, E) = \chi_{\mathfrak{A}}(X_p^{q+1}, E) = 1$.

Într-adevăr, deoarece $\chi_{\mathfrak{A}}(X_p^q, E) = c_{\mathfrak{A}}(X_p^q, X_{p+1}^q)\, \chi_{\mathfrak{A}}(X_{p+1}^q, E) \cup \cup c_{\mathfrak{A}}(X_p^q, X_p^{q+1})\, \chi_{\mathfrak{A}}(X_p^{q+1}, E) = 1$ (am notat prin $\chi_{\mathfrak{A}}(X_p^q, X_r^s)$ conductibilitatea totală dintre nodurile X_p^q și X_r^s și prin $c_{\mathfrak{A}}(X_p^q, X_r^s)$ conductibilitatea directă dintre aceste noduri), rezultă că $c_{\mathfrak{A}}(X_p^q, X_{p+1}^q) \neq 0$ și $c_{\mathfrak{A}}(X_p^q, X_p^{q+1}) \neq 0$. Deci $\chi_{\mathfrak{A}}(X_p^q, E) = x_{p+q+1}^{\alpha_{p+q+1}}\, \chi_{\mathfrak{A}}(X_{p+1}^q, E) \cup x_{p+q+1}^{\bar{\alpha}_{p+q+1}}\, \chi_{\mathfrak{A}}(X_p^{q+1}, E) = 1$, relație care prin înmulțire cu $x_{p+q+1}^{\alpha_{p+q+1}}$ ne conduce la $x_{p+q+1}^{\alpha_{p+q+1}}\, \chi_{\mathfrak{A}}(X_{p+1}^q, E) = x_{p+q+1}^{\alpha_{p+q+1}}$ adică $\chi_{\mathfrak{A}}(X_{p+1}^q, E) \geqslant x_{p+q+1}^{\alpha_{p+q+1}}$. Deoarece funcția booleană $\chi_{\mathfrak{A}}(X_{q+1}^q, E)$ nu depinde de variabila $x_{p+q+1}^{\alpha_{p+q+1}}$, rezultă că $\chi_{\mathfrak{A}}(X_{p+1}^q, E) = 1$. În mod analog se obține $\chi_{\mathfrak{A}}(X_p^{q+1}, E) \geqslant x_{p+q+1}^{\bar{\alpha}_{p+q+1}}$ și deci $\chi_{\mathfrak{A}}(X_p^{q+1}, E) = 1$ c.c.t.d.

TEOREMA 4. *Dacă în rețeaua disjunctivă* $\mathfrak{A}$ *care realizează funcția booleană* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *există un nod* X_p^q *cu proprietatea că* $\chi_{\mathfrak{A}}(X_p^q, E) = 1$, *atunci se poate înlocui fiecare din contactele* $x_{p+q+1}^{\alpha_{p+q+1}}$, *respectiv* $x_{p+q+1}^{\bar{\alpha}_{p+q+1}}$ *care unește nodul* X_p^q *cu nodul* X_{p+1}^q, *respectiv* X_p^{q+1} *cu contactul mereu închis* (1) *și se obține o rețea fără elemente ventil cu proprietatea că* $\chi_{\mathfrak{A}}(I, E) = \chi_{\mathfrak{B}}(I, E) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Rezultă deci că $c_{\mathfrak{A}}(X_r^s, X_r^{s+1}) = c_{\mathfrak{B}}(X_r^s, X_r^{s+1})$; $c_{\mathfrak{A}}(X_r^s, X_{r+1}^s) = c_{\mathfrak{B}}(X_r^s, X_{r+1}^s)$ pentru orice $(r, s) \neq (p, q)$ și $c_{\mathfrak{B}}(X_p^q, X_{p+1}^q) = c_{\mathfrak{B}}(X_p^q, X_p^{q+1}) = 1$.

În cazul în care $p = 0$, se construiește dipolul $\mathfrak{B}$ astfel: $c_{\mathfrak{B}}(X_0^q, X_1^q) = 1$, $c_{\mathfrak{B}}(X_0^q, X_0^{q+1}) = c_{\mathfrak{B}}(X_0^{q+1}, X_0^{q+2}) = \dots = c_{\mathfrak{B}}(X_0^{n-1}, X_0^n) = 1$ și $c_{\mathfrak{B}}(X_0^{q+1}, X_1^{q+1}) = c_{\mathfrak{B}}(X_0^{q+2}, X_1^{q+2}) = \dots = c_{\mathfrak{B}}(X_0^n, X_1^n) = 0$ și restul conductibilităților directe egale cu conductibilitățile directe ale dipolului $\mathfrak{A}$, iar în cazul în care $q = 0$, se aleg $c_{\mathfrak{B}}(X_p^0, X_p^1) = 1$ și $c_{\mathfrak{B}}(X_p^0, X_{p+1}^0) = c_{\mathfrak{B}}(X_{p+1}^0, X_{p+2}^0) = \dots = c_{\mathfrak{B}}(X_{n-1}^0, X_n^0) = 1$ iar $c_{\mathfrak{B}}(X_{p+1}^0, X_{p+1}^1) = c_{\mathfrak{B}}(X_{p+2}^0, X_{p+2}^1) = \dots = c_{\mathfrak{B}}(X_n^0, X_n^1) = 0$ și celelalte conductibilități directe egale cu ale dipolului $\mathfrak{A}$.

Demonstrație. În cazul $p \neq 0$, $q \neq 0$ există relația:

$$\chi_{\bar{\mathfrak{B}}}(I, E) = \bigcup_{\substack{i,\, j \geqslant 0 \\ i+j=p+q}} \chi_{\mathfrak{B}}(I, X_i^j)\, \chi_{\mathfrak{B}}(X_i^j, E) = \bigcup_{\substack{i,\, j \geqslant 0 \\ i+j=p+q \\ (i,\, j) \neq (p-1,\, q+1);\, (p,\, q);\, (p+1,\, q-1)}} \chi_{\mathfrak{A}}(I, X_i^j)\, \chi_{\mathfrak{A}}(X_i^j, E) \cup$$

$$\cup\, \chi_{\mathfrak{A}}(I, X_{p-1}^{q+1})\, \chi_{\mathfrak{B}}(X_{p-1}^{q+1}, E) \cup \chi_{\mathfrak{A}}(I, X_p^q)\, \chi_{\mathfrak{B}}(X_p^q, E) \cup$$

$$\cup\, \chi_{\mathfrak{A}}(I, X_{p+1}^{q-1})\, \chi_{\mathfrak{B}}(X_{p+1}^{q-1}, E).$$

Dar, conform lemei 1, rezultă că $\chi_{\mathfrak{A}}(X_{p+1}^q, E) = \chi_{\mathfrak{A}}(X_p^{q+1}, E) = 1$ și deci $\chi_{\mathfrak{B}}(X_{p-1}^{q+1}, E) = c_{\mathfrak{B}}(X_{p-1}^{q+1}, X_{p-1}^{q+2})\, \chi_{\mathfrak{B}}(X_{p-1}^{q+2}, E) \cup c_{\mathfrak{B}}(X_{p-1}^{q+1}, X_p^{q+1}) (\chi_{\mathfrak{B}}(X_p^{q+1}, E) \cup \chi_{\mathfrak{B}}(X_{p+1}^q, E)) = c_{\mathfrak{A}}(X_{p-1}^{q+1}, X_{p-1}^{q+2})\, \chi_{\mathfrak{A}}(X_{p-1}^{q+2}, E) \cup c_{\mathfrak{A}}(X_{p-1}^{q+1}, X_p^{q+1}) = \chi_{\mathfrak{A}}(X_{p-1}^{q+1}, E)$.

La fel se arată că $\chi_{\mathfrak{B}}(X_p^q, E) = \chi_{\mathfrak{A}}(X_{p+1}^q, E) \cup \chi_{\mathfrak{A}}(X_p^{q+1}, E) = \chi_{\mathfrak{A}}(X_p^q, E) = 1$ și $\chi_{\mathfrak{B}}(X_{p+1}^{q-1}, E) = \chi_{\mathfrak{A}}(X_{p+1}^{q-1}, E)$ și deci $\chi_{\mathfrak{B}}(I, E) = \bigcup\limits_{\substack{i, j \geqslant 0 \\ i+j=p+q}} \chi_{\mathfrak{A}}(I, X_i^j)\, \chi_{\mathfrak{A}}(X_i^j, E) = \chi_{\mathfrak{A}}(I, E)$ c.c.t.d.

În cazul $p = 0$, respectiv $q = 0$, se demonstrează în mod analog că $\chi_{\mathfrak{B}}(I, E) = \chi_{\mathfrak{A}}(I, E) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Teorema 5. *Dacă* $\chi_{\mathfrak{A}}(X_{p_1}^{q_1}, E) = \chi_{\mathfrak{A}}(X_{p_2}^{q_2}, E)$ *cu* $p_1 + q_1 = p_2 + q_2 \leqslant n - 1$, *atunci se poate obține un dipol* $\mathfrak{B}$ *fără elemente ventil prin unirea nodurilor* $X_{p_1}^{q_1}$ *și* $X_{p_2}^{q_2}$ *și suprimarea contactelor care unesc nodul* $X_{p_1}^{q_1}$ *cu nodurile* $X_{p_1+1}^{q_1}$, *respectiv* $X_{p_1}^{q_1+1}$ *din dipolul* $\mathfrak{A}$, *adică* $c_{\mathfrak{B}}(X_{p_1}^{q_1}, X_{p_1+1}^{q_1}) = c_{\mathfrak{B}}(X_{p_1}^{q_1}, X_{p_1}^{q_1+1}) = 0$; $c_{\mathfrak{B}}(X_{p_1}^{q_1}, X_{p_2}^{q_2}) = 1$, *celelalte conductibilități directe fiind egale respectiv cu conductibilitățile directe ale dipolului* $\mathfrak{A}$ *și* $\chi_{\mathfrak{A}}(I, E) = \chi_{\mathfrak{B}}(I, E)$.

În cazul în care $p_1 = 0$, *se construiește dipolul* $\mathfrak{B}$ *astfel*:

$$c_{\mathfrak{B}}(X_0^{q_1}, X_1^{q_1}) = c_{\mathfrak{B}}(X_0^{q_1+1}, X_1^{q_1+1}) = \ldots = c_{\mathfrak{B}}(X_0^n, X_1^n) = 0\ ;$$

$c_{\mathfrak{B}}(X_0^{q_1}, X_0^{q_1+1}) = c_{\mathfrak{B}}(X_0^{q_1+1}, X_0^{q_1+2}) = \ldots = c_{\mathfrak{B}}(X_0^{n-1}, X_0^n) = 0$ *și* $c_{\mathfrak{B}}(X_{p_1}^{q_1}, X_{p_2}^{q_2}) = 1$ *iar în cazul în care* $q_1 = 0$, *atunci* $c_{\mathfrak{B}}(X_{p_1}^0, X_{p_1}^1) = c_{\mathfrak{B}}(X_{p_1+1}^0, X_{p_1+1}^1) = \ldots = c_{\mathfrak{B}}(X_n^0, X_n^1) = 0$; $c_{\mathfrak{B}}(X_{p_1}^0, X_{p_1+1}^0) = c_{\mathfrak{B}}(X_{p_1+1}^0, X_{p_1+2}^0) = \ldots = c_{\mathfrak{B}}(X_{n-1}^0, X_n^0) = 0$ *iar* $c_{\mathfrak{B}}(X_{p_1}^{q_1}, X_{p_2}^{q_2}) = 1$, *celelalte conductibilități directe fiind egale respectiv cu conductibilitățile directe ale dipolului* $\mathfrak{A}$.

Demonstrație. Fie $p_1 \neq 0$ și $q_1 \neq 0$. Atunci $\chi_{\mathfrak{B}}(I, E) = \bigcup\limits_{\substack{i, j \geqslant 0 \\ i+j=p_1+q_1}} \chi_{\mathfrak{B}}(I, X_i^j)\, \chi_{\mathfrak{B}}(X_i^j, E) = \bigcup\limits_{\substack{i, j \geqslant 0 \\ i+j=p_1+q_1 \\ (i, j) \neq (p_1, q_1);\ (p_2, q_2)}} \chi_{\mathfrak{B}}(I, X_i^j)\, \chi_{\mathfrak{B}}(X_i^j, E) \cup \chi_{\mathfrak{B}}(I, X_{p_1}^{q_1})\chi_{\mathfrak{B}}(X_{p_1}^{q_1}, E) \cup \cup\, \chi_{\mathfrak{B}}(I, X_{p_2}^{q_2})\, \chi_{\mathfrak{B}}(X_{p_2}^{q_2}, E) = \bigcup\limits_{\substack{i, j \geqslant 0 \\ i+j=p_1+q_1}} \chi_{\mathfrak{A}}(I, X_i^j)\, \chi_{\mathfrak{A}}(X_i^j, E) = \chi_{\mathfrak{A}}(I, E)$ deoarece $\chi_{\mathfrak{B}}(X_{p_1}^{q_1}, E) = c_{\mathfrak{B}}(X_{p_1}^{q_1}, X_{p_2}^{q_2})\, \chi_{\mathfrak{A}}(X_{p_2}^{q_2}, E) = \chi_{\mathfrak{A}}(X_{p_2}^{q_2}, E) = \chi_{\mathfrak{A}}(X_{p_1}^{q_1}, E)$ și $\chi_{\mathfrak{B}}(X_{p_2}^{q_2}, E) = \chi_{\mathfrak{A}}(X_{p_2}^{q_2}, E)$, celelalte conductibilități totale rămînînd de asemenea neschimbate c.c.t.d.

Demonstrația este analoagă în cazul $p_1 = 0$, respectiv $q_1 = 0$.

Prin aplicarea repetată a teoremei 5 făcînd toate unirile de noduri posibile în dipolul disjunctiv de tipul $(0, 0, \ldots, 0)$, se obține schema cu un număr minim de contacte (egal cu $4\,(n-1)$) pentru funcția booleană simetrică suma modulo 2 din n variabile (vezi demonstrația minimalității în [5]).

Teorema 6. *Dacă în dipolul disjunctiv* $\mathfrak{A}$ *construit pentru funcția* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *există două noduri* $X_{p_1}^{q_1}$ *și* $X_{p_2}^{q_2}$ $(p_1 + q_1 = p_2 + q_2)$ *astfel ca* $c_{\mathfrak{A}}(X_{p_1}^{q_1}, X_{p_1+1}^{q_1})\, \chi_{\mathfrak{A}}(X_{p_1+1}^{q_1}, E) = \chi_{\mathfrak{A}}(X_{p_2}^{q_2}, E)$, *atunci dacă se înlocuiește contactul* $x_{p_1+q_1+1}^{\alpha_{p_1+q_1+1}}$ *care unește nodurile* $X_{p_1}^{q_1}$ *și* $X_{p_1+1}^{q_1}$ *cu zero și se leagă nodurile* $X_{p_1}^{q_1}$ *și* $X_{p_2}^{q_2}$ *printr-un element ventil orientat de la* $X_{p_1}^{q_1}$ *la* $X_{p_2}^{q_2}$, *se obține un dipol* $\mathfrak{B}$ *cu proprietatea că* $\chi_{\mathfrak{A}}(I, E) = \chi_{\mathfrak{B}}(I, E) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Deci $c_{\mathfrak{B}}(X_{p_1}^{q_1}, X_{p_1+1}^{q_1}) = c_{\mathfrak{B}}(X_{p_1+1}^{q_1}, X_{p_1}^{q_1}) = 0$; $c_{\mathfrak{B}}(X_{p_1}^{q_1}, X_{p_2}^{q_2}) = 1$ *și* $c_{\mathfrak{B}}(X_{p_2}^{q_2}, X_{p_1}^{q_1}) = 0$ *iar celelalte conductibilități directe ale dipolului* $\mathfrak{A}$ *rămîn neschimbate.*

Dacă $q_1 = 0$, *se fac în plus următoarele simplificări:* $c_{\mathfrak{B}}(X_{p_1+1}^{0}, X_{p_1+2}^{0}) = c_{\mathfrak{B}}(X_{p_1+2}^{0}, X_{p_1+3}^{0}) = \ldots = c_{\mathfrak{B}}(X_{n-1}^{0}, X_{n}^{0}) = 0$ *și* $c_{\mathfrak{B}}(X_{p_1+1}^{0}, X_{p_1+1}^{1}) = c_{\mathfrak{B}}(X_{p_1+2}^{0}, X_{p_1+2}^{1}) = \ldots = c_{\mathfrak{B}}(X_{n}^{0}, X_{n}^{1}) = 0$.

Demonstrația este analoagă cu a teoremei 5, ținînd seama că $\chi_{\mathfrak{B}}(X_{p_1}^{q_1}, E) = c_{\mathfrak{B}}(X_{p_1}^{q_1}, X_{p_1+1}^{q_1})\,\chi_{\mathfrak{B}}(X_{p_1+1}^{q_1}, E) \cup c_{\mathfrak{B}}(X_{p_1}^{q_1}, X_{p_1}^{q_1+1})\,\chi_{\mathfrak{B}}(X_{p_1}^{q_1+1}, E) \cup c_{\mathfrak{B}}(X_{p_1}^{q_1}, X_{p_2}^{q_2})\,\chi_{\mathfrak{B}}(X_{p_2}^{q_2}, E) = c_{\mathfrak{A}}(X_{p_1}^{q_1}, X_{p_1}^{q_1+1})\,\chi_{\mathfrak{A}}(X_{p_1}^{q_1+1}, E) \cup \chi_{\mathfrak{A}}(X_{p_2}^{q_2}, E) = c_{\mathfrak{A}}(X_{p_1}^{q_1}, X_{p_1}^{q_1+1})\,\chi_{\mathfrak{A}}(X_{p_1}^{q_1+1}, E) \cup c_{\mathfrak{A}}(X_{p_1}^{q_1}, X_{p_1+1}^{q_1})\,\chi_{\mathfrak{A}}(X_{p_1+1}^{q_1}, E) = \chi_{\mathfrak{A}}(X_{p_1}^{q_1}, E)$.

Aplicînd teorema 6 unei rețele de tipul $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha}_1, \alpha_2, \ldots, \overline{\alpha}_n)$ și apoi revenind la rețeaua de tipul α, se obține un rezultat analog: dacă $c_{\mathfrak{A}}(X_{p_1}^{q_1}, X_{p_1}^{q_1+1})\,\chi_{\mathfrak{A}}(X_{p_1}^{q_1+1}, E) = \chi_{\mathfrak{A}}(X_{p_2}^{q_2}, E)$, atunci se alege $c_{\mathfrak{B}}(X_{p_1}^{q_1}, X_{p_1}^{q_1+1}) = c_{\mathfrak{B}}(X_{p_1}^{q_1+1}, X_{p_1}^{q_1}) = 0$ și $c_{\mathfrak{B}}(X_{p_1}^{q_1}, X_{p_2}^{q_2}) = 1$; $c_{\mathfrak{B}}(X_{p_2}^{q_2}, X_{p_1}^{q_1}) = 0$, celelalte conductibilități directe rămînînd neschimbate. Dacă $p_1 = 0$, se mai obține un șir de contacte:

$$c_{\mathfrak{A}}(X_{0}^{q_1+1}, X_{0}^{q_1+2});\; c_{\mathfrak{A}}(X_{0}^{q_1+2}, X_{0}^{q_1+3});\; \ldots;\; c_{\mathfrak{A}}(X_{0}^{n-1}, X_{0}^{n});$$

$c_{\mathfrak{A}}(X_{0}^{q_1+1}, X_{1}^{q_1+1})$; $c_{\mathfrak{A}}(X_{0}^{q_1+2}, X_{1}^{q_1+2})$; …; $c_{\mathfrak{A}}(X_{0}^{n}, X_{1}^{n})$ care pot fi înlocuite cu zero și se obține $\chi_{\mathfrak{B}}(I, E) = \chi_{\mathfrak{A}}(I, E) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Exemplu. Fie funcția booleană $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_1\overline{x}_2x_3x_4 \cup \overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4 \cup \overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4 \cup x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4 \cup x_1x_2x_3x_4 \cup \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \cup x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$.

Se demonstrează că $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ este realizabilă de exemplu în rețeaua de tipul (1,0, 0, 0) pentru care există relația: $\chi(X_2^0, E) = c(X_0^2, X_0^3)\,\chi(X_0^3, E) = x_3\overline{x}_4$ și deci putem uni nodurile X_0^2, X_2^0 printr-un element ventil. Se obține schema din figura 5 cu $\chi(I, E) = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

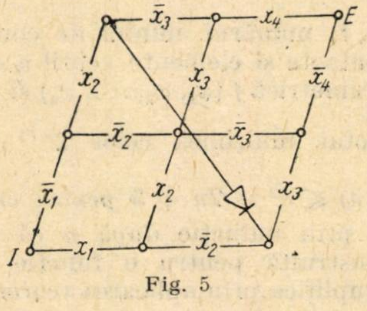


Fig. 5

TEOREMA 7. *Dacă în rețeaua* $\mathfrak{A}$ *nodul* X_p^q *se leagă de nodurile* X_p^{q+1} *și* X_{p+1}^q *prin contactele* $x_{p+q+1}^{\overline{\alpha}_{p+q+1}}$, *respectiv* $x_{p+q+1}^{\alpha_{p+q+1}}$ *și dacă* $\chi_{\mathfrak{A}}(X_{p+1}^q, E) \geqslant \chi_{\mathfrak{A}}(X_p^{q+1}, E)$, *atunci putem înlocui contactul* $x_{p+q+1}^{\overline{\alpha}_{p+q+1}}$ *printr-un element ventil orientat de la* X_p^q *către* X_p^{q+1} *și se obține un dipol* $\mathfrak{B}$ *cu proprietatea* *că* $\chi_{\mathfrak{A}}(I, E) = \chi_{\mathfrak{B}}(I, E)$. *Dacă* $p = 0$ *se înlocuiește contactul* $x_{p+q+1}^{\bar{\alpha}_{p+q+1}}$ *prin contactul 1. În mod analog dacă* $\chi_{\mathfrak{A}}(X_p^{q+1}, E) \geqslant \chi_{\mathfrak{B}}(X_{p+1}^q, E)$, *se înlocuiește contactul* $x_{p+q+1}^{\alpha_{p+q+1}}$, *care unește nodurile* X_p^q *și* X_{p+1}^q, *printr-un element ventil orientat de la* X_p^q *către* X_{p+1}^q, *iar în cazul cînd* $q = 0$, *prin contactul 1.*

Demonstrație. Presupunem, de exemplu, că $\chi_{\mathfrak{A}}(X_{p+1}^q, E) \geqslant \chi_{\mathfrak{A}}(X_p^{q+1}, E)$. Atunci $\chi_{\mathfrak{A}}(X_p^q, E) = x_{p+q+1}^{\alpha_{p+q+1}} \chi_{\mathfrak{A}}(X_{p+1}^q, E) \cup x_{p+q+1}^{\bar{\alpha}_{p+q+1}} \chi_{\mathfrak{A}}(X_p^{q+1}, E)$.

Dar $\chi_{\mathfrak{A}}(X_{p+1}^q, E) = \chi_{\mathfrak{A}}(X_{p+1}^q, E) \cup \chi_{\mathfrak{A}}(X_p^{q+1}, E)$ și deci

$$\chi_{\mathfrak{A}}(X_p^q, E) = x_{p+q+1}^{\alpha_{p+q+1}} \chi_{\mathfrak{A}}(X_{p+1}^q, E) \cup (x_{p+q+1}^{\alpha_{p+q+1}} \cup x_{p+q+1}^{\bar{\alpha}_{p+q+1}}) \chi_{\mathfrak{A}}(X_p^{q+1}, E) =$$

$$= x_{p+q+1}^{\alpha_{p+q+1}} \chi_{\mathfrak{A}}(X_{p+1}^q, E) \cup \chi_{\mathfrak{A}}(X_p^{q+1}, E) = \chi_{\mathfrak{B}}(X_p^q, E).$$

Deoarece există relația $\chi_{\mathfrak{B}}(X_i^j, E) = \chi_{\mathfrak{A}}(X_i^j, E)$ pentru orice $i, j \geqslant 0$, $i + j = p + q$, rezultă că $\chi_{\mathfrak{A}}(I, E) = \chi_{\mathfrak{B}}(I, E)$ c.c.t.d.

Aplicînd teorema 4 și teorema 7 unei rețele disjunctive de tipul $(0, 0, \ldots, 0)$ construită pentru o funcție booleană simetrică monoton nedescrescătoare de n variabile (cu numerele de lucru $n, n-1, \ldots, n-k$), se obține o schemă cu elemente ventil care este tocmai schema minimală pentru această funcție (vezi [13], [8]).

Metodele de simplificare expuse se pot aplica sistematic unei rețele disjunctive începînd cu nodurile X_0^1, X_1^0, X_0^2, X_1^1, X_2^0 etc. și se pot programa ușor pentru un calculator electronic.

Conductibilitatea totală dintre un nod oarecare și ieșirea rețelei poate fi reprezentată prin mulțimea drumurilor care unesc nodul respectiv cu ieșirea, adică printr-o mulțime de vectori cu componente binare.

Egalitatea sau incluziunea dintre conductibilități se recunosc ca egalități, respectiv incluziuni de mulțimi de vectori cu componente binare.

III

Notăm cu $L_S(n, f)$ numărul minim de contacte cu care se poate realiza un dipol cu contacte și elemente ventil a cărui conductibilitate să fie o funcție booleană simetrică $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ și cu $L_S(n) = \max\limits_{f \in S_n} L_S(n, f)$, unde prin S_n am notat mulțimea celor 2^{n+1} funcții simetrice de n variabile.

TEOREMA 8. $L_S(n) \leqslant n^2 - 2n + 5$ *pentru orice* $n \geqslant 3$.

Vom demonstra prin inducție după n că rețeaua disjunctivă de tipul $(0, 0, \ldots, 0)$ construită pentru o funcție booleană simetrică de n variabile se poate simplifica prin aplicarea teoremelor 4, 5 și 7 și schema obținută conține cel mult $n^2 - 2n + 5$ contacte.

Pentru $n = 3$, $L_S(3) \leqslant 8$, deoarece orice funcție booleană de n variabile realizabilă într-o rețea disjunctivă se poate realiza cu cel mult $n^2 - n + 2$ contacte.

Dacă presupunem propoziția adevărată pentru n, vom demonstra că $L_S(n+1) \leqslant n^2 + 4$.

Fie $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = S_{a_1, a_2, \ldots, a_k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ și presupunem că $0 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leqslant n + 1$.

Considerînd rețeaua disjunctivă cu intrarea în nodul X_1^0, este clar că $\chi(X_1^0, E) = S_{a_1, a_2, \ldots, a_k}(0, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}) = S_{a_1, a_2, \ldots, a_{k'}}(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1})$ unde $k' = k$ dacă $a_k < n + 1$ și $k' = k - 1$ dacă $a_k = n + 1$.

Deosebim patru cazuri distincte:

a) $a_k \leqslant n - 1$; b) $a_k = n + 1$, $a_{k-1} = n$; c) $a_k = n + 1$, $a_{k-1} \leqslant n - 1$; d) $a_k = n$, $a_{k-1} \leqslant n - 1$.

În cazul a) rețeaua disjunctivă pentru funcția $S_{a_1, a_2, \ldots, a_k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ se obține din rețeaua disjunctivă pentru funcția $S_{a_1, a_2, \ldots, a_{k'}}(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1})$ prin adăugarea a cel mult $2(n - 1) + 1$ contacte și anume:

$$c(I, X_1^0),\quad c(I, X_0^1),\quad c(X_0^1, X_1^1),\quad c(X_0^1, X_0^2), \ldots, c(X_0^{n-2}, X_1^{n-2}),$$

$$c(X_0^{n-2}, X_0^{n-1})$$

și

$$c(X_0^{n-1}, X_1^{n-1}).$$

Vom demonstra că făcînd anumite simplificări ale schemei, acest lucru rămîne valabil și în cazurile b), c) și d).

În cazul b), $\chi(X_0^n, E) = x_{n+1} \cup \overline{x}_{n+1} = 1$ și deci putem înlocui contactele x_{n+1} și $\overline{x}_{n+1}$ care leagă nodul X_0^n de ieșire cu 1.

$\chi(X_0^{n-1}, E) = x_n \cup \overline{x}_n \chi(X_1^{n-1}, E) = x_n \cup \chi(X_1^{n-1}, E)$, deci putem înlocui contactul $\overline{x}_n$ dintre X_0^{n-1} și X_1^{n-1} cu 1. Rezultă că schema pentru $S_{a_1, a_2, \ldots, a_k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ diferă de schema pentru $S_{a_1, a_2, \ldots, a_{k'}}(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1})$ prin cel mult $2(n - 1) + 1$ contacte:

$$c(I, X_1^0),\quad c(I, X_0^1),\quad c(X_0^1, X_1^1),\quad c(X_0^1, X_0^2), \ldots, c(X_0^{n-2}, X_1^{n-2}),$$

$$c(X_0^{n-2}, X_0^{n-1})$$

și

$$c(X_0^{n-1}, X_0^n).$$

În cazul c) sînt posibile două cazuri:

c1) $a_k = n + 1$ și $a_{k-1} = n - 1$ și c2) $a_k = n + 1$ și $a_{k-1} \leqslant n - 2$.

În cazul c1), presupunînd că există două numere de lucru a_r și a_{r-1} cu $a_r - a_{r-1} \geqslant 2$ $(2 \leqslant r \leqslant k - 1)$, atunci putem lega nodul X_0^{n-1} cu nodul $X_{n-a_r+1}^{a_r-2}$ prin contactul 1 și înlocui cu zero contactele x_n și x_{n+1} care leagă nodurile X_0^{n-1} și X_0^n, respectiv X_0^n și X_0^{n+1}.

În caz contrar, rezultă $a_{k-1} - a_{k-2} = a_{k-2} - a_{k-3} = \ldots = a_2 - a_1 = 1$.

Dacă $a_1 \geqslant 2$, putem lega nodul X_0^{n-1} cu nodul $X_{n-a_1+1}^{a_1-2}$ și suprima contactele x_n și x_{n+1} dintre nodurile X_0^{n-1} și X_0^n, respectiv X_0^n și X_0^{n+1}.

Deci dacă $a_1 \geqslant 2$ sau dacă există $2 \leqslant r \leqslant k - 1$ cu $a_r - a_{r-1} \geqslant 2$, numărul contactelor introduse în plus față de dipolul cu intrarea în X_1^0 nu depășește pe $2(n - 1) + 1$ și anume: $c(I, X_1^0)$, $c(I, X_0^1)$, $c(X_0^1, X_1^1)$, $c(X_0^1, X_0^2), \ldots, c(X_0^{n-2}, X_1^{n-2})$, $c(X_0^{n-2}, X_0^{n-1})$ și $c(X_0^{n-1}, X_1^{n-1})$.

În cazul în care $a_{k-1} - a_{k-2} = a_{k-2} - a_{k-3} = \ldots = a_2 - a_1 = 1$ și $a_1 \leqslant 1$, rezultă $\chi(X_2^1, E) = 1$ și aplicînd teorema 4 putem înlocui cu 1 toate contactele dipolului disjunctiv cu intrarea X_2^1 și ieșirea E. Rezultă direct în acest caz că dipolul disjunctiv construit pentru funcția simetrică $S_{a_1, a_2, \ldots, a_k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ are un număr de contacte inferior lui n^2+4.

În cazul c2) ne putem situa în cazul $a_1 \geqslant 2$ sau există $2 \leqslant r \leqslant k-1$ cu $a_r - a_{r-1} \geqslant 2$. În caz contrar, aplicînd teoremele 4 și 7 de simplificare, se demonstrează direct că dipolul disjunctiv construit pentru funcția simetrică de $n+1$ variabile are un număr de contacte inferior lui n^2+4.

Legînd nodul X_0^n cu nodul $X_{n-a_1+1}^{a_1-1}$ (în cazul $a_1 \geqslant 2$), respectiv $X_{n-a_r+1}^{a_r-1}$ (în cazul $a_r - a_{r-1} \geqslant 2$) și înlocuind cu zero contactul x_{n+1} care leagă nodurile X_0^n și X_0^{n+1}, se obține o rețea care diferă de rețeaua cu intrarea în X_1^0 prin cel mult $2(n-1)+1$ contacte: $c(I, X_1^0)$, $c(I, X_0^1)$, $c(X_0^1, X_1^1)$, $c(X_0^1, X_0^2), \ldots, c(X_0^{n-2}, X_1^{n-2})$, $c(X_0^{n-2}, X_0^{n-1})$ și $c(X_0^{n-1}, X_0^n)$.

În cazul d) sînt posibile două cazuri:

d1) $a_k = n$, și $a_{k-1} = n-1$ și d2) $a_k = n$ și $a_{k-1} \leqslant n-2$.

În cazul d1) se observă că $\chi(X_1^{n-1}, E) = x_{n+1} \cup \overline{x}_{n+1} = 1$ și deci $\chi(X_0^{n-1}, E) = \overline{x}_n \cup x_n \overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n \cup \overline{x}_{n+1}$, deci putem înlocui contactul x_n care unește nodul X_0^{n-1} cu nodul X_0^n cu 1. În cazul în care există două numere de lucru a_r și a_{r-1} $(2 \leqslant r \leqslant k-1)$ așa ca $a_r - a_{r-1} \geqslant 2$, putem lega nodul X_0^n cu nodul $X_{n-a_{r-1}}^{a_{r-1}}$ și înlocui contactul $c(X_0^n, X_1^n)$ cu zero. În această situație, rezultă că dipolul disjunctiv construit pentru funcția $S_{a_1, a_2, \ldots, a_k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ diferă de dipolul disjunctiv construit pentru funcția $S_{a_1, a_2, \ldots, a_{k'}}(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1})$ prin cel mult $2(n-1)+1$ contacte și anume: $c(I, X_1^0)$, $c(I, X_0^1)$, $c(X_0^1, X_1^1)$, $c(X_0^1, X_0^2), \ldots, c(X_0^{n-2}, X_1^{n-2})$, $c(X_0^{n-2}, X_0^{n-1})$ și $c(X_0^{n-1}, X_1^{n-1})$.

În caz contrar, rezultă că $a_k = n$, $a_{k-1} = n-1$, $a_{k-2} = n-2, \ldots a_1 = n-k+1$. Pentru acest caz vom demonstra direct că numărul de contacte ale dipolului disjunctiv construit pentru funcția $S_{a_1, a_2, \ldots, a_k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ poate fi făcut mai mic decît n^2+4 prin aplicarea teoremelor 4 și 7.

Aplicînd teorema 4, rezultă că toate contactele dipolului disjunctiv cu intrarea în X_1^{n-k+1} și ieșirea E pot fi înlocuite cu 1. Conform teoremei 7, rezultă că se pot de asemenea înlocui cu 1, contactele $c(X_0^{n-k+1}, X_0^{n-k+2})$, $c(X_0^{n-k+2}, X_0^{n-k+3}), \ldots, c(X_0^{n-1}, X_0^n)$.

Dipolul astfel obținut are deci $k(n-k+2)+(k+1)(n-k+1) = -2k^2+2(n+1)k+n+1$ contacte unde $2 \leqslant k \leqslant n+1$.

Această expresie ia o valoare maximă pentru $k = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ și se verifică ușor că $-2\left[\frac{n+1}{2}\right]^2 + 2(n+1)\left[\frac{n+1}{2}\right] + n + 1 < n^2+4$ pentru orice $n \geqslant 3$.

În cazul d2), dacă $a_1 = 1$ și $a_2 \geqslant 3$, atunci putem uni nodurile X_0^{n-1} și X_{n-1}^0 și înlocui cu zero contactele $c(X_0^{n-1}, X_0^n)$, $c(X_0^{n-1}, X_1^{n-1})$, $c(X_1^{n-1}, X_1^n)$ și $c(X_0^n, X_1^n)$, deci schema obținută diferă de schema pentru $S_{a_1, a_2, \ldots, a_{k'}}(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1})$ prin cel mult $2(n-1)$ contacte: $c(I, X_1^0)$, $c(I, X_0^1)$, $c(X_0^1, X_1^1)$, $c(X_0^1, X_0^2), \ldots, c(X_0^{n-2}, X_1^{n-2})$ și $c(X_0^{n-2}, X_0^{n-1})$.

Dacă nu avem îndeplinită situaţia $a_1 = 1$ şi $a_2 \geqslant 3$, atunci vom considera reţeaua disjunctivă cu intrarea în X_0^1. Să observăm că $\chi (X_0^1, E) = S_{a_1 . a_2, \ldots, a_k}(1, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1})$, unde $S_{a_1, a_2, \ldots, a_k}(1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = S_{a_1 - 1, a_2 - 1, \ldots, a_k - 1}(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1})$ pentru $a_1 \geqslant 1$ şi $S_{a_1 . a_2, \ldots, a_k}(1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = S_{a_2 - 1, a_3 - 1, \ldots, a_k - 1}(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1})$ pentru $a_1 = 0$.

În acest caz avem una din situaţiile studiate anterior şi toate demonstraţiile pentru cazurile anterioare se reproduc schimbînd pentru fiecare nod X_i^j indicii i şi j între ei, deci dipolul disjunctiv cu intrarea I se obţine din dipolul disjunctiv cu intrarea X_0^1 prin adăugarea a cel mult $2(n - 1) + 1$ contacte sau se realizează cu un număr de contacte inferior lui $n^2 + 4$. Conform ipotezei inducţiei, prin aplicarea transformărilor date de teoremele 4, 5 şi 7, dipolii disjunctivi cu intrarea în X_1^0, respectiv X_0^1 construiţi pentru funcţii simetrice de n variabile, se realizează cu cel mult $n^2 - 2n + 5$ contacte, căci transformările făcute pentru reducerea numărului suplimentar de contacte la $2(n - 1) + 1$ nu limitează simplificarea dipolilor disjunctivi cu intrarea în X_1^0, respectiv X_0^1. În cazul simplificării dipolilor disjunctivi cu intrarea în X_1^0 şi X_0^1, unele contacte nu se vor mai înlocui cu 1, ci cu un element ventil, deoarece nodurile respective pot să nu mai aibă una din coordonate egală cu zero. Rezultă că $L_S(n + 1) \leqslant n^2 - 2n + 5 + 2(n - 1) + 1 = n^2 + 4$ c.c.t.d.

Procedeul de demonstraţie constituie totodată şi o metodă pentru construcţia efectivă a unei scheme care realizează o funcţie booleană simetrică de n variabile cu mai puţin de $n^2 - 2n + 5$ contacte.

Menţionăm că cea mai bună aproximare neasimptotică a lui $L_S(n)$ cunoscută în literatură aparţine lui Shannon [19] şi anume $L_S(n) \leqslant n^2 - n + 2$.

Este evident că o funcţie simetrică elementară de n variabile (care are un singur număr de lucru a_1, $0 \leqslant a_1 \leqslant n$) se realizează printr-o reţea disjunctivă cu un singur nod final $X_{n-a_1}^{a_1}$, schemă care conţine un număr de contacte egal cu $a_1 (n - a_1 + 1) + (a_1 + 1)(n - a_1) \leqslant 2 \left[\frac{n}{2}\right] \left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right) + n$, maximul fiind realizat pentru $a_1 = \left[\frac{n}{2}\right]$.

Aceste evaluări ale numărului de contacte rămîn valabile şi pentru funcţiile booleene simetrice generalizate.

Primită la redacţie la 21 iunie 1967

Facultatea de matematică şi mecanică
Universitatea din Bucureşti, Str. Academiei nr. 14

BIBLIOGRAFIE

1. R. Arnold, M. Harrison, *Algebraic properties of symmetric and partially symmetric Boolean functions*, IEEE Trans. on Electronic Computers, EC-12, 1963.
2. C. Berge, *Théorie des graphes et ses applications*. Dunod, Paris, 1963.
3. А. Блох, *Канонический метод синтеза контактных схем*. Автоматика и телемеханика. 6 (1961).
4. S. H. Caldwell, *Switching Circuits and Logical Design*. Wiley, New York, 1958.

5. C. Cardot, *Quelques résultats sur l'application de l'algèbre de Boole à la synthèse des circuits à relais.* Annales des Télécommunications, **7**, *2* (1952).
6. M. Carvallo, *Principes et applications de l'analyse Booléenne.* Gauthier-Villars, Paris, 1965.
7. P. Constantinescu, *Об анализе и синтезе релейно-контактных многополюсников с вентильными элементами.* Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys de la R.P.R., **3 (51)**, *2* (1959).
8. P. Constantinescu, *About a class of symmetrical networks which can be realized with a minimal number of contacts.* Revue Roum. de math. pures et appl., **6**, *2* (1961).
9. P. Constantinescu, *Asupra numărului de tipuri de funcții booleene simetrice generalizate.* St. cerc. mat., **12**, *2* (1961).
10. G. Epstein, *Synthesis of electronic circuits for symmetric functions.* IRE Trans. on Electronic Computers, EC-7, 1, 1958.
11. В. М. Глушков, *Синтез цифровых автоматов*, Москва, Физматгиз, 1962 г.
12. О.Б. Лупанов, *К вопросу о реализации симметрических функций алгебры логики контактными схемами.* Проблемы кибернетики, *15* (1965).
13. А.А. Марков, *О минимальных контактно-вентильных двухполюсниках для монотонных симметрических функций.* Проблемы кибернетики, *8* (1962).
14. Gr. C. Moisil, *Teoria algebrică a mecanismelor automate*, Ed. tehnică, București, 1959.
15. Г.Н. Поваров. *К синтезу симметрических контактных схем.* Сб. работ по автом. и телемех., Изд. АН СССР, 1956.
16. Г.Н. Поваров, *К изучению симметрических булевых функций с точки зрения теории релейно-контактных схем.* Доклады Ак. Наук СССР, **104**, *2* (1955).
17. Г. Н. Поваров, *О методике анализа симметрических контактных схем.* Автоматика и телемеханика, **XVI**, *4* (1955).
18. Ivo Rosenberg, *Détection et identification des fonctions booléennes symétriques généralisées.* Revue Roum. de math. pures et appl., **9**, *5* (1964).
19. C. E. Shannon, *A symbolic analysis of relay and switching circuits.* Trans. AIEE, **57** (1938).
20. C. E. Shannon, *The synthesis of two-terminal switching circuits.* Bell System Techn. J., **28**, *1* (1949).

FAMILII DE CURBE MĂSURABILE DIN PLANUL PROIECTIV

DE

RODICA TRANDAFIR

În această lucrare se determină formele canonice ale familiilor de curbe măsurabile de doi și trei parametri, din planul proiectiv.

Se cunosc anumite familii de curbe măsurabile din planul proiectiv. Astfel sînt măsurabile mulțimea conicelor, a hiperbolelor, a elipselor, a cercurilor [3][1]), mulțimea sistemelor de trei puncte necoliniare, mulțimea perechilor „dreaptă + punct" [2][2]) etc.

În această lucrare vom determina formele canonice ale familiilor de curbe măsurabile depinzînd de doi și trei parametri din planul proiectiv. Pentru aceasta vom folosi clasificarea subgrupurilor grupului proiectiv din plan dată de G. Kowalewski [1].

I

Fie P_2 planul proiectiv de coordonate x^1, x^2 și G_8 grupul transformărilor proiective în acest plan, ale cărui transformări infinitezimale sînt

$$(1)\quad \begin{gathered} X_1 f = p_1, X_2 f = p_2,\ X_3 f = x^1 p_1,\ X_4 f = x^2 p_1,\ X_5 f = x^1 p_2, \\ X_6 f = x^2 p_2,\ X_7 f = x^1(x^1 p_1 + x^2 p_2),\ X_8 f = x^2(x^1 p_1 + x^2 p_2). \end{gathered}$$

unde

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x^i},\quad (i = 1, 2).$$

---

[1]) Pag. 166–172.

[2]) Pag. 107.

Să considerăm în acest plan o familie de curbe depinzînd de doi parametri F_2, de ecuaţie

$$F(x^1, x^2, \alpha^1, \alpha^2) = 0. \tag{2}$$

Dacă G_r, ($r \leqslant 8$), este grupul maxim de invarianţă al familiei (2) şi $H_r(\alpha^1, \alpha^2)$ este grupul ataşat acestuia faţă de familia (2) în spaţiul $R_2(\alpha^1, \alpha^2)$, atunci grupul H_r este izomorf cu grupul G_r [3][3]). Notînd cu $\xi^i_h(x^1, x^2)$, ($i = 1, 2$; $l_r = 1, \ldots, r$), coeficienţii transformărilor infinitezimale ale grupului H_r, avem [3][4])

$$\xi^i_h \frac{\partial F}{\partial x^i} + \eta^i_h \frac{\partial F}{\partial \alpha^i} = 0. \tag{3}$$

Pentru ca familia (2) să fie măsurabilă, este necesar şi suficient ca grupul H_r să fie măsurabil [3][5]), deci $2 \leqslant r \leqslant 8$.

Să presupunem întîi că $r = 2$, deci grupul maxim de invarianţă al familiei (2) este un grup G_2, subgrup cu doi parametri al grupului (1)

Grupul (1) are următoarele unsprezece subgrupuri cu doi parametri :

$$G_2^{\mathrm{I}} \equiv [X_1, X_2],\ G_2^{\mathrm{II}} \equiv [X_3, X_6],\ G_2^{\mathrm{III}} \equiv [X_1, X_6],\ G_2^{\mathrm{IV}} \equiv [X_1, X_2 + X_4],$$

$$G_2^{\mathrm{V}} \equiv [X_1, X_3 + X_6],\ G_2^{\mathrm{VI}} \equiv [X_1, X_3 + cX_6],\ (c \neq 0,\ 1),$$

$$G_2^{\mathrm{VII}} \equiv [X_1, X_2 + X_3],\ G_2^{\mathrm{VIII}} \equiv [X_1, X_3 + X_4 + X_6],$$

$$G_2^{\mathrm{IX}} \equiv [X_1 - 2X_5, X_3 + 2X_6],\ G_2^{\mathrm{X}} \equiv [X_1, X_3],\ G_2^{\mathrm{XI}} \equiv [X_1, X_4].$$

În [4], M. Stoka determină expresiile coeficienţilor transformărilor infinitezimale ale grupurilor tranzitive în două şi trei variabile izomorfe cu grupul transformărilor proiective din plan şi cu subgrupurile lui.

Dacă grupul maxim de invarianţă al familiei (2) este grupul G_2^{I}, atunci grupul lui ataşat este grupul măsurabil

$$H_2' \equiv [\pi_1, \pi_2],$$

unde

$$\pi_i = \frac{\partial f}{\partial \alpha^i}.$$

Cu aceste valori, sistemul (3) se scrie

$$\frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0,$$

avînd soluţia

$$F = F(x^1 - \alpha^1, x^2 - \alpha^2).$$

Deci, în acest caz, familia de curbe are ecuaţia

$$F(x^1 - \alpha^1, x^2 - \alpha^2) = 0. \tag{4}$$

---

[3]) Pag. 33.

[4]) Pag. 37.

[5]) Pag. 41.

Dacă grupul maxim de invarianță al familiei (2) este grupul G_2^{II}, atunci grupul lui atașat este grupul H_2' și sistemul (3) devine

$$x^1 \frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \quad x^2 \frac{\partial F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0,$$

cu soluția

$$F = F(\mathrm{e}^{-\alpha^1} x^1, \ \mathrm{e}^{-\alpha^2} x^2).$$

Familia de curbe are deci ecuația

$$F(\mathrm{e}^{-\alpha^1} x^1, \ \mathrm{e}^{-\alpha^2} x^2) = 0. \tag{5}$$

În cazul în care grupul maxim de invarianță, al familiei (2) este grupul G_3^{III}, grupul lui atașat este H_2' și sistemul (3) se scrie

$$\frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \quad x^2 \frac{\partial F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0,$$

avînd soluția

$$F = F(x^1 - \alpha^1, \ \mathrm{e}^{-\alpha^2} x^2).$$

Deci, ecuația familiei de curbe este

$$F(x^1 - \alpha^1, \mathrm{e}^{-\alpha^2} x^2) = 0. \tag{6}$$

Dacă grupul maxim de invarianță al familiei (2) este G_2^{IV}, grupul atașat lui este grupul H_2'. Sistemul (3) se scrie în acest caz

$$\frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \quad x^2 \frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0$$

și are soluția

$$F = F\left[\frac{(x^2)^2}{2} - x^1 + \alpha^1, \ x^2 - \alpha^2\right].$$

Familia de curbe are deci ecuația

$$F\left[\frac{(x^2)^2}{2} - x^1 + \alpha^1, \ x^2 - \alpha^2\right] = 0. \tag{7}$$

Dacă familia (2) are ca grup maxim de invarianță grupul G_2^{V}, grupul atașat lui este grupul măsurabil

$$H_2'' = [\pi_1, \ \alpha^1 \pi_1 + \pi_2].$$

Cu aceste valori sistemul (3) devine

$$\frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \quad x^1 \frac{\partial F}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^1 \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0,$$

avînd soluția

$$F = F\left(\frac{x^1 - \alpha^1}{x^2}, \ \mathrm{e}^{-\alpha^2} x^2\right).$$

Deci, ecuația familiei de curbe este

$$F\left(\frac{x^1-\alpha^1}{x^2},\ e^{-\alpha^2}x^2\right)=0. \tag{8}$$

În cazul în care grupul maxim de invarianță al familiei (2) este grupul G_2^{VI}, grupul atașat lui este grupul H_2''. Sistemul (3) se scrie în acest caz

$$\frac{\partial F}{\partial x^1}+\frac{\partial F}{\partial \alpha^1}=0,\ x^1\frac{\partial F}{\partial x^1}+cx^2\frac{\partial F}{\partial x^2}+\alpha^1\frac{\partial F}{\partial \alpha^1}+\frac{\partial F}{\partial \alpha^2}=0,$$

și are soluția

$$F=F\left[\frac{(x^1-\alpha^1)^c}{x^2},e^{-c\alpha^2}x^2\right].$$

Familia de curbe are deci ecuația

$$F\left[\frac{(x^1-\alpha^1)^c}{x^2},\ e^{-c\alpha^2}x^2\right]=0,\ (c\neq 0,1) \tag{9}$$

Dacă familia (2) are ca grup maxim de invarianță grupul G_2^{VII}, grupul atașat lui este H_2'' și sistemul (3) devine

$$\frac{\partial F}{\partial x^1}+\frac{\partial F}{\partial \alpha^1}=0,\ x^1\frac{\partial F}{\partial x^1}+\frac{\partial F}{\partial x^2}+\alpha^1\frac{\partial F}{\partial \alpha^1}+\frac{\partial F}{\partial \alpha^2}=0,$$

avînd soluția

$$F=F\,[e^{-\alpha^2}(x^1-\alpha^1),\ x^2-\alpha^2].$$

Deci, în acest caz, familia de curbe are ecuația

$$F\,[e^{-\alpha^2}(x^1-\alpha^1),\ x^2-\alpha^2]=0. \tag{10}$$

În cazul în care familia (2) are ca grup maxim de invarianță grupul G_2^{VIII}, grupul atașat lui este H_2''. Sistemul (3) se scrie

$$\frac{\partial F}{\partial x^1}+\frac{\partial F}{\partial \alpha^1}=0,(x^1-x^2),\ \frac{\partial F}{\partial x^1}+x^2\frac{\partial F}{\partial x^2}+\alpha^1\frac{\partial F}{\partial \alpha^1}+\frac{\partial F}{\partial \alpha^2}=0,$$

și are soluția

$$F=F\left(\frac{x^1-\alpha^1}{x^2}-\ln x^2,\ x^2-\alpha^2\right).$$

Familia de curbe are deci ecuația

$$F\left(\frac{x^1-\alpha^1}{x^2}-\ln x^2,\ x^2-\alpha^2\right)=0. \tag{11}$$

Dacă grupul maxim de invarianță al familiei (2) este grupul G_2^{IX}, grupul atașat lui este H_2'' și sistemul (3) se scrie

$$\frac{\partial F}{\partial x^1}-2\,x^1\frac{\partial F}{\partial x^2}+\frac{\partial F}{\partial \alpha^1}=0,\ x^1\frac{\partial F}{\partial x^1}+2x^2\frac{\partial F}{\partial x^2}+\alpha^1\frac{\partial F}{\partial x^1}+\frac{\partial F}{\partial \alpha^2}=0,$$

avînd soluția

$$F = F\left[e^{-\alpha^2}(x^1 - \alpha^1), \frac{2\,\alpha^1\,x^1 + x^2 - (\alpha^1)^2}{(x^1 - \alpha^1)^2}\right].$$

Ecuația familiei de curbe este deci

$$F\left[e^{-\alpha^2}(x^1 - \alpha^1), \frac{2\alpha^1\,x^1 + x^2 - (\alpha^1)^2}{(x^1 - \alpha^1)^2}\right] = 0. \tag{12}$$

În cazul în care grupul maxim de invarianță al familiei (2) este G_2^{X}, grupul atașat lui este H_2'' și sistemul (3) devine

$$\frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \quad x^1\frac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^1\frac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0,$$

cu soluția

$$F = F[e^{-\alpha^2}(x^1 - \alpha^1), \; x^2].$$

Deci ecuația familiei este

$$F\,[e^{-\alpha^2}(x^1 - \alpha^1), \; x^2] = 0. \tag{13}$$

Dacă grupul maxim de invarianță este G_2^{XI}, grupul atașat lui este H_2'. Sistemul (3) se scrie în acest caz

$$\frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \quad x^2\frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0,$$

și are soluția

$$F = F\,(x^1 - \alpha^2\,x^2 - \alpha^1, \; x^2).$$

Ecuația familiei de curbe este deci

$$F\,(x^1 - \alpha^2\,x^2 - \alpha^1, \; x^2) = 0. \tag{14}$$

Să presupunem acum că $r = 3$, deci grupul maxim de invarianță al familiei (2) este un grup G_3, subgrup cu trei parametri al grupului (1).

Grupul (1) are unsprezece subgrupuri în trei parametri și anume:

$$G_3^{\mathrm{I}} \equiv [X_1,\; X_2,\; X_3 + X_6],\; G_3^{\mathrm{II}} \equiv [X_1,\; X_2,\; (c+1)\,X_3 + (c-1)\,X_6],$$

$$G_3^{\mathrm{III}} \equiv [X_1,\; X_2,\; X_5],\; G_3^{\mathrm{IV}} \equiv [X_1,\; X_2,\; X_3 + X_5 + X_6],$$

$$G_3^{\mathrm{V}} \equiv [X_1,\; 2X_3 + X_6,\; X_7],\; G_3^{\mathrm{VI}} \equiv [X_1,\; X_2 + X_3,\; X_4],\; G_3^{\mathrm{VII}} \equiv [X_1,\; X_3\,X_6]$$

$$G_3^{\mathrm{VIII}} \equiv [X_1,\; X_4,\; cX_3 + X_6],\; G_3^{\mathrm{IX}} \equiv [X_1,\; X_2 - X_4,\; 2X_3 + X_6],$$

$$G_3^{\mathrm{X}} \equiv [X_1 + X_8,\; X_2 + X_7,\; X_3 - X_6],\; G_3^{\mathrm{XI}} \equiv [X_1,\; X_3,\; X_4].$$

Dacă grupul maxim de invarianță al familiei (2) este grupul G_3^{I}, grupul atașat lui are transformările infinitezimale

$$A_1 f = \pi_1, \; A_2 f = \pi_2, \; A_3 f = \alpha^1\,\pi_1 + \alpha^2\,\pi_2.$$

Acest grup este nemăsurabil, deci grupul G_3' nu poate fi grup maxim de invarianță al unei familii măsurabile de curbe.

Dacă grupul maxim de invarianţă al familiei (2) este grupul G_3^{II}, grupul ataşat lui are una din formele

$$[\mathrm{I}] \quad A_1 f = \pi_1, \; A_2 f = \pi_2, \; A_3 f = (c+1)\,\alpha^1 \pi_1 + (c-1)\alpha^2 \pi_2,$$

$$[\mathrm{II}] \; A_1 f = \pi_1, \; A_3 f = \mathrm{e}^{2\alpha^2} \pi_1, \; A_3 f = (c+1)\,\alpha^1 \,\pi_1 + \pi_2 .$$

Grupul [I] este măsurabil numai dacă $c = 0$. În acest caz sistemul (3) se scrie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\ x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} - x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} - \alpha^2 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \end{cases}$$

şi are soluţia

$$F = F\,[\,(x^1 - \alpha^1)\,(x^2 - \alpha^2)].$$

Deci familia de curbe are ecuaţia

$$F\,[(x^1 - \alpha^1)\,(x^2 - \alpha^2)] = 0,$$

sau

$$(x^1 - \alpha^1)\,(x^2 - \alpha^2) = k, \qquad (k = \text{const.}).$$

Această familie de curbe face parte din familia (4).

Grupul [II] este măsurabil şi sistemul (3) corespunzător acestui grup este

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \mathrm{e}^{2\alpha^2} \; \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\ x^1(c+1)\,\dfrac{\partial F}{\partial x^1} \;\; (c-1)\,x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + (c+1)\;\alpha^{\mathrm{I}}\,\dfrac{F\partial}{\partial \alpha^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \end{cases}$$

avînd soluţia

$$F = F\,[\mathrm{e}^{-(c+1)\,\alpha^2}\,(x^1 + \mathrm{e}^{2\alpha^2}\, x^2 - \alpha^1)].$$

Familia de curbe are ecuaţia

$$F\,[\mathrm{e}^{-(c+1)\,\alpha^2}\,(x^1 + \mathrm{e}^{2\alpha^2}\, x^2 - \alpha^1)] = 0,$$

sau

$$(15) \qquad x^1 + \mathrm{e}^{2\alpha^2}\, x^2 - \alpha^1 = k\,\mathrm{e}^{(c+1)\,\alpha^2}, \; (k = \text{const.})$$

Să considerăm acum cazul în care grupul maxim de invarianță al familiei (2) este G_3^{III}. În acest caz, grupul atașat lui are una din formele

$$[\mathrm{I}] \quad A_1 f = \pi_1, \ A_2 f = \pi_2, \ A_3 f = \alpha^1 \pi_2,$$

$$[\mathrm{II}] \quad A_1 f = \pi_1, \ A_2 f = -\frac{1}{\alpha^2}\pi_1, \ A_3 f = -\frac{\alpha^1}{\alpha^2}\pi_1 + \pi_2.$$

Amîndouă aceste grupuri sînt măsurabile.

În cazul [I] sistemul (3) devine

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\[2mm] x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \end{cases}$$

avînd soluția

$$F = F(x^1 - \alpha^1).$$

Familia de curbe are deci ecuația

$$F(x^1 - \alpha^1) = 0$$

și face parte din familia (4).

În cazul [II] sistemul (3) se scrie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial x^2} - \dfrac{1}{\alpha^2}\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\[2mm] x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} - \dfrac{\alpha^1}{\alpha^2}\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \end{cases}$$

cu soluția

$$F = F[\alpha^2(x^1 - \alpha^1) - x^2].$$

Deci, familia de curbe are ecuația

$$F[\alpha^2(x^1 - \alpha^1) - x^2] = 0.$$

și face parte din familia (14).

Să presupunem acum că grupul G_3^{IV} este grupul maxim de invarianță al familiei (2). Atunci grupul atașat lui are una din formele

$$[\mathrm{I}] \quad A_1 f = \pi_1, \ A_2 f = \pi_2, \ A_3 f = \alpha^1 \pi_1 + (\alpha^1 + \alpha^2)\pi_2,$$

$$[\mathrm{II}] \quad A_1 f = \pi_1, \ A_2 f = -\frac{1}{\alpha^2}\pi_1, \ A_3 f = \frac{\alpha^1(\alpha^2 - 1)}{\alpha^2}\pi_1 + \pi_2.$$

Grupul [I] nu este măsurabil.

În cazul grupului [II], sistemului (3) devine

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x^2} - \dfrac{1}{\alpha^2} \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\ x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + (x^1 + x^2) \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\alpha^1 (\alpha^2 - 1)}{\alpha^2} \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \end{cases}$$

cu soluția

$$F = F\,\{e^{-\alpha^2}[\alpha^2(x^1 - \alpha^1) - x^2]\}\cdot$$

Familia de curbe are deci ecuația

$$F\,\{e^{-\alpha^2}[\alpha^2(x^1 - \alpha^1) - x^2]\} = 0,$$

sau

$$\alpha^2(x^1 - \alpha^1) - x^2 = k\,e^{\alpha^2}, \qquad (k = \text{const.}). \tag{16}$$

Dacă grupul maxim de invarianță al familiei (2) este grupul G_3^{V}, grupul atașat lui are forma

$$A_1 f = \pi_1,\ A_2 f = 2\alpha^1 \pi_1 + \pi_2,\ A_3 f = [(\alpha^1)^2 + \eta\, e^{4\alpha^2}]\, \pi_1 + \alpha^1 \pi_2 .$$

Cu aceste valori, sistemul (3) se scrie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\ 2x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + 2\alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\ (x^1)^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + x^1 x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + [(\alpha^1)^2 + \eta e^{4\alpha^2}] \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \end{cases}$$

avînd soluția

$$F = F\left[\frac{e^{-2\alpha^2}(x^1 - \alpha^1)^2 - \eta\, e^{2\alpha^2}}{(x^2)^2}\right].$$

Familia de curbe are deci ecuația

$$F\left[\frac{e^{-2\alpha^2}(x^1 - \alpha^1)^2 - \eta\, e^{2\alpha^2}}{(x^2)^2}\right] = 0,$$

sau

$$e^{-2\alpha^2}(x^1 - \alpha^1)^2 - \eta\, e^{-2\alpha^2} = k\,(x^2)^2, \ (k = \text{const.};\ \eta = 0, \pm 1). \tag{17}$$

Să presupunem acum că familia (2) are ca grup maxim de invarianță grupul G_3^{VI}. Grupul atașat lui are forma:

$$A_1 f = \pi_1, \; A_2 f = \alpha^1\pi_1 + \pi_2, \; A_3 f = \alpha^2\pi_1 + \eta e^{-\alpha^2}\pi_2, \qquad (\eta = 0, \pm 1).$$

Acest grup este măsurabil numai dacă $\eta = 0$. În acest caz, sistemul (3) devine

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\ & x^1 \frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^1 \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\ & x^2 \frac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^2 \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \end{aligned}\right.$$

și are soluția

$$F = F(x^2 - \alpha^2).$$

Familia de curbe are deci ecuația

$$F(x^2 - \alpha^2) = 0$$

și face parte din familia (4).

În cazul în care familia (2) are ca grup maxim de invarianță grupul G_3^{VII}, grupul atașat lui are una din formele

$$[\mathrm{I}] \quad A_1 f = \pi_1, \; A_2 f = \alpha^1\pi_1 + \pi_2, \; A_3 f = e^{\alpha^2}\pi_1,$$

$$[\mathrm{II}] \quad A_1 f = \pi_1, \; A_2 f = \alpha^1\pi_1 + \pi_2, \; A_3 f = \pi_2.$$

Al doilea grup nu este măsurabil.

În cazul grupului [I], sistemul (3) se scrie

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\ & x^1 \frac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^1 \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\ & x^2 \frac{\partial F}{\partial x^2} + e^{\alpha^2} \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \end{aligned}\right.$$

avînd soluția

$$F = F\left[e^{-\alpha^2}(x^1 - \alpha^1) + \ln x^2\right].$$

Deci, familia de curbe are ecuația

$$F\left[e^{-\alpha^2}(x^1 - \alpha^1) + \ln x^2\right] = 0,$$

sau

$$e^{-\alpha^2}(x^1 - \alpha^1) + \ln x^2 = k, \qquad (k = \text{const.}). \tag{18}$$

Dacă familia (2) are ca grup maxim de invarianță grupul G_3^{VIII}, grupul atașat lui are una din formele

$$[\mathrm{I}] \quad A_1 f = \pi_1, \; A_2 f = \pi_2, \; A_3 f = c\alpha^1\pi_1 + (c-1)\,\alpha^2\pi_2,$$

$$[\mathrm{II}] \quad A_1 f = \pi_1, \; A_2 f = \mathrm{e}^{2\alpha^2}\pi_1, \; A_3 \mathrm{f} = c\alpha^1\pi_1 + \pi_2.$$

Grupul [I] este măsurabil numai dacă $c = \dfrac{1}{2}$. În acest caz sistemul (3) devine

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\ x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\ x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + 2x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} - \alpha^2 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \end{cases}$$

cu soluția

$$F = F\left[\frac{(x^1 - \alpha^2 x^2 - \alpha^1)^2}{x^2}\right].$$

Familia de curbe are deci ecuația

$$F = \left[\frac{(x^1 - \alpha^2 x^2 - \alpha^1)^2}{x^2}\right] = 0,$$

sau

$$(x^1 - \alpha^2 x^2 - \alpha^1)^2 = kx^2, \qquad (k = \text{const.})$$

și face parte din familia (14).

În cazul grupului [II], sistemul (3) se scrie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\ x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \mathrm{e}^{2\alpha^2} \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\ cx^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + c\alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \end{cases}$$

avînd soluția

$$F = F(\mathrm{e}^{-\alpha^2} x^2),$$

sau

$$\mathrm{e}^{-\alpha^2} x^2 = k, \qquad (k = \text{const.})$$

făcînd parte din familia (5).

Să considerăm acum cazul în care familia (2) are ca grup maxim de invarianță grupul G_3^{IX}. În acest caz, grupul atașat lui are una din formele

$$[\mathrm{I}]\quad A_1 f = \pi_1,\ A_2 f = \pi_2,\ A_3 f = 2\alpha^1\pi_1 + \alpha^2\pi_2,$$

$$[\mathrm{II}]\quad A_1 f = \pi_1,\ A_2 f = e^{2\alpha^2}\pi_1,\ A_3 f = 2\alpha^2\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2.$$

Grupul [I] este nemăsurabil.

În cazul grupului [II], sistemul (3) devine

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\[2ex] -x^2\dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + e^{2\alpha^2}\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\[2ex] 2x^1\dfrac{\partial F}{\partial x^1} + x^2\dfrac{\partial F}{\partial x^2} + 2\alpha^1\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \end{cases}$$

și are soluția

$$F = F\left\{ e^{-4\alpha^2}\left[\frac{(x^2)^2}{2} + x^1 + e^{2\alpha^2}x^2 - \alpha^1\right]\right\}.$$

Deci, familia de curbe are ecuația

$$F\left\{ e^{-4\alpha^2}\left[\frac{(x^2)^2}{2} + x^1 + e^{2\alpha^2}x^2 - \alpha^1\right]\right\} = 0,$$

sau

$$\frac{(x^2)^2}{2} + x^1 + e^{2\alpha^2}x^2 - \alpha^1 = e^{4\alpha^2}k, \qquad (k = \mathrm{const}). \tag{19}$$

Dacă grupul maxim de invarianță al familiei este grupul G_3^{X}, grupul atașat lui are transformările infinitezimale

$$A_1 f = \pi_1;\ A_2 f = \left[\frac{(\alpha^1)^2}{2} + \eta\, e^{2\alpha^2}\right]\pi_1 + 2^1\pi_2,\ A_3 f = \alpha^1\pi_1 + \pi_2, \quad (\eta = 0, \pm 1).$$

Sistemul (3) este în acest caz

$$\begin{cases} (1 + x^1x^2)\dfrac{\partial F}{\partial x^1} + (x^2)^2\dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\[2ex] (x^1)^2\dfrac{\partial F}{\partial x^1} + (1 + x^1x^2)\dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \left[\dfrac{(\alpha^1)^2}{2} + \eta\, e^{2\alpha^2}\right]\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \alpha^1\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\[2ex] x^1\dfrac{\partial F}{\partial x^1} - x^2\dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^1\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \end{cases}$$

avînd soluția

$$F = F\left[\frac{(\alpha^1x^2 + 1)^2 - e^{2\alpha^2}(x^2)^2}{2x^1x^2 + 1} - \ln\frac{2x^1x^2 + 1}{2\, e^{2\alpha^2}(x^2)^2}\right].$$

Familia de curbe are deci ecuaţia

$$F\left[\frac{(\alpha^1x^2+1)^2-\mathrm{e}^{2\alpha^2}(x^2)^2}{2x^1x^2+1}-\ln\frac{2x^1x^2+1}{2\,\mathrm{e}^{2\alpha^2}(x^2)^2}\right]=0,$$

sau

$$\frac{(\alpha^1x^2+1)^2-\mathrm{e}^{2\alpha^2}(x^2)^2}{2x^1x^2+1}-\ln\frac{2x^1x^2+1}{2\,\mathrm{e}^{2\alpha^2}(x^2)^2}=k, \qquad (k=\text{const.} \tag{20}$$

În sfîrşit, să considerăm cazul în care familia (2) are ca grup maxim de invarianţă grupul G_3^{XI}. În acest caz, grupul ataşat lui este definit de transformările infinitezimale :

$$A_1f=\pi_1,\ A_2f=\alpha^1\pi_1+\pi_2,\ A_3f=\mathrm{e}^{-\alpha^2}\pi_2.$$

Cu aceste valori sistemul (3) devine

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x^1}+\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1}=0,\\[2mm] x^1\dfrac{\partial F}{\partial x^1}+\alpha^1\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1}+\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2}=0,\\[2mm] x^2\dfrac{\partial F}{\partial x^1}+\mathrm{e}^{-\alpha^2}\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2}=0\end{cases}$$

şi are soluţia

$$F=F(x^2).$$

Familia de curbe are deci ecuaţia

$$F(x^2)=0$$

şi face parte din familia (13).

Să presupunem acum că $r=4$, deci că grupul maxim de invarianţă al familiei (2) este un grup G_4, subgrup cu patru parametri al grupului (1).

Grupul (1) are cinci subgrupuri cu patru parametri şi anume :

$$G_4^{\mathrm{I}}\equiv[X_1,X_2,X_3,X_4],\ G_4^{\mathrm{II}}\equiv[X_1,X_2,X_5X_3+cX_6],$$

$$G_4^{\mathrm{III}}\equiv[X_1,X_2,X_3,X_6],\ G_4^{\mathrm{IV}}\equiv[X_1,X_3,X_4,X_6],\ G_4^{\mathrm{V}}\equiv[X_1,X_3,X_6X_7].$$

Dacă grupul maxim de invarianţă al familiei (2) este grupul G_4^{I}, grupul ataşat lui are transformările infinitezimale

$$A_1f=\pi_1,\ A_2f=\pi_2,\ A_3f=\alpha^1\pi_1,\ A_4f=\alpha^2\pi_2.$$

Acest grup este nemăsurabil, deci grupul G_4' nu poate fi grup maxim de invarianţă al unei familii măsurabile de curbe, depinzînd de doi parametri.

Dacă grupul maxim de invarianță al familiei (2) este grupul G_4^{II}, grupul atașat lui are una din formele

$$[I] \quad A_1 f = \pi_1, A_2 f = \pi_2, A_3 f = \alpha^1 \pi_2, A_4 f = \alpha^1 \pi_1 + c\alpha^2 \pi_2,$$

$$II] \quad A_1 f = \pi_1, \; A_2 f = -\frac{1}{\alpha^2}\pi_1, A_3 f = -\frac{\alpha^1}{\alpha^2}\pi_1 + \pi_2, \; A_4 f = \alpha^1\pi_1 + (c-1)\alpha^2\pi_2.$$

Grupul [II] este nemăsurabil. Grupul [I] este măsurabil numai dacă $c = -1$. În acest caz, sistemul (3) se scrie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\[2ex] x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\[2ex] x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} - x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} - \alpha^2 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \end{cases}$$

avînd soluția

$$F = \text{const.}$$

Aici, grupul G_4^{II} nu poate fi grup maxim de invarianță al unei familii măsurabile de curbe, depinzînd de doi parametri.

Să considerăm acum cazul în care familia (2) are ca grup maxim de invarianță grupul G_4^{III}. Grupul atașat lui este grupul nemăsurabil

$$A_1 f = \pi_1, \; A_2 f = \pi_2, A_3 f = \alpha^1 \pi_1, \; A_4 f = \alpha^2 \pi_2,$$

deci grupul G_4^{III} nu poate fi grup maxim de invarianță al familiei (2).

Dacă grupul G_4^{IV} este grup maxim de invarianță pentru familia (2), grupul atașat lui are una din formele

$$[I] \quad A_1 f = \pi_1, A_2 f = \alpha^1 \pi_1 + \pi_2, \; A_3 f = e^{-\alpha^2}\pi_2, \; A_4 f = -\pi_2,$$

$$[II] \quad A_1 f = \pi_1, \; A_2 f = \alpha^1 \pi_1, \; A_3 f = \alpha^2 \pi_1, \; A_4 f = \alpha^2 \pi_2.$$

Aceste grupuri sînt nemăsurabile, deci grupul G_4^{IV} nu poate fi grup maxim de invarianță pentru familia (2).

Dacă familia (2) are ca grup maxim de invarianță grupul G_4^{V}, atunci grupul atașat lui are una din formele

$$[I] \quad A_1 f = \pi_1, A_2 f = \alpha^1 \pi_1 + \pi_2, A_3 f = \pi_2, A_4 f = (\alpha^1)^2 \pi_1 + 3\alpha^1 \pi_2,$$

$$[II] \quad A_1 f = \pi_1, A_2 f = \alpha^1 \pi_1, A_3 f = \alpha^2 \pi_2, A_4 f = (\alpha^1)^2 \pi_1 + \alpha^1 \alpha^2 \pi_2.$$

Aceste grupuri sînt nemăsurabile, deci grupul G_4^{V} nu poate fi grup maxim de invarianță pentru o familie (2) măsurabilă.

Se presupunem acum că $r = 5$, deci grupul maxim de invarianță al familiei (2) este un grup cu mici parametri, subgrup al grupului (1).

Grupul proiectiv (1) are trei subgrupuri cu cinci parametri și anume :

$G_5' \equiv [X_1, X_2, X_3, X_5, X_6]$, $G_5'' \equiv [X_1, X_2, X_5, 2X_3 + X_6, X_7]$,

$G_5''' \equiv [X_1, X_2, X_4, X_5, X_3 - X_6]$.

Dacă grupul maxim de invarianță al familiei (2) este grupul G_5', grupul atașat lui are una din formele

[I] $A_1f = \pi_1$, $A_2f = \pi_2$, $A_3f = \alpha^1\pi_1$, $A_4f = \alpha^1\pi_2$, $A_5f = \alpha^2\pi_2$,

[II] $A_1f = \pi_1$, $A_2f = e^{\alpha^2}\pi_1$, $A_3f = \alpha^1\pi_1 + \pi_2$, $A_4f = e^{\alpha^2}(\alpha^1\pi_1 + \pi_2)$, $A_5f = -\pi_2$.

Aceste două grupuri sînt nemăsurabile, deci grupul G_5' nu poate fi grup maxim de invarianță pentru familia măsurabilă (2).

În cazul în care familia (2) are ca grup maxim de invarianță grupul G_5'', grupul atașat lui are una din formele

[I] $A_1f = \pi_1$, $A_2f = \pi_2$, $A_3f = \alpha^2\pi_2$, $A_4f = 2\alpha^1\pi_1 + \alpha^2\pi_2$, $A_5f = \alpha^1(\alpha^1\pi_1 + \alpha^2\pi_2)$

[II] $A_1f = \pi_1$, $A_2f = -\dfrac{1}{\alpha^2}\pi_1$, $A_3f = -\dfrac{\alpha^1}{\alpha^2}\pi_1 + \pi_2$, $A_4f = 2\alpha^1\pi_1 - \alpha^2\pi_2$,

$A_5f = \alpha^1(\alpha^1\pi_1 - \alpha^2\pi_2)$.

Aceste grupuri sînt nemăsurabile, deci grupul G_5'' nu poate fi grup maxim de invarianță pentru o familie (2) măsurabilă.

Dacă familia (2) are ca grup maxim de invarianță grupul G_5''', grupul atașat lui poate avea una din formele

[I] $A_1f = \pi_1$, $A_2f = \pi_2$, $A_3f = \alpha^2\pi_1$, $A_4f = \alpha^1\pi_2$, $A_5f = \alpha^1\pi_1 - \alpha^2\pi_2$,

[II] $A_1f = \pi_1$, $A_2f = -\alpha^2\pi_1$, $A_3f = \pi_2$, $A_4f = -\alpha^2(\alpha^1\pi_1 + \alpha^2\pi_2)$,

$A_5f = \alpha^1\pi_1 + 2\alpha^2\pi_2$.

Al doilea grup este nemăsurabil.

În cazul primului grup, sistemul (3) se scrie :

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0,\\
&x^2\frac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^2\frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0,\\
&x^1\frac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^1\frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0,\\
&x^1\frac{\partial F}{\partial x^1} - x^2\frac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^1\frac{\partial F}{\partial \alpha^1} - \alpha^2\frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0,
\end{aligned}\right.$$

avînd soluția

$$F = \text{const}.$$

Deci, grupul G_5''' nu poate fi grup maxim de invarianță pentru o familie (2) măsurabilă.

Să presupunem $r = 6$, deci că familia (2) are ca grup maxim de invarianță un grup cu șase parametri, subgrup al grupului proiectiv (1).

Grupul (1) are două subgrupuri cu șase parametri și anume:

$$G_6' \equiv [X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6], \quad G_6'' \equiv [X_1\, X_2, X_3, X_5, X_6, X_7].$$

Dacă familia (2) are ca grup maxim de invarianță grupul G_6', grupul atașat lui are una din formele

$$[\mathrm{I}]\ A_1 f = \pi_1, A_2 f = \pi_2, A_3 f = \alpha^1\pi_1, A_4 f = \alpha^2\pi_1, A_5 f = \alpha^1\pi_2, A_6 f = \alpha^2\pi_1,$$

$$[\mathrm{II}]\ A_1 f = \pi_1, A_2 f = e^{\alpha^2}\pi_1, A_3 f = \alpha^1\pi_1 + \pi_2, A_4 f = - e^{-\alpha^2}\pi_2,$$

$$A_5 f = e^{\alpha^2}(\alpha^1\pi_1 + \pi_2), A_6 f = -\pi_2.$$

Aceste grupuri sînt nemăsurabile, deci grupul G_6' nu poate fi grup maxim de invarianță pentru familia măsurabilă (2).

Dacă familia (2) are ca grup maxim de invarianță grupul G_6', atunci grupul atașat lui are una din formele:

$$[\mathrm{I}]\ A_1 f = \pi_1,\ A_2 f = \pi_2,\ A_3 f = \alpha^1\pi_1,\ A_4 f = \alpha^1\pi_2,\ A_5 f = \alpha^2\pi_2,$$

$$A_6 f = \alpha^1(\alpha^1\pi_1 + \alpha^2\pi_2).$$

$$[\mathrm{II}]\ A_1 f = \pi_1, A_2 f = e^{\alpha^2}\pi_1, A_3 f = \alpha^1\pi_1 + \pi_2, A_4 f = e^{\alpha^2}(\alpha^1\pi_1 + \pi_2),$$

$$A_5 f = -\pi_2, A_6 f = \alpha^1(\alpha^1\pi_1 + \pi_2).$$

Aceste grupuri sînt nemăsurabile, deci grupul G_6'' nu poate fi grup maxim de invarianță pentru familia măsurabilă (2).

Grupul (1) nu are nici un subgrup cu șapte parametri, deci nu putem avea $r = 7$.

În sfîrșit, dacă $r = 8$, deci dacă familia (2) admite ca grup maxim de invarianță grupul proiectiv (1), grupul atașat lui este definit de operatorii:

$$A_1 f = \pi_1, A_2 f = \pi_2, A_3 f = \alpha^1\pi_1, A_4 f = \alpha^2\pi_1, A_5 f = \alpha^1\pi_2,$$

$$A_6 f = \alpha^2\pi_2, A_7 f = \alpha^1(\alpha^1\pi_1 + \alpha^2\pi_2), A_8 f = \alpha^2(\alpha^1\pi_1 + \alpha^2\pi_2).$$

Sistemul (3) se reduce în acest caz la forma

$$\frac{\partial F}{\partial x^1} = 0, \frac{\partial F}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0,$$

și are soluția

$$F = \mathrm{const.}$$

Deci, grupul (1) nu poate fi grup maxim de invarianță pentru o familie măsurabilă (2).

Rezultă:

TEOREMA 1. *Familiile măsurabile de curbe, depinzînd de doi parametri, din planul proiectiv pot fi reduse la formele* (4), . . ., (20).

II

Ne vom ocupa acum de familiile de curbe depinzînd de trei parametri de ecuație

$$F(x^1, x^2, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) = 0. \tag{21}$$

Dacă notăm cu G_r, $(r \leqslant 8)$, grupul maxim de invarianță al familiei (21) și cu H_r grupul atașat lui în spațiul parametrilor $R^2(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$, familia (21) este măsurabilă dacă și numai dacă grupul H_r este măsurabil. Grupul H_r trebuie să fie tranzitiv, deci $3 \leqslant r \leqslant 8$.

Vom presupune întîi că $r = 3$, deci că familia (21) admite ca grup maxim de invarianță un grup G_3, subgrup al grupului (1).

Dacă familia (21) are ca grup maxim de invarianță grupul G_3', grupul atașat lui față de familie este definit de transformările infinitezimale

$$A_1 f = \pi_1, \quad A_2 f = \pi_2, \quad A_3 f = \alpha^1\pi_1 + \alpha^2\pi_2 + \pi_3.$$

Cu aceste valori, sistemul (3) se scrie

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\ &\frac{\partial F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\ &x^1 \frac{\partial F}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^1 \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \alpha^2 \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0 \end{aligned}\right.$$

și are soluția

$$F = F\,[e^{-\alpha^3}(x^1 - \alpha^1),\ e^{-\alpha^3}(x^2 - \alpha^2)].$$

Deci, familia de curbe are ecuația

$$F\,[e^{-\alpha^3}(x^1 - \alpha^1),\ e^{-\alpha^3}(x^2 - \alpha^2)] = 0. \tag{22}$$

În cazul în care familia (21) are ca grup maxim de invarianță grupul G_3'', grupul atașat lui este definit de operatorii

$$A_1 f = \pi_1, \quad A_2 f = \pi_2, \quad A_3 f = (c + 1)\,\alpha^1\pi_1 + (c - 1)\,\alpha^2\pi_2 + \pi_3.$$

Sistemul (3) se scrie în acest caz :

$$\frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0,$$

$$(c + 1)\left(x^1 \frac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^1 \frac{\partial F}{\partial \alpha^1}\right) + (c - 1)\left(x^2 \frac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^2 \frac{\partial F}{\partial \alpha^2}\right) + \frac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0,$$

avînd soluția

$$F = F\,[\mathrm{e}^{-(c+1)\,\alpha^3}(x^1 - \alpha^1),\ \mathrm{e}^{-(c-1)\,\alpha^3}(x^2 - \alpha^2)].$$

Familia de curbe are deci ecuația

$$F\,[\mathrm{e}^{-(c+1)\,\alpha^3}(x^1 - \alpha^1),\ \mathrm{e}^{-(c-1)\,\alpha^3}(x^2 - \alpha^2)] = 0. \tag{23}$$

Dacă grupul maxim de invarianță al familiei (21) este grupul G_3''', grupul atașat lui este definit de operatorii

$$A_1f = \pi_1,\ A_2f = \pi_2,\ A_3f = \alpha^1\pi_2 + \pi_3.$$

Sistemul (3) este în acest caz.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\[2ex] x^1\dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^1\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0, \end{cases}$$

și are soluția

$$F = F\,[x^1 - \alpha^1,\ x^2 - \alpha^2 - \alpha^3(x^1 - \alpha^1)].$$

Deci, ecuația familiei de curbe este

$$F\,[x^1 - \alpha^1,\ x^2 - \alpha^2 - \alpha^3(x^1 - \alpha^1)] = 0. \tag{24}$$

În cazul în care familia (21) are ca grup maxim de invarianță grupul G_3^{IV}, grupul atașat lui este

$$A_1f = \pi_1,\ A_2f = \pi_2,\ A_3f = \alpha^1\pi_1 + (\alpha^1 + \alpha^2)\pi_2 + \pi_3$$

și sistemul (3) devine

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\[2ex] x^1\dfrac{\partial F}{\partial x^1} + (x^1 + x^2)\dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^1\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + (\alpha^1 + \alpha^2)\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0. \end{cases}$$

Soluția acestui sistem este

$$F = F\{\mathrm{e}^{-\alpha^3}(x^1 - \alpha^1),\ \mathrm{e}^{-\alpha^3}[x^2 - \alpha^2 - \alpha^3(x^1 - \alpha^1)]\}$$

iș deci familia de curbe are ecuația

$$F\{\mathrm{e}^{-\alpha^3}(x^1 - \alpha^1),\ \mathrm{e}^{-\alpha^3}[x^2 - \alpha^2 - \alpha^3(x^1 - \alpha^1)]\} = 0. \tag{25}$$

Să presupunem acum că grupul maxim de invarianță al familiei (21) este G_3^{V}. Grupul atașat lui este

$$A_1 f = \pi_1, A_2 f = 2\alpha^1\pi_1 + \pi_2,\ A_3 f = (\alpha^1)^2\pi_1 + \alpha^1\pi_2 + e^{2\alpha^2}\pi_3.$$

Sistemul (3) devine

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\[2ex] 2x^1\dfrac{\partial F}{\partial x^1} + x^2\dfrac{\partial F}{\partial x^2} + 2\alpha^1\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\[2ex] (x^1)^2\dfrac{\partial F}{\partial x^1} + x^1x^2\dfrac{\partial F}{\partial x^2} + (\alpha^1)^2\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \alpha^1\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} + e^{2\alpha^2}\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0 \end{cases}$$

și are soluția

$$F = F\left[\frac{\alpha^3(x^1 - \alpha^1) + e^{2\alpha^2}}{e^{\alpha^2}x^2},\ \frac{x^1 - \alpha^1}{e^{\alpha^2}x^2}\right].$$

Deci, familia de curbe are ecuația

$$F\left[\frac{\alpha^3(x^1 - \alpha^1) + e^{2\alpha^2}}{e^{\alpha^2}x^2},\ \frac{x^1 - \alpha^1}{e^{\alpha^2}x^2}\right] = 0. \tag{26}$$

Dacă familia (21) are ca grup maxim de invarianță grupul G_3^{VI}, grupul atașat lui are operatorii

$$A_1 f = \pi_1,\ A_2 f = \alpha^1\pi_1 + \pi_2,\ A_3 f = \alpha^2\pi_1 + e^{-\alpha^2}\pi_3.$$

Sistemul (3) se scrie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\[2ex] x^1\dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^1\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\[2ex] x^2\dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^2\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + e^{-\alpha^2}\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0, \end{cases}$$

avînd soluția

$$F = F\,[e^{-\alpha^2}(x^1 - \alpha^1) - \alpha^3(x^2 - \alpha^2),\ x^2 - \alpha^2],$$

iar familia de curbe are ecuația

$$F\,[e^{-\alpha^2}(x^1 - \alpha^2) - \alpha^3(x^2 - \alpha^2),\ x^2 - \alpha^2] = 0. \tag{27}$$

În cazul în care familia (21) are ca grup maxim de invarianță grupul G_3^{VII}, grupul atașat lui este definit de operatorii

$$A_1 f = \pi_1,\ A_2 f = \alpha^1\pi_1 + \pi_2,\ A_3 f = \pi_3.$$

Sistemul (3) devine

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\ x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\ x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0 \end{cases}$$

şi are soluţia

$$F = F\,[\mathrm{e}^{-\alpha^2}(x^1 - \alpha^1),\ \mathrm{e}^{-\alpha^3}x^2].$$

Deci familia de curbe are ecuaţia

$$F\,[\mathrm{e}^{-\alpha^2}(x^1 - \alpha^1),\ \mathrm{e}^{-\alpha^3}x^2] = 0. \tag{28}$$

Presupunînd că familia (21) are ca grup maxim de invarianţă grupul G_3^{VIII}, grupul ataşat lui este

$$A_1 f = \pi_1,\ A_2 f = \pi_2,\ A_3 f = c\alpha^1\pi_1 + (c-1)\,\alpha^2\pi_2 + \pi_3,$$

şi sistemul (3) se scrie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\ x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\ cx^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + c\alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + (c-1)\alpha^2 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0. \end{cases}$$

Soluţia acestui sistem este

$$F = F\,[\mathrm{e}^{-c\alpha^3}(x^1 - \alpha^2 x^2 - \alpha^1),\ \mathrm{e}^{-\alpha^3}x^2].$$

Ecuaţia familiei de curbe este deci

$$F\,[\mathrm{e}^{-c\alpha^3}(x^1 - \alpha^2 x^2 - \alpha^1),\ \mathrm{e}^{-\alpha^3}x^2] = 0. \tag{29}$$

Dacă grupul maxim de invarianţă al familiei (21) este grupul G_3^{IX}, grupul ataşat lui este definit de operatorii

$$A_1 f = \pi_1,\ A_2 f = \pi_2,\ A_3 f = 2\alpha^1\pi_1 + \alpha^2\pi_2 + \pi_3.$$

Sistemul (3) se scrie în acest caz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x^2} - x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\ 2x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + 2\alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \alpha^2 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0, \end{cases}$$

avînd soluția

$$F = F\left\{e^{-2\alpha^3}\left[\frac{(x^2)^2}{2} + x^1 - \alpha^1\right],\ e^{-\alpha^3}(x^2-\alpha^2)\right\}.$$

Deci, familia de curbe are ecuația

$$F\left\{e^{-2\alpha^3}\left[\frac{(x^2)^2}{2} + x^1 - \alpha^1\right],\ e^{-\alpha^3}(x^2 - \alpha^2)\right\} = 0. \tag{30}$$

În cazul în care familia (21) are ca grup maxim de invarianță grupul G_3^{X}, grupul atașat lui este:

$$A_1 f = \pi_1,\ A_2 f = \frac{(\alpha^1)^2}{2}\pi_1 + e^{\alpha^3}\pi_2 + \alpha^1\pi_3,\ A_3 f = \alpha^1\pi_1 + \pi_3.$$

Sistemul (3) devine:

$$\begin{cases} (x^1x^2 + 1)\dfrac{\partial F}{\partial x^1} + (x^2)^2\dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\[2ex] (x^1)^2\dfrac{\partial F}{\partial x^1} + (x^1x^2+1)\dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{(\alpha^1)^2}{2}\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + e^{\alpha^3}\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} + \alpha^1\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0, \\[2ex] x^1\dfrac{\partial F}{\partial x^1} - x^2\dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^1\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0 \end{cases}$$

și are soluția

$$F = F\left[\frac{e^{\alpha^3}\sqrt{2x^1x^2 + 1}}{2x^1 - 2\alpha^1 - (\alpha^1)^2x^2},\ \frac{e^{\alpha^3}(\alpha^1x^2 + 1)}{4x^1 - 4\alpha^1 - 2(\alpha^1)^2x^2} + \alpha^2\right] = 0.$$

Familia de curbe are deci ecuația

$$F\left[\frac{e^{\alpha^3}\sqrt{2x^1x^2 + 1}}{2x^1 - 2\alpha^1 - (\alpha^1)^2x^2},\ \frac{e^{\alpha^3}(\alpha^1x^2 + 1)}{4x^1 - 4\alpha^1 - 2(\alpha^1)^2x^2} + \alpha^2\right] = 0. \tag{31}$$

Să presupunem acum că grupul G_3^{XI} este grupul maxim de invarianță al familiei (21). Atunci grupul atașat lui are operatorii

$$A_1 f = \pi_1, A_2 f = \alpha^1\pi_1 + \pi_2,\ A_3 f = e^{-\alpha^2}\pi_3$$

și sistemul (3) se scrie

$$\frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0$$

$$x^1\frac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^1\frac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0$$

$$x^2\frac{\partial F}{\partial x^1} + e^{-\alpha^2}\frac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0$$

avînd soluţia

$$F = F\,[e^{-\alpha^2}(x^1 - \alpha^1) - \alpha^3 x^2,\ x^2]$$

Familia de curbe are deci ecuaţia

$$F[e^{-\alpha^2}(x^1 - \alpha^1) - \alpha^3 x^2,\ x^2] = 0. \tag{32}$$

Să presupunem că $r = 4$, deci că familia (21) are ca grup maxim de invarianţă un grup cu patru parametri, subgrup al grupului (1).

Dacă familia (21) admite grupul G_4' ca grup maxim de invarianţă, grupul ataşat lui are una din formele:

$$[\mathrm{I}]\ A_1 f = \pi_1,\ A_2 f = \pi_2,\ A_3 f = \alpha^1\pi_1 + \pi_3,\ A_4 f = \alpha^2\pi_1 + \eta e^{-\alpha^3}\pi_3,\ (\eta = 0, \pm 1),$$

$$[\mathrm{II}]\ A_1 f = \pi_1,\ A_2 f = \pi_2,\ A_3 f = \alpha^1\pi_1 + \pi_3,\ A_4 f = \alpha^2\pi_1 + e^{-\alpha^3}(\pm\pi_2 + k\pi_3).$$

În cazul grupului [I], sistemul (3) se scrie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\[2mm] x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0, \\[2mm] x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^2 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \eta e^{-\alpha^3} \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0, \end{cases}$$

avînd soluţia

$$F = F\,(x^2 - \alpha^2).$$

Deci, familia de curbe are ecuaţia

$$F\,(x^2 - \alpha^2) = 0$$

şi face parte din familia (23) cu $c = 1$.

În cazul [II] sistemul (3) se scrie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\[2mm] x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0, \\[2mm] x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^2 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} \pm e^{-\alpha^3} \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} + k e^{-\alpha^3} \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0 \end{cases}$$

şi are soluţia

$$F = F\left\{e^{\mp k(x^2-\alpha^2)}\left[e^{-\alpha^3}(x^1-\alpha^1) - \frac{x^2-\alpha^2}{k} \mp \frac{1}{k^2}\right]\right\}$$

pentru $k \neq 0$ şi

$$F = F\left[e^{-\alpha^3}(x^1-\alpha^1) \pm \frac{(x^2-\alpha^2)^2}{2}\right]$$

pentru $k = 0$.

Deci, familia de curbe are una din formele

$$e^{\mp k(x^2-\alpha^2)}\left[e^{-\alpha^3}(x^1-\alpha^1) - \frac{x^2-\alpha^2}{k} \pm \frac{1}{k^2}\right] = c, \ (c = \text{const}). \tag{33}$$

sau

$$e^{-\alpha^3}(x^1-\alpha^1) \pm \frac{(x^2-\alpha^2)^2}{2} = c, \ (c = \text{const}). \tag{34}$$

Dacă familia (21) admite ca grup maxim de invarianţă grupul G''_4, grupul ataşat lui are una din formele:

[I] $A_1f = \pi_1$, $A_2f = \pi_2$, $A_3f = \alpha^1\pi_2 + \pi_3$, $A_4f = \alpha^1\pi_1 +$
$+ c\alpha^2\pi_2 + (c-1)\,\alpha^3\pi_3$, $(c \neq 1)$

[II] $A_1f = \pi_1$, $A_2f = \pi_2$, $A_3f = \alpha^1\pi_2 + \pi_3$, $A_4f =$
$= \alpha^1\pi_1 + \alpha^2\pi_2 + k\pi_3$.

Al doilea grup este nemăsurabil, iar primul grup este măsurabil numai dacă $c = 0$. În acest caz, sistemul (3) devine

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\[2mm] x^1\dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^1\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0, \\[2mm] x^1\dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^1\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} - \alpha^3\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0, \end{cases}$$

avînd soluţia

$$F = F\left[\alpha^3(x^1-\alpha^1) - x^2 + \alpha^2\right].$$

Familia de curbe are deci ecuaţia

$$F\left[\alpha^3(x^1-\alpha^1) - x^2 + \alpha^2\right] = 0,$$

şi face parte din familia (24).

În cazul în care familia (21) are ca grup maxim de invarianţă grupul G_4''', grupul ataşat lui are una din formele

$$[\mathrm{I}] \quad A_1 f = \pi_1, \quad A_2 f = \pi_2, \; A_3 f = \alpha^1 \pi_1 + \pi_3, \quad A_4 f = \alpha^2 \pi_2 + k\pi_3,$$

$$[\mathrm{II}] \quad A_1 f = \pi_1, \quad A_2 f = \pi_2, \; A_3 f = \alpha^1 \pi_1 + \pi_3, \quad A_4 f = \pm\, e^{\alpha^3} \pi_1 + \alpha^2 \pi_2,$$

$$[\mathrm{III}] \; A_1 f = \pi_1, \quad A_2 f = \pi_2, \; A_3 f = \alpha^1 \pi_1 + \eta e^{\alpha^3} \pi_2, \quad A_4 f = \alpha^2 \pi_2 + \pi_3,$$

$$(\eta = 0, \; \pm 1).$$

Singurul grup măsurabil dintre acestea este grupul [I] cu $k = 1$. În acest caz sistemul (3) se scrie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0. \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\[2ex] x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0, \\[2ex] x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^2 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0 \end{cases}$$

şi are soluţia

$$F = F[e^{-\alpha^3} (x^1 - \alpha^1)(x^2 - \alpha^2)].$$

Familia de curbe are deci ecuaţia

$$F[e^{-\alpha^3} (x^1 - \alpha^1)(x^2 - \alpha^2)] = 0,$$

făcînd parte din familia (23) cu $c = \dfrac{1}{2}$.

Dacă grupul G_4^{VI} este grup maxim de invarianţă al familiei (21), grupul ataşat lui are una din formule

$$[\mathrm{I}] \; A_1 f = \pi_1, \; A_2 f = \alpha^1 \pi_1 + \pi_2, \; A_3 f = e^{\alpha^3 - \alpha^2} \; (\pi_2 + k\pi_3), \; A_4 f = \pi_3,$$

$$[\mathrm{II}] \; A_1 f = \pi_1 \; A_2 f = \alpha^1 \pi_1 + \pi_2, \; A_3 f = e^{\alpha^3 - \alpha^2} \pi_3, \; A_4 f = \pi_3,$$

$$[\mathrm{III}] \; A_1 f = \pi_1, \; A_2 f = \alpha^1 \pi_1 + \pi_2, \quad A_3 f = e^{\alpha^3} \pi_1 + \eta e^{\alpha^3 - \alpha^2} \pi_3, \quad A_4 f = \\ = \pi_3, \quad (\eta = 0, \pm 1)$$

$$[\mathrm{IV}] \; A_1 f = \pi_1, \quad A_2 f = \alpha^1 \pi_1 - \pi_2, \quad A_3 f = e^{\alpha^2} \pi_3, \quad A_4 f = \pi_2.$$

Dintre aceste grupuri, sînt măsurabile numai grupul [I] cu $k = 2$ şi grupul [III] cu $\eta = 0$.

În cazul grupului [I] cu $k = 2$, sistemul (3) se scrie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\ x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\ x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + e^{\alpha^3 - \alpha^2} \left(\dfrac{\partial F}{\partial x^2} + 2 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} \right) = 0, \\ x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0, \end{cases}$$

avînd soluţia

$$F = F \left\{ e^{-\alpha^3} x^2 \left[e^{-\alpha^2} (x^1 - \alpha^1) + \frac{x^2}{3} e^{-\alpha^3} \right]^2 \right\}.$$

Familia de curbe are deci ecuaţia

$$F \left\{ e^{-\alpha^3} x^2 \left[e^{-\alpha^2} (x^1 - \alpha^1) + \frac{x^2}{3} e^{-\alpha^3} \right]^2 \right\} = 0,$$

sau

$$x^2 \left[e^{-\alpha^2} (x^1 - \alpha^1) + \frac{x^2}{3} e^{-\alpha^3} \right]^2 = c\, e^{\alpha^3}, \quad (c = \text{const}). \tag{35}$$

În cazul grupului [III] cu $\eta = 0$, sistemul (3) devine:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\ x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\ x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + e^{\alpha^3} \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\ x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0 \end{cases}$$

şi are soluţia

$$F = F (e^{-\alpha^3} x^2).$$

Familia de curbe are deci ecuaţia

$$F (e^{-\alpha^3} x^2) = 0$$

şi face parte din familia (28).

În sfîrşit, în cazul în care familia (21) are ca grup maxim de invarianţă grupul G_4^{V}, grupul ataşat lui poate avea una din formule

$$[\mathrm{I}]\ A_1 f = \pi_1,\ A_2 f = \alpha^1 \pi_1 + \pi_2,\ A_3 f = \pi_3,$$

$$A_4 f = (\alpha^1)^2 \pi_1 + (2\alpha^1 + \eta e^{\alpha^2})\pi_2 + \alpha^1 \pi_3,$$

$$[\mathrm{II}]\ A_1 f = \pi_1,\ A_2 f = \alpha^1 \pi_1 + \pi_2,\ A_3 f = \pi_3,$$

$$A_4 f = [(\alpha^1)^2 \pm e^{2\alpha^2}]\pi_1 + (2\alpha^1 + k e^{\alpha^2})\pi_2 + \alpha^1 \pi_3.$$

Amîndouă aceste grupuri sînt măsurabile.

În cazul grupului [I], sistemul (3) se scrie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\[2ex] x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\[2ex] x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0, \\[2ex] (x^1)^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + x^1 x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + (\alpha^1)^2 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + (2\alpha^1 + \eta e^{\alpha^2}) \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} + \alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0. \end{cases}$$

Soluţia acestui sistem este

$$F = F\left[\frac{e^{-\alpha^2}(x^1 - \alpha^1) - \eta}{e^{-\alpha^3} x^2}\right].$$

Familia de curbe are ecuaţia

$$F\left[\frac{e^{-\alpha^2}(x^1 - \alpha^1) - \eta}{e^{-\alpha^3} x^2}\right] = 0,$$

sau

$$\frac{e^{-\alpha^2}(x^1 - \alpha^1) - \eta}{e^{-\alpha^3} x^2} = c, \qquad (c = \text{const.})$$

şi face parte din familia (28).

În cazul grupului [II], sistemul [3] se scrie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\[2ex] x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\[2ex] x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0, \\[2ex] (x^1)^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + x^1 x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + [(\alpha^1)^2 \pm e^{2\alpha^2}] \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + (2\alpha^1 + k e^{\alpha^2}) \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} + \alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0 \end{cases}$$

avînd soluţia

$$F = F(u, v),$$

unde

$$u = \mathrm{e}^{-\alpha^2}(x^1 - \alpha^1),\ v = \mathrm{e}^{-\alpha^3} u$$

şi

$$\frac{u\,\mathrm{d}u}{u^2 - ku \pm 1} = \frac{\mathrm{d}v}{v}.$$

Familia de curbe face deci parte din familia (28).

Să presupunem acum $r = 5$, deci că grupul maxim de invarianţă al familiei (21) este un grup G_5, subgrup al grupului (1). Dacă grupul maxim de invarianţă al familiei este grupul G_5', grupul ataşat lui are una din formele

$$[\mathrm{I}]\ A_1 f = \pi_1,\ A_2 f = \pi_2,\ A_3 f = \alpha^1 \pi_1 + \pi_3,\ A_4 f = \alpha^1 \pi_2,\ A_5 f = \alpha^2 \pi_2 + k\pi_3,$$

$$A_1 f = \pi_1,\ A_2 f = \pi_2,\ A_3 f = \alpha^1 \pi_1 + \pi_3,\ A_4 f = \alpha^1 \pi_2 \pm \mathrm{e}^{\alpha^3} \pi_3,\ A_5 f = \\ = \alpha^2 \pi_2 - \pi_3,$$

$$A_1 f = \pi_1,\ A_2 f = \pi_2,\ A_3 f = \alpha^1 \pi_1 + \pi_3,\ A_4 f = \pm \mathrm{e}^{2\alpha^2} \pi_1 + \alpha^1 \pi_2, \\ A_5 f = \alpha^2 \pi_2 - \frac{1}{2}\pi_3.$$

Singurul grup măsurabil dintre acestea este grupul [I] cu $k = 1$. În acest caz sistemul (3) se scrie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\ x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0, \\ x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\ x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^2 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0, \end{cases}$$

avînd soluţia

$$F = \text{const.}$$

Deci grupul G_5' nu poate fi grup maxim de invarianţă pentru o familie (21) măsurabilă.

Dacă G_5'' este grupul maxim de invarianţă al familiei (21), grupul ataşat lui este definit de operatorii

$$A_1 f = \pi_1,\ A_2 f = \pi_2,\ A_3 f = \alpha^1 \pi_2 + \pi_3,\ A_4 f = 2\alpha^1 \pi_1 + \alpha^2 \pi_2 - \alpha^3 \pi_3,$$

$$A_5 f = \left[(\alpha^1)^2 - \frac{3k}{(\alpha^3)^4}\right]\pi_1 + \left[\alpha^1 \alpha^2 + \frac{k}{(\alpha^3)^3}\right]\pi_2 + (\alpha^2 - \alpha^1 \alpha^3)\pi_3.$$

Acest grup este nemăsurabil, deci grupul G_5'' nu poate fi grup maxim de invarianță pentru familia măsurabilă (21).

Un rezultat analog se obține în cazul grupului G_5'''.

Vom considera acum cazul $r = 6$, deci grupul maxim de invarianță al familiei (21) este un grup G_6, subgrup al grupului (1).

Dacă grupul G_6' este grup maxim de invarianță al familiei (21), grupul atașat lui este definit de operatorii:

$$A_1 f = \pi_1,\ A_2 f = \pi_2,\ A_3 f = \alpha^1 \pi_1 + \pi_3,\ A_4 f = \alpha^2 \pi_1,\ A_5 f = \alpha^1 \pi_2,$$
$$A_6 f = \alpha^2 \pi_2 + \pi_3.$$

Sistemul (3) se scrie în acest caz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\ x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0, \\ x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^2 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0, \\ x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \\ x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^2 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0, \end{cases}$$

avînd soluția

$$F = \text{const.}$$

Deci grupul G_6' nu poate fi grup maxim de invarianță pentru familia măsurabilă (21).

Dacă grupul maxim de invarianță al familiei (21) este grupul G_6'', grupul atașat lui are una din formule:

[I] $A_1 f = \pi_1,\ A_2 f = \pi_2,\ A_3 f = \alpha^1\pi_1 + \pi_3,\ A_4 f = \alpha^1\pi_2 \pm e^{\alpha^3}\pi_3,$

$A_5 f = \alpha^2\pi_2 - \pi_3,\ A_6 f = (\alpha^1)^2\pi_1 + \alpha^1\alpha^2\pi_2 + (\alpha^1 \pm \alpha^2 e^{\alpha^3})\pi_3,$

[II] $A_1 f = \pi_1,\ A_2 f = \pi_2,\ A_3 f = \alpha^1\pi_1 + \pi_3,\ A_4 f = \alpha^1\pi_2,\ A_5 f = \alpha^2\pi_2 + \pi_3,$

$A_6 f = (\alpha^1)^2\pi_1 + (\alpha^1\alpha^2 \pm e^{\alpha^3})\pi_2 + 3\alpha^1\pi_3,$

[III] $A_1 f = \pi_1,\ A_2 f = \pi_2,\ A_3 f = \alpha^1\pi_1 + \pi_3,\ A_4 f = \alpha^1\pi_2.\ A_5 f = \alpha^2\pi_2,$

$A_6 f = (\alpha^1)^2\pi_1 + \alpha^1\alpha^2\pi_2 + (2\alpha^1 + \eta e^{\alpha^3})\,\pi_3,\ (\eta = 0, \pm 1),$

$$[\mathrm{IV}]\ A_1f = \pi_1,\ A_2f = \pi_2,\ A_3f = \alpha^1\pi_1 + \pi_3,\ A_4f = \alpha^1\pi_2,$$

$$A_5f = \alpha^2\pi_2 + \pi_3,\ A_6f = (\alpha^1)^2\pi_1 + \alpha^1\alpha^2\pi_2 + (2+k)\alpha^1\pi_3, (k \neq 0),$$

$$[\mathrm{V}]\ A_1f = \pi_1,\ A_2f = \pi_2,\ A_3f = \alpha^1\pi_1,\ A_4f = \alpha^1\pi_2,\ A_5f = \alpha^2\pi_2 + \pi_3,$$

$$A_6f = (\alpha^1)^2\pi_1 + \alpha^1\,\alpha^2\pi_2 + \alpha^1\pi_3.$$

Dintre aceste grupuri sînt măsurabile numai grupul [II] și grupul [V] cu $k = 1$.

În cazul grupului [II], sistemul (3) se scrie

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0,\\ &\frac{\partial F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0,\\ &x^1\frac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^1\frac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0,\\ &x^1\frac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^1\frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0,\\ &x^2\frac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^2\frac{\partial F}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0,\\ &(x^1)^2\frac{\partial F}{\partial x^1} + x^1x^2\frac{\partial F}{\partial x^2} + (\alpha^1)^2\frac{\partial F}{\partial \alpha^1} + (\alpha^1\alpha^2 \pm e^{\alpha^3})\frac{\partial F}{\partial \alpha^2} + 3\alpha^1\frac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0, \end{aligned}\right.$$

avînd soluția

$$F = \text{const}.$$

Un rezultat analog se obține în cazul grupului [IV] cu $k = 1$.

Deci, grupul G_6'' nu poate fi grup maxim de invarianță pentru o familie (21) măsurabilă.

Avînd în vedere că grupul (1) nu are nici un subgrup cu șapte parametri, rezultă că nu putem avea $r = 7$.

În sfîrșit, să considerăm că $r = 8$, deci grupul maxim de invarianță al familiei (21) este grupul (1). În acest caz grupul atașat lui față de familia (21) este definit de operatorii :

$$A_1f = \pi_1,\ A_2f = \pi_2,\ A_3f = \alpha^1\pi_1 + \pi_2,\ A_4f = \alpha^2\pi_1,\ A_5f = \alpha^1\pi_2,$$

$$A_6f = \alpha^2\pi_2 + \pi_3,\ A_7f = \alpha^1(\alpha^1\pi_1 + \alpha^2\pi_2 + 3\pi_3),\ A_8f = \alpha^2(\alpha^1\pi_1 +$$

$$+ \alpha^2\pi_2 + 3\pi_3).$$

Sistemul (3) se scrie în acest caz:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0,\\
&x^1 \frac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^1 \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0,\\
&x^2 \frac{\partial F}{\partial x^1} + \alpha^2 \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0,\\
&x^1 \frac{\partial F^1}{\partial x^2} + \alpha^1 \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0,\\
&x^2 \frac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^2 \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0,\\
&x^1\left(x^1 \frac{\partial F}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial F}{\partial x^2}\right) + \alpha^1\left(\alpha^1 \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \alpha^2 \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} + 3\frac{\partial F}{\partial \alpha^3}\right) = 0,\\
&x^2\left(x^1 \frac{\partial F}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial F}{\partial x^2}\right) + \alpha^2\left(\alpha^1 \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \alpha^2 \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} + 3\frac{\partial F}{\partial \alpha^3}\right) = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

şi are soluţia

$$F = \text{const}.$$

Deci, grupul (1) nu poate fi grup maxim de invarianţă pentru o familie măsurabilă (21).

Rezultă:

TEOREMA 2. *Familiile de curbe, depinzînd de trei parametri, din planul proiectiv, pot fi reduse la una din formele* (22), . . ., (35).

Primită la redacţie la 3 iulie 1967

Institutul politehnic
„Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. KOWALEWSKI, G, *Einführung in die Theorie der Kontinuierlichen Gruppen.* Acad. Verlag, Leipzig, 1932.
2. SANTALÓ, L. A., *Integral geometry in projective and affine spaces.* Ann. of Math., (**21**), **51**, 739–755 (1950).
3. STOKA, M., *Geometrie integrală.* Ed. Academiei, Bucureşti, 1967.
4. STOKA, M., *Asupra grupurilor izomorfe cu grupul proiectiv din plan şi cu subgrupurile lui.* St. cerc. mat., **19**, 71 (1967).

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date din text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale. Autorii au dreptul la nu număr de 50 de extrase. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, ARISTIDE DELEANU, M. JURCHESCU, **Topologie, Categorii, Suprafeţe riemanniene**, 1966, 394 p., 21,50 lei.

ROMULUS CRISTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.

N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.

ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, **Metode matematice în hidrogazodinamica subterană**, 1966, 582 p., 31 lei.

AL. GHIKA, **Analiza funcţională**, 1967, 594 p., 31 lei.

S. GUIAŞU şi R. THEODORESCU, **Teoria matematică a informaţiei**, 1966, 227 p., 8,25 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, vol. II, 1966, 669 p., 38 lei.

I. SINGER, **Cea mai bună aproximare în spaţii vectoriale normate prin elemente din subspaţii vectoriale**, 1967, 386 p., 23 lei.

M. I. STOKA, **Geometria integrală**, 1967, 239 p., 9,75 lei.

S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 2, P. 127–312, BUCUREŞTI, 1968

I. P. „Informaţia" – c. 6196

43831

Lei 12.–

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

3

TOMUL 20

1968

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACŢIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAŞ — secretar de redacţie

La revue „STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE" paraît 10 fois par an. Le prix d'un abonnement annuel est de $ 10. — ; FF 49. — ; D.M. 40. —.

Toute commande de l'étranger sera adressée à CARTIMEX, Boîte postale 134—135 Bucarest, Roumanie ou à ses représentants à l'étranger.

En Roumanie, vous pourrez vous abonner par les bureaux de poste ou chez votre facteur.

În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondenţă, se trimit la Comitetul de redacţie al revistei pe adresa: Str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

F 762

TOM. 20, Nr. 3
1968

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

SUMAR

Pag.

ARISTIDE DELEANU, Asupra unei teoreme privind sistemele Postnikov 315

PETRE DRĂGAN, EMIL CEANGĂ, Cercetări privind instruirea automatelor în vederea clasificării 321

G. GODINI, Despre modulele de convexitate uniformă slabă . . 335

DAN PASCALI, DOINA POP, Funcții analitice generalizate pe algebre Banach 341

Ș. STRĂTILĂ, Elemente de analiză armonică (III) Mulțimi finite în analiza armonică 347

ION GH. ȘABAC, O metodă de aproximare în studiul mișcării fluidelor perfecte compresibile 427

ION GH. ȘABAC, Asupra aproximării mișcării subsonice cu circulație a unui fluid compresibil în jurul unui obstacol circular. . 439

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 3, P. 313–454, BUCUREȘTI, 1968

ASUPRA UNEI TEOREME PRIVIND SISTEMELE POSTNIKOV

DE

ARISTIDE DELEANU

Scopul Notei de faţă este de a da o demonstraţie geometrică elementară unei teoreme bine cunoscute din teoria sistemelor Postnikov, care afirmă că limita inversă a unui sistem Postnikov ataşat unui spaţiu are acelaşi tip de omotopie singulară ca şi acest spaţiu (v. de ex. [3], Exp. 1, p. 5).

Autorul nu cunoaşte nici o asemenea demonstraţie în literatură.

Fie X un spaţiu topologic simplu conex. Reamintim următoarea definiţie [2]:

Definiţie. Un sistem Postnikov pentru X, $\{X_n, \sigma_n, p_n\}$ este o familie de spaţii X_n şi de aplicaţii σ_n, p_n, astfel încît în diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, dashed] \\
 & X_n \arrow[dd, "\sigma_n"] \\
X \arrow[ur, "p_n"] \arrow[dr, "p_{n-1}"'] & \\
 & X_{n-1} \arrow[d, dashed] \\
 & \vdots
\end{tikzcd}$$

să avem:

1° $p_n^* : \pi_i(X) \xrightarrow{\approx} \pi_i(X_n)$ pentru $i \leqslant n$.

2° σ_n e o fibrare în sensul lui Serre de fibră $K(\pi_n(X), n)$.

3° $\sigma_n p_n \simeq p_{n-1}$.

4° Dacă X este $(n-1)$-conex, atunci $X_i = (*)$ (punct), pentru $i < n$.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 3, P. 315-320, BUCUREŞTI, 1968

Fie X un spaţiu topologic şi $\{X_n, \sigma_n, p_n\}$ un sistem Postnikov al lui X. Pentru orice $m > n$ definim aplicaţia continuă

$$\tau_n^m : X_m \to X_n \text{ prin : } \tau_n^m = \sigma_{n+1} \cdots \sigma_{m-1} \sigma_m.$$

Atunci $\{X_n, \tau_n^m\}$ e un sistem invers de spaţii topologice. Fie X_∞ limita inversă a acestui sistem şi fie $\tau_n : X_\infty \to X_n$ aplicaţia canonică.

Lemă. *τ_n este o fibrare în sensul lui Serre.*

Demonstraţie. Fie P un poliedru finit. Să considerăm o diagramă comutativă :

$$\begin{tikzcd}
P \times \{0\} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "j"'] & X_\infty \arrow[d, "\tau_n"] \\
P \times I \arrow[r, "v"'] & X_n
\end{tikzcd}$$

unde I reprezintă intervalul închis $[0, 1]$, iar j incluziunea evidentă.

Întrucît σ_{n+1} e o fibrare, există o aplicaţie $w_{n+1} : P \times I \to X_{n+1}$ astfel încît următoarea diagramă este comutativă :

$$\begin{tikzcd}
P \times \{0\} \arrow[r, "\tau_{n+1} u"] \arrow[d, "j"'] & X_{n+1} \arrow[d, "\sigma_{n+1}"] \\
P \times I \arrow[r, "v."'] \arrow[ur, "w_{n+1}"] & X_n
\end{tikzcd}$$

Să presupunem că am construit deja aplicaţii continue w_i, $n \leqslant i \leqslant m-1$ astfel încît diagramele

$$\begin{tikzcd}
P \times \{0\} \arrow[r, "\tau_{i+1} u"] \arrow[d, "j"'] & X_{i+1} \arrow[d, "\sigma_{i+1}"] \\
P \times I \arrow[r, "w_i"'] \arrow[ur, "w_{i+1}"] & X_i
\end{tikzcd}$$

să fie comutative.

Întrucît σ_m e o fibrare, există w_m astfel încît următoarea diagramă este comutativă :

$$\begin{tikzcd}
P \times \{0\} \arrow[r, "\tau_m u"] \arrow[d, "j"'] & X_m \arrow[d, "\sigma_m"] \\
P \times I \arrow[r, "w_{m-1}"'] \arrow[ur, "w_m"] & X_{m-1}
\end{tikzcd}$$

Astfel am construit inductiv aplicaţiile w_i pentru $i \geqslant n+1$.

Definim o aplicaţie $w: P \times I \to X_\infty$ prin:

$$(w(y))_i = \begin{cases} w_i(y), & i > n \\ v(y), & i = n \\ w_i(y) = \tau_i^n(v(y)), & i < n \end{cases} \qquad (y \in P \times I)$$

Atunci următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{tikzcd} P \times \{0\} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "j"'] & X_\infty \arrow[d, "\tau_n"] \\ P \times I \arrow[ru, "w"] \arrow[r] & X_n \end{tikzcd}$$

deci τ_n este o fibrare în sensul lui Serre.

TEOREMĂ. *Fie X un spaţiu simplu conex. Atunci limita inversă $p_\infty : X \to X_\infty$ a sistemului $\{p_n\}$ este o echivalenţă omotopică singulară, adică o aplicaţie care induce izomorfisme pentru toate grupurile de omotopie.*

Demonstraţie. Fie $m > 0$. Vom arăta că $\pi_k(\tau_m) = 0$ pentru $k \leqslant m + 1$. (Pentru definiţia grupurilor de omotopie $\pi_i(f)$ ale unei aplicaţii f se poate consulta de ex. [1], p. 11).

Un element oarecare din grupul $\pi_k(\tau_m)$ este reprezentat de un cuplu (u, v) astfel încît diagrama

$$\begin{tikzcd} S^{k-1} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\text{incluziune}"'] & X_\infty \arrow[d, "\tau_m"] \\ V^k \arrow[r, "v"'] & X_m \end{tikzcd}$$

e comutativă, unde V^k este bila închisă de dimensiune k. Întrucît τ_m este o fibrare conform lemei de mai sus, se poate presupune că $v(V^k) = *$. Aceasta implică că $\tau_{m+1}\, u(S^{k-1}) \subset \sigma_{m+1}^{-1}(*)$. Dar $\sigma_{m+1}^{-1}(*)$ este un spaţiu $K(\pi_{m+1}(X), m + 1)$. Din faptul că grupurile de omotopie de dimensiune diferită de $m+1$ ale acestui spaţiu sînt nule, rezultă că există o aplicaţie $g_1 : S^{k-1} \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \to X_{m+1}$ astfel încît $g_1\left(S^{k-1} \times \left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = *$ şi diagrama

$$\begin{tikzcd} S^{k-1} \times \{0\} \arrow[r, "\tau_{m+1} u"] \arrow[d, "\text{incluziune}"'] & X_{m+1} \arrow[d, "\sigma_{m+1}"] \\ S^{k-1} \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \arrow[ru, "g_1"] \arrow[r, "g_0"'] & X_m \end{tikzcd}$$

este comutativă, unde $g_0\left(S^{k-1} \times \left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \{*\}$.

Definim o aplicaţie $h_1 : h^{k-1} \times I \to X_{m+1}$ prin

$$h_1(x, t) = \begin{cases} g_1(x, t), \ 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ *, \ \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Întrucît σ_{m+2} este o fibrare, există o aplicaţie $g_2 : S^{k-1} \times \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \to X_{m+2}$ astfel încît diagrama

$$\begin{tikzcd}
S^{k-1} \times \{0\} \arrow[r, "\iota_{m+2} u"] \arrow[d] & X_{m+2} \arrow[d, "\sigma_{m+2}"] \\
S^{k-1} \times [0, \frac{1}{2}] \arrow[ur, dashed, "g_2"] \arrow[r, "g_1"'] & X_{m+1}
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă. Deoarece $g_2 \left(S^{k-1} \times \left\{\frac{1}{2}\right\}\right) \subset \sigma_{m+2}^{-1}(*)$ şi $\sigma_{m+2}^{-1}(*)$ e un spaţiu $K(\pi_{m+2}(X), m + 2)$, există o aplicaţie $\rho_2 : S^{k-1} \times \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \to X_{m+2}$ astfel încît $\rho_2 \left(x, \frac{1}{2}\right) = g_2 \left(x, \frac{1}{2}\right)$, $\rho_2 \left(x, \frac{3}{4}\right) = *$ $(x \in S^{k-1})$. Definim $h_2 : S^{k-1} \times I \to X_{m+2}$ prin :

$$h_2(x, t) = \begin{cases} g_2(x, t), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \rho_2(x, t), & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3}{4}, \\ *\ , & \frac{3}{4} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Este clar că diagrama

$$\begin{tikzcd}
S^{k-1} \times \{0\} \arrow[r, "\iota_{m+2} u"] \arrow[d] & X_{m+2} \arrow[d, "\sigma_{m+2}"] \\
S^{k-1} \times I \arrow[ur, "h_2"] \arrow[r, "h_1"'] & X_{m+1},
\end{tikzcd}$$

e comutativă. Presupunem că am construit aplicații $h_i : S^{k-1} \times I \to X_{m+i}$ pentru $1 \leqslant i \leqslant p$ astfel încît diagramele

$$\begin{tikzcd}
S^{k-1} \times \{0\} \arrow[r, "\tau_{m+i+1} u"] \arrow[d, dashed] & X_{m+i+1} \arrow[d, "\sigma_{m+i+1}"] \\
S^{k-1} \times I \arrow[r, "h_i"'] \arrow[ur, dashed, "h_{i+1}"] & X_{m+i}
\end{tikzcd}$$

sînt comutative $(1 \leqslant i \leqslant p-1)$ și $h_i(x, t) = *$ pentru $x \in S^{k-1}, 1 - \frac{1}{2^i} \leqslant t \leqslant 1$.

Fie $g_i = h_i \,\Big|\, S^{k-1} \times \left[0,\ 1 - \frac{1}{2^i}\right]$. Întrucît σ_{m+p+1} e o fibrare, există o aplicație g_{p+1} astfel încît următoarea diagramă e comutativă :

$$\begin{tikzcd}
S^{k-1} \times \{0\} \arrow[r, "\tau_{m+p+1} u"] \arrow[d] & X_{m+p+1} \arrow[d, "\sigma_{m+p+1}"] \\
S^{k-1} \times [0, 1 - \frac{1}{2^p}] \arrow[r, "g_p"'] \arrow[ur, "g_{p+1}"] & X_{m+p}
\end{tikzcd}$$

Deoarece $g_{p+1}\left(S^{k-1} \times \left\{1 - \frac{1}{2^p}\right\}\right) \subset \sigma^{-1}_{m+p+1}(*)$, și $\sigma^{-1}_{m+p+1}(*)$ este un spațiu $K(\pi_{m+p+1}(X), (m+p+1))$, există o aplicație $\rho_{p+1} : S^{k-1} \times \left[1 - \frac{1}{2^p},\ 1 - \frac{1}{2^{p+1}}\right] \to X_{m+p+1}$ astfel încît

$$\rho_{p+1}\left(x,\ 1 - \frac{1}{2^p}\right) = g_{p+1}\left(x, 1 - \frac{1}{2^p}\right),\quad \rho_{p+1}\left(x,\ 1 - \frac{1}{2^{p+1}}\right) = *\ (x \in S^{k-1}).$$

Definim aplicația $h_{p+1} : S^{k-1} \times I \to X_{m+p+1}$ prin :

$$h_{p+1}(x, t) = \begin{cases} g_{p+1}(x, t) & 0 \leqslant t \leqslant 1 - \dfrac{1}{2^{p+1}}, \\ \rho_{p+1}(x, t), & 1 - \dfrac{1}{2^p} \leqslant t \leqslant 1 - \dfrac{1}{2^{p+1}}, \\ *, & 1 - \dfrac{1}{2^{p+1}} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

În sfîrșit, definim o aplicație $h : S^{k-1} \times I \to X_\infty$ prin:

$$(h(x,t))_i = \begin{cases} h_{i-m}(x,t), & i > m, \\ *, & i \leqslant m. \end{cases}$$

Este clar că aplicația h e o omotopie între aplicația u și aplicația constantă. Rezultă că $\pi_k(\tau_m) = 0$ pentru $k \leqslant m + 1$.

Pe de altă parte, din șirul exact, de omotopie al aplicației p_m ([1], p. 21):

$$\ldots \to \pi_k(X) \xrightarrow{p_m^*} \pi_k(X_m) \to \pi_k(p_m) \to \pi_{k-1}(X) \to \ldots$$

rezultă că $\pi_k(p_m) = 0$ pentru $k \leqslant m$.

Să considerăm șirul exact de omotopie al compunerii $p_m = \tau_m p_\infty$ [1], p. 83):

$$\ldots \to \pi_{k+1})\,\tau_m) \to \pi_k(p_\infty) \to \pi_k(p_m) \to \pi_k(\tau_m) \to \ldots$$

Din cele de mai sus rezultă că

$$\pi_k(p_\infty) = 0, \qquad k \leqslant m,$$

și deci, cum m este arbitrar,

$$\pi_k(p_\infty) = 0, \qquad \text{pentru orice } k.$$

Din șirul exact de omotopie al aplicației p_∞

$$\ldots \to \pi_k(X) \xrightarrow{p_\infty^*} \pi_k(X_\infty) \to \pi_k(p_\infty) \to \pi_{k-1}(X) \to \ldots$$

rezultă că p_∞^* este un izomorfism pentru orice k.

Aceasta înseamnă că aplicația p_∞ este o echivalență omotopică singulară, ceea ce încheie demonstrația teoremei.

Observație. Este firesc să se pună următoarea întrebare: În ce condiții este aplicația p_∞ chiar o echivalență omotopică în sensul strict?

E.G. Skliarenko a demonstrat [4] că, dacă X este CW-complex, aceasta se întîmplă atunci și numai atunci cînd X are numai un număr finit de grupuri de omotopie netriviale.

Primită la redacție la 28 iulie 1967

Institutul de matematică al
Academiei Republicii Socialiste România,
str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. Peter J. Hilton, *Homotopy Theory and Duality*. Gordon and Breach, 1965.
2. Donald W. Kahn, *Induced maps for Postnikov systems*. Trans. of the Am. Math. Soc., **107**, 432–450 (1963).
3. Séminaire Henri Cartan, *Algebres d'Einlenberg-MacLane et homotopie* (1954/55). Paris, 1955.
4 Е. Г. Скляренко, *Некоторые замечания о предельных пространствах систем Постникова*. Математический сборник, **69 (111)**, 61–64 (1966).

CERCETĂRI PRIVIND INSTRUIREA AUTOMATELOR ÎN VEDEREA CLASIFICĂRII

DE

PETRE DRĂGAN, EMIL CEANGĂ

(Galaţi)

În lucrare se studiază problema instruirii automatelor în vederea clasificării automate pornind de la algoritmul aproximării stocastice particularizat sub forma algoritmului funcţiilor potenţiale. Se prezintă algoritmului pentru clasificarea vectorilor în mai multe clase, programul Algol care îl realizează, precum şi rezultatele experimentale obţinute prin modelarea pe calculator cifric.

§ 1. PUNEREA PROBLEMEI

Să considerăm un *sistem omogen* de obiecte sau fenomene $S' = \{\hat{x}_\iota\}_{\iota\in I}$, I finit, înţelegînd prin *omogen* că obiectele sau fenomenele care compun sistemul sînt de aceiaşi natură fizică. Să presupunem că sistemul S' se poate împărţi în submulţimile $S'_i = \{\hat{x}_{ij}\}_{j\in I_i} (i=1,2,\ldots,p)$, I_i finite, pe care le vom numi *clase*, obiectele fiecărei clase fiind caracterizate de proprietăţi specifice.

Proprietăţile obiectului sau fenomenului $\hat{x}$ se pot exprima cantitativ prin mărimile $x_1, \ldots, x_n$, care formează vectorul

$$x = (x_1, \ldots, x_n)$$

din spaţiul vectorial n-dimensional X. Vectorul x va purta denumirea de *reprezentare* a obiectului $\hat{x}$.

Aplicaţia univocă

$$\hat{x} \to x \tag{1.1}$$

(realizată tehnic, de exemplu, de un ansamblu de elemente sensibile (traductoare) date) realizează corespondenţa univocă :

$$S' \to S = \{x_\iota\}_{\iota\in I} \subset X \tag{1.2}$$

$$S'_i \to S_i = \{x_{ij}\}_{j\in I_i} \subseteq S \quad (i = 1, 2, \ldots, p). \tag{1.3}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 3, P. 321–333, BUCUREŞTI, 1968

Problema clasificării obiectelor sistemului S' în clasele $S_i'(i=1,2,\ldots,p)$ va fi abordată acum, ca o problemă de clasificare a mulțimii de vectori n-dimensionali $S(\subset X)$ în clasele de vectori $S_i=(i=1,2,\ldots,p)$. Este necesar să precizăm că existența obiectivă a claselor de obiecte S_i' determină existența obiectivă a claselor de vectori S_i.

Clasificarea automată a vectorilor sistemului S în clasele S_i $(i=1,2,\ldots,p)$ înseamnă :

$$((\forall)\, x\in S)\Rightarrow(x\in S_1\cup x\in S_2\cup x\in S_3\cup\ldots\cup x\in S_p). \tag{1.4}$$

Automatul este capabil să facă clasificarea numai în momentul în care dispune de o *descriere a claselor* S_i, adică în momentul în care cunoaște „prototipurile" claselor.

Prototipul clasei S_i reflectă totalitatea proprietăților invariante ale clasei S_i, adică acele proprietăți care sînt proprii tuturor vectorilor clasei S_i.

Subliniem faptul că alegerea prototipurilor claselor S_i este strîns legată de adoptarea unui algoritm de *decizie*, în funcție de care automatul clasifică un vector la o clasă sau alta.

Algoritmul de decizie este un algoritm care realizează alegerea uneia din două posibilități. Acest algoritm de decizie poate fi formulat în cazul cel mai general, prin intermediul unei „funcții de apartenență" a vectorului x la clasa S_i, $\mathcal{A}_{S_i}(x)$, care de cele mai multe ori indică *gradul de asemănare* al punctelor din clasa S_i.

Prototipurile claselor se comunică sau nu se comunică automatului care face clasificarea.

Dacă automatului se comunică prototipurile, acesta face clasificarea într-o singură etapă, prin realizarea algoritmului de decizie adoptat.

Dacă însă nu se comunică automatului prototipurile claselor, procesul de clasificare automată se desfășoară în două etape :

Etapa de instruire. Se comunică automatului o succesiune de *vectori de instruire* numită *secvență de instruire.*

Se numește *vector de instruire* un vector din S, despre care automatul este informat din ce clasă face parte și utilizează această informație în vederea formării prototipului clasei.

Secvența de instruire este prin urmare o succesiune de vectori din S care se comunică automatului împreună cu deciziile instructorului.

Pe baza secvenței de instruire automatul determină singur prototipurile claselor S_i $(i=1,2,\ldots,p)$ și cînd acestea sînt „suficient de reprezentative" pentru corectitudinea clasificării, trece la etapa următoare.

Etapa de clasificare. În această etapă automatului i se prezintă vectori care trebuie clasificați, pe baza algoritmului de decizie adoptat și utilizînd prototipurile claselor determinate în etapa de instruire.

Observații importante. 1. În etapa de instruire se prezintă automatului, în mod întîmplător, submulțimile $S_i''\subset S_i$ $(i=1,2,\ldots,p)$; pe baza acestor submulțimi automatul determină prototipurile claselor, iar în etapa de clasificare el trebuie să clasifice toate elementele din mulțimile S_i $(i=1,2,\ldots,p)$.

2. Lungimea secvenței de instruire și statistica arătărilor determină calitatea clasificării.

Se poate chiar determina lungimea secvenței de instruire încît, în cazul în care statistica arătărilor este aceeași la instruire și clasificare, calitatea clasificării să fie cea dorită (vezi § 3).

3. Conexiunea om-automat este *instructor-elev* în etapa de instruire și *examinator-examinat* în etape de clasificare.

§ 2. METODE GENERALIZATE PENTRU CLASIFICAREA AUTOMATĂ

În lucrarea [5], V.M. Glușkov definește astfel sistemele autoinstruibile: „Un automat este firesc să fie numit cu autoperfecționare sau autoinstruibil dacă pe măsura măririi duratei de instruire, el își îmbunătățește răspunsurile".

Un *automat instruibil* se deosebește de un automat autoinstruibil numai prin faptul că instructorul este un operator uman sau un dispozitiv tehnic exterior automatului.

O clasă largă de sisteme instruibile pentru clasificarea automată, se deosebesc între ele, în ultimă instanță, prin:

— modul de alegere a prototipurilor claselor;

— algoritmul de comparare al vectorului de intrare cu prototipurile claselor;

— felul legii de stimulare.

Mai frecvent utilizați sînt algoritmii de decizie care se bazează pe determinarea produsului scalar al vectorului de intrare cu vectorii prototip sau pe măsurarea distanței euclidiene dintre vectorul de intrare și vectorii prototip. Adoptînd o metrică de ponderare a componentelor vectorilor, algoritmii bazați pe măsurarea distanțelor euclidiene sînt echivalenți cu regula bayesiană de decizie, în ipoteza unor distribuții gaussiene a punctelor în clasele $S_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ [2].

Metodele generalizate de recunoaștere [2] permit clasificarea automată după o regulă de decizie, echivalentă abordării bayesiene în ipoteza unor distribuții oarecare a punctelor în clasele S_i.

Ideea de bază a acestor metode constă în faptul că întotdeauna este posibil să se construiască o suprafață $\Psi_i(x)$ în spațiul $(n+1)$-dimensional $Y = \{(x, \Psi_i(x)) \mid x \in X\}$, încît independent de caracterul distribuției punctelor în clasele S_i, proiecția domeniilor din suprafața $\Psi_i(x)$, corespunzătoare claselor S_i, pe axa $(n+1)$, să se găsească între anumite limite.

Aproximăm funcția $\Psi_i(x)$ prin funcția $\hat{\Psi}_i(x)$, bine dezvoltabilă după un sistem de funcții ortonormale $\{\varphi_i(x)\}_{i=1,\ldots,n}$ adică:

$$\hat{\Psi}_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ji}\varphi_j(x), \qquad (i = 1, 2, \ldots, p). \tag{2.1}$$

Cu notațiile

$$\gamma_i = (\gamma_{1i}, \gamma_{2i}, \ldots, \gamma_{ni}) \tag{2.2}$$

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \tag{2.3}$$

unde:

$$z_j = \varphi_j(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.4}$$

relația (2.1) se poate scrie :

(2.5) $$\hat{\Psi}_i(x) = (\gamma_i, z)$$

iar corespondența

(2.6) $$x \to z[x]$$

ne plasează în spațiul vectorial riglat Z.

Păstrînd notațiile din spațiul X pentru clase, a clasifica vectorul x în spațiul X revine la a clasifica vectorul $z[x]$ în spațiul Z.

Adoptăm un algoritm de clasificare de forma

(2.7) $$[(z^*, \gamma_k) > 0 \,\&\, ((z^*, \gamma_i) < 0, i \neq k)] \Rightarrow (z^* \in S_k), \quad k = 1, 2, \ldots, p.$$

în ipoteza că :

(2.8) $$\overline{w}_1 \wedge \overline{w}_2 \wedge \cdots \wedge \overline{w}_{k-1} \wedge w_k \wedge \overline{w}_{k+1} \wedge \cdots \wedge \overline{w}_p = 1,$$

unde (2.9) $w_i = \theta[(z^*, \gamma_i)]$, iar funcția ρ se definește astfel :

(2.10) $$\theta(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \xi < 0 \\ 1 & \text{dacă } \xi > 0. \end{cases}$$

Vectorul γ_k este prototipul clasei S_k și el reprezintă vectorul director al hiperplanului de separație al domeniului din spațiul Z corespunzător clasei S_k. El se determină printr-un proces de instruire prin realizarea unui algoritm care rezultă din aplicarea metodelor aproximației stocastice.

Presupunem că abaterea funcției $\hat{\Psi}_i(x)$ de la funcția $\Psi_i(x)$ este speranța matematică a unei funcții *strict convexe* $F(.)$, de diferența $\Psi_i(x) - \hat{\Psi}_i(x)$.

Se pune problema minimizării unei funcții de pierdere de forma

(2.11) $$I(\gamma_i) = M\{F[\Psi_i(x - (\gamma_i, z[x])]\}.$$

Dacă funcția $F(.)$ este derivabilă în raport cu γ_i, atunci

(2.12) $$\gamma_i^r = \gamma_i^{r-1} + \beta[r] F'[\Psi_i(x^r) - (\gamma_i^{r-1}, z[x^r])] z[x^r],$$

unde x^r reprezintă vectorul de intrare la pasul r al algoritmului de instruire, γ_i^r, γ_i^{r-1} reprezintă prototipurile clasei S_i la pasul r respectiv $r - 1$, iar $\beta[r]$ este o funcție care îndeplinește condițiile [1]

(2.13) $$\sum_{r=1}^{\infty} \beta[r] \to \infty, \quad \sum_{r=1}^{\infty} \beta^2[r] < \infty.$$

Caracterizăm decizia automatului la pasul r al algoritmului de instruire respectiv decizia (clasificarea) instructorului pentru vectorul x^r prin intermediul funcțiilor :

(2.14) $$\mathcal{N}_i(x^r) = \begin{cases} +1 & \text{dacă } (\gamma_i^{r-1}, z[x^r]) > 0 \\ -1 & \text{dacă } (\gamma_i^{r-1}; z[x^r]) < 0 \end{cases}$$

respectiv :

(2.15) $$\varepsilon_i(x^r) = \begin{cases} +1 & \text{dacă } x^r \in S_i \\ -1 & \text{dacă } x^r \notin S_i. \end{cases}$$

Coeficienții

$$\alpha_i^r = \frac{\varepsilon_i(x^r) - \mathcal{N}_i(x^r)}{2} \tag{2.16}$$

au, evident, numai valori $+1$, 0, -1.

Adoptînd o funcție $F(.)$ de tip modul și un pas de iterație constant și egal cu unitatea, rezultă :

$$F'\,[\Psi_i(x^r) - (\gamma_i^{r-1}, z[x^r])] = \alpha_i^r \tag{2.17}$$

iar relația (2.12) devine :

$$\gamma_i^r = \gamma_i^{r-1} + \alpha_i^r z\,[x^r] \tag{2.19}$$

Alegerea pasului de iterație constant este rațională în cazul cînd perturbațiile lipsesc, deoarece în acest caz convergența algoritmului se păstrează, iar viteza de convergență este mai mare decît în cazul unui pas variabil.

Am obținut astfel algoritmul funcțiilor potențiale abordat în spațiu Z.

Din relația de recurență (2.19), prin însumarea membru cu membru a relațiilor obținute pentru $r = 1, 2, \ldots, r$, obținem :

$$\gamma_i^r = \sum_{k=1}^{r} \alpha_i^k z\,[x^k] \tag{2.20}$$

în care $x^1, x^2, \ldots, x^r$, sînt vectorii care au apărut la intrarea automatului pînă la pasul r de instruire.

La pasul $r+1$ al algoritmului de intrare automatului se prezintă vectorul x^{r+1}, iar automatul calculează funcția

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_i(x^{r+1}) &= (\gamma_i^r, z[x^{r+1}]) = \left(\sum_{k=1}^{r} \alpha_i^k z\,[x^k], z\,[x^{r+1}]\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{r} \alpha_i^k (z[x^k], z[x^{r+1}]). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Cu notația

$$K(x, y) = (z\,[x], z\,[y]) \tag{2.22}$$

relația (2.21) devine :

$$\hat{\Psi}_i\,(x^{r+1}) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_i^k K(x^k, x^{r+1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p). \tag{2.23}$$

Relația (2.23) s-a obținut din relația (2.12) și urmărind expunerea din paragraful următor se vede că de fapt algoritmul funcțiilor potențiale a fost obținut prin particularizarea algoritmului aproximării stocastice.

§ 3. ALGORITMUL FUNCȚIILOR POTENȚIALE PENTRU MAI MULTE CLASE

a) *Expunerea algoritmului.* În acest paragraf s-a urmărit o prezentare cît mai comodă a algoritmului în vederea programării lui. Fundamentarea teoretică a algoritmului funcțiilor potențiale (pentru două clase) poate fi găsită în lucrarea [1].

Clasificarea vectorilor la una din clasele $S_1, S_2, \ldots, S_p$ poate fi considerată ca o clasificare succesivă la două clase : clasa S_i sau la mulţimea punctelor $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{i-1} \cup S_{i+1} \cup \ldots \cup S_p$.

La pasul $r+1$ al algoritmului se prezintă la intrarea automatului vectorul x^*. Automatul calculează potenţialele

$$K_i^r(x^*) = \sum_{j=1}^{l} \alpha_i^j K(x^*, x^j) \qquad (i = 1, \ldots, p), \tag{3.1}$$

unde l este numărul vectorilor de instruire pentru care a fost necesară corectarea erorii pînă la pasul r.

Notînd cu $\varepsilon_i(x^*)$ decizia instructorului pentru vectorul x^* şi anume :

$$\varepsilon_i(x^*) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \in S_i \\ -1 \text{ dacă } x \notin S_i \end{cases} \tag{3.2}$$

deosebim următoarele cazuri :

a)

$$(\varepsilon_j(x^*) = 1 \,\&\, K_j^r(x^*) > 0 \,\&\, K_m^r(x^*) < 0, (m \neq j) \Rightarrow (\alpha_j^{l+1} = 0) \tag{3.3}$$

în acest caz, clasificarea este corectă şi vectorul x^* se ignorează.

b) Clasificarea este incorectă şi trebuie corectată în unul din cazurile :

$$(\varepsilon_i(x^*) = 1 \,\&\, K_i^r(x^*) < 0) \Rightarrow (\alpha_i^{l+1} = 1) \tag{3.4}$$

$$(\varepsilon_i(x^*) = -1 \,\&\, K_i^e(x^*) > 0) \Rightarrow (\alpha_i^{l+1} = -1). \tag{3.5}$$

Vectorul x^* se memorează şi devine x^{l+1}.

În concluzie, o dată cu fiecare vector x^j memorat (fiind clasificat defectuos), se memorează şi vectorul

$$\alpha^j = (\alpha_1^j, \ldots, \alpha_p^j) \tag{3.6}$$

definit astfel :

$$\alpha_i^j = \begin{cases} 0 \text{ dacă } \begin{cases} x^j \in S_i \,\&\, K_i(x^j) > 0 \\ x^j \notin S_i \,\&\, K_i(x^j) < 0 \end{cases} \\ 1 \text{ dacă } x^j \in S_i \,\&\, K_i(x^j) < 0 \\ -1 \text{ dacă } x^j \notin S_i \,\&\, K_i(x^j) > 0 \end{cases} \qquad (i = 1,2,\ldots,p) \tag{3.7}$$

Asta se întîmplă în etapa de instruire. În etapa de examinare, clasificarea se face în funcţie de potenţialul (3.1) şi de vectorii memoraţi.

b) *Condiţii pentru oprirea etapei de instruire.* Determinantă pentru calitatea clasificării este lungimea secvenţei de instruire şi calitatea ei, în sensul că ea ar trebui să conţină elemente „caracteristice” „reprezentative”, din clasele respective.

În lucrarea [1] se propun două variante ale condiţiei de oprire a etapei de instruire, care o dată îndeplinite, se poate trece la etapa de clasificare, cu asigurarea că probabilitatea erorii poate fi suficient de mică (stabilită dinainte), în ipoteza că în procesul de clasificare avem aceeaşi statistică a punctelor ca în procesul de instruire.

Varianta a doua fiind mai puternică, ne oprim asupra ei : procesul de instruire se consideră încheiat dacă după ultima corecţie

(3.8) $$L_s = L + s$$

vectori prezentaţi la intrarea automatului sînt clasificaţi corect.

În relaţia (3.8), s este numărul erorilor în procesul de instruire iar

(3.9) $$L > \frac{\ln \varepsilon \delta}{\ln (1 - \varepsilon)} \cdot$$

Relaţia (3.9) ne dovedeşte că procesul de instruire depinde de „exigenţele" examinatorului, deoarece cu un L astfel calculat, în procesul de clasificare, probabilitatea erorii va fi mai mică decît ε („exigenţa" examinatorului) cu o probabilitate mai mare ca $1 - \delta$ (teorema 4, [1]).

În cazul algoritmului funcţiilor potenţiale, pentru clasificarea în mai multe clase propunem două variante pentru oprirea instruirii.

Notînd cu ε_i exigenţa examinatorului pentru clasa S_i şi cu $1 - \delta_i$ probabilitatea cu care exigenţa ε_i este satisfăcută la clasificare, după ultima eroare ar trebui plasaţi corect la clasa S_i

(3.10) $$L_{i_{s_i}} = L_i + s_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

vectori. În relaţia (3.10) s_i este numărul de clasificări incorecte la clasa S_i în procesul de instruire, iar L_i este dat de formula :

(3.11) $$L_i > \frac{\ln \varepsilon_i \delta_i}{\ln (1 - \varepsilon_i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Varianta 1. Procesul de instruire, va fi oprit după o secvenţă de instruire de lungime

(3.12) $$L = L_0 + s,$$

unde

(3.13) $$L_0 \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant p} L_i$$

iar s este numărul de erori în procesul de instruire. În acest caz toate exigenţele vor fi îndeplinite.

Varianta 2. Sînt cazuri cînd este important ca numai în $k (k < p)$ clase plasarea vectorilor să se facă cu minimum de erori.

Pentru celelalte clase se poate calcula atunci numai probabilitatea cu care exigenţele respective sînt satisfăcute.

În acest caz,

(3.14) $$L_0' \geqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant k} L_{i_j}$$

unde

(3.15) $$L_{i_j} > \frac{\ln \varepsilon_{i_j} \delta_{i_j}}{\ln (1 - \varepsilon_{i_j})} \qquad (1 \leqslant j \leqslant k)$$

iar pentru clasele rămase, exigenţele $\varepsilon_{i_j} (k + 1 \leqslant j \leqslant p)$ sînt satisfăcute cu o probabilitate mai mare ca :

$$1 - \frac{(1 - \varepsilon_{i_j}) L_0'}{\varepsilon_{i_j}} \qquad (k + 1 \leqslant j \leqslant p)$$

(Evident, $i_j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ pentru $j = 1, 2, \ldots, p$).

Pentru ca procesul de instruire să fie utilizabil, exigenţele trebuie să fie mari (adică ε_i să fie mici) şi îndeplinite cu probabilitate mare ($1-\delta_i$ să fie mari, adică δ_i să fie mici), adică în formulele de mai sus trebuie ca

$$0 < \varepsilon_i < 0{,}5 \qquad 0 < \delta_i < 0{,}5 \tag{3.16}$$

Dacă

$$0{,}5 \leqslant \varepsilon_i, \qquad \delta_i < 1 \tag{3.17}$$

instruirea va fi superficială, iar clasificarea îndeplinind exigenţe minime nu poate fi utilizată.

Observaţie. Logica acestei variante de oprire a instruirii este determinată de practică.

Să considerăm, de exemplu, că avem de clasificat o anumită cantitate de alimente; care după calitate pot fi sortate în 10 clase. Este evident că instruirea automatelor care face clasificarea trebuie să aibă în vedere ca la examinare să se clasifice corect alimentele de calitatea I-a, a II-a şi a III-a, fiind mai puţin important dacă un aliment de calitatea a X-a este clasificat la calitatea a VIII-a, să zicem, decît dacă unul de calitatea a X-a este plasat la calitatea I-a, sau invers.

c) *Programul în ALGOL—60 revizuit pentru algoritmul funcţiilor potenţiale de clasificare la mai multe clase. Avem*

```
begin integer n,p,u,k,F,L ; real epsilon, delta, alfa ; value n,p ; label A2 ;
Comment. Algoritmul funcţiilor potenţiale de clasificare a vectorilor
    n-dimensionali dintr-o mulţime dată în p clase ;
    epsilon : = read ;
    delta   : = read ;
    alfa    : = read ;
      n     : = read ;
      p     : = read ;
      L     : = entier (ln (epsilon × delta) / ln (1-epsilon)) + 1 ;
Comment. Probabilitatea erorii în procesul de clasificare va fi mai mică
    decît epsilon cu o probabilitate mai mare decît 1-delta ;
                    u : = k : = F : = 0 ;
A2 : begin real arra a [o :(k + 1)×n — 1], d (0 : (k + 1)×p — 1], s (0 :
p — 1) ; real sum ; integer i, j, l, m, r, v ; label
    Instruire, Examinare, Lectură ;
        m : = k×n ;
        r :  = k×p ;
Lectură : for i : = m step 1 until m + n — 1 do
        begin a[i] : read ; print (a[i]) end
        for i : = r step 1 until r + p — 1 do d[i] : = read ;
if k = 0 then for i : = r step 1 until r + p — 1 do print (d[i]) ;
        newline
for l : = 0 step 1 until p—1 do
        begin s[l] : = 0 ;
        for j : = 0 step 1 until k—1 do
        begin sum : = 0 ;
```

```
          for i : = 0 step 1 until n—1 do
          sum : = sum + (a[i +m] — a[i +j ×n] ↑ 12 ;
          | s[l] : = s[l] + d[l + j × p] / (1 + alfa × sum) ; |
          endj ;
     ende ;
if u = 0 them goto Instruire ;
Examinare : for i : = 0 step 1 until p —1 do
     if s[i] > 0 then print („1") else if s[i] = 0 then print („0") else
     print („1") ;
               newline ; goto Lectură ;
Instruire : v : = 1 ;
     for i : = 0 step 1 until p—1 do
     if d [i + r] × s[i] > 0 then d[i+r] : = 0 else v : = 0 ;
     if v = 0 then begin F : = 0 ; L : = L+1 ;
     for i : = r step 1 until r+p—1 do print (d[i]) ;
                    print („*") ;
Comment Vectorii clasificaţi eronat sînt marcaţi cu steluţă şi memoraţi ;
               newline ;
          k : = k + 1 ; goto A2 end else F : = F + 1 ;
if F = L then U : = 1 ;
Comment Instructorul devine examinator la cererea automatului care
          se consideră suficient de bine instruit pentru ca la examinare
          să satisfacă exigenţele examinatorului ;
          goto Lectură ;
     end A2 ;
end program ;
```

Programul de mai sus utilizează o funcţie potenţială de forma

$$K(x,y) = \frac{1}{1 + \alpha R^2(x,y)} \tag{3.18}$$

Dacă instrucţiunea încadrată de liniuţe se înlocuieşte cu instrucţiunea :

$$s[l] := s[l] + d[l + j \times p] \times \exp(-\text{alfa} \times \text{sum}),$$

atunci programul ar utiliza un potenţial de forma :

$$K(x,y) = e^{-\alpha R^2(x,y)} \tag{3.19}$$

unde

$$R^2(x,y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2.$$

4. VERIFICĂRI EXPERIMENTALE. CONCLUZII

Programul pentru realizarea algoritmului funcţiilor potenţiale de clasificare în mai multe clase, scris în ALGOL—60 revizuit, a fost transcris în AUTOCOD MARK III şi rulat pe calculatorul electronic ELLIOTT 803 B de la Combinatul Siderurgic Hunedoara.

În figura 1 se face clasificarea unor vectori cu 9 dimensiuni, după o secvență de instruire formată din 5 vectori, pentru $\varepsilon = 0,2$; $\delta = 0,2$ şi $\alpha = 0,01$.

```
        E =     .200    P =     .800    L =      2
 .000   5.00    10.0    15.0    15.0    15.0    15.0    10.0    5.00   - 1.00
 .000   .000    35.0    35.0    35.0    35.0    .000    .000    .000     1.00*
 .000   .000    24.0    48.0    48.0    48.0    48.0    24.0    .000     1.00
 4.00   32.0    35.0    33.0    33.0    .000    .000    .000    .000     1.00
 .000   .000    71.0    70.0    73.0    69.0    69.0    70.0    23.0     1.00

     PROBABILITATEA ERORII ÎN PROCESUL DE EXAMINARE ESTE MAI MICĂ DECÎT
                 E CU O PROBABILITATE MAI MARE ÇA P
 L =    3
 .000   .000    40.0    42.0    41.0    40.0    41.0    .000    .000     1.00   A
 5.00   11.0    16.0    20.0    22.0    15.0    9.00    4.00    .000   - 1.00   B
 30.0   55.0    96.0    90.0    89.0    60.0    28.0    .000    .000   - 1.00   A
 .000   .000    .000    14.0    28.0    42.0    42.0    28.0    14.0   - 1.00   B
 .000   .000    24.0    48.0    72.0    48.0    24.0    .000    .000   - 1.00   A
 .000   .000    45.0    90.0    90.0    90.0    45.0    .000    .000     1.00   A
 39.0   78.0    78.0    78.0    78.0    78.0    78.0    78.0    39.0     1.00   A
 .000   24.0    48.0    48.0    48.0    24.0    .000    .000    .000     1.00   A
 .000   13.0    26.0    26.0    26.0    13.0    .000    .000    .000     1.00   A
 .000   18.0    36.0    54.0    54.0    36.0    18.0    .000    .000   - 1.00   A
 .000   14.0    14.0    14.0    14.0    14.0    14.0    .000    .000     1.00   B
 .000   31.0    62.0    62.0    62.0    62.0    62.0    31.0    .000     1.00   A
 7.00   39.0    40.0    40.0    41.0    .000    .000    .000    .000     1.00   A
 .000   .000    80.0    80.0    80.0    80.0    80.0    80.0    .000     1.00   A
 .000   7.00    14.0    21.0    14.0    7.00    .000    .000    .000   - 1.00   B
 15.0   30.0    45.0    60.0    45.0    30.0    15.0    .000    .000   - 1.00   A
 .000   .000    48.0    96.0    96.0    96.0    48.0    .000    .000     1.00   A
 19.0   38.0    38.0    38.0    19.0    .000    .000    .000    .000     1.00   A
 .000   .000    20.0    35.0    59.0    63.0    40.0    19.0    1.00   - 1.00   A
 .000   .000    .000    8.00    16.0    24.0    24.0    16.0    8.00   - 1.00   B
 .000   11.0    44.0    45.0    44.0    47.0    45.0    22.0    .000     1.00   A
 45.0   90.0    90.0    45.0    .000    .000    .000    .000    .000     1.00   A
 .000   .000    14.0    28.0    42.0    42.0    42.0    28.0    14.0   - 1.00   B
 26.0   52.0    78.0    52.0    26.0    .000    .000    .000    .000   - 1.00   A
 .000   .000    34.0    74.0    74.0    74.0    74.0    74.0    37.0     1.00   A
 .000   20.0    53.0    53.0    54.0    54.0    57.0    .000    .000     1.00   A
 .000   .000    .000    .000    15.0    31.0    44.0    30.0    15.0   - 1.00   B
 .000   24.0    48.0    72.0    72.0    48.0    24.0    .000    .000   - 1.00   A
 .000   21.0    42.0    42.0    42.0    42.0    21.0    .000    .000     1.00   A
 .000   5.00    15.0    31.0    30.0    30.0    30.0    20.0    10.0   - 1.00   B
 .000   .000    44.0    44.0    44.0    44.0    44.0    44.0    44.0     1.00   A
 20.0   40.0    60.0    80.0     100    80.0    60.0    40.0    20.0   - 1.00   A
```

Fig. 1

Trecînd la examinare am păstrat coloana deciziilor instructorului (-1 dacă $x \in B$, 1 dacă $x \in A$), iar calculatorul și-a marcat fiecare vector în clasa în care l-a plasat, fiind comodă astfel detectarea erorilor de clasificare.

Din compararea figurilor 2 (potențial de forma (3.18) și 3 (potențial de forma (3.19)) se vede că potențialele (3.18) și (3.19) se vor comporta diferit în procesul de clasificare.

Ipoteza de bază a condiției de oprire a algoritmului de instruire în cazul unor performanțe scăzute cerute automatului în regim de examen nu poate fi întotdeauna îndeplinită.

```
2122–2257
3360–5631
E = .200   P = .800   L = 2
50.0   100    150    50.0   50.0   50.0   50.0   – 1.00
15.0   30.0   45.0   60.0   45.0   30.0   1.0      1.00 *
1.00   .000   3.00   4.00   .000   2.00   1.00   – 1.00 *
50.0   .00    50.0   100    50.0   .000   50.0   – 1.00 *
35.0   70.0   .000   .000   .000   70.0   35.0   – 1.00
31.0   68.0   100    132    98.0   64.0   34.0     1.00 *
60.0   122    183    239    181    119    59.0     1.00
24.0   49.0   74.0   99.0   76.0   51.0   26.0     1.00
32.0   66.0   88.0   110    88.0   65.0   30.0   – 1.00 *
3.00   6.00   9.00   12.0   9.00   6.00   3.00     1.00 *
5.00   10.0   15.0   20.0   15.0   10.0   5.00     1.00
13.0   26.0   39.0   52.0   39.0   26.0   13.0     1.00
30.0   30.0   30.0   120    90.0   60.0   30.0   – 1.00
7.00   14.0   21.0   28.0   28.0   11.0   3.00   – 1.00 *
3.00   15.0   20.0   30.0   30.0   20.0   5.00   – 1.00
10.0   19.0   29.0   38.0   30.0   20.0   9.00     1.00 *
10.0   20.0   30.0   40.0   30.0   20.0   10.0     1.00
25.0   50.0   75.0   100    75.0   50.0   25.0     1.00 *
7.00   14.0   16.0   18.0   16.0   14.0   7.00   – 1.00 *
1.00   2.00   6.00   24.0   18.0   12.0   6.00   – 1.00
60.0   130    195    260    200    130    65.0     1.00 *
68.0   143    210    281    211    139    71.0     1.00
2.00   4.00   16.0   32.0   16.0   4.00   2.00   – 1.00
35.0   70.0   105    140    105    70.0   35.0     1.00
75.0   150    225    300    225    150    75.0     1.00
20.0   41.0   65.0   88.0   66.0   43.0   22.0     1.00
105    200    304    410    300    195    98.0     1.00
15.0   30.0   33.0   36.0   33.0   30.0   15.0   – 1.00 *
2.00   4.00   10.0   16.0   10.0   4.00   2.00   – 1.00
16.0   12.0   8.00   4.00   .000   .000   .000   – 1.00
```

Fig. 2

Într-adevăr, numărul *L* fiind mic, se poate întîmpla ca automatul să se considere instruit fără ca statistica vectorilor din secvența de instruire să reflecte statistica vectorilor din secvența de examen.

Din figura 4 se vede că în aceste situații automatul poate să raporteze toți vectorii la numai o singură clasă.

Domeniul de aplicabilitate al sistemelor instruibile pentru clasificarea automată este foarte vast.

Există un număr considerabil de lucrări consacrate recunoașterii formelor, semnalelor și sunetelor. Insistăm însă asupra aplicabilității acestor sisteme în industrie şi economie. Controlul de calitate al produselor care sînt caracterizate de un număr mare de parametri se poate realiza în mod automat după metoda indicată în lucrare. Considerăm că aceste metode de clasificare utilizînd automate instruibile sînt deosebit de utile pentru clasificarea produselor alimentare pe categorii de calitate. Calitatea unui produs alimentar este determinat de un mare număr de parametrii de natură fizică, chimică şi organoleptică. Caracteristicile organoleptice ale produselor alimentare apreciate de un grup de degustători determină în bună măsură o împrăştiere apreciabilă a vectorilor corespunzători în clasele S_i. Este de aşteptat ca în aceste aplicaţii abordarea statistică în problema instruirii automatelor în vederea clasificării să dea rezultate mai bune, deoarece este posibil ca submulţimile din spaţiul X corespunzătoare diferitelor clase să se intersecteze. Problema clasificării automate se pune în mod deosebit de acut şi în dirijarea automată a proceselor instruibile sau economice deoarece însăşi procesul de dirijare automată include etapa de recunoaştere a unor situaţii din procesul tehnic sau economic în funcţie de care se adoptă o strategie de comandă pentru realizarea scopului propus dirijării.

$E = .200$ $P = .800$ $L = 2$

50.0	100	150	50.0	50.0	50.0	50.0	– 1.00	
15.0	30.0	45.0	60.0	45.0	30.0	15.0	1.00	*
1.00	.000	3.00	4.00	.000	2.00	1.00	– 1.00	*
50.0	.000	50.0	100	50.0	.000	50.0	– 1.00	*
35.0	70.0	.000	.000	.000	70.0	35.0	– 1.00	*
31.0	68.0	100	132	98.0	64.0	34.0	1.00	*
60.0	122	183	239	181	119	59.0	1.00	
24.0	49.0	74.0	99.0	76.0	51.0	26.0	1.00	
32.0	66.0	88.0	110	88.0	65.0	30.0	– 1.00	*
3.00	6.00	9.00	12.0	9.00	6.00	3.00	1.00	*
5.00	10.0	15.0	20.0	15.0	10.0	5.00	1.00	
13.0	26.0	39.0	52.0	39.0	26.0	13.0	1.00	
30.0	30.0	30.0	120	90.0	60.0	30.0	– 1.00	
7.00	14.0	21.0	28.0	28.0	11.0	3.00	– 1.00	*
3.00	15.0	20.0	30.0	30.0	20.0	5.00	– 1.00	
10.0	19.0	29.0	38.0	30.0	20.0	9.00	1.00	*
10.0	20.0	30.0	40.0	30.0	20.0	10.0	1.00	
25.0	50.0	75.0	100	75.0	50.0	25.0	1.00	*
7.00	14.0	16.0	18.0	16.0	14.0	7.00	– 1.00	*
1.00	2.00	6.00	24.0	18.0	12.0	6.00	– 1.00	
60.0	130	195	260	200	130	65.0	1.00	
68.0	143	210	281	211	139	71.0	1.00	
2.00	4.00	16.0	32.0	16.0	4.00	2.00	– 1.00	
35.0	70.0	105	140	105	70.0	35.0	1.00	
75.0	150	225	300	225	150	75.0	1.00	
20.0	41.0	65.0	88.0	66.0	43.0	22.0	1.00	
105	200	304	410	300	195	98.0	1.00	
15.0	30.0	33.0	36.0	33.0	30.0	15.0	– 1.00	*
2.00	4.00	10.0	16.0	10.0	4.00	2.00	1.00	
16.0	12.0	8.00	4.00	.000	.000	.000	– 1.00	

Fig. 3

```
 E = .200    P = .800  L = 2
   5.00    11.0    16.0    20.0    22.0    15.0    9.00    4.00    .000    - 1.00
   30.0    55.0    96.0    90.0    89.0    60.0    28.0    .000    .000    - 1.00
   .000    .000    .000    14.0    28.0    42.0    42.0    28.0    14.0    - 1.00

   PROBABILITATEA ERORII ÎN PROCESUL DE EXAMINARE ESTE MAI MICĂ DECÎT
                 E CU O PROBABILITATE MAI MARE CA P

L = 2
 .000     .000     24.0     48.0 · 72.0     48.0     24.0     .000     .000    - 1.00 B
N 000     .000     45.0     90.0   90.0     90.0     45.0     .000     .000      1.00 B
```

Fig. 4

Primită la redacţie la 10 iulie 1967

— Combinatul Siderurgic Galaţi
— Institutul Politehnic Galaţi

BIBLIOGRAFIE

1. АЙЗЕРМАН М. А., БРАВЕРМАН Э. М., РОЗОНОЭР Л. И., *Теоретические основы метода потенциальных функций в задаче обучения автоматов разделению входных ситуаций на классы.* Автоматика и телемеханика, XXV, *9* (1964).
2. СЕБЕСТИАН Г. С., *Процессы принятия решений при распознавании обоазов.* Киев, изд-во ,,Техника'', 1965.
3. ЦЫПКИН Я. З., *Адаптация, обучение и самообучение в автоматических сиетемах.* Автоматика и телемеханика, *1* (1966).
4. PAUL CONSTANTINESCU, *Introducere în programarea automată.* Edit. tehnică, Bucureşti, 1967.
5. В. М. ГЛУШКОВ, *Введение в кибернетику*, Изд-во Академии наук Украинской ССР, Киев 1964, р. 143.

DESPRE MODULELE DE CONVEXITATE UNIFORMĂ SLABĂ

DE

GLICERIA GODINI

În acest articol se introduc noi definiţii pentru modulele de convexitate uniformă slabă care conduc la aceeaşi clasă de spaţii uniform convexe slab.

Se numeşte *modul de convexitate uniformă* al spaţiului Banach E funcţia:

$$\delta_E(\omega) = \inf_{\substack{\|x\|=\|y\|=1 \\ \|x-y\|\geqslant\omega}} \left(1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|\right), \quad 0 \leqslant \omega \leqslant 2. \tag{1}$$

Spaţiul E se numeşte *uniform convex* dacă $\delta_E(\omega) > 0$ pentru $0 < \omega \leqslant 2$.

În [1] Gurarii a introdus o nouă definiţie a modulului de convexitate uniformă care conduce la aceeaşi clasă de spaţii uniform convexe, folosind noţiunea de înclinaţie a subspaţiilor P şi Q din spaţiul Banach E, în felul următor:

$$\beta_E(\omega) = \inf_{\substack{\|x\|=\|y\|=1 \\ \theta(L_x, L_y)\geqslant\omega}} \max_{0\leqslant t\leqslant 1} (1 - \|tx + (1-t)y\|), \quad 0 \leqslant \omega \leqslant 1, \tag{2}$$

unde L_z este subspaţiul unidimensional generat de z, iar pentru două subspaţii P şi Q din spaţiul Banach E

$$\theta(P, Q) = \max \{ \sup_{x\in P,\ \|x\|=1} \rho(x, Q), \sup_{y\in Q,\ \|y\|=1} \rho(y, P)\}, \tag{3}$$

unde $\rho(z, R)$ este distanţa de la punctul z la subspaţiul R.

În [2], [3] s-au introdus modulele de convexitate uniformă slabă astfel: fie f şi g elemente din E^*, $\|f\| = \|g\| = 1$. D.F. Cudia [2] a definit:

a) *Modulul de convexitate uniformă slabă a spaţiului E în f*, funcţia

$$\delta_E(\omega, f) = \frac{1}{2} \inf_{\substack{\|x\|=\|y\|=1 \\ \|x-y\|\geqslant\omega}} [2 - |f(x+y)|]; \quad 0 < \omega \leqslant 2. \tag{4}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 3, P. 335–340, BUCUREŞTI, 1968

b) *Modulul de convexitate uniformă slabă a spațiului E în direcția g*, funcția

$$\bar{\delta}_E(\omega, g) = \frac{1}{2} \inf_{\substack{\|x\|=\|y\|=1 \\ \|x-y\|\geqslant\omega}} (2 - \|x+y\|), \ 0 < \omega \leqslant 2. \tag{5}$$

c) *Modulul de convexitate uniformă slabă a spațiului E în f, în direcția g*, funcția :

$$\delta_E(\omega, f, g) = \frac{1}{2} \inf_{\substack{\|x\|=\|y\|=1 \\ |g(x-y)|\geqslant\omega}} (2 - |f(x+y)|), \ 0 < \omega \leqslant 2 \tag{6}$$

Spațiul E se numește *uniform convex slab în f*, *uniform convex slab în direcția g*, sau *uniform convex slab în f în direcția g*, dacă modulele corespunzătoare sînt strict pozitive pentru $0 < \omega \leqslant 2$.

În acest articol vom da o nouă definiție a modulelor de convexitate uniformă slabă arătînd că ele conduc la aceeași clasă de spații uniform convexe slab.

DEFINIȚIA 1. Pentru $f \in E^*$, $\|f\| = 1$, vom numi *modul de convexitate uniformă slabă în f* următoarea funcție :

$$\beta_E(\omega, f) = \inf_{\substack{\|x\|=\|y\|=1 \\ \theta(L_x, L_y)\geqslant\omega}} \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \{1 - |f(tx + (1-t)y)|\}, \ 0 < \omega \leqslant 1. \tag{7}$$

unde $\theta(L_x, L_y)$ a fost definit prin (3).

Observația 1. Dacă $f(x)$ și $f(y)$ au semne contrare, atunci $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} (1 - |f(tx + (1-t)y)|) = 1$, deci aceste puncte x, y nu sînt interesante. Dacă $f(x)$ și $f(y)$ au același semn și dacă $|f(x)| \geqslant |f(y)|$, atunci $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} (1 - |f(tx + (1-t)y)|) = 1 - |f(y)|$.

Următoarea teoremă este adevărată :

TEOREMA 1. *Pentru orice spațiu Banach E*

$$\delta_E(\omega, f) \leqslant \beta_E(\omega, f) \leqslant 2\delta_E(2\omega, f), \tag{8}$$

unde $\delta_E(\omega, f)$ *a fost definit prin* (*4*).

Demonstrație. Inegalitatea $\delta_E(\omega, f) \leqslant \beta_E(\omega, f)$ rezultă imediat observînd că, dacă $x, y \in E, \|x\| = \|y\| = 1$ și $\theta(L_x, L_y) \geqslant \omega$, atunci $\theta(L_x, L_y) \leqslant \leqslant \|x - y\|$ și $1 - \left|f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \leqslant \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} \{1 - |f(tx + (1-t)y)|\}$.

Să demonstrăm acum inegalitatea $\beta_E(\omega, f) \leqslant 2\delta_E(2\omega, f)$. Dacă $x, y \in E$, $\|x\| = \|y\| = 1$ și $f(x+y) \geqslant 0$, atunci avem, pentru orice $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$1 - |f(tx + (1-t)y)| \leqslant 2 - f(x+y). \tag{9}$$

Într-adevăr, dacă $f(x) \geqslant 0, f(y) \geqslant 0$, atunci, pentru orice $0 \leqslant t \leqslant 1$, avem :

$$1 - |f(tx + (1-t)y)| = 1 - f(x+y) + (1-t)f(x) + \\ + tf(y) \leqslant 2 - f(x+y).$$

Dacă $f(x) \geqslant 0$ şi $f(y) < 0$, atunci

$$1 - |f(tx + (1-t)y)| \leqslant 1 - [t|f(x)| - (1-t)|f(y)|] \leqslant$$

$$\leqslant 1 - f(x+y) + (1-t)f(x) + tf(y) \leqslant 2 - f(x+y).$$

Fie acum $\eta > 0$ dat și $x,\ y \in E$ cu $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x - y\| \geqslant 2\omega$, $f(x+y) \geqslant 0$ și $1 - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \delta_E(2\omega, f) + \eta$. Fără a restrînge generalitatea, putem presupune că există $z \in L_y$ astfel ca $\|x - z\| = \theta(L_x, L_y)$ şi $z = \alpha y$. Dacă $\alpha \geqslant 0$, atunci avem, din [1], $\|y - z\| \leqslant \|z - x\|$ şi deci

$$2\omega \leqslant \|x - y\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y\| \leqslant 2\|z - x\| = 2\theta(L_x, L_y)$$

adică $\theta(L_x, L_y) \geqslant \omega$, de unde, ţinînd seama de (9),

$$\beta_E(\omega, f) \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} (1 - |f(tx + (1-t)y)|) \leqslant 2 - f(x+y) \leqslant$$

$$\leqslant 2\delta_E(2\omega, f) + 2\eta.$$

Dacă $\alpha < 0$, atunci putem găsi (vezi [1]) puncte x', y', în planul determinat de x și y, $\|x'\| = \|y'\| = 1$, $x' - y' = \lambda(x - y)$ și

$$\inf_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|tx + (1-t)y\| \leqslant \inf_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|tx' + (1-t)y'\|.$$

Avem atunci:

$$\inf_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} |f(\lambda x + (1-\lambda)y)| \leqslant \inf_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} |f(\lambda x' + (1-\lambda)y')|$$

de unde

$$\delta_E(2\omega, f) \geqslant 1 - f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \eta \geqslant \frac{1}{2} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} (1 - |f(tx + (1-t)y)|) - \eta \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} (1 - |f(tx' + (1-t)y')|) - \eta \geqslant \frac{1}{2} \beta_E(\omega, f) - \eta.$$

Cum η a fost ales arbitrar, rezultă a doua parte a inegalității (8), ceea ce încheie demonstrația teoremei.

Din această teoremă rezultă imediat:

TEOREMA 2. *Un spațiu Banach E este uniform convex slab în f dacă și numai dacă $\beta_E(\omega, f) > 0$ pentru $0 < \omega \leqslant 1$.*

DEFINIȚIA 2. Fie $x,\ y \in E$, $\|x\| = \|y\| = 1$ și $g \in E^*$, $\|g\| = 1$. Atunci fie

$$\theta(x, L_y, g) = \inf_{|\alpha| \leqslant 1} |g(x - \alpha y)| \tag{10}$$

şi

$$\theta(L_x, L_y, g) = \max\ (\rho(x, L_y, g),\ \rho(y, L_x, g)).$$

Observația 2. Numerele $\rho(x, L_y, g)$ și $\rho(y, L_x, g)$ nu sînt simultan egale cu zero decît dacă $|g(x)| = |g(y)|$. Deci dacă $|g(x)| \neq |g(y)|$ atunci $\theta(L_x, L_y, g) > 0$. Dacă $\theta(L_x, L_y, g) = \rho(x, L_y, g)$, atunci avem $|g(x)| \geqslant |g(y)|$. În această situație, dacă $g(x) \geqslant g(y) \geqslant 0$, atunci $\theta(L_x, L_y, g) = g(x-y)$. Dacă $g(x) \geqslant 0$, $g(y) < 0$ și $g(x) \geqslant |g(y)|$, atunci $\theta(L_x, L_y, g) = g(x+y)$.

DEFINIȚIA 3. *Fie* $g \in E^*$, $\|g\| = 1$. Vom numi *modul de convexitate uniformă slabă a spațiului E în direcția g* următoarea funcție:

$$\bar{\beta}_E(\omega, g) = \inf_{\substack{\|x\|=\|y\|=1 \\ \theta(L_x, L_y, g) \geqslant \omega}} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} (1 - \|tx + (1-t)y\|) \tag{11}$$

unde $\theta(L_x, L_y, g)$ este dat în definiția 2.

Avem atunci următoarea teoremă:

TEOREMA 3. *Pentru orice spațiu Banach E*

$$\bar{\delta}_E(\omega, g) \leqslant \bar{\beta}_E(\omega, g) \leqslant 2\bar{\delta}_E(2\omega, g), \tag{12}$$

unde $\bar{\delta}_E(\omega, g)$ *a fost definit prin formula* (5).

Demonstrație. Inegalitatea $\bar{\delta}_E(\omega, g) \leqslant \bar{\beta}_E(\omega, g)$ rezultă imediat observînd că dacă $x, y \in E$, $\|x\| = \|y\| = 1$ și $\theta(L_x, L_y, g) \geqslant \omega$, atunci $\theta(L_x, L_y, g) \leqslant |g(x-y)|$ și $1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} (1 - \|tx + (1-t)y\|)$.

În [1] s-a demonstrat următorul rezultat:

Pentru $0 \leqslant t \leqslant 1$ avem

$$1 - \|tx + (1-t)y\| \leqslant 2\left(1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|\right). \tag{13}$$

Fie acum $\eta > 0$ dat și $x, y \in E$ cu $\|x\| = \|y\| = 1$, $g(x-y) \geqslant 2\omega$ și $1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant \bar{\delta}_E(2\omega, g) + \eta$. Să presupunem că $\theta(L_x, L_y, g) = \rho(x, L_y, g)$. Atunci, dacă $\theta(L_x, L_y, g) = g(x-y) \geqslant 2\omega$, avem din (13)

$$\bar{\beta}_E(\omega, g) \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} (1 - \|tx + (1-t)y\|) \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|\right) \leqslant 2\bar{\delta}_E(2\omega, g) + 2\eta.$$

Dacă $\theta(L_x, L_y, g) = g(x+y)$, avem, în ipoteza $g(x) \geqslant 0$ și $g(y) < 0$ (vezi observația 2), din $g(x-y) \geqslant 2\omega$ și $g(x) \geqslant |g(y)|$, că $g(x) \geqslant 2\omega - |g(y)| \geqslant 2\omega - g(x)$, deci $g(x) \geqslant \omega$.

Fie E_2 spațiul bidimensional determinat de x, y și $z_1, z_2 \in E_2$ astfel încît $\|z_1\| = \|z_2\| = 1$, $g(z_1) = g(z_2) = 0$ și fie $h \in E_2^*$, $\|h\| = 1$ astfel ca $h(x) = h(y) > 0$. (Dacă $h(x) = 0$, rezultatul dorit este imediat). Deoarece $g(x) \geqslant 0$ și $g(y) < 0$, există un z_3 pe segmentul $[x, y]$ astfel ca $g(z_3) = 0$. Nu putem avea simultan $h(z_1) < h(x)$ și $h(z_2) < h(x)$ căci atunci $h(z_3) < h(x)$ deoarece z_3 se află și pe segmentul $[z_1, z_2]$, ceea ce contrazice $h(z_3) = h(x)$. Să presupunem deci că $h(z_1) \geqslant h(x)$. Vom considera $h(z_1) > h(x)$, celălalt caz tratîndu-se asemănător, fiind mai simplu.

Atunci, orice punct $u \in [x, z_1]$ are $h(u) > h(x)$ și cum $h(0) = 0 < h(x)$, există un punct $u' \in [x, y]$, $u' = \lambda u$, $0 < \lambda < 1$ astfel încît $h(u') = h(x)$. Prin urmare

$$\inf_{0 \leqslant \mu \leqslant 1} \| \mu x + (1 - \mu) y \| \leqslant \inf_{0 \leqslant \mu \leqslant 1} \| \mu x + (1 - \mu) z_1 \|$$

și $g(x - z_1) = g(x) \geqslant \omega$ Cum, în acest caz, $\theta(L_x, L_z, g) = g(x - z_1)$, avem, ținînd seama de (13),

$$\bar{\beta}_E(\omega, g) \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} (1 - \| tx + (1 - t) z_1 \|) \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} (1 - \| tx +$$

$$+ (1 - t) y \|) \leqslant 2 \left(1 - \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \right) \leqslant 2 \bar{\delta}_E(2\omega, g) + 2\eta.$$

Cazul $\theta(L_x, L_y, g) = \rho(y, L_x, g)$ se tratează asemănător. Cum η a fost arbitrar, rezultă

$$\bar{\beta}_E(\omega, g) \leqslant 2 \bar{\delta}_E(2\omega, g)$$

ceea ce încheie demonstrația teoremei. Din această teoremă rezultă:

TEOREMA 4. *Un spațiu Banach E este uniform convex slab în direcția g dacă și numai dacă $\bar{\beta}_E(\omega, g) > 0$ pentru $0 < \omega \leqslant 1$.*

DEFINIȚIA 4. Fie $f, g \in E^*$, $\| f \| = \| g \| = 1$. Vom numi *modul de convexitate uniformă slabă a spațiului E în f și direcția g* următoarea funcție:

$$\beta_E(\omega, f, g) = \inf_{\substack{\|x\| = \|y\| = 1 \\ \theta(L_x, L_y, g) \geqslant \omega}} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} (1 - | f(tx + (1 - t) y) |). \tag{14}$$

Avem atunci următoarea teoremă:

TEOREMA 5. *Pentru orice spațiu Banach E*

$$\delta_E(\omega, f, g) \leqslant \beta_E(\omega, f, g) \leqslant 2 \delta_E(2\omega, f, g). \tag{15}$$

Demonstrație. Inegalitatea $\delta_E(\omega, f, g) \leqslant \beta_E(\omega, f, g)$ este imediată. Pentru cealaltă inegalitate, fie $\eta > 0$ dat, $x, y \in E$, $\| x \| = \| y \| = 1$ astfel ca $g(x - y) \geqslant 2\omega$, $f(x + y) \geqslant 0$ și $1 - f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leqslant \delta_E(2\omega, f, g) + \eta$. Să presupunem că $\theta(L_x, L_y, g) = \rho(x, L_y, g)$. Dacă $\theta(L_x, L_y, g) = g(x - y)$ rezultă

$$\beta_E(\omega, f, g) \leqslant 2 \delta_E(2\omega, f, g) + 2\eta. \tag{16}$$

Dacă $\theta(L_x, L_y, g) = g(x + y)$ vom avea, păstrînd notațiile din demonstrația teoremei 3,

$$\inf_{0 \leqslant t \leqslant 1} | f(tx + (1 - t) y) | \leqslant \inf_{0 \leqslant t \leqslant 1} | f(tx + (1 - t) z_1) |, \tag{17}$$

unde, ținînd seama de observația 1, nu ne interesează decît cazul $f(x) \geqslant 0$, $f(y) \geqslant 0$ și z_1 este ales astfel ca $f(z_1) \geqslant 0$. Presupunînd, de exemplu, $f(x) \geqslant f(y)$, avem $f(z_1) \geqslant f(y)$ deoarece $f(z_3) = f(\mu_0 x + (1 - \mu_0) y) \geqslant$

$\geqslant f(y)$, $(0 \leqslant \mu_0 \leqslant 1)$ și cum $z_3 = \lambda z_1$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, avem $f(y) \leqslant f(z_3) = \lambda f(z_1) \leqslant f(z_1)$. Deci

$$f(y) = \inf_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(tx + (1-t)y)| \leqslant \min (f(z_1), f(x)) =$$

$$= \inf_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(tx + (1-t)z_1)|.$$

Folosind relația (17) obținem din nou (16). Cazul $\theta(L_x, L_y, g) = \rho(y, L_x, g)$ se tratează asemănător. Pentru că η a fost arbitrar ales, avem a doua parte a inegalității (15), ceea ce încheie demonstrația teoremei. Din această teoremă rezultă :

TEOREMA 6. *Un spațiu Banach E este uniform convex slab în f, în direcția g, dacă și numai dacă* $\beta_E(\omega, f, g) > 0$ *pentru* $0 < \omega \leqslant 1$.

Teoremele 2, 4 și 6 ne dau deci o nouă caracterizare a spațiilor uniform convexe slab.

Primită la redacție la 21 iulie 1967

Institutul de matematică al Academiei Republicii
Socialiste România, str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. В. И. ГУРАРИЙ, *О модулях выпуклости банановых пространств*, Д.А.Н. СССР, **161**, 5 (1965).
2. D.F. CUDIA, *On the localization and directionalization of uniform convexity*. Bull. Amer. Math. Soc., **69** (1963).
3. D.F. CUDIA, *The geometry of Banach Spaces*. Smoothness, Trans. Amer. Math., Soc., **110** (1964).

FUNCŢII ANALITICE GENERALIZATE PE ALGEBRE BANACH

DE

DAN PASCALI şi DOINA POP

Reprezentarea de speţa întîia a funcţiilor analitice generalizate, dată de N. Teodorescu [10] şi I.N. Vekua [15] este extinsă în cazul algebrelor Banach necomutative.

Noţiunea de derivată areolară, introdusă de D. Pompeiu [8] şi dezvoltată apoi mai ales în lucrările lui N. Teodorescu [10—[13] şi I.N. Vekua [14]—[15], a devenit instrumentul fundamental în rezolvarea problemelor la limită pentru sisteme eliptice de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întîi în plan de forma

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = Aw + B\bar{w} \tag{1}$$

a căror soluţii se numesc funcţii analitice generalizate. În vederea lărgirii şi mai mult a cîmpului de aplicaţii, Min Szu-Hoa [2] extinde noţiunea de derivată areolară pe algebre comutative.

Pentru studiul sistemelor cu n funcţii complexe necunoscute, scrise matricial sub forma (1), D. Pascali [6]—[7] consideră o serie uniform convergentă de aproximaţii succesive, care în cazul comutativ se reduce la soluţia exponenţială. În lucrarea de faţă, se generalizează rezultatele lui Min Szu-Hoa, cu ajutorul procedeelor din [6]—[7], pe algebre necomutative.

§ 1. Fie **A** o algebră necomutativă cu elementul unitate e, peste corpul numerelor complexe, iar **D** o subalgebră a lui **A** pe care s-a definit operatorul liniar $\partial : \mathbf{D} \to \mathbf{A}$, cu proprietatea

$$\partial(f\cdot g) = \partial f\cdot g + f\cdot\partial g \quad \text{pentru } f,\ g\in \mathbf{D}. \tag{2}$$

O dată cu operatorul ∂ se consideră operatorul liniar $T : \mathbf{A} \to \mathbf{D}$ cu proprietatea

$$\partial Tf = f \quad \text{pentru } f\in \mathbf{A}$$

Cu ajutorul acestor operatori, orice element $f \in \mathbf{D}$ se poate reprezenta

$$f = h + T\partial f,$$

unde $\partial h = 0$. Această reprezentare este analogă formulei Pompeiu-Teodorescu [10] și extensiunilor sale spațiale [3].

În cele ce urmează, vom folosi următoarele două propoziții din teoria derivatei areolare, datorate lui N. Teodorescu [12]—[13].

PROPOZIȚIA 1. *Dacă operatorul de proiecție* Π *aplică spațiul liniar* $\mathbf{D}$ *pe o parte* $\mathbf{G}$ *a sa, atunci* $\mathbf{G}$ *este un subspațiu liniar al lui* $\mathbf{D}$ *și* Π *se reduce la operatorul identic pe* $\mathbf{G}$. *Operatorul* $\Pi^* = I - \Pi$ *este de asemenea un operator de proiecție și* $\Pi^* g = 0$ *pentru* $g \in \mathbf{G}$. *În plus, pentru* $d \in \mathbf{D}$

$$\Pi\Pi^* d = \Pi^*\Pi d = 0.$$

PROPOZIȚIA 2. *Orice* $f \in \mathbf{D}$ *admite descompunerea unică*

$$f = \Pi f + \Pi^* f,$$

unde subspațiile liniare $\mathbf{H}$ *și* $\mathbf{G}$, *imaginile lui* $\mathbf{D}$ *prin operatorii* Π *și* Π^*, *au intersecția formată numai din elementul nul al lui* $\mathbf{D}$. *Cu alte cuvinte,* $\mathbf{D}$ *este sumă directă*

$$\mathbf{D} = \mathbf{H} \oplus \mathbf{G},$$

iar subspațiul $\mathbf{G}$ *este izomorf cu spațiul cît* $\mathbf{D}/\mathbf{H}$.

La fel ca în [12]—[13], vom pune $\Pi = T\partial$, $\mathbf{G} = \{T\partial\varphi \mid \varphi \in \mathbf{D}\}$ și $H = \{h \mid h \in \mathbf{D},\ \partial h = 0\}$. Elementele lui H se numesc *funcții analitice vectoriale*.

Exemplu 1. Fie Ω un domeniu mărginit din planul complex, limitat de conturul rectificabil Γ, $\mathbf{A} = C(\bar{\Omega})$ algebra funcțiilor continue pe $\bar{\Omega}$ iar $\mathbf{D} = C_{\bar{z}}(\bar{\Omega})$ mulțimea funcțiilor olomorfe (α) pe $\bar{\Omega}$. Se știe din [11] și [14], că $\mathbf{D}$ este o subalgebră a lui $\mathbf{A}$. În acest caz

$$\partial = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad Tf(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega} \frac{f(t)}{t - z}\, d\omega_t, \quad \Pi^* f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t - z}\, dt,$$

$\mathbf{G} = \left\{ T\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} \,\middle|\, f \in C_{\bar{z}}(\bar{\Omega}) \right\}$, $\mathbf{H}$ = mulțimea funcțiilor olomorfe pe $\bar{\Omega}$, iar $C_{\bar{z}}(\bar{\Omega}) = \mathbf{H} \oplus \mathbf{G}$.

Pentru primitivele areolare mărginite, o descompunere analogă este dată de N. Teodorescu [12]—[13].

§ 2. În cazul în care operatorul ∂ este definit în sensul teoriei distribuțiilor (S.L. Sobolev [9]), submulțimea $\mathbf{D}$ a lui $\mathbf{A}$ poate să nu fie algebră. Fie $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}_1$ și $\mathbf{S}$ submulțimi ale unei algebre $\mathbf{A}$, dintre care $\mathbf{B}$ și $\mathbf{B}_1$ sînt spații Banach iar $\mathbf{S}$ algebră Banach, cu element unitate satisfăcînd următoarele două grupe de condiții :

$$\text{(1)} \quad \begin{cases} \mathbf{B} \subset \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_1\mathbf{S} \subset \mathbf{B}_1, \ \mathbf{D}\mathbf{B} \subset \mathbf{B}_1, \ \mathbf{S}\mathbf{B} \subset \mathbf{B} \\ \mathbf{H}\mathbf{S} \subset \mathbf{B}_1 \text{ (prin urmare } \mathbf{H} \subset \mathbf{B}_1\text{)}. \end{cases}$$

Prin produsul $\mathbf{XY}$ se înțelege mulțimea elementelor de forma xy, cu $x \in \mathbf{X}$ și $y \in \mathbf{Y}$.

(II) $\mathbf{D} \cap \mathbf{S}$ este invers închisă: dacă $u \in \mathbf{D} \cap \mathbf{S}$ și $u^{-1} \in \mathbf{S}$, atunci $u^{-1} \in \mathbf{D} \cap \mathbf{S}$.

Definim operatorul $\partial : \mathbf{D} \to \mathbf{B}_1$ cu proprietățile:

(i) Dacă $f \in \mathbf{D}$, $g \in \mathbf{D} \cap \mathbf{S}$, $\partial g \in \mathbf{B}$, atunci $f \cdot g \in \mathbf{D}$ și

$$\partial(f \cdot g) = \partial f \cdot g + f \cdot \partial g.$$

(ii) Dacă $f_k \in \mathbf{D} \cap \mathbf{S}$, atunci $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k \in \mathbf{D} \cap \mathbf{S}$ și $\partial\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k\right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \partial f_k$.

Exemplul 2. În cazul domeniului și operatorilor din exemplul 1, condițiile de mai sus sînt verificate pentru următoarele spații:

$\mathbf{A}$ = mulțimea funcțiilor măsurabile pe $\bar{\Omega}$;

$\mathbf{B} = C(\bar{\Omega})$ mulțimea funcțiilor continue pe $\bar{\Omega}$;

$\mathbf{B}_1 = L(\bar{\Omega})$ mulțimea funcțiilor sumabile pe $\bar{\Omega}$;

$\mathbf{D} = D_{\bar{z}}(\bar{\Omega})$ mulțimea funcțiilor sumabile pe $\bar{\Omega}$, care admit derivată areolară generalizată;

$\mathbf{S} = C_{\bar{z}}(\bar{\Omega})$ mulțimea funcțiilor olomorfe (α) pe $\bar{\Omega}$. Se poate considera (Min Szu-Hoa [2] și I.N. Vekua [15]) chiar

$\mathbf{B} = L_p(\bar{\Omega})$ mulțimea funcțiilor p-sumabile pe $\bar{\Omega}$ cu $p > 2$;

$\mathbf{S} = C_\alpha(\bar{\Omega})$ mulțimea funcțiilor hölderiene pe $\bar{\Omega}$ cu $\alpha = \frac{p-2}{p}$.

§ **3.** Să considerăm ecuația

$$\partial w = wF(w), \tag{3}$$

unde operatorul neliniar $F : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}$ este mărginit, $\|F(w)\|_{\mathbf{B}} \leqslant K$, cu K independent de w și satisfăcînd inegalitatea

$$K < \frac{\ln 2}{\|Te\|_{\mathbf{S}}}. \tag{4}$$

Soluțiile ecuației (3) aparținînd clasei $\mathbf{D} \cap \mathbf{B}_1$ se numesc *funcții analitice vectoriale generalizate.*

La fel ca în § 1, fie $T : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{D}$ operatorul liniar asociat lui ∂, iar

$$P(f) = T(f \cdot F(w))$$

pentru w dat și $f \in \mathbf{S}$, cu următoarele proprietăți:

(iii) $T(\mathbf{B}) \subset \mathbf{S}$.

(iv) Dacă F comută cu $T(F)$, atunci

$$(Pe)^n = n! P^n e, \; n = 2, 3, \ldots$$

(v) $\|P(f)\|_{\mathbf{S}} \leqslant \|F(w)\|_{\mathbf{B}} \|Tf\|_{\mathbf{S}}$.

Unei funcții analitice vectoriale generalizate w date, îi atașăm ecuația

$$\partial u = u \cdot F(w). \tag{5}$$

Soluţia acestei ecuaţii în $\mathbf{D} \cap \mathbf{S}$ se construieşte prin metoda aproximaţiilor succesive :

$$u_0 = e$$

$$u_1 = e + P(e),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n = e + P(u_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n} P^k(e) \quad \text{cu} \quad P^0(e) = e.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

În virtutea condiţiilor (iii) — (v), avem

$$\| P^n e \|_{\mathbf{S}} \leqslant \| F(w) \|_{\mathbf{B}}^n \| T^n e \|_{\mathbf{S}} \leqslant \frac{(K \| Te \|_{\mathbf{S}})^n}{n\,!} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

şi prin urmare

$$\| u_n \|_{\mathbf{S}} \leqslant \exp\ (K \| Te \|_{\mathbf{S}}).$$

Astfel aproximaţiile succesive converg în $\mathbf{D} \cap \mathbf{S}$ către

$$u = \lim_{n \to \infty} u_n = \sum_{k=0}^{\infty} P^k(e),$$

care, după cum se vede uşor, este o soluţie a ecuaţiei (5).

Ţinînd cont de (4),

$$\| e - u \|_{\mathbf{S}} = \| e - \sum_{k=0}^{\infty} P^k(e) \|_{\mathbf{S}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(K \| Te \|_{\mathbf{S}})^k}{k\,!} = \exp (K \| Te \|_{\mathbf{S}}) - 1 < 1,$$

deci u este element regulat în $\mathbf{S}$ [1], iar, conform cu (II), $u^{-1} \in \mathbf{D} \cap \mathbf{S}$.

TEOREMA 1. *Dacă w este o funcţie analitică vectorială generalizată, atunci*

$$w = \Phi \cdot u, \ \textit{unde} \ \Phi \in \mathbf{H}. \tag{6}$$

Demonstraţie. Conform regulei de derivare a inversului şi ecuaţiei (5)

$$\partial u^{-1} = - u^{-1} \cdot \partial u \cdot u^{-1} = - u^{-1} \cdot u \cdot F \cdot u^{-1} = - F \cdot u^{-1}.$$

Formînd derivata produsului

$$\partial (w \cdot u^{-1}) = w \cdot F \cdot u^{-1} - w \cdot F \cdot u^{-1} = 0,$$

rezultă $w \cdot u^{-1} \in \mathbf{H}$ şi prin urmare (6).

În cazul comutativ, se obţine $u = \exp\ (T(F))$, adică rezultatul lui Min Szu-Hoa [2].

4. La fel ca în lucrările [6]—[7], vom studia iteratele ecuaţiei (3). Soluţiile ecuaţiei

$$\partial^{(n+1)} f = 0$$

se numesc *polinoame areolare vectoriale de ordinul n*. După cum se vede ușor, ele admit reprezentarea

$$f = \varphi_0 + T\varphi_1 + \ldots + T^n\varphi_n,$$

unde $\varphi_k \in H$ și $\varphi_k = \Pi^*\partial^k f \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Să considerăm ecuația iterată

$$(\partial W - WF)^{(n+1)} = 0, \tag{7}$$

unde $F = F(W)$ este operatorul considerat în § 3.

Făcînd substituția

$$W = V \cdot u, \tag{8}$$

unde u este soluția ecuației (5), obținem $\partial^{(n+1)} V = 0$. Rezultă astfel:

TEOREMA 2. *Dacă W este o soluție a ecuației iterate* (7), *atunci W are forma* (8), *în care V este un polinom areolar vectorial de ordinul n.*

Primită la redacție la 3 iulie 1967

Institutul de matematică al Academiei Republicii
Socialiste România, Str. M. Eminescu nr. 47, București 9

BIBLIOGRAFIE

1. AL. GHIKA, *Analiză funcțională*. Ed. Academiei, București, 1967.
2. MIN SZU-HOA, *On concrete examples and the abstact theory of the generalized analytic functions*, Scientia Sinica, **XII**, *9*, 1269–1283 (1963).
3. GR. C. MOISIL, *Sur une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles de la physique mathématique*, Ed. Göbl, Bucarest, 1931.
4. D. PASCALI, *O nouă reprezentare a polinoamelor areolare în plan*, St. cerc. mat., **15**, *2*, 149–151 (1964).
5. —, *Vecteurs analytiques généralisés*, Rev. Roum. math. pures et appl., **10**, *6*, 779–88 (1965).
6. —, *Funcții analitice generalizate de ordinul n*, St. cerc. mat., **17**, *9*, 1385–1390 (1965).
7. —, *Sur la représentation de première espèce des vecteurs analytiques généralisés*. Rev. Roum. math. pures et appl., **12**, *5*, 685–689 (1967).
8. D. POMPEIU, *Sur une classe de fonctions d'une variable complexe*. Rendiconti Palermo, **33**, *1*, 108–113 (1912); **35**, *1*, 277–281 (1913).
9. С. Л. СОБОЛЕВ, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*. Новосибирск, 1962.
10. N. TEODORESCU, *La dérivée aréolaire et ses applications dans la physique mathématique* (Thèse), Gauthier-Villars, Paris, 1931.
11. —, *Funcții olomorfe* (α) *și funcții de clasă C_z*, Com. Acad. R.P.R., **10**, *6*, 491–499 (1960).
12. —, *Théorie des primitives aréolaires bornées*, Mémoires de l'Academie Royale de Belgique, 1962.
13. —, *Représentations intégrales en théorie des fonctions de plusieurs variables*. Comptes Rendus de la IIIe Réunion du Groupement des Mathématiciens d'expression latine, Louvaine, 1966.
14. И. Н. ВЕКУА, *Системы дифференциальных уравнений порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек*. Матем. Сб., **31/73/**, *2*, 217—314 (1952).
15. — *Обобщенные аналитические функции*. Физматгиз, Москва, 1959.

ELEMENTE DE ANALIZĂ ARMONICĂ (III)

DE

ŞERBAN STRĂTILĂ

Lucrarea de faţă este continuarea a două articole precedente la care ne referim în tot cursul expunerii [1]. În capitolul III se expun principalele rezultate legate de existenţa mulţimilor fine în analiza armonică.

În § **15** se studiază două clase importante de hiperdistribuţii — pseudomăsurile şi pseudofuncţiile — care vor constitui importante instrumente în problema unicităţii şi problema sintezei spectrale.

În § **16** se studiază mulţimile homeomorfe cu mulţimea triadică a lui Cantor.

În § **17** se studiază mulţimile independente în l.c.a.-grupuri, în particular mulţimile Kronecker şi mulţimile de tip K_q.

În § **18** se demonstrează asimetria algebrei $\mathcal{M}(G)$ şi fenomenul Wiener-Pitt pentru cuplul $(\mathcal{L}^1(G), \mathcal{M}(G))$ şi se dau cîteva generalizări ale acestor rezultate.

În § **19** se studiază mulţimile Helson şi se arată că în cazul $G = T$ acestea coincid cu mulţimile Carleson; se dau cîteva caracterizări aritmetice ale mulţimilor Helson-Carleson.

În § **20** se studiază problema unicităţii pentru serii trigonometrice şi se expun cîteva generalizări la l.c.a. - grupuri.

În § **21** se studiază în detaliu problema sintezei spectrale (vezi, **8.11**).

În § **22** se studiază seriile lacunare şi mulţimile Sidon.

În § **23** se studiază alte mulţimi specifice analizei armonice ca mulţimile de convergenţă absolută, mulţimile de divergenţă ş.a.m.d. [2]

CAPITOLUL III

MULŢIMI FINE ÎN ANALIZA ARMONICĂ

§ 15. PSEUDOMĂSURI ŞI PSEUDOFUNCŢII

15.1. DEFINIŢII. Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach comutativă şi fie $\Delta = \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ spectrul lui $\mathcal{A}$. Elementele lui $\mathcal{A}^*$ — dualul lui $\mathcal{A}$ ca spaţiu Banach — se numesc *pseudomăsuri pe* Δ, iar $\mathcal{A}^*$ se notează $\mathcal{PM}(\Delta)$. Dacă $S \in \mathcal{PM}(\Delta)$ iar $x \in \mathcal{A}$, atunci $S(x)$ se va nota şi $\langle S, x \rangle$.

---

[1] St. cerc. mat., **19**, *8*, *10* (1967).

[2] În lucrarea de faţă se află numai §§ 15—19, urmînd ca §§ 20—23 să apară în nr. 6 al acestei reviste.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 3, P. 347—426, BUCUREŞTI, 1968

Vom spune că o pseudomăsură $S \in \mathcal{PM}(\Delta)$ este *suportată* de o mulţime închisă $E \subset \Delta$ dacă are loc implicaţia :

$$x \in A \quad \text{şi} \quad \operatorname{supp} x^\wedge \cap E = \emptyset \Rightarrow \langle S, x \rangle = 0.$$

Mulţimea pseudomăsurilor suportate de E se va nota prin $\mathcal{PM}(E)$. Evident, $\mathcal{PM}(E)$ este un subspaţiu închis din $\mathcal{PM}(\Delta)$ în topologia normei, deci devine un spaţiu Banach cu topologia indusă.

În secţiunile **15.2**—**15.4** $\mathcal{A}$ va fi întotdeauna o *algebră Banach comutativă semisimplă şi regulată, care satisface condiţia Ditkin la infinit.*

15.2. Măsuri şi adevărate pseudomăsuri. Considerăm reprezentarea Ghelfand $\mathcal{A}^\wedge$ a lui $\mathcal{A}$ înzestrată cu norma $\|x^\wedge\| = \|x\|$; atunci $\mathcal{A}^\wedge$ şi $\mathcal{A}$ sînt izometric izomorfe ; pe $\mathcal{A}^\wedge \subset \mathcal{C}_0(\Delta)$ mai există şi norma $\|x^\wedge\|_\infty \leqslant \|x^\wedge\|$. Orice funcţională liniară şi continuă pe $\mathcal{C}_0(\Delta)$ — adică orice măsură $\mu \in \mathcal{M}(\Delta)$ — induce o funcţională liniară şi continuă pe $\mathcal{A}^\wedge$ — adică o pseudomăsură $S_\mu \in \mathcal{PM}(\Delta)$ — definită prin relaţia :

$$\langle S_\mu, x \rangle = \int_\Delta x^\wedge \, d\mu, \quad x \in \mathcal{A}.$$

Se obţine astfel o scufundare :

$$\mathcal{M}(\Delta) \subset \mathcal{PM}(\Delta).$$

Evident,

$$\|S_\nu\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\langle S_\nu, x \rangle| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \left| \int x^\wedge d\mu \right| \leqslant \|\mu\|.$$

Dacă μ este concentrată pe mulţimea închisă $E \subset \Delta$, atunci S_μ este suportată de E. Dacă $\mathcal{A}^\wedge$ este densă în $\mathcal{C}_0(\Delta)$ — în particular dacă $\mathcal{A}$ este *simetrică* (vezi § **18**) — atunci şi reciproca este adevărată.

O pseudomăsură $S \in \mathcal{PM}(\Delta)$ care nu este de tipul S_μ, $\mu \in \mathcal{M}(\Delta)$, se numeşte *adevărată pseudomăsură*.

15.3. LEMĂ. *Fie* $K \subset \Delta$ *o mulţime compactă, iar* $\{D_1, \ldots, D_n\}$ *o acoperire deschisă a lui* K. *Există* $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathcal{A}$ *aşa ca* :

(i) $\operatorname{supp} x_j^\wedge \subset D_j$, $j = 1, \ldots, n$.

(ii) $x_1^\wedge + \ldots + x_n^\wedge = 1$ pe K.

Vom construi, prin recurenţă, o acoperire deschisă şi relativ compactă $\{U_1, \ldots, U_n\}$ a lui K aşa ca $\overline{U}_j \subset D_j$, $j = 1, \ldots, n$; să presupunem că am găsit $U_1, \ldots, U_p$, $p < n$, aşa ca :

$$\overline{U}_j \subset D_j, \qquad j = 1, \ldots, p, \text{ şi}$$

$$U_1 \cup \ldots \cup U_p \cup D_{p+1} \cup \ldots D_n \supseteq K.$$

Se construieşte atunci U_{p+1} în felul următor : fie

$$V_{p+1} = U_1 \cup \ldots \cup U_p \cup D_{p+2} \cup \ldots \cup D_n ;$$

atunci $K \setminus V_{p+1} \subset D_{p+1}$ şi este compact, deci există U_{p+1}, deschis şi relativ compact, aşa ca :

$$K \setminus V_{p+1} \subset U_{p+1} \subset \overline{U}_{p+1} \subset D_{p+1} ;$$

atunci :

$$\mathbf{U}_1 \cup \dots \cup \mathbf{U}_p \cup \mathbf{U}_{p+1} \cup \mathbf{D}_{p+2} \cup \dots \cup \mathbf{D}_n = \mathbf{K},$$

ceea ce completează recurența.

Apoi, pentru fiecare $1 \leqslant j \leqslant n$, fie $\mathbf{y}_j \in \mathcal{A}$ așa ca supp $\mathbf{y}_j^\wedge \subset \mathbf{D}_j$ și $\mathbf{y}_j^\wedge = 1$ pe $\mathbf{U}_j$, fie $\mathbf{z} \in \mathcal{A}$ așa ca $\mathbf{z}^\wedge = 1$ pe $\mathbf{K}$ [3]) și fie :

$$\mathbf{y} = \prod_{j=1}^{n} (\mathbf{z} - \mathbf{y}_j).$$

Evident, $\mathbf{y}^\wedge = 0$ pe $\mathbf{K}$; dacă punem $\mathbf{x} = \mathbf{z}^n - \mathbf{y}$, atunci $\mathbf{x}^\wedge = 1$ pe $\mathbf{K}$. Pe de altă parte, $\mathbf{x}$ se poate scrie sub forma :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_n,$$

unde $\mathbf{x}_1$ este suma acelor termeni din dezvoltarea lui $\mathbf{x}$ care conțin pe $\mathbf{y}_1$ în factor, $\mathbf{x}_2$ este suma acelor termeni dintre cei rămași care conțin pe $\mathbf{y}_2$ în factor, ș.a.m.d. Este evident că supp $\mathbf{x}_j^\wedge \subset \mathbf{D}_j$ și lema este complet demonstrată.

15.4. Suportul unei pseudomăsuri. Fie $\mathbf{S} \in \mathcal{PM}(\Delta)$ și $\mathcal{E} = \{\mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} \subset \Delta\,;\ \mathbf{S}$ este suportată de $\mathbf{E}\}$. Atunci *familia $\mathcal{E}$ este stabilă la intersecții finite.* Într-adevăr, fie $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \in \mathcal{E}$ și fie $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ cu supp $\mathbf{x}^\wedge$ *compact* și supp $\mathbf{x}^\wedge \cap \mathbf{E}_1 \cap \cap \mathbf{E}_2 = \emptyset$. Atunci $\{\mathbf{E}_1', \mathbf{E}_2'\}$ formează o acoperire deschisă a lui supp $\mathbf{x}^\wedge$ și conform **15.3** există $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}$ așa ca :

$$\text{supp}\quad \mathbf{x}_1^\wedge \subset \mathbf{E}_1'$$

$$\text{supp}\quad \mathbf{x}_2^\wedge \subset \mathbf{E}_2'$$

$$\mathbf{x}_1^\wedge + \mathbf{x}_2^\wedge = 1 \quad \text{pe} \quad \text{supp } \mathbf{x}^\wedge.$$

Prin urmare $\mathbf{x}^\wedge = \mathbf{x}^\wedge \mathbf{x}_1^\wedge + \mathbf{x}^\wedge \mathbf{x}_2^\wedge$ și cum $\mathcal{A}$ este semisimplă, $\mathbf{x} = \mathbf{x}\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}\mathbf{x}_2$. Dar :

$$\text{supp } \mathbf{x}^\wedge \mathbf{x}_1^\wedge \cap \mathbf{E}_1 = \emptyset \Rightarrow \langle \mathbf{S}, \mathbf{x}\mathbf{x}_1 \rangle = 0$$

$$\text{supp } \mathbf{x}^\wedge \mathbf{x}_2^\wedge \cap \mathbf{E}_2 = \emptyset \Rightarrow \langle \mathbf{S}, \mathbf{x}\mathbf{x}_2 \rangle = 0$$

și deci $\langle \mathbf{S}, \mathbf{x} \rangle = 0$. Datorită condiției Ditkin la infinit rezultă $\langle \mathbf{S}, \mathbf{x} \rangle = 0$ pentru orice $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ cu supp $\mathbf{x}^\wedge \cap \mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2 = \emptyset$, deci $\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2 \in \mathcal{E}$.

Mai mult, $\bigcap \mathcal{E} \in \mathcal{E}$; într-adevăr, fie $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ cu supp $\mathbf{x}^\wedge$ *compact* și supp $\mathbf{x}^\wedge \cap \bigcap \mathcal{E} = \emptyset$; deoarece supp $\mathbf{x}^\wedge$ este compact, există $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n \in \mathcal{E}$ așa ca supp $\mathbf{x}^\wedge \cap \bigcap_{k=1}^{n} \mathbf{E}_k = \emptyset$ și din cele de mai sus rezultă $\langle \mathbf{S}, \mathbf{x} \rangle = 0$. Cu ajutorul condiției lui Ditkin obținem afirmația făcută.

DEFINIȚIE. Se numește *suportul lui* $\mathbf{S} \in \mathcal{PM}(\Delta)$ și se notează prin supp $\mathbf{S}$, cea mai mică mulțime închisă de care este suportată $\mathbf{S}$.

Dacă presupunem în plus că *$\mathcal{A}^\wedge$ este dens în $\mathcal{C}_0(\Delta)$*, atunci definiția de mai sus este compatibilă cu definiția suportului unei măsuri.

---

[3]) Conform teoremei : „Dacă $\mathcal{A}$ este o algebră Banach comutativă regulată, $\mathbf{E} \subset \Delta(\mathcal{A})$ este o mulțime compactă și $\mathbf{F} \subset \Delta(\mathcal{A})$ este o mulțime închisă disjunctă de $\mathbf{E}$, atunci orice ideal închis $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ cu $\mathbf{H}(\mathcal{I}) = \mathbf{F}$ (vezi **8.10**) conține un element $\mathbf{x}$ așa ca $\mathbf{x}^\wedge = 1$ pe $\mathbf{E}$. Pentru demonstrație trimitem la Loomis, [20].

15.5 NOTE. (1) În particular, dacă $\mathcal{A} = \mathcal{L}^1(\mathbf{G})$, unde $\mathbf{G}$ este un l.c.a.-grup, atunci $\Delta = \Gamma$, dualul lui $\mathbf{G}$; în acest caz $\mathcal{PM}(\Delta)$ va fi notat prin $\mathcal{PM}(\Gamma)$ şi vom vorbi despre pseudomăsuri pe Γ. Evident, $\mathcal{PM}(\Gamma) \equiv \mathcal{L}^\infty(\mathbf{G})$ canonic.

În general, *dacă* Γ *este un l.c.a.-grup vom înţelege prin pseudomăsuri pe* Γ elementele din $[\mathcal{A}(\Gamma)]^*$; în continuare $\mathbf{G}$ este dualul lui Γ:

$$\mathcal{L}^\infty(\mathbf{G}) = [\mathcal{L}^1(\mathbf{G})]^* \equiv [\mathcal{A}(\Gamma)]^* = \mathcal{PM}(\Gamma) \quad \text{(vezi 5.6. (2))}.$$

(2) *În cele ce urmează ne vom ocupa de cazul particular* $\Gamma = \mathbf{T}$. Vom începe cu alte definiţii ale pseudomăsurilor şi a suportului, iar pe parcurs se va arăta că aceste definiţii sînt echivalente cu definiţiile generale de mai sus. În plus vom introduce şi alte noţiuni specifice cazului $\mathbf{G} = \mathbf{T}$.

15.6. DEFINIŢII. Fie $\mathbf{S} : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ o funcţie oarecare. Vom nota $c_n = \mathbf{S}(n)$ pentru $n \in \mathbf{Z}$. Pentru a sintetiza această notaţie în însăşi definiţia funcţiei $\mathbf{S}$ vom scrie:

$$\mathbf{S} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

Simbolul „ $\sim$ " nu reprezintă decît definiţia de mai sus, şi nicidecum egalitatea lui $\mathbf{S}$ cu eventuala sumă a seriei trigonometrice.

(1) Vom spune că $\mathbf{S}$ *defineşte o hiperdistribuţie pe* $\mathbf{T}$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ avem:

$$c_n = 0\,(e^{\varepsilon|n|}), \qquad n \to \pm\infty;$$

în acest caz, prin *abuz de limbaj*, vom spune că $\mathbf{S}$ *este o hiperdistribuţie pe* $\mathbf{T}$

(2) Vom spune că $\mathbf{S}$ *defineşte o distribuţie pe* $\mathbf{T}$ dacă există $k > 0$ aşa ca:

$$c_n = 0\,(|n|^k), \quad n \to \pm\infty;$$

în acest caz, prin *abuz de limbaj*, vom spune că $\mathbf{S}$ *este o distribuţie pe* $\mathbf{T}$.

(3) Vom spune că $\mathbf{S}$ *defineşte o pseudomăsură pe* $\mathbf{T}$ dacă avem:

$$c_n = 0\,(1), \quad n \to \pm\infty;$$

în acest caz, prin *abuz de limbaj*, vom spune că $\mathbf{S}$ este *o pseudomăsură pe* $\mathbf{T}$.

(4) Vom spune că $\mathbf{S}$ *defineşte o pseudofuncţie pe* $\mathbf{T}$ *dacă* avem:

$$c_n = o\,(1), \quad n \to \pm\infty;$$

în acest caz, prin *abuz de limbaj*, vom spune că $\mathbf{S}$ *este o pseudofuncţie pe* $\mathbf{T}$.

(5) Vom spune că $\mathbf{S}$ *este o funcţie integrabilă* $\mathbf{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbf{T})$ dacă

$$\mathbf{f}^\wedge = \mathbf{S}.$$

(6) Vom spune că $\mathbf{S}$ *este o măsură* $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{T})$ *dacă*

$$\mu^\wedge = \mathbf{S}.$$

Încheiem această secţiune cu cîteva observaţii necesare:

(i) Definiţiile (5) şi (6) sînt *corecte* datorită teoremei de unicitate (**5.4**).

(ii) Dacă S este o măsură, atunci, (2.7), $c_n = 0(1)$, $n \to \pm\infty$; dar această proprietate nu caracterizează măsurile, ci, prin definiția (3), pseudomăsurile.

(iii) Dacă S este o funcție integrabilă, atunci (teorema Riemann-Lebesgue 2.4) $c_n = o(1)$, $n \to \pm\infty$; dar această proprietate nu caracterizează funcțiile integrabile, ci, prin definiție, pseudofuncțiile.

(iv) Definiția (2) dată de noi distribuțiilor coincide cu cea clasică și este corectă; mai precis, are loc următoarea teoremă în teoria clasică a distribuțiilor:

„*Fie* $\mathcal{D}'(\mathbf{T})$ *spațiul distribuțiilor pe* $\mathbf{T}$ *și o serie trigonometrică*

$$(*) \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}.$$

Cu aceste notații avem:

(a) *dacă* c_n *sînt coeficienții Fourier ai unei distribuții* $F \in \mathcal{D}'(\mathbf{T})$, *atunci* $c_n = 0(|n|^k)$ *pentru* $n \to \pm\infty$ *iar seria* (*) *converge în* $\mathcal{D}'(\mathbf{T})$ *către* F;

(b) *dacă* $c_n = 0(|n|^k)$ *pentru* $n \to \pm\infty$ „*atunci seria* (*) *converge în* $\mathcal{D}'(\mathbf{T})$ *către o distribuție* F *ai cărei coeficienți Fourier sînt* c_n".

15.7. Spații de hiperdistribuții. Introducem următoarele notații:

$\mathcal{HD}(\mathbf{T})$ = mulțimea hiperdistribuțiilor pe $\mathbf{T}$;
$\mathcal{D}'(\mathbf{T})$ = mulțimea distribuțiilor pe $\mathbf{T}$;
$\mathcal{PM}(\mathbf{T})$ = mulțimea pseudomăsurilor pe $\mathbf{T}$;
$\mathcal{PF}(\mathbf{T})$ = mulțimea pseudofuncțiilor pe $\mathbf{T}$;
$\mathcal{M}(\mathbf{T})$ cu sensul obișnuit (**1.6**);
$\mathcal{L}^1(\mathbf{T})$ cu sensul obișnuit (**1.6**);
$\mathcal{A}(\mathbf{T})$ cu sensul obișnuit (**2.2**).

Avînd în vedere definițiile de la **15.6** și faptul că $\mathbf{T}^\wedge \equiv \mathbf{Z}$ și $\mathbf{Z}^\wedge \equiv \mathbf{T}$ (**2.10**), urmărim să introducem structuri canonice pe mulțimile de mai sus, să stabilim izomorfisme între spațiile astfel obținute și anumite spații de funcții pe $\mathbf{Z}$, iar în final să stabilim o dualitate între spațiile $\mathcal{A}(\mathbf{T})$, $\mathcal{PF}(\mathbf{T})$ și $\mathcal{PM}(\mathbf{T})$.

Să observăm mai întîi următoarele *incluziuni de mulțimi*:

$$\mathcal{A}(\mathbf{T}) \subset \mathcal{L}^1(\mathbf{T}) \subset \begin{array}{c} \mathcal{PF}(\mathbf{T}) \\ \\ \mathcal{M}(\mathbf{T}) \end{array} \subset \mathcal{PM}(\mathbf{T}) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{T}) \subset \mathcal{HD}(\mathbf{T});$$

verificarea lor este imediată.

Pe mulțimea $\mathcal{HD}(\mathbf{T})$ se poate introduce o structură de algebră; anume, dacă α și β sînt scalari iar

$$\mathrm{S} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \quad \mathrm{T} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{int} \in \mathcal{HD}(\mathbf{T}),$$

atunci

$$(1)\qquad \alpha \mathbf{S} + \beta \mathbf{T} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} (c_n + d_n)\, e^{int} \in \mathcal{HD}\,(\mathbf{T})$$

$$(2)\qquad S \ast \mathbf{T} \sim 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} c_n d_n e^{int} \in \mathcal{HD}\,(\mathbf{T})$$

iar axiomele algebrei se verifică trivial.

Cu structura indusă, mulţimile $\mathcal{D}'(\mathbf{T})$, $\mathcal{PM}(\mathbf{T})$, $\mathcal{PF}(\mathbf{T})$, $\mathcal{M}(\mathbf{T})$, $\mathcal{L}^1(\mathbf{T})$ devin şi ele algebre; trebuie să menţionăm faptul — de altfel evident — că operaţia de convoluţie definită în acest fel coincide în mulţimile $\mathcal{D}'(\mathbf{T})$, $\mathcal{M}(\mathbf{T})$ şi $\mathcal{L}^1(\mathbf{T})$ cu operaţia cu acelaşi nume definită în cadrul lor (**1.10**, **1.14**).

Atunci, din definiţiile **15.6** rezultă *izomorfismele de algebre*:

$$\mathcal{PM}(\mathbf{T}) \longleftrightarrow \mathcal{L}^{\infty}_{-}(\mathbf{Z}) = l_{\infty}$$

$$\mathcal{PF}(\mathbf{T}) \longleftrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbf{Z}) = c_0$$

Pe de altă parte, din teoria generală (**5.4**) avem şi *izomorfismul de algebre*:

$$\mathcal{A}(\mathbf{T}) \longleftrightarrow \mathcal{L}^1(\mathbf{Z}) = l_1\,(= \mathcal{M}(\mathbf{Z}) \text{ conf. } 5.5).$$

Toate spaţiile din dreapta devin spaţii Banach în raport cu normele corespunzătoare; aşa încît, dacă cerem ca izomorfismele de mai sus să fie şi izometrii, obţinem pe spaţiile $\mathcal{A}(\mathbf{T})$, $\mathcal{PF}(\mathbf{T})$ şi $\mathcal{PM}(\mathbf{T})$ structur canonice de algebre Banach. În fapt definim:

$$\text{pentru } \mathbf{S} \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} \in \mathcal{PM}(\mathbf{T}) \quad \text{norma } \|\mathbf{S}\| = \sup_n |c_n|;$$

$$\text{pentru } \mathbf{S} \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} \in \mathcal{PF}(\mathbf{T}) \quad \text{norma } \|\mathbf{S}\| = \sup_n |c_n|;$$

$$\text{pentru } \mathbf{f} \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} \in \mathcal{A}(\mathbf{T}) \quad \text{norma } \|\mathbf{f}\| = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|.$$

Sînt bine cunoscute relaţiile de dualitate:

$$(^*)\qquad \begin{aligned} &\mathcal{L}^{\infty}(\mathbf{Z}) \equiv [\mathcal{L}^1(\mathbf{Z})]^*, &&\text{i. e. } l_{\infty} = (l_1)^* \\ &\mathcal{M}(\mathbf{Z}) \equiv [\mathcal{C}_0\,[(\mathbf{Z})]^*, &&\text{i. e. } l_1 = (c_0)^*. \end{aligned}$$

În cazul care ne interesează obţinem deci relaţiile:

$$(^{**})\qquad \begin{aligned} \mathcal{PM}(\mathbf{T}) &\equiv [\mathcal{A}(\mathbf{T})]^* \\ \mathcal{A}(\mathbf{T}) &\equiv [\mathcal{PF}(\mathbf{T})]^*. \end{aligned}$$

În ambele cazuri dualitatea se realizează prin intermediul unor forme biliniare numite „*produse scalare*". Dacă

$$\mathbf{S} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \in \mathcal{PM}(\mathbf{T}) \quad \text{sau} \quad \mathcal{PF}(\mathbf{T})$$

şi

$$\mathrm{f} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{int} \in \mathcal{A}(\mathrm{T}),$$

atunci se *definesc* astfel produsele scalare :

$$(3) \qquad \langle \mathrm{S}, \mathrm{f} \rangle = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \bar{\gamma}_n$$

$$(4) \qquad \langle \mathrm{f}, \mathrm{S} \rangle = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{c}_n \gamma_n .$$

Se mai *notează* uneori produsul scalar ca integrală :

$$(5) \qquad \langle \mathrm{S}, \mathrm{f} \rangle = \int \mathrm{S}\bar{\mathrm{f}} = \int \mathrm{S}(t)\, \overline{\mathrm{f}(t)}$$

$$(6) \qquad \langle \mathrm{f}, \mathrm{S} \rangle = \int \bar{\mathrm{S}}\mathrm{f} = \int \overline{\mathrm{S}(t)}\, \mathrm{f}(t).$$

Justificarea acestei notaţii se află în identitatea lui Parseval (4.3. bis).

15.8. Suportul unei hiperdistribuţii. Să considerăm o hiperdistribuţie

$$\mathrm{S} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}.$$

Acestei hiperdistribuţii i se asociază în mod canonic *funcţiile analitice* :

$$\mathcal{S}^+(z) = \sum_{0}^{\infty} c_n z^n, \qquad |z| < 1$$

$$\mathcal{S}^-(z) = -\sum_{-\infty}^{-1} c_n z^n, \qquad |z| > 1.$$

Să verificăm că, de exemplu, S^+ este analitică în $|z| < 1$; fie $|z| < r$ şi fie $\varepsilon > 0$ aşa ca $e^{\varepsilon} r < 1$; atunci, deoarece $c_n = 0(e^{\varepsilon n})$ $(n > 0)$, adică există $M > 0$ aşa ca $c_n / e^{\varepsilon n} < M$ $(n > 0)$, rezultă $|c_n z^n| < M(e^{\varepsilon} r)^n$ şi afirmaţia este evidentă.

Vom spune că un punct $e^{i\alpha}$ este *punct regulat pentru cuplul* $(\mathcal{S}^+, \mathcal{S}^-)$ dacă există o vecinătate V a lui $e^{i\alpha}$ în plan şi o funcţie olomorfă $\mathcal{F}$ pe V aşa ca $\mathcal{F} = \mathcal{S}^+$ pe $\mathrm{V} \cap (|z| < 1)$ şi $\mathcal{F} = \mathcal{S}^-$ pe $\mathrm{V} \cap (|z| > 1)$.

Vom spune că S *este nulă pe o mulţime deschisă* $\Omega \subset \mathrm{T}$ dacă orice punct $e^{i\alpha} \in \Omega$ este un punct regulat pentru cuplul $(\mathcal{S}^+, \mathcal{S}^-)$.

Vom spune că S *este suportată de o mulţime închisă* $\mathrm{F} \subset \mathrm{T}$ dacă S este nulă pe complementara lui F.

Suportul lui S se numeşte cea mai mică mulţime închisă de care S este suportată. Definiţia este corectă căci ,,principiul localizării'' este adevărat în mod trivial : dacă S este nulă pe fiecare din mulţimile deschise Ω_α, atunci **S** este nulă pe mulţimea deschisă $\Omega = \bigcup_\alpha \Omega_\alpha$. Mai mult, suportul lui **S** constă din *mulţimea acelor puncte din T care nu sînt regulate pentru cuplul* $(\mathcal{S}^+, \mathcal{S}^-)$.

Pentru a *justifica* aceste definiţii, vom considera un caz particular. Să *presupunem* că funcţiile $\mathcal{S}^+$ şi $\mathcal{S}^-$ se prelungesc prin continuitate la cercul unitate $|z| = 1$ şi să considerăm funcţia *continuă* :

$$\mathbf{f}\,(e^{it}) = \mathcal{S}^+\,(e^{it}) - \mathcal{S}^-\,(e^{it}).$$

Atunci seria Fourier asociată funcţiei $\mathbf{f}$ *este tocmai seria*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}.$$

Pentru verificare să calculăm, de exemplu, coeficienţii Fourier ai funcţiei $\mathcal{S}^+(e^{it})$; conform unei teoreme binecunoscute din teoria funcţiilor analitice (Cartan [4], ch. II, exercice 5) putem scrie formula integrală a lui Cauchy :

$$\mathcal{S}^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} \frac{\mathcal{S}^+(\xi)}{\xi - z}\,d\xi, \quad |z| < 1.$$

Derivînd de n ori sub semnul integralei şi luînd valoarea în centrul cercului — originea — obţinem :

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} \frac{\mathcal{S}^+(\xi)}{\xi^{n+1}}\,d\xi, \quad n \geqslant 0$$

sau făcînd schimbarea $\xi = e^{it}$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{S}^+(e^{it})\,e^{-int}\,dt, \quad n \geqslant 0$$

adică c_n este coeficientul Fourier de indice $n \geqslant 0$ al funcţiei $\mathcal{S}^+(e^{it})$. Coeficienţii de indice negativ sînt nuli după cum rezultă din calculul următor, bazat pe aceeaşi teoremă :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{S}^+(e^{it})\,e^{int}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} \mathcal{S}^+(\xi)\,\xi^{n-1}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} \frac{\mathcal{S}^+(\xi)\,\xi^n}{\xi - 0}\,d\xi = \mathrm{S}^+(z)z^n\big|_{z=0} = 0, \quad n \geqslant 1.$$

Aşa încît, în acest caz, hiperdistribuţia **S** este o funcţie continuă $\mathbf{f}$.

Dacă acum $e^{i\alpha}$ este un punct regulat pentru cuplul $(\mathcal{S}^+, \mathcal{S}^-)$, atunci în mod evident $\mathbf{f}$ se anulează pe o vecinătate **V** a lui $e^{i\alpha}$. Reciproc, dacă $\mathbf{f}$ se anulează în vecinătatea unui punct $e^{i\alpha} \in \mathbf{T}$, atunci $e^{i\alpha}$ este un punct regulat pentru cuplul $(\mathcal{S}^+, \mathcal{S}^-)$; acest fapt rezultă din teoremele Cauchy şi Morera (Cartan, [4] ch. II, § 2.4) ţinînd cont că există transformări conforme ale planului care transformă semiplanul superior în $(|z| < 1)$ iar semiplanul inferior în $(|z| < 1)$ (Cartan [4] ch. VI, §2.5).

15.9. PROPOZIȚIE. *Fie* $\mathrm{S} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ *o hiperdistribuție; dacă suportul lui* S *este vid, atunci* S *este hiperdistribuția identic nulă* (i.e. $c_n = 0$ pentru orice $n \in Z$); *reciproc, trivial.*

Cum orice punct $e^{i\alpha}$ este un punct regulat pentru cuplul $(\mathcal{S}^+, \mathcal{S}^-)$, rezultă că există o vecinătate **V** a cercului $|z| = 1$ și o funcție analitică $\mathcal{F}$ pe **V** așa ca $\mathcal{F} = \mathcal{S}^+$ în $(|z| < 1)$ și $\mathcal{F} = \mathcal{S}^-$ în $(|z| > 1)$. Atunci funcția

$$\varphi(z) = \begin{cases} \mathcal{S}^+(z) & \text{pentru } |z| < 1 \\ \mathcal{F}(z) & \text{pentru } z \in \mathbf{V} \\ \mathcal{S}^-(z) & \text{pentru } |z| > 1 \end{cases}$$

este corect definită și întreagă; în plus φ se anulează la infinit; într-adevăr, pentru $|z| > \frac{1}{r}$, $r < 1$, rezultă:

$$|\varphi(z)| \leqslant \sum_{-\infty}^{-1} |c_n z^n| \leqslant \sum_{1}^{\infty} M(e^{\varepsilon} r)^n = \frac{M e^{\varepsilon} r}{1 - e^{\varepsilon} r} \to 0$$

pentru $r \to 0$. Teorema lui Liouville ne asigură atunci că $\varphi \equiv 0$; aplicînd principiul prelungirii analitice în $(|z| < 1)$ și $(|z| > 1)$, obținem $c_n = 0$ pentru orice $n \in \mathbf{Z}$ și propoziția este complet demonstrată.

15.10. Fiecărei hiperdistribuții (S) i se asociază familia de funcții $\mathcal{S}_\alpha(t)$, $\alpha > 0$, definite prin

$$\mathcal{S}_\alpha(t) = \mathcal{S}^+(e^{-\alpha + it}) - \mathcal{S}^-(e^{\alpha + it})$$ [4]

Seria Fourier asociată lui $\mathcal{S}_\alpha$ este:

$$\mathcal{S}_\alpha \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{-\alpha|n|} e^{int}$$

adică

$$\hat{\mathcal{S}_\alpha}(n) = c_n e^{-\alpha|n|}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

(1) PROPOZIȚIE. *Pe orice compact în vecinătatea căruia* S *este nulă,* $\mathcal{S}_\alpha$ *tinde uniform către* 0 *cînd* $\alpha \to 0$.

Într-adevăr, fie **K** un compact în vecinătatea căruia S este nulă și fie **V** o vecinătate în plan a lui **K** și o funcție $\mathcal{F}$ analitică pe **V** așa ca $\mathcal{F} = \mathcal{S}^+$ pe $\mathbf{V} \cap (|z| < 1)$ și $\mathcal{F} = \mathcal{S}^-$ pe $\mathbf{V} \cap (|z| > 1)$. Este suficient să arătăm că:

$$(*) \qquad \mathcal{F}(e^{-\alpha + it}) \to \mathcal{F}(e^{it}), \quad \alpha \to 0$$

uniform în raport cu $e^{it} \in \mathbf{K}$; există $d > 0$ și $\alpha_0 > 0$ așa ca pentru $\alpha > \alpha_0$ să avem:

$d(e^{-\alpha + it}, \partial\mathbf{V}) > d$ și $d(e^{it}, \partial\mathbf{V}) > d$ pentru $e^{it} \in \mathbf{K}$; deoarece

$$\mathcal{F}(e^{-\alpha + it}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbf{V}} \frac{\mathcal{F}(\xi)}{\xi - e^{-\alpha + it}} \, d\xi.$$

$$\mathcal{F}(e^{it}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbf{V}} \frac{\mathcal{F}(\xi)}{\xi - e^{it}} \, d\xi$$

---

[4] Aici și în cele ce urmează vom scrie $f(t)$ în loc de $f(e^{it})$, pentru comoditate.

şi $|\mathcal{F}(\xi)| < M$ pentru $\xi \in \partial\mathbf{V}$ rezultă :

$$|\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\alpha+it}) - \mathcal{F}(\mathrm{e}^{it})| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbf{V}}\left|\frac{\mathcal{F}(\xi)\mathrm{e}^{it}(1-\mathrm{e}^{-\alpha})}{(\xi-\mathrm{e}^{it})(\xi-\mathrm{e}^{-\alpha+it})}\right|\mathrm{d}\xi \leqslant \frac{M}{d^2}(1-\mathrm{e}^{-\alpha})$$

de unde relaţia (*). Propoziţia este demonstrată.

(2) COROLAR. *Dacă φ este o funcţie integrabilă nulă în vecinătatea suportului lui* $\mathbf{S}$, *atunci*

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,\mathcal{S}_\alpha(t)\mathrm{d}t = 0.$$

15.11. Pentru $\mathbf{S} \in \mathcal{H}\mathcal{D}(\mathbf{T})$ vom nota supp $\mathbf{S}$ = suportul lui $\mathbf{S}$.

PROPOZIŢIE. *Dacă* $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathcal{H}\mathcal{D}(\mathbf{T})$ *iar* α *şi* β *sînt scalari, atunci*

(i) $\quad \operatorname{supp}(\alpha\,\mathbf{S} + \beta\mathbf{T}) \subset (\operatorname{supp}\mathbf{S}) \cup (\operatorname{supp}\mathbf{T})$,

(ii) $\quad \operatorname{supp}(\mathbf{S} * \mathbf{T}) \subset (\operatorname{supp}\mathbf{S}) + (\operatorname{supp}\mathbf{T})$.

Relaţia (i) este imediată în baza definiţiilor, însă (ii) este mai puţin imediată ; nu dăm demonstraţia.

15.12. PROPOZIŢIE. *Fie* $\mathbf{S} \in \mathcal{P}\mathcal{M}(\mathbf{T})$ *şi* $\mathbf{f} \in \mathcal{A}(\mathbf{T})$; *dacă* :

$$(\operatorname{supp}\mathbf{S}) \cap (\operatorname{supp}\mathbf{f}) = \emptyset,$$

atunci :

$$<\mathbf{S}, \mathbf{f}> = <\mathbf{f}, \mathbf{S}> = 0.$$

Fie $\mathbf{S} \sim \Sigma\, c_n\mathrm{e}^{int}$, $\mathbf{f} \sim \Sigma\,\gamma_n\mathrm{e}^{int}$ şi funcţiile $\mathcal{S}_\alpha$ definite la **15.10.** Cum $|c_n\mathrm{e}^{-\alpha|n|}\bar{\gamma}_n| < M|\gamma_n|$ (unde M rezultă din condiţia $c_n = 0(1)$), rezultă că seria

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n\mathrm{e}^{-\alpha|n|}\bar{\gamma}_n$$

este uniform convergentă în raport cu α şi deci :

$$\lim_{\alpha\to 0}\sum_{-\infty}^{\infty} c_n\mathrm{e}^{-\alpha|n|}\bar{\gamma}_n = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n\bar{\gamma}_n = <\mathbf{S}, \mathbf{f}> / 2\pi. \tag{1}$$

Însă, deoarece atît $\mathcal{S}_\alpha$ cît şi $\mathbf{f}$ sînt continue, deci din $\mathcal{L}^2(\mathbf{T})$, putem aplica identitatea lui Parseval şi obţinem :

$$\int\mathcal{S}_\alpha(t)\overline{\mathbf{f}(t)}\mathrm{d}t = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n\mathrm{e}^{-\alpha|n|}\gamma_n/2\pi \tag{2}$$

aşa încît formula (1) se scrie :

$$\lim_{\alpha\to 0}\int\mathcal{S}_\alpha(t)\overline{\mathbf{f}(t)}\,\mathrm{d}t = <\mathbf{S}, \mathbf{f}> = \int\mathbf{S}\,\bar{\mathbf{f}}\,(\text{notaţie : } \mathbf{15.7}\ (5)). \tag{3}$$

Analog obţinem :

$$\lim_{\alpha\to 0}\int\mathcal{S}_\alpha(t)\,\mathbf{f}(f)\mathrm{d}t = <\mathbf{f}, \mathbf{S}> = \int\bar{\mathbf{S}}\,\mathbf{f}\ (\text{notaţie : } \mathbf{15.7}\ (6)). \tag{4}$$

Propoziția rezultă atunci din **15.10** (2). Să mai observăm că relațiile (3) și (4) ne dau o nouă justificare a notațiilor folosite.

15.13. Operația S.$\mathfrak{f}$. Fie $\mathrm{S} \in \mathcal{PM}(\mathrm{T})$ și $\mathfrak{f} \in \mathcal{A}(\mathrm{T})$. Să considerăm produsele scalare :

$$(1) \qquad < \mathrm{S}, \bar{\mathfrak{f}}\, \mathrm{e}^{imt} > = \int \mathrm{S}(\mathfrak{f}\, \mathrm{e}^{-imt}) = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \gamma_{m-n}$$

cu notațiile consacrate. Se vede ușor că :

$$(2) \qquad | < \mathrm{S}, \bar{\mathfrak{f}}\, \mathrm{e}^{imt} > | \leqslant \|\mathrm{S}\| \, \|\mathfrak{f}\|$$

Dacă notăm $d_m = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int \mathrm{S}(\mathfrak{f}\, \mathrm{e}^{-imt})$, atunci din (2) rezultă că putem defini o pseudomăsură cu acești coeficienți. Prin definiție această pseudomăsură se numește *produsul dintre funcția* $\mathfrak{f} \in \mathcal{A}(\mathrm{T})$ *și pseudomăsura* $\mathrm{S} \in \mathcal{PM}(\mathrm{T})$ *și se notează* S.$\mathfrak{f}$.

Prin urmare

$$(3) \qquad \mathrm{S}.\mathfrak{f} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} d_n \mathrm{e}^{int}\, ; \; d_n = \sum_{p+q=n} c_p \gamma_q .$$

Dacă acum $\mathrm{S} \in \mathcal{PF}(\mathrm{T})$ și $\mathfrak{f} \in \mathcal{A}(\mathrm{T})$, atunci se vede ușor că produsele scalare (1) tind la zero pentru $m \to \pm\infty$; ca urmare, prin (3) se definește o pseudofuncție. Așadar :

PROPOZIȚIE. (i) $\mathrm{S} \in \mathcal{PM}(\mathrm{T}), \quad \mathfrak{f} \in \mathcal{A}(\mathrm{T}) \Rightarrow \mathrm{S}.\mathfrak{f} \in \mathcal{PM}(\mathrm{T})$

(ii) $\mathrm{S} \in \mathcal{PF}(\mathrm{T}), \quad \mathfrak{f} \in \mathcal{A}(\mathrm{T}) \Rightarrow \mathrm{S}.\mathfrak{f} \in \mathcal{PF}(\mathrm{T})$.

Observație. Pentru $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \mathcal{A}(\mathrm{T})$, $\mathfrak{f}.\mathfrak{g} \in \mathcal{A}(\mathrm{T})$ și „." este înmulțirea punctuală.

15.14. Din propoziția **15.12** rezultă imediat următoarea :

PROPOZIȚIE. *Dacă* $\mathrm{S} \in \mathcal{PM}(\mathrm{T})$, $\mathfrak{f} \in \mathcal{A}(\mathrm{T})$, *iar*

$$(\mathrm{supp}\ \mathrm{S}) \cap (\mathrm{supp}\ \mathfrak{f}) = \emptyset,$$

atunci S.$\mathfrak{f}$ = 0.

15.15. PROPOZIȚIE. *Dacă* $\mathrm{S} \in \mathcal{PM}(\mathrm{T})$ *și* $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \mathcal{A}(\mathrm{T})$, *atunci*

$$\mathrm{S}.(\mathfrak{f}.\mathfrak{g}) = (\mathrm{S}.\mathfrak{f}).\mathfrak{g}$$

Într-adevăr, fie

$$\mathrm{S} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{int}$$

$$\mathfrak{f} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n \mathrm{e}^{int}$$

$$\mathfrak{g} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \beta_n \mathrm{e}^{int}.$$

Atunci pentru orice m avem :

$$\sum_{r+s=m} \Big(\sum_{p+q=s} c_p \alpha_q \beta_r \Big) = \sum_{p+1=m} \; \sum_{q+r+1} (c_p \alpha_q \beta_r)$$

ceea ce demonstrează propoziția.

15.16. PROPOZIŢIE. *Fie* $\mathrm{S} \in \mathcal{PM}(\mathrm{T})$ *şi* $\mathfrak{f} \in \mathcal{A}(\mathrm{T})$; *atunci*

(i) $\mathrm{S} * \mathfrak{f} \in \mathcal{A}(\mathrm{T})$;

(ii) $(\mathrm{S} * \mathfrak{f})(a) = \int \mathrm{S}(t)\mathfrak{f}(a-t)$;

(iii) $\operatorname{supp}(\mathrm{S} * \mathfrak{f}) \subset \operatorname{supp} \mathrm{S} + \operatorname{supp} \mathfrak{f}$.

Într-adevăr, conf. **15.7** (2) avem:

$$\mathrm{S} * \mathfrak{f} \sim 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \gamma_n e^{int}$$

aşa încît punctul (i) este evident.

Pentru (ii) trebuie să explicăm mai întîi notaţia din membrul drept. Pentru $\mathrm{S} \in \mathcal{PM}(\mathrm{T})$ şi $\mathfrak{f} \in \mathcal{A}(\mathrm{T})$ notăm:

$$\int \mathrm{S}\mathfrak{f} = \int \mathrm{S}(t)\mathfrak{f}(t) = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \gamma_n .$$

Este clar că:

$$\int \mathrm{S}\mathfrak{f} = \langle \mathrm{S}, \bar{\mathfrak{f}} \rangle .$$

Avînd în vedere **2.3**, relaţia (ii) este evidentă.

Punctul (iii) rezultă acum din propoziţia **15.12**, căci din (ii) rezultă că $(\mathrm{S} * \mathfrak{f})(a) = 0$ de îndată ce $\mathfrak{f}(a-t)$ se anulează în vecinătatea suportului lui S, adică de îndată ce a este exterior sumei directe dintre suportul lui S şi suportul lui $\mathfrak{f}$.

15.17. Fie $\mathrm{S} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \in \mathcal{PM}(\mathrm{T})$; putem considera că S este o „pseudomăsură periodică" pe **R**, mai precis, putem spune ce înseamnă că „S este nulă pe o mulţime Ω deschisă din **R**": înseamnă că S este nulă pe imaginea mulţimii deschise Ω prin homomorfismul *deschis* $\mathbf{R} \to \mathbf{T}$. Am introdus această convenţie pentru a ne putea exprima mai simplu în consideraţiile care urmează; vom reţine bineînţeles rezultatele corespunzătoare pentru **T**.

Să considerăm funcţia — evident continuă — definită prin:

$$\mathcal{F}(t) = c_0 \frac{t^2}{2} - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{n^2} e^{int} \qquad t \in \mathbf{R} \tag{1}$$

obţinută prin integrarea *formală*, de două ori, a seriei care defineşte pe S; bineînţeles, în sumă se omite indicele $n = 0$.

TEOREMĂ. *Pseudomăsura* S *este nulă pe un interval deschis* $\mathrm{I} \subset \mathbf{R}$ *dacă şi numai dacă* $\mathcal{F}$ *este liniară pe acel interval.*

Pentru demonstraţie să considerăm funcţiile:

$$\mathcal{F}^{+}(w) = c_0 \frac{w^2}{2} - \sum_{1}^{\infty} \frac{c_n}{n^2} e^{inw}, \qquad \operatorname{Im} w > 0 \tag{2}$$

$$\mathcal{F}^{-}(w) = + \sum_{-\infty}^{-1} \frac{c_n}{n^2} e^{inw}, \qquad \operatorname{Im} w < 0. \tag{3}$$

Se vede ușor că aceste funcții sînt analitice pe domeniile respective și continue pe închiderile lor. În particular, ele sînt continue pe dreapta reală $w = u$ și

$$\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}^{+}(u) - \mathcal{F}^{-}(u). \tag{4}$$

Este de asemenea vizibil că derivata secundă a lui $\mathcal{F}^{+}(w)$ pe $\mathrm{Im}w > 0$ este $\mathcal{S}^{+}(e^{iw})$, iar derivata secundă a lui $\mathcal{F}^{-}(w)$ pe $\mathrm{Im}w < 0$ este $\mathcal{S}^{-}(e^{iw})$.

Să presupunem că $\mathcal{F}(u)$ este liniară pe un interval deschis I, de exemplu $\mathcal{F}(u) = au + b$ (fig. 1).

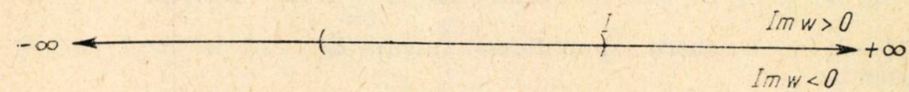


Fig. 1

Fie $\mathbf{\Omega} = (\mathrm{Im}w > 0) \cup \mathbf{I} \cup (\mathrm{Im}w < 0)$ și fie funcția următoare definită pe $\mathbf{\Omega}$:

$$\mathcal{F}(w) = \begin{cases} \mathcal{F}^{+}(w) & \text{pe } \mathrm{Im}w \geqslant 0 \\ \mathcal{F}^{-}(w) + aw + b & \text{pe } \mathrm{Im}w \leqslant 0 \end{cases}; \quad w \in \mathbf{\Omega}. \tag{5}$$

Această funcție este corect definită și este analitică cu excepția punctelor lui **I**; atunci (Cartan, [4], ch. II, §2.4) $\mathcal{F}$ este analitică în $\mathbf{\Omega}$; deci și derivata ei secundă $\mathcal{S}(w) = \mathcal{F}''(w)$ este analitică în Ω; cum însă

$$\mathcal{S}(w) = \begin{cases} \mathcal{S}^{+}(e^{iw}) & \text{pentru} \quad \mathrm{Im}w > 0 \\ \mathcal{S}^{-}(e^{iw}) & \text{pentru} \quad \mathrm{Im}w < 0 \ (\textit{aici} \text{ liniaritatea}) \end{cases} \tag{6}$$

rezultă, prin definiție, că **S** este nulă pe **I**

Reciproc, să presupunem că **S** este nulă pe **I**; atunci există o funcție $\mathcal{S}(w)$ analitică pe $\mathbf{\Omega}$ așa ca să aibă loc relațiile (6); în particular, funcțiile $\mathcal{S}^{+}$ și $\mathcal{S}^{-}$ se prelungesc prin continuitate la intervalul **I**, iar prelungirile lor sînt egale pe **I**. Fie $\mathcal{F}(w)$ a doua primitivă a lui $\mathcal{S}(w)$ în Ω. Aceasta este o funcție analitică în $\mathbf{\Omega}$. Dar $\mathcal{F}^{+}(w)$ *este* o primitivă a lui $\mathcal{S}^{+}(e^{iw})$ în $\mathrm{Im}w > 0$ iar $\mathcal{F}^{-}(w)$ *este* o primitivă a lui $\mathcal{S}^{-}(e^{iw})$ pe $\mathrm{Im}w < 0$ așa încît:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(w) &= \mathcal{F}^{+}(w) + cw + d && \text{pe} \quad \mathrm{Im}w > 0 \\ \mathcal{F}(w) &= \mathcal{F}^{-}(w) + (a+c)w + b + d && \text{pe} \quad \mathrm{Im}w < 0 \end{aligned} \tag{7}$$

cu constante corespunzătoare. Aceste relații se prelungesc prin continuitate la **I** și deci obținem:

$$\mathcal{F}(u) = au + b, \qquad u \in \mathbf{I}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

15.18. TEOREMĂ. *Fie* **S** *o pseudomăsură și* **I** *un interval deschis; pentru ca* **S** *să fie nulă pe* **I** *este necesar și suficient ca pentru orice* $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbf{T})$ *cu suportul în* **I**, *produsul* $\mathbf{S}.\varphi$ *să fie pseudomăsura nulă.*

Se impune mai întîi o precizare cu privire la enunțul teoremei; teorema trebuie înțeleasă ca avînd loc pe **T** și atunci enunțul este clar;

însă demonstraţia o vom face tot pe **R**, adică, mai precis, pe „**R** (mod 2π)" care este tot una cu **T**; aşa încît condiţia relativă la suport se poate scrie supp $\varphi \subset$ **I** (mod 2π). Dacă **S** este nulă pe **I** iar supp $\varphi \subset$ **I** (mod 2π), atunci propoziţia **15.14** ne arată că $\mathbf{S}.\varphi = 0$. q.e.d.

Reciproc, să presupunem că pentru fiecare $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbf{T})$ cu supp $\varphi \subset$ **I** (mod 2π) avem $\mathbf{S}.\varphi = 0$; atunci să considerăm nişte funcţii φ particulare pe care le notăm $\delta_{a,\,h}$ şi le definim astfel; dacă intervalul $[a-h,\ a+h]$ este inclus în **I**, atunci $\delta_{a,\,h}$ este o funcţie continuă, 2π)periodică, al cărui suport *este* $[a-h,\ a+h]$ (mod 2π), liniară pe fiecare din segmentele $[a-h,\ a]$, şi $[a,\ a+h]$ şi de valoare medie $\frac{1}{2\pi}$; de exemplu, considerînd $\mathbf{I} \subset [-\pi,\ +\pi]$ pentru simplificare, funcţia $\delta_{0,\,h}$ este în acest caz ca în figura 2,

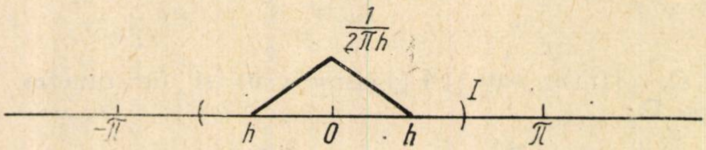


Fig. 2

adică:

$$\delta_{0,\,h}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad t \notin [-h,\ +h] \\ \dfrac{1}{2\pi h^2}(t+h) & \text{dacă} \quad t \in [-h,\ 0] \\ -\dfrac{1}{2\pi h^2}(t-h) & \text{dacă} \quad t \in [0,\ h]. \end{cases}$$

Calculînd pe $\delta_{a,\,h}$ în general şi aplicîndu-i transformarea Fourier inversă, obţinem:

$$\delta_{a,\,h} \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(nh/2)}{(nh/2)^2}\, e^{-ina}\, e^{int}$$

şi deci:

$$\int \mathbf{S}\bar{\delta}_{a,\,h} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \frac{\sin^2(nh/2)}{(nh/2)^2}\, e^{ina}$$

şi apoi un calcul elementar ne asigură că:

$$\int \mathbf{S}\bar{\delta}_{a,\,h} = \frac{1}{h^2}\,[\mathcal{F}(a+h) + \mathcal{F}(a-h) - 2\mathcal{F}(a)].$$

Din ipoteză rezultă că produsele scalare din stînga egalităţii sînt nule, deci trei puncte în progresie aritmetică din **I** au imagini prin $\mathcal{F}$ în progresie aritmetică; rezultă uşor de aici că $\mathcal{F}$ este liniară, deci — **15.17** — **S** este nulă pe **I**. q.e.d.

15.19. Observație. Din **15.18** rezultă imediat că definiția dată de noi suportului unei hiperdistribuții coincide cu cea clasică în cazul funcțiilor integrabile și al măsurilor.

15.20. Din **15.18** și din **15.15** rezultă acum următoarea :

Propoziție. *Fie* $\mathbf{S} \in \mathcal{PM}(\mathbf{T})$ *și* $\mathfrak{f} \in \mathcal{A}(\mathbf{T})$. *Pseudomăsura* $\mathbf{S}.\mathfrak{f}$ *este nulă pe orice mulțime deschisă pe care fie* $\mathbf{S}$, *fie* $\mathfrak{f}$ *este nulă.*

Într-adevăr, să presupunem că $\mathbf{S}$ este nulă pe intervalul deschis $\mathbf{I}$ și fie $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbf{T})$ suportată de $\mathbf{I}$; atunci $\mathbf{S}.\varphi = 0$, deci $(\mathbf{S}.\mathfrak{f}).\varphi = 0$; deci $\mathbf{S}.\mathfrak{f}$ este nulă pe $\mathbf{I}$. Se demonstrează la fel că dacă $\mathfrak{f}$ este nulă pe un interval deschis $\mathbf{I}$, atunci $\mathbf{S}.\mathfrak{f}$ este nulă pe $\mathbf{I}$.

15.21. Note. (1) Vom folosi cazul $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{T})$ al unei teoreme a lui N. Wiener (Loomis, [20]) :

„*Dacă* $\mathfrak{f} \in \mathcal{A}(\mathbf{T})$ *iar* $\Phi(z)$ *este o funcție analitică pe imaginea lui* $\mathfrak{f}$, *atunci* $\Phi(\mathfrak{f}) \in \mathcal{A}(\mathbf{T})$”.

Și, ca un corolar :

„*Dacă* $\mathfrak{f} \in \mathcal{A}(\mathbf{T})$ *iar* $\mathfrak{f}$ *nu se anulează, atunci* $1/\mathfrak{f} \in \mathcal{A}(\mathbf{T})$”.

(2) Vom folosi și următorul rezultat imediat :

„*Fie* $\mathbf{\Omega} \subset \mathbf{T}$ *deschis,* $\mathbf{K} \subset \mathbf{\Omega}$ *compact și* $\mathfrak{f} \in \mathcal{A}(\mathbf{T})$ *cu* $\mathfrak{f}(t) \neq 0$ *pentru* $t \in \mathbf{\Omega}$; *atunci există* $\mathbf{F} \in \mathcal{A}(\mathbf{T})$ *cu proprietățile* :

(i) $\mathbf{F}(t) \neq 0$ *pentru orice* $t \in \mathbf{T}$

(ii) $\mathbf{F}(t) = \mathfrak{f}(t)$ *pentru* $t \in \mathbf{K}$.

(3) Fie $\mathfrak{f} \in \mathcal{A}(\mathbf{T})$ și $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{T})$ și fie

$$\mathfrak{f} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{int}, \qquad \mu \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int} ;$$

atunci :

$$\mathfrak{f}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{-int}, \text{ (conf. } \mathbf{2.10})$$

și cum seria este uniform convergentă :

$$\frac{1}{2\pi}\int \mathfrak{f}(t)d\mu(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n \cdot \frac{1}{2\pi}\int e^{-int}\, d\mu(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n c_n$$

deci

$$\int \mathfrak{f}(t)\; d\mu(t) = <\mu, \bar{\mathfrak{f}}> = \int \mu\mathfrak{f}$$

ceea ce ne dă o nouă justificare a notațiilor.

15.22. Propoziție. *Dacă* $\mathfrak{f} \in \mathcal{A}(\mathbf{T})$ *și* $\mathbf{S} \in \mathcal{PM}(\mathbf{T})$ *iar* $\mathbf{S}.\mathfrak{f} = 0$, *atunci* $\mathfrak{f}$ *se anulează pe suportul lui* $\mathbf{S}$.

Vom demonstra, ceea ce revine la același lucru, că dacă $\mathfrak{f}(t) \neq 0$ pe un deschis $\mathbf{\Omega} \subset \mathbf{T}$, atunci $\mathbf{S}$ este nulă pe $\mathbf{\Omega}$. Într-adevăr, fie $\mathfrak{g} \in \mathcal{A}(\mathbf{T})$ cu $\mathbf{K} = \operatorname{supp} \mathfrak{g} \subset \mathbf{\Omega}$ și fie $\mathbf{F} \in \mathcal{A}(\mathbf{T})$ corespunzînd lui $\mathfrak{f}$ conf. **15.21** (2). Să considerăm funcția $\mathfrak{g}/\mathfrak{f}$ prelungită cu 0 în afara lui $\mathbf{\Omega}$; atunci $\mathfrak{g}/\mathfrak{f} = \mathfrak{g}/\mathbf{F}$ și conf. **15.21** (1), $\mathfrak{g}/\mathfrak{f} \in \mathcal{A}(\mathbf{T})$. Deci :

$$\mathbf{S}.\mathfrak{g} = \mathbf{S}\cdot\mathfrak{f}\cdot\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{f}} = 0$$

și conf. **15.18**, $\mathbf{S}$ este nulă pe $\mathbf{\Omega}$.

15.23. *Reciproca acestei propoziții nu este, în general, adevărată* (vezi § 21).

Un caz particular al ei este însă imediat.

PROPOZIȚIE. *Dacă* $S \in \mathcal{M}(T)$, $f \in \mathcal{A}(T)$, *iar* f *se anulează pe suportul lui* S, *atunci* $S.f = 0$.

Demonstrația rezultă imediat din **15.21** (3) și **15.13**.

15.24. Topologii slabe. După cum am văzut la **15.7** avem identificările canonice :

$$(^*) \quad \mathcal{PM}(T) \equiv [\mathcal{A}(T)]^* \quad \text{prin forma biliniară} \quad < S, f > ;$$

$$(^{**}) \quad \mathcal{A}(T) \equiv [\mathcal{PF}(T)]^* \quad \text{prin forma biliniară} \quad < f, S > ;$$

$$(^{***}) \quad \mathcal{M}(T) \equiv [\mathcal{C}(T)]^* \quad \text{prin forma biliniară} \quad \int f(t)\, d\mu(t).$$

Are sens deci definirea unor topologii slabe pe $\mathcal{PM}(T)$ și $\mathcal{M}(T)$ (pentru $\mathcal{A}(T)$ nu ne interesează deocamdată). Definirea efectivă a acestor topologii este un exercițiu trivial.

Reamintim cîteva rezultate din teoria dualității; fie X un spațiu Banach și X^* dualul său.

(1) TEOREMĂ (Alaoglu). *Orice sferă* $\|x^*\| \leqslant a$ *din* X *este slab compactă; în particular, din orice mulțime infinită mărginită în normă se poate extrage un șir convergent în topologia slabă.*

(2) TEOREMĂ. *Pentru ca un șir* $\{x_n^*\}$ *de elemente din* X *să fie slab convergent către* x^* *este necesar și suficient ca următoarele două condiții să fie satisfăcute* :

(i) *șirul* $\{\|x_n^*\|\}$ *să fie mărginit.*

(ii) *pentru orice* $x \in A$ *șirul* $\{< x_n^*, x >\}$ *să fie convergent* (aici A este o mulțime totală oarecare din X.)

(3) TEOREMĂ. *Dacă* X *este separabil iar* Y^* *este un subspațiu vectorial din* X^*, *atunci următoarele condiții sînt echivalente* :

(i) Y^* *este slab închis.*

(ii) *Orice șir slab convergent de elemente din* Y^* *are limita în* Y^*.

(iii) *Dacă* $x_0^* \notin Y$, *atunci există* $x \in X$ *așa ca* $(x_0^*, x) \neq 0$ *dar* $(x^*, x) = 0$ *pentru orice* $x^* \in Y^*$.

(4) COROLAR. *Fie* X *separabil și* $\{x_\lambda^*\}$ *o familie de elemente din* X^*; *pentru ca* x^* *din* X^* *să aparțină spațiului vectorial slab închis generat de această familie, este necesar și suficient ca* :

$$< x_\lambda^*, x > = 0 \ \textit{pentru orice} \ \lambda \Rightarrow < x^*, x > = 0.$$

În secțiunea următoare reținem rezultatele care se obțin în cazurile particulare care ne interesează.

15.25. (1) TEOREMĂ. (Helly). *Din orice mulțime infinită de măsuri (pseudomăsuri) ale căror norme sînt mărginite se poate extrage un subșir slab convergent.*

(2) TEOREMĂ. *Pentru ca un șir de măsuri (pseudomăsuri) să fie slab convergent, este necesar și suficient ca normele lor să fie mărginite și ca șirurile coeficienților Fourier să fie convergente termen cu termen.*

Într-adevăr, ca mulțime totală se ia aici mulțimea caracterelor (conf. **15.24** (2) și **3.8** (3)).

(3) TEOREMĂ. *Fie* $\mathbf{S}_\lambda$ *masa unitate concentrată în punctul* $\lambda \in \mathbf{V} \subset \mathbf{T}$. *O pseudomăsură* $\mathbf{S}$ *aparține spațiului vectorial slab închis generat de familia* $\{\mathbf{S}_\lambda\}_{\lambda \in \mathbf{V}}$ *dacă și numai dacă pentru orice funcție* $\mathbf{f} \in \mathcal{A}(\mathbf{T})$ *nulă pe* $\mathbf{V}$ *avem* $<\mathbf{S}, \mathbf{f}> = 0$.

Rezultă din **15.24**, (4).

(4) TEOREMĂ. *Fie* $\{\mathbf{S}_n\}$ *un șir de măsuri (resp. pseudomăsuri) slab convergent în* $\mathcal{M}(\mathbf{T})$ *(resp.* $\mathcal{PM}(\mathbf{T})$*). Dacă* $\mathbf{S}_n$ *sînt suportate de o aceeași mulțime închisă* $\mathbf{F} \subset \mathbf{T}$, *atunci măsura (resp. pseudomăsura) limită este suportată de* $\mathbf{F}$.

Într-adevăr, orice $\mathbf{f} \in \mathcal{C}(\mathbf{T})$ (resp. $\mathbf{f} \in \mathcal{A}(\mathbf{T})$) cu suportul disjunct de $\mathbf{F}$ este ortogonală pe $\mathbf{S}_n$, deci, la limită pe $\mathbf{S}$, ceea ce, conf. **15.18**, demonstrează teorema.

15.26. Generalizare la l.c.a. grupuri. Fie $\mathbf{G}$ un l.c.a.-grup iar Γ dualul său. În secțiunile **15.6**—**15.25** am considerat cazul particular $\mathbf{G} = \mathbf{Z}$, $\Gamma = \mathbf{T}$. În secțiunea **15.5** am văzut că $\mathcal{PM}(\Gamma) \equiv \mathcal{L}^\infty(\mathbf{G})$. În cele ce urmează vom considera următoarele două situații izomorfe :

$$(\Gamma) \qquad \mathcal{PM}(\Gamma) \equiv [\mathcal{A}(\Gamma)]^*$$

$$(\mathbf{G}) \qquad \mathcal{L}^\infty(\mathbf{G}) \equiv [\mathcal{L}^1(\mathbf{G})]^*.$$

Corespondența $\mathbf{S} \longleftrightarrow \varphi$ care realizează identificarea $\mathcal{PM}(\Gamma) \equiv \mathcal{L}^\infty(\mathbf{G})$ este dată de relația :

$$<\mathbf{S}, \mathbf{f}^\wedge> = \int_{\mathbf{G}} f(x)\varphi(-x)\mathrm{d}x, \quad \mathbf{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbf{G}).$$

În loc de $<\mathbf{S}, \mathbf{f}^\wedge>$ vom nota uneori $<\mathbf{S}, \mathbf{f}>$.

Prin această corespondență $\mathcal{M}(\Gamma)$ se identifică cu $\mathcal{B}(\mathbf{G})$ și — după cum vom vedea ulterior (§ **21**) — pseudomăsurile cu suport finit se identifică cu polinoamele trigonometrice pe $\mathbf{G}$, deci sînt măsuri.

(1) Dacă $\mathbf{S} \in \mathcal{PM}(\Gamma)$ și $\mathbf{f}^\wedge \in \mathcal{A}(\Gamma)$ vom defini o *pseudomăsură* $\mathbf{S}.\mathbf{f}^\wedge \in$ $\in \mathcal{PM}(\Gamma)$ prin relația :

$$\langle \mathbf{S}.\mathbf{f}^\wedge, \mathbf{g}^\wedge \rangle = \langle \mathbf{S}, \mathbf{f}^\wedge \mathbf{g}^\wedge \rangle \equiv \langle \mathbf{S}, \mathbf{f} \ast \mathbf{g} \rangle, \quad \mathbf{g}^\wedge \in \mathcal{A}(\Gamma).$$

Dacă $\mathbf{S} \longleftrightarrow \varphi$, *atunci* $\mathbf{S}.\mathbf{f}^\wedge \longleftrightarrow \varphi \ast \mathbf{f}$, iar următoarele afirmații se demonstrează analog cu cazul clasic anterior considerat.

(I) $\mathbf{S}.(\mathbf{f}^\wedge \mathbf{g}^\wedge) = (\mathbf{S}.\mathbf{f}^\wedge).\mathbf{g}^\wedge$ *pentru orice* $\mathbf{S} \in \mathcal{PM}(\Gamma)$, $\mathbf{f}^\wedge, \mathbf{g}^\wedge \in \mathcal{A}(\Gamma)$.

(II) $\mathbf{S} \in \mathcal{PM}(\Gamma)$ *este suportată de o mulțime închisă* $\mathbf{E} \subset \Gamma$ *dacă și numai dacă pentru orice* $\mathbf{f}^\wedge \in \mathcal{A}(\Gamma)$ *cu* supp $\mathbf{f}^\wedge \cap \mathbf{E} = \emptyset$, *rezultă că* $\mathbf{S}.\mathbf{f}^\wedge = 0$.

(III) *Dacă* $\mathbf{S} \in \mathcal{PM}(\Gamma)$, $\mathbf{f}^\wedge \in \mathcal{A}(\Gamma)$ *și* $\mathbf{S}.\mathbf{f}^\wedge = 0$, *atunci* $\mathbf{f}^\wedge$ *se anulează pe suportul lui* $\mathbf{S}$.

(2) Dacă $\mathbf{S} \in \mathcal{PM}(\Gamma)$ și $\mathbf{f}^\wedge \in \mathcal{A}(\Gamma)$ vom defini o *funcție* $\mathbf{S} \ast \mathbf{f}^\wedge \in \mathcal{A}(\Gamma)$ prin relația :

$$(\mathbf{S} \ast \mathbf{f}^\wedge)(\gamma) = \langle \mathbf{S}, (\mathbf{f}^\wedge)_\gamma \rangle, \qquad \gamma \in \Gamma.$$

Dacă $\mathbf{S} \longleftrightarrow \varphi$, *atunci* $\mathbf{S} \ast \mathbf{f}^\wedge \longleftrightarrow \varphi\mathbf{f}$ (în identificarea $\mathcal{A}(\Gamma) \equiv \mathcal{L}^1(\mathbf{G})$).

Se verifică relația :

$$\operatorname{supp}(\mathbf{S} \ast \mathbf{f}^\wedge) \subset \operatorname{supp} \mathbf{S} + \operatorname{supp} \mathbf{f}^\wedge.$$

(3) Să notăm $\mathcal{L}_0^\infty(\mathbf{G})$ subspațiul închis al lui $\mathcal{L}^\infty(\mathbf{G})$ care constă din funcțiile care „se anulează la infinit". Subspațiul corespunzător al

lui $\mathcal{PM}(\Gamma)$ va fi notat prin $\mathcal{PF}(\Gamma)$, iar elementele lui $\mathcal{PF}(\Gamma)$ vor fi numite *pseudofuncţii* pe Γ.

Se vede uşor că *dacă* $\mathrm{S} \in \mathcal{PF}(\Gamma)$ *şi* $\mathrm{f}^\wedge \in \mathcal{A}(\Gamma)$, *atunci* $\mathrm{S}.\,\mathrm{f}^\wedge \in \mathcal{PF}(\Gamma)$.

(4) *Toate rezultatele din secţiunea* **15.25** *rămîn valabile şi în cazul general considerat.*

Noţiunile introduse aici vor fi dezvoltate în §§ **20** şi **21** în legătură cu problema unicităţii şi problema sintezei spectrale, care constituie cadrul natural al acestor noţiuni.

15.27. Note bibliografice. În secţiunile **15.1**—**15.4** am extins la algebre Banach comutative semisimple şi regulate, care verifică condiţia lui Dîtkin la infinit, rezultate binecunoscute în cazul algebrelor cu unitate; vezi, de exemplu, Varopoulos [29]. Pentru noţiunea de *suport singular a unei pseudomăsuri* şi pentru aplicaţiile ei se poate consulta Edwards [6 bis]. În secţiunile următoare din acest paragraf ne-am condus după lucrarea Kahane, Salem [17], Appendices I—IV. Pentru rezultatele din secţiunea **15.24** trimitem la Dunford, Schwarz [6] sau Hille, Phillips [15]. Alte probleme în legătură cu pseudomăsurile sînt considerate în lucrările lui Beurling [1].

§ 16. MULŢIMI CANTOR

16.0. Introducere. Vom înţelege prin *mulţime perfectă* o mulţime compactă, nevidă şi fără puncte izolate. În acest paragraf trecem în revistă cîteva mulţimi perfecte clasice cu scopul de a descrie un model pentru consideraţiile generale din l.c.a.-grupuri. Un motiv în plus îl constituie faptul că anumite mulţimi de acest fel intervin într-o serie întreagă de probleme specifice analizei armonice clasice.

Va fi vorba de mulţimi perfecte simetrice, omogene, de translaţie; vom descrie aceste mulţimi şi vom studia cîteva măsuri concentrate pe ele.

Un rezultat important îl constituie caracterizarea „mulţimilor Cantor" care ne va permite, în particular, să arătăm că majoritatea mulţimilor perfecte considerate sînt homeomorfe între ele.

Începem cu o construcţie generală.

16.1. Mulţimi perfecte pe disecţie. Fie I_0 un interval închis pe dreapta reală; aceasta este „*etapa 0*". În „*etapa 1*" selectăm n_1 intervale închise şi disjuncte din I_0: fie $\mathrm{I}_{01}, \ldots, \mathrm{I}_{0n_1}$; aceste intervale le numim „*intervale albe în etapa 1*" iar complementarele lor le numim „*intervale negre în etapa 1*" (fig. 3).

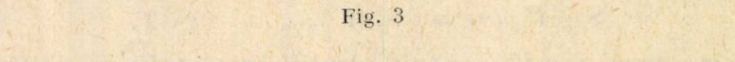


Fig. 3

Vom nota, pe scurt, familia intervalelor albe din etapa 1 prin $\{\mathrm{I}_{0j_1}\}$, $1 \leqslant j_1 \leqslant n_1$ şi vom numi „*norma etapei 1*" numărul:

$$\|\mathrm{et}\ 1\| = \|\mathrm{et}\ 1\|_0 = \max_{1 \leqslant j_1 \leqslant n_1} |\mathbf{I}_{0j_1}|^{5)}$$

---

5) prin „| |" notăm în acest paragraf măsura Lebesgue pe dreaptă (**R**) sau pe 1-tor (**T**).

În „*etapa 2*", pentru fiecare $1 \leqslant j_1 \leqslant n_1$ selectăm n_{2j_1} intervale închise și disjuncte din $\mathbf{I}_{0j_1}$: fie acestea $\{\mathbf{I}_{0j_1j_2}\}$, $1 \leqslant j_2 \leqslant n_{2j_1}$. Obținem astfel o familie de intervale închise și disjuncte din $\mathbf{I}_0$, numite „*intervale albe în etapa 2*", familie care se scrie prescurtat $\{\mathbf{I}_{0j_1j_2}\}$, $1 \leqslant j_1 \leqslant n_1$, $1 \leqslant j_2 \leqslant n_{2j_1}$; complementarele lor vor fi numite „*intervale negre ale etapei a 2-a.*"

Mai definim „*norma de rang j_1 a etapei 2*" prin

$$\|\text{et } 2\|_{j_1} = \max_{1 \leqslant j_2 \leqslant n_{2j_1}} |\mathbf{I}_{0j_1j_2}|, \quad 1 \leqslant j_1 \leqslant n_1$$

și „*norma etapei 2*" prin

$$\|\text{et } 2\| = \max_{1 \leqslant j_1 \leqslant n_1} \|\text{et } 2\|_{j_1} = \max_{j_1,\, j_2} |\mathbf{I}_{0j_1j_2}|.$$

În general, la „*etapa k*" obținem :

a) O familie de „*intervale albe în etapa k*" (închise și disjuncte) :

$$\{\mathbf{I}_{0j_1\ldots j_k}\}; \quad 1 \leqslant j_m \leqslant n_{mj_1\ldots j_{m-1}}; \quad 1 \leqslant m \leqslant k,$$

unde $n_{mj_1\ldots j_k}$ sînt numere naturale alese de noi, și

$$\mathbf{I}_{0j_1\ldots j_k} \subset \mathbf{I}_{0j_1\ldots j_{k-1}}.$$

b) O familie de „*intervale negre în etapa k*" care sînt complementarele în $\mathbf{I}_0$ ale intervalelor albe din etapa k.

c) „Norma de rang $j_1\ldots j_{k-1}$ a etapei k" :

$$\|\text{et } k\|_{j_1\ldots j_{k-1}} = \max_{1 \leqslant j_k \leqslant n_{kj_1\ldots j_{k-1}}} |\mathbf{I}_{0j_1\ldots j_k}|.$$

d) „Norma etapei k" :

$$\|\text{et } k\| = \max_{j_1,\ldots,j_{k-1}} \|\text{et } k\|_{j_1\ldots j_{k-1}} = \max_{j_1,\ldots,j_k} |\mathbf{I}_{0j_1\ldots j_k}|.$$

Vom mai nota, în etapa k,

$$\mathbf{E}_k = \bigcup_{j_1,\ldots,j_k} \mathbf{I}_{0j_1\ldots j_k}.$$

Presupunînd parcurse toate etapele ($k = 0, 1, 2, \ldots$), vom nota

$$\mathbf{E} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_k.$$

Dacă $\lim\limits_{k\to\infty} \|\text{et } k\|_{j_1\ldots j_{k-1}} = 0$ *pentru orice șir* j_k *„corect ales"*[6] *vom spune că mulțimea* $\mathbf{E}$ *este o mulțime perfectă de disecție.*

O condiție mai tare decît definiția de mai sus, echivalentă cu uniformitatea limitei în raport cu șirurile corect alese este :

$$\lim_{k\to\infty} \|\text{et } k\| = 0.$$

---

[6] adică verifică condițiile recurente de la a).

În acest caz vom spune că mulţimea **E** este o *mulţime perfectă de disecţie uniformă.*

Pentru un punct $x \in \mathbf{E}$ vom numi *interval suport de rang* k (sau interval suport în etapa k) şi vom nota prin $\mathbf{I}_k(x)$, acel interval alb din etapa k care îl conţine pe x. Astfel avem asocierea

$$x \to \{\mathbf{I}_k(x)\}_1^\infty.$$

Reciproc, dacă pentru fiecare k, $\mathbf{I}_k$ este un interval alb din etapa k astfel ca $\mathbf{I}_k \subset \mathbf{I}_{k-1}$, există şi este unic determinat un punct $x \in E$ aşa ca $\mathbf{I}_k = \mathbf{I}_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ Aceasta rezultă din condiţia de definiţie a mulţimii perfecte de disecţie care implică $\lim\limits_{k\to\infty} |\mathbf{I}_k| = 0$.

Avem următoarea

(1) TEOREMĂ. *Orice mulţime perfectă de disecţie este perfectă, fără puncte interioare şi total discontinuă.*

Fie **E** o astfel de mulţime; ea este evident compactă. Fie $x \in \mathbf{E}$ şi **V** o vecinătate a lui x; cum $\lim\limits_{k\to\infty} |\mathbf{I}_k| = 0$, rezultă că $\mathbf{I}_k(x) \subset \mathbf{V}$ pentru k suficient de mare; prin urmare x nu este nici punct izolat, nici punct interior. Fie acum $x, y \in \mathbf{E}$ şi $x \neq y$; pentru k suficient de mare, rezultă atunci $\mathbf{I}_k(x) \cap \mathbf{I}_k(y) = \emptyset$, deci E este total discontinuă. q.e.d.

Mulţimile perfecte pe care le considerăm în cele ce urmează vor fi toate mulţimi perfecte de disecţie uniformă.

16.2. Mulţimi perfecte simetrice. Fie AB un segment de dreaptă de lungime l şi $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Considerăm o trisecţiune a segmentului AB în părţi respectiv egale cu $l\xi$, $l(1-2\xi)$, $l\xi$. Ştergem intervalul central deschis de lungime $l(1-2\xi)$ — „*interval negru*" — lăsînd neatinse cele două intervale extreme închise de lungime comună $l\xi$ — „intervale albe". O astfel de operaţie va fi numită „disecţiune de tip $(2, \xi)$" asupra intervalului AB.

Să considerăm acum un interval fundamental $[a, b]$ de lungime $l = b - a$. Operăm o disecţiune de tip $(2, \xi_1)$ asupra lui, apoi o disecţiune de tip $(2, \xi_2)$ asupra intervalelor albe rămase, ş.a.m.d., şirul $\{\xi_k\}$ fiind astfel ales încît pentru orice k să avem $0 < \xi_k < \frac{1}{2}$. La etape de indice k vom obţine o mulţime $\mathbf{E}_k$ de 2^k intervale albe de lungime comună $(b-a) \times \xi_1 \ldots \xi_k = l\,\xi_1 \ldots \xi_k$.

Să notăm $\mathbf{E} = \bigcap\limits_1^\infty \mathbf{E}_k$. Avem:

(1) LEMĂ. (i) **E** *este o mulţime perfectă fără puncte interioare*;

(ii) $|\mathbf{E}| = \lim\limits_{k\to\infty} (2^k \xi_1 \ldots \xi_k)\, l$;

(iii) *cele* 2^k *origini ale intervalelor albe care constituie pe* $\mathbf{E}_k$ *sînt date de formula*

$$a + l\,[\varepsilon_1(1-\xi_1) + \varepsilon_2\,\xi_1(1-\xi_2) + \ldots + \varepsilon_k\xi_1 \ldots \xi_{k-1}(1-\xi_k)],$$

unde ε_j *iau valorile* 0 *sau* 1;

(iv) *punctele lui* **E** *sînt date de seria* :

$$x = a + l\,[\varepsilon_1(1-\xi_1) + \varepsilon_2\,\xi_1(1-\xi_2) + \dots + \varepsilon_k\,\xi_1\dots\xi_{k-1}(1-\xi_k) + \dots],$$

unde ε_j *iau valorile* 0 *sau* 1.

Punctele (i) și (ii) sînt evidente, iar punctul (iii) rezultă dintr-un calcul simplu prin inducție completă.

Reținem din (iii) că un punct al lui $\mathbf{E}_k$ se scrie sub forma

(*) $x = a + l\,[\varepsilon_1(1-\xi_1) + \dots + \varepsilon_k\,\xi_1\dots\xi_{k-1}(1-\xi_k)] + \lambda_k\,l\,\xi_1\dots\xi_k,$

unde $\lambda_k \in [0, 1]$. Fie atunci $x \in \mathbf{E}$; atunci $x \in \mathbf{E}_k$ pentru orice k, în particular :

(**) $x = a + \lambda_0 l$ cu $\lambda_0 \in [0, 1]$.

Din relația (*) scrisă pentru k și $k+1$ rezultă următoarea relație de recurență (se ține seamă că $\mathbf{I}_{k+1}(x) \subset \mathbf{I}_k(x)$) :

(***) $\lambda_k - \lambda_{k+1}\,\xi_{k+1} = \varepsilon_{k+1}(1-\xi_{k+1}),\ k = 0, 1, 2, \dots$

Din relațiile (***) scrise pentru $k = 0, 1, \dots, n$ deducem :

$$\lambda_0 = \sum_{0}^{n} \varepsilon_{k+1}\,\xi_1\dots\xi_k(1-\xi_{k+1}) + \lambda_{n+1}\,\xi_1\dots\xi_{n+1}$$

de unde, prin trecere la limită, obținem (iv).

Observație. Uneori se notează

$$\xi_1\dots\xi_{k-1}(1-\xi_k) = r_k$$

și atunci condiția $0 < \xi_k < \frac{1}{2}$ este echivalentă cu :

$$r_k > r_{k+1} + r_{k+2} + \dots > 0$$

iar

$$\sum_{1}^{\infty} r_k = 1.$$

16.3. Funcția lui Lebesgue asociată. Mulțimii perfecte și simetrice **E** pe care am definit-o i se asociază *funcția lui Lebesgue*, construită în felul următor :

Fie $L_k(x)$ funcția continuă nulă pentru $x \leqslant a$ și egală cu 1 pentru $x \geqslant b$, liniar crescătoare pe fiecare interval alb al lui $\mathbf{E}_k$ și constantă pe fiecare interval negru contiguu lui $\mathbf{E}_k$.

(1) LEMĂ. *Funcțiile* $L_k(x)$ *tind uniform pentru* $k \to \infty$ *către o funcție* $L(x)$ *cu următoarele proprietăți* :

(i) $L(a) = 0,\ L(b) = 1.$

(ii) *L constantă pe fiecare interval negru continuu lui E*

(iii) *L continuă*

(iv) *L crescătoare.*

Deoarece $\|L_k - L_{k-1}\|_\infty < \frac{1}{2^k}$, rezultă imediat că $\{L_k\}$ este un șir uniform Cauchy, deci uniform convergent către o funcție L. Celelalte afirmații rezultă acum imediat.

(2) LEMĂ. *Pentru* $x \in \mathbf{E}$ *de forma* **16.2** (1) (iv) *avem* :

$$L(x) = \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon_k}{2^k} + \cdots$$

Se demonstrează mai întîi, prin recurenţă, că pentru o origine a unui interval alb din $\mathbf{E}_k$ dată de **16.2** (1) (iii), fie ea x_k avem :

$$L(x_k) = L_j(x_k) = \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon_k}{2^k},\ j \geqslant k.$$

Fie apoi $x \in \mathbf{E}$ de forma considerată şi fie x_k originea lui $\mathbf{I}_k(x)$; atunci scrierea lui x_k şi scrierea lui x diferă numai prin ε_j, $j > k$ (şi anume pentru $j > k$ toţi $\varepsilon_j(x_k) = 0$), cu alte cuvinte, scrierile lor sub formele de la **16.2** (1) sînt corecte cu aceiaşi ε_k. Datorită liniarităţii lui L_k pe $\mathbf{I}_k(x)$ rezultă uşor că

$$L_k(x) = \frac{\varepsilon_1}{2} + \cdots + \frac{\varepsilon_k}{2^k} + \frac{\lambda_k}{2^k}$$

de unde, trecînd la limită şi ţinînd cont că $|\lambda_k| \leqslant 1$, rezultă tocmai ce trebuia demonstrat.

(3) DEFINIŢIE. Măsura definită de această funcţie crescătoare (deci cu variaţie finită) se vor numi *L-măsura*. Deoarece *funcţia lui Lebesgue* $L(x)$ are proprietăţile din (1), rezultă că (conf. [5] § 14) L-măsura este o măsură pozitivă, continuă şi cu norma egală cu 1 (variaţia totală a lui $L = L(b) - L(a) = 1$).

Această măsură poate fi considerată ca făcînd parte din $\mathcal{M}(\mathbf{R})$, dar, presupunînd (pentru comoditate) $[a, b] \subset [0, 2\pi]$, poate fi considerată din $\mathcal{M}(\mathbf{T})$. În ambele cazuri ea este concentrată pe $\mathbf{E}$ (căci funcţia lui Lebesgue este constantă pe intervalele negre contigue lui $\mathbf{E}$, deci are variaţia nulă pe acele intervale) ; prin urmare, dacă $|\mathbf{E}| = 0$, atunci L-măsura este o măsură singulară în raport cu măsura Lebesgue (Haar). Însă, după cum vom vedea mai jos, considerînd L-măsura din $\mathcal{M}(\mathbf{T})$, coeficienţii ei Fourier nu tind la zero în mod necesar.

16.4. Transformarea Fourier a L-măsurii. Vom nota L-măsura încă prin L şi transformarea ei Fourier-Stieltjes prin $L^\wedge$, ca de obicei.

(1) LEMĂ. *Fie* $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ *şi fie*

$$S_k(f) = \frac{1}{2^k} \sum_k f(x_k),$$

unde x_k *sînt originile intervalelor albe din* $\mathbf{E}_k$. *Atunci*

$$\lim_{k \to \infty} S_k(f) = \int f \, \mathrm{d}L.$$

Deoarece funcţiile L_k au variaţia egal mărginită (constantă : egală cu 1), rezultă că pentru $\varepsilon > 0$ dat există un rang de la care încolo

$$(*) \qquad \left| \int f \mathrm{d}L_k - \int f \mathrm{d}L \right| < \varepsilon/2.$$

Deoarece $S_k(f)$ este o sumă Riemann-Stieltjes pentru $\int f\mathrm{d}L_k$ şi deoarece măsura intervalelor albe din $\mathbf{E}_k$ tinde către zero, teorema de medie şi uniform continuitatea lui f ne arată că există un rang de la care încolo :

$$(^{**}) \qquad \left| S_k(f) - \int f\mathrm{d}L_k \right| < \varepsilon/2.$$

Lema rezultă din (*) şi (**).

(2) LEMĂ. *Avem* $L^\wedge(y) = \mathrm{e}^{iy\frac{a+b}{2}} \prod_{j=1}^{\infty} \cos y\frac{l}{2} r_j$, $(L \in \mathcal{M}(\mathbf{R}))$.

Să luăm $f(x) = \mathrm{e}^{iyx}$ cu $y \in \mathbf{R}$ fixat. Atunci, conf. lemei (1) rezultă :

$$L^\wedge(y) = \lim_{k\to\infty} S_k(f).$$

Calculele care urmează sînt evidente :

$$S_k(f) = \frac{1}{2^k}\sum \mathrm{e}^{iy(a+l(\varepsilon_1 r_1 + \ldots + \varepsilon_k r_k))} = \mathrm{e}^{iya}\prod_{j=1}^{k}\frac{1+\mathrm{e}^{iylr_j}}{2} =$$

$$= \mathrm{e}^{iy\left(a+\frac{l}{2}\sum_1^k r_j\right)} \prod_{j=1}^{k} \cos y\frac{l}{2} r_j$$

de unde :

$$L^\wedge(y) = \mathrm{e}^{ixy\frac{a+b}{2}} \prod_{1}^{\infty} \cos y\frac{l}{2} r_j, \qquad \text{q.e.d.}$$

În particular, dacă $a = -d$, $b = d$, atunci

$$L^\wedge(y) = \prod_{1}^{\infty} \cos y\,\mathrm{d}r_j.$$

Iar, dacă $a = -d$, $b = d$ şi $d \leqslant \pi$, atunci :

(3) LEMĂ. $2\pi\, c_n = 2\pi L^\wedge(n) = \prod_{j=1}^{\infty} \cos n r_j\, d.$

16.5. Mulţimi perfecte simetrice de raport constant ξ. Se numesc astfel acele mulţimi perfecte simetrice $\mathbf{E}$ în a căror construcţie $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = \ldots = \xi$. În acest caz :

$$r_k = \xi^{k-1}(1-\xi), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

şi prin urmare :

$$x \in E \Leftrightarrow x = a + l(1-\xi)\,(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_k\,\xi^{k-1} + \ldots)$$

iar pentru $-a = b = d$:

$$L^{\wedge}(y) = \prod_{1}^{\infty} \cos\,[yd(1-\xi)\xi^{j-1}]$$

$$2\pi c_n = \prod_{j=1}^{\infty} \cos\,[nd(1-\xi)\xi^{j-1}], \qquad d \leqslant \pi.$$

Mulţimea triadică a lui Cantor corespunde cazului $\xi = \frac{1}{3}$, $-a = = b = \pi$; în acest caz avem:

$$2\pi c_n = \prod_{j=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi_n}{3^j}.$$

Prin urmare, luînd pentru n puterile succesive ale lui 3, rezultă că coeficienţii Fourier-Stieltjes ai mărimii L nu tind către zero.

Am obţinut astfel:

1°) o mulţime perfectă simetrică de raport constant $\frac{1}{3}$ (mulţimea triadică a lui Cantor) — **E**

2°) o măsură L concentrată pe **E** cu proprietăţile următoare:

(i) $L \in \mathcal{M}(\mathbf{T})$, $\|L\| = 1$;
(ii) L pozitivă;
(iii) L continuă;
(iv) L singulară în raport cu măsura Haar ($m(\mathbf{E}) = 0$);
(v) $L^{\wedge}(n) \nrightarrow 0$.

Este momentul să ne reamintim (conf. **5.10**) că, **G** fiind un l.c.a.-grup oarecare iar $\mathbf{\Gamma}$ dualul lui, $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{G})$ şi $\mu^{\wedge} \in \mathcal{C}_0(\mathbf{\Gamma}) \Rightarrow \mu \in \mathcal{M}_c(\mathbf{G})$; cu alte cuvinte, dacă notăm:

$$\mathcal{M}_0(\mathbf{G}) = \{\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{G}); \quad \mu^{\wedge} \in \mathcal{C}_0(\mathbf{\Gamma})\}.$$

a rezultat $\mathcal{M}_0(\mathbf{G}) \subset \mathcal{M}_c(\mathbf{G})$.

Ceea ce am obţinut mai sus ne arată că *nu întotdeauna* $\mathcal{M}_0(\mathbf{G}) = \mathcal{M}_c(\mathbf{G})$.

16.6 OBSERVAŢIE. *Orice mulţime* $\mathbf{E} \subset (0, 2\pi)$ *de puncte date prin formula*:

$$x = 2\pi(\varepsilon_1 r_1 + \ldots + \varepsilon_k r_k + \ldots),$$

unde $r_k \geqslant 0$, $\sum_{1}^{\infty} r_k = 1$ *şi* $\varepsilon_k = 0$ *sau* 1 *este o mulţime închisă care poartă o măsură* $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R})$, *a cărei transformată Fourier-Stieltjes este*:

$$(*) \qquad \mu^{\wedge}(y) = \prod_{1}^{\infty} \frac{1 + e^{2\pi i r_k y}}{2} = e^{\pi i y} \prod_{1}^{\infty} \cos \pi y r_k.$$

Este suficient să observăm că mulţimii finite de 2^k puncte

$$x = 2\pi(\varepsilon_1 r_1 + \ldots + \varepsilon_k r_k)$$

i se poate asocia o măsură punctuală μ_k cu masa $\frac{1}{2^k}$ în fiecare punct şi că — conf. teoremei lui Helly — din şirul de măsuri $\{\mu_k\}$ se poate extrage un şir slab convergent către o măsură μ; atunci μ este concentrată pe $\mathbf{E}$ (**15.20** (4)) şi se verifică uşor (*).

16.7. Mulţimi Cantor. Fie $\mathbf{X}$ un spaţiu topologic. O mulţime $\mathbf{E} \subset \mathbf{X}$ se numeşte *mulţime Cantor* dacă $\mathbf{E}$ este homeomorfă cu mulţimea triadică a lui Cantor.

Rezultatul principal în legătură cu mulţimile Cantor îl constituie următoarea:

16.8. TEOREMĂ. *O mulţime* $\mathbf{E}$ *dintr-un spaţiu topologic* $\mathbf{X}$ *este o mulţime Cantor dacă şi numai dacă este metrizabilă, perfectă şi total discontinuă.*

Partea „numai dacă" este evidentă.

Partea „dacă" se demonstrează mai dificil, ea rezultînd din cele de mai jos. Fie $\mathbf{K}$ mulţimea lui Cantor.

16.9. (1) LEMĂ. *Fie* $\mathbf{E}$ *un spaţiu topologic separat. Presupunem că fiecărui şir finit* s *cu termenii egali cu* 0 *sau* 1 *i s-a asociat o parte nevidă* $\mathbf{A}(s) \subset \mathbf{E}$. *Considerăm următoarele condiţii*:

(i) *Dacă* s *este un şir de* n *termeni* (*egali cu* 0 *sau* 1) *iar* s' *şi* s'' *sînt şirurile de* $n+1$ *termeni* (*egali cu* 0 *sau* 1) *ai căror primi* n *termeni sînt egali cu cei ai lui* s, *atunci* $\mathbf{A}(s) = \mathbf{A}(s') \cup \mathbf{A}(s'')$; *în plus, dacă* s_0 *este şirul vid, atunci* $\mathbf{A}(s_0) = \mathbf{E}$.

(ii) *Pentru orice şir infinit* $(u_n)_{n \geqslant 0}$ *cu termenii egali cu* 0 *sau* 1, *dacă notăm prin* s_n *şirul finit* $(u_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$, *baza de filtru formată de* $\{\mathbf{A}(s_n)\}_n$ *converge către un punct din* $\mathbf{E}$.

(iii) *Dacă* s_1 *şi* s_2 *sînt două şiruri distincte avînd acelaşi număr de termeni* (*egali cu* 0 *sau* 1), *atunci* $\overline{\mathbf{A}(s_1)} \cap \overline{\mathbf{A}(s_2)} = \emptyset$.

Atunci:

a) *În condiţiile* (i) *şi* (ii) *există o aplicaţie surjectivă şi continuă a mulţimii lui Cantor* $\mathbf{K}$ *în* $\mathbf{E}$.

b) *În condiţiile* (i), (ii) *şi* (iii) *spaţiul topologic* $\mathbf{E}$ *este homeomorf cu mulţimea lui Cantor.*

Să demonstrăm *primul punct al lemei*. Fie $t \in \mathbf{K}$ şi să presupunem mulţimea lui Cantor construită pe $[0, 1]$. Atunci, conf. **16.2** (1) (iv):

$$t = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{3^k}, \text{ unde } \varepsilon_k = 0{,}1;$$

să considerăm şirul $\{s_n\}$, unde $s_n = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. Atunci, conf. condiţiei (ii), baza de filtru $\{\mathbf{A}(s_n)\}_n$ converge către o limită *unică* $x \in \mathbf{E}$.

Definim $f : \mathbf{K} \to \mathbf{E}$ prin $f(t) = x$.

Să arătăm că f este *surjectivă*; pentru aceasta fie $x \in \mathbf{E}$; atunci conf. (i), $x \in \mathbf{A}(s_0)$ şi să presupunem că am găsit un şir s_n cu n termeni (egali cu 0 sau 1) astfel încît $x \in \mathbf{A}(s_n)$; cum, conf. (i), $\mathbf{A}(s_n) = \mathbf{A}(s_n') \cup \mathbf{A}(s_n'')$, rezultă $x \in \mathbf{A}(s_n')$ sau $x \in \mathbf{A}(s_n'')$ şi notăm cu s_{n+1} pe acela dintre s_n' şi s_n'' pentru care apartenenţa are loc (dacă aceasta este adevărată pentru amîndouă alegem unul dintre ele, indiferent care). În felul acesta am demonstrat prin inducție că există un șir $(\varepsilon_k)_1^\infty$ cu $\varepsilon_k = 0$ sau 1 așa ca $x \in \mathbf{A}(\mathfrak{s}_n)$ pentru orice n (notații evidente!). Este atunci evident că $\mathbf{A}(\mathfrak{s}_n) \to x$ (știm că $\mathbf{A}(\mathfrak{s}_n)$ „tinde" — conf. (ii); esențialul este că tinde către x). Prin urmare, dacă $t = 2 \sum\limits_1^\infty \frac{\varepsilon_k}{3^k}$, rezultă $f(t) = x$, q.e.d.

Să arătăm acum că f este *continuă*; pentru aceasta fie $x \in \mathbf{E}$, fie $\mathbf{V}$ o vecinătate a lui x și fie t, $\{\varepsilon_k\}$, $\{\mathfrak{s}_n\}$ obținute din surjectivitate. Deoarece $\mathbf{A}(\mathfrak{s}_n) \to x$, rezultă că pentru $n \geqslant n_0$ avem : $\mathbf{A}(\mathfrak{s}_n) \subset \mathbf{V}$; fie atunci $\delta < \frac{1}{3^{n_0}}$ și fie $|t-t'| < \delta$. Rezultă că — $\{\varepsilon'_k\}$, $\{\mathfrak{s}'_n\}$ fiind asociați lui t' — $\mathfrak{s}_{n_0} = \mathfrak{s}'_{n_0}$, deci, pentru $n \geqslant n_0$, $\mathbf{A}(\mathfrak{s}'_n) \subset \mathbf{A}(\mathfrak{s}_{n_0}) \subset V$ (am folosit condiția (i)). Prin urmare $f(t') \in \mathbf{V}$. q.e.d.

Pentru *al doilea punct al lemei* este suficient să demonstrăm că f este *injectivă*; într-adevăr, atunci aserțiunea rezultă dintr-un binecunoscut rezultat de topologie : o bijecție continuă a unui spațiu compact într-unul separat este un homeomorfism. Pentru a arăta că f este injectivă, fie $t, t' \in \mathbf{K}$, $t \neq t'$ și fie $\{\varepsilon_k\}$, $\{\varepsilon'_k\}$ și $\{\mathfrak{s}_n\}$, $\{\mathfrak{s}'_n\}$ asociate lor ; deoarece $t \neq t'$, există k_0 așa ca $\varepsilon_{k_0} \neq \varepsilon'_{k_0}$, deci există n_0 așa ca pentru orice $n \geqslant n_0$ să avem $\mathfrak{s}_n \neq \mathfrak{s}'_n$; reținem de aici — conf. (iii) — că $\overline{\mathbf{A}(\mathfrak{s}_n)} \cap \overline{\mathbf{A}(\mathfrak{s}'_n)} = \emptyset$ pentru orice $n \geqslant n_0$. Cum $f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{A}(\mathfrak{s}_n)$ și $f(t') = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{A}(\mathfrak{s}'_n)$, rezultă $f(t') \neq f(t)$, q.e.d.

(2) COROLAR. (i) *Dacă* **E** *este o mulțime compactă liniară, atunci există o surjecție continuă* $f : \mathbf{K} \to \mathbf{E}$.

(ii) *Dacă* **E** *este o mulțime liniară perfectă și total discontinuă, atunci* **E** *este homeomorfă cu mulțimea triadică a lui Cantor.*

(i) Deoarece **E** este compactă, rezultă $\mathbf{E} \subset \mathbf{I}$, unde **I** este un segment liniar ; mulțimile $\mathbf{A}(\mathfrak{s})$ se pot alege atunci ca intersecțiile lui **E** cu intervalele obținute prin „dihotomia" lui **I** (fig. 4).

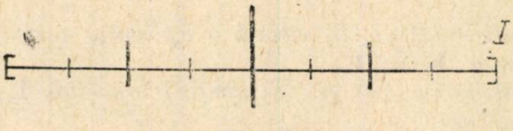


Fig. 4

(ii) Se procedează la fel, numai că primul punct nu se mai ia la mijloc, ci în vecinătatea $(\varepsilon/2)$ a mijlocului, așa încît să nu se suprapună peste un punct al mulțimii **E**, iar punctele din etapa a doua nu se iau la mijlocul segmentelor obținute, ci în vecinătatea $(\varepsilon/4)$ mijlocului, așa încît să nu se suprapună peste puncte din **E**, ș.a.m.d. Construcția este posibilă deoarece **E** este total discontinuă — și ne asigură că lungimile intervalelor succesiv definite tind la zero.

(3) COROLAR. *Orice mulțime perfectă de disecție* (**16.1**) *este homeomorfă cu mulțimea triadică a lui Cantor* (conf. **16.1** (1)).

16.10. PROPOZIȚIE. *Orice spațiu metric perfect și total discontinuu* **E** *este homeomorf cu o mulțime perfectă de disecție.*

Să observăm mai întîi că o dată cu această propoziție este adevărată și teorema **16.8** (conf. **16.9.** (3)).

Începem demonstrația cu cîteva *pregătiri*.

Se numește *lanț* într-un spațiu metric **E** o colecție finită $l=\{x_1,\ldots,x_n\}$ de elemente din **E**; nu ne interesează numărul lor. Se definește $\rho(l) = \max\limits_i d(x_i, x_{i+1})$=norma lanțului, unde d este *metrica* lui **E**, iar pentru orice două puncte $x, y \in \mathbf{E}$ se definește *distanța* :

$$\overline{xy} = \inf\ (\rho(l)\,; \quad l \text{ lanț},\ x_1 = x,\ x_n = y).$$

(1) Lemă. (i) $\overline{xz} \leqslant \max\ (\overline{xy}, \overline{yz})$ pentru orice $x, y, z \in \mathbf{E}$.

(ii) $\overline{xy} \leqslant d(x, y)$ pentru orice $x, y \in \mathbf{E}$.

(iii) dacă $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}$ este compact, atunci **A** este conex $\Leftrightarrow$ pentru orice $x, y \in \mathbf{A}$ avem $\overline{xy} = 0$.

Punctele (i) și (ii) sînt evidente. Pentru (iii) să observăm că oricare ar fi $p \in \mathbf{E}$, mulțimea $\{x\,;\ \overline{px} < \rho\}$ este deschisă și închisă; ea este trivial deschisă și dacă $x_n \to x$ iar $\rho > \overline{px_n}$, atunci $\overline{px} \leqslant \max\,(\overline{px_n}, \overline{x_n x}) \leqslant \max\,(\rho', d(x_n, x)) < \rho$ pentru n suficient de mare; am notat prin ρ' un număr astfel încît $\overline{px_n} < \rho' < \rho$. Demonstrăm acum implicația „$\Rightarrow$"; în caz contrar există $x, y \in \mathbf{E}$ cu $\overline{xy} = \rho > 0$; contradicția ne-o dau mulțimile

$$\mathbf{A}_1 = \{z\,;\ \overline{xz} < \rho\} \ni x\,; \qquad \mathbf{A}_2 = \{z \mid \overline{xz} \geqslant \rho\} \ni y.$$

În sfîrșit, să demonstrăm implicația „$\Leftarrow$"; în caz contrar am avea :

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2$ cu $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ compacte, disjuncte și nevide ; atunci $d(x,y) > d > 0$ pentru orice $x \in \mathbf{A}_1$, $y \in \mathbf{A}_2$ ceea ce, după cum se vede ușor, contrazice relația din ipoteză.

Urmează acum, pe etape, demonstrația propoziției.

(I) Fie $\rho > 0$; deoarece **E** este compact rezultă, ținînd cont de (1) (ii), că există o familie $\{x_1,\ldots, x_n\}$ finită și maximală cu proprietatea $\overline{x_i x_j} > \rho$ $(i \neq j)$; atunci, pentru orice $x \in \mathbf{E}$, există un x_i așa încît să avem $\overline{xx_i} \leqslant \rho$; în plus acest x_i este unic cu această proprietate, după cum rezultă ușor din (1) (i). Să notăm :

$$\mathbf{A}_i = \{x\,;\ x \in \mathbf{E},\ \overline{xx_i} \leqslant \rho\}.$$

Atunci :

1°) $\mathbf{A}_i$ sînt disjuncte două cîte două.

2°) $\mathbf{E} = \bigcup\limits_1^n \mathbf{A}_i$.

3°) $\mathbf{A}_i$ sînt deschise și compacte.

4°) diam dist $\mathbf{A}_i \leqslant \rho$, notația fiind evidentă.

(II) Afirmăm că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ așa încît dacă $\overline{xy} < \delta$, să avem $d(x, y) < \varepsilon$; în cazul contrar găsim două șiruri $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ cu proprietățile :

a) $x_n \to x$, $\quad y_n \to y$.

b) $\overline{x_n y_n} \to 0$.

c) $d(x_n, y_n) \geqslant \varepsilon$, pentru un anume ε.

Trecînd b) la limită, obținem $\overline{xy} = 0$, ceea ce, din faptul că **E** este total discontinuu și din (1) (iii), implică $x = y$; dar, trecînd și c) la limită, obținem $d(x, y) \geqslant \varepsilon$, absurd.

(III) Din (I) şi (II) deducem:

$$\mathbf{E} = \bigcup_{1 \leqslant j_1 \leqslant n_1} \mathbf{A}_{j_1},$$

unde:

(i) $\mathbf{A}_{j_1}$ sînt deschise şi compacte $j_1 = 1, \dots, n_1$;

(ii) $\mathbf{A}_{j_1}$ sînt disjuncte două cîte două, $j_1 = 1, \dots, n_1$;

(iii) diam $(\mathbf{A}_{j_1}) < \frac{1}{2}$, $j_1 = 1, \dots, n_1$.

(IV) Considerarea lui **E** constituie „etapa 0". Construcţia obţinută la (III) constituie „etapa 1". Continuînd acest procedeu de „disecţie", la „etapa k" obţinem pentru fiecare colecţie de $k-1$ indici $(j_1, \dots, j_{k-1})$, cu $k \leqslant j_m \leqslant n_{mj_1, \dots, j_{m-1}}$, $1 \leqslant m \leqslant k-1$, o descompunere de forma:

$$\mathbf{A}_{j_1 \dots j_{k-1}} = \bigcup_{1 \leqslant j_k \leqslant n_{kj_1 \dots j_{k-1}}} \mathbf{A}_{j_1 \dots j_k},$$

unde

(i) $\mathbf{A}_{j_1 \dots j_k}$ sînt deschise şi compacte, $1 \leqslant j_k \leqslant n_{kj_1 \dots j_{k-1}}$,

(ii) $\mathbf{A}_{j_1 \dots j_k}$ sînt disjuncte două cîte două, $1 \leqslant j_k \leqslant n_{kj_1 \dots j_{k-1}}$,

(iii) diam $(\mathbf{A}_{j_1 \dots j_k}) < \frac{1}{2^k}$, $1 \leqslant j_k \leqslant n_{kj_1 \dots j_{k-1}}$.

Pentru $x \in \mathbf{E}$ să notăm cu $\mathbf{A}_k(x)$ „mulţimea suport de rang k a lui x". Este evident atunci că $\{\mathbf{A}_k(x)\}_k$ formează un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui x.

Reciproc, fie $\mathbf{A}_k$ un sistem de mulţimi cu proprietăţile: $\mathbf{A}_k$ a fost obţinută prin disecţie la etapa k şi $\mathbf{A}_k \subset \mathbf{A}_{k-1}$ (pentru orice $k \in \mathbf{N}$); atunci există şi este unic determinat un punct $x \in \mathbf{E}$ aşa ca pentru orice k să avem $\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_k(x)$. (Teorema lui Cantor în spaţii metrice).

(V) Cu numerele $n_{kj_1 \dots j_{k-1}}$ succesiv obţinute prin construcţia de mai sus, construim o mulţime perfectă de disecţie pe un segment liniar $\mathbf{I}_0$; notăm această mulţime cu $\mathbf{E}_0$; se impune de la sine bijecţia

$$(*) \qquad \mathbf{I}_{0\, j_1 \dots j_k} \longleftrightarrow \mathbf{A}_{j_1 \dots j_k}$$

şi este evident că pentru un punct $t \in \mathbf{E}_0$, familia $\{\mathbf{I}_k(t) \cap \mathbf{E}_0\}$ formează un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui t (în $\mathbf{E}_0$).

(VI) Ţinînd cont de bijecţia (*) şi de consideraţiile anterioare, se defineşte o bijecţie:

$$\mathbf{E}_0 \longleftrightarrow \mathbf{E}$$

prin

$$t \in \mathbf{E}_0 \longleftrightarrow \{\mathbf{I}_k(t)\} = \{\mathbf{I}_k\} \longleftrightarrow \{\mathbf{A}_k\} = \{\mathbf{A}_k(x)\} \longleftrightarrow x \in \mathbf{E}$$

şi este evident — datorită consideraţiilor topologice de mai sus — că această bijecţie este un homeomorfism.

Propoziţia este complet demonstrată.

16.10 bis. COROLAR. *Grupul* $\mathbf{D}_q$ *este o mulțime Cantor.*

Conform **16.8** avem de arătat că $\mathbf{D}_q$ are o topologie metrizabilă, că este perfect și total discontinuu. Pentru definiția lui $\mathbf{D}_q$ vezi **9.17**. Cum fiecare $\mathbf{Z}_q$ este metrizabil cu metrica trivială ($d(i, j) = \delta_{ij}$), rezultă că $\mathbf{D}_q$ este metrizabil. Evident, $\mathbf{D}_q$ este compact și nevid și nu are puncte izolate (adică $\mathbf{D}_q$ nu este discret = finit). În sfîrșit, fiecare $\mathbf{Z}_q$ este discret, deci total discontinuu și cum fiecare produs numărabil de spații total discontinue este total discontinuu, rezultă că $\mathbf{D}_q$ este total discontinuu, q.e.d.

16.11. Mulțimi perfecte omogene. Să considerăm mai întîi, pentru simplificare, segmentul $[0, l]$. Fie n un număr întreg $\geqslant 2$, fie $\eta_1, \ldots, \eta_n$ numere distincte așa ca

$$0 \leqslant \eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_n < 1.$$

și fie ξ un număr real care satisface relațiile

$$(^*) \qquad \xi > 0\,; \quad \xi < \eta_2 - \eta_1, \ldots, \quad \xi < \eta_n - \eta_{n-1}, \quad \xi \leqslant 1 - \eta_n.$$

Observăm că din (*) rezultă:

$$(^{**}) \qquad n\xi < 1 - \eta_1 \leqslant 1.$$

Considerăm cele n intervale „albe” disjuncte $[l\eta_j, l\eta_j + l\xi]$, $j = 1, \ldots, n$ și „ștergem” intervalele „negre” complementare în raport cu $[0, l]$. Atunci vom spune că am făcut asupra lui 0 o *disecție de tip* $(n\,; \eta_1, \ldots, \eta_n\,; \xi)$ sau, pe scurt, de tip (n, ξ).

Să considerăm acum un interval oarecare $[a, b]$ de lungime $l = b - a$. Efectuăm o disecție de tip $(n\,; \eta_1, \ldots, \eta_n\,; \xi)$ asupra lui $[a, b]$; apoi, pe fiecare interval alb obținut, cîte o disecție de același tip, ș.a.m.d. La etapa de ordin k obținem o mulțime $\mathbf{E}_k$ formată din n^k intervale albe disjuncte de lungime comună $l\xi^k$.

Să notăm

$$\mathbf{E} = \bigcup_1^\infty \mathbf{E}_k.$$

(1) LEMĂ. (i) $\mathbf{E}$ *este o mulțime perfectă fără puncte interioare.*

(ii) $|\mathbf{E}| = \lim\limits_{k \to \infty} (n\xi)^k\, l = 0.$

(iii) *Cele* n^k *origini ale intervalelor albe care constituie pe* $\mathbf{E}_k$ *sînt date de formula:*

$$a + l[\eta(j_1) + \xi\eta(j_2) + \ldots + \xi^{k-1}\eta(j_k)],$$

unde $\eta(j) = \eta_j$ *iar* j_k *iau valorile* 1, 2, ..., n *în mod independent.*

(iv) *Punctele lui* $\mathbf{E}$ *sînt date de seria*

$$x = a + l\,[\eta(j_1) + \xi\eta(j_2) + \ldots + \xi^{k-1}\eta(j_k) + \ldots].$$

Demonstrația ca la 16.2.(1).

Vom spune că mulțimea $\mathbf{E}$ este o *mulțime perfectă omogenă de tip* (n, ξ) sau, dacă vrem să precizăm, *de tip* $(n\,; \eta_1, \ldots, \eta_n\,; \xi)$.

Se numeşte *porţiune* a unei mulţimi perfecte intersecţia acestei mulţimi cu un interval deschis ale cărei extremităţi nu le conţine. Este evident că fiecare porţiune a lui **E** purtată de un interval alb din prima etapă este omotetică cu **E** în raportul ξ. Prin urmare *orice perfect omogen de tip* (n, ξ) *este constituit din* n *porţiuni disjuncte care îi sînt omotetice în raportul* ξ.

(2) Lemă. *Orice mulţime perfectă* **E** *care este constituită din* n *porţiuni disjuncte care îi sînt omotetice în raportul* ξ, *este o mulţime perfectă omogenă de tip* (n, ξ).

Într-adevăr, să presupunem, pentru simplificare, că **E** este purtată de $[0, 1]$, $0 \in \mathbf{E}$ şi $1 \in \mathbf{E}$; prin ipoteză, **E** este constituită din n porţiuni omotetice cu **E** în raportul ξ şi disjuncte; fie acestea $[\eta_1, \eta_1+\xi], \ldots$ $\ldots, [\eta_n, \eta_n + \xi]$ cu

$$0 = \eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_n = 1-\xi$$

şi deci fiecare porţiune conţine extremităţile segmentului care o poartă. Să facem acum o disecţie de tipul $(n\,;\, \eta_1, \ldots, \eta_n\,;\, \xi)$ asupra lui $[0, 1]$; se obţine o mulţime $\mathbf{E}_1$ care conţine pe **E**; o disecţiune de acelaşi tip asupra tuturor intervalelor albe de omotetie, conţine şi ea pe **E**; ş.a.m.d. şi la fiecare pas k rezultă $\mathbf{E}_k \supset \mathbf{E}$; tot din condiţia de omotetie rezultă şi că **E** conţine toate extremităţile intervalelor albe din $\mathbf{E}_k$. Se vede deci că pentru fiecare k avem $\mathbf{E} \subset \mathbf{E}_k$ şi $\mathbf{E}' \subset \bigcup \mathbf{E}'_k$, deci $\mathbf{E} = \bigcap \mathbf{E}_k$, q.e.d.

16.12. Funcţia lui Lebesgue asociată. Fie $L_k(x)$ funcţia continuă nulă pentru $x \leqslant a$, egală cu 1 pentru $x \geqslant b$, liniar crescătoare cu $\frac{1}{n^k}$ pe fiecare interval alb din $\mathbf{E}_k$ şi constantă pe orice interval negru.

(1) Lemă. *Funcţiile* $L_k(x)$ *tind uniform pentru* $t \to \infty$ *către o funcţie* $L(x)$ *cu următoarele proprietăţi* :

(i) $L(a) = 0, \quad L(b) = 1$;
(ii) L *constantă pe fiecare interval negru*;
(iii) L *continuă*;
(iv) L *crescătoare*;
(v) *pentru* $x \in \mathbf{E}$ *de forma* **16.11.** (1) (iv) *avem* :

$$L(x) = \sum_1^\infty \frac{\eta(j_k)}{n^k};$$

(vi) *pentru* $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ *şi* $S_k(f) = \frac{1}{n^k} \sum_k f(x_k)$, *unde* x_k *sînt extremităţile intervalelor albe din* $\mathbf{E}_k$ *avem* :

$$\lim_{k\to\infty} S_k(f) = \int f \mathrm{d}L.$$

Demonstraţiile se fac ca la **16.3.**

(2) Lemă. *Să notăm*

$$(*) \qquad Q(\varphi) = \frac{1}{n} \sum_{k-1}^{n} \mathrm{e}^{i\eta_k\varphi}\,.$$

Atunci

$$(^{**})\qquad L^\wedge(y) = e^{iya}\prod_{j=0}^{\infty} Q(yl\xi)\,;\; L \in \mathscr{M}(\mathbf{R})$$

$$(^{***})\qquad 2\pi\, c_n = e^{-ina}\prod_{j=0}^{\infty} Q(-nl\xi)\,;\; L \in \mathscr{M}(\mathbf{T}).$$

Demonstrațiile se fac ca la **16.4**.

16.13. Mulțimi perfecte de translație. Aceste mulțimi se construiesc la fel ca și mulțimile omogene, numai că la fiecare etapă se schimbă disecția. Anume, la etapa k, facem o disecție de tipul :

$$(n_k\,;\; \eta_{1,k}, \ldots, \eta_{n_k,k}\,;\; \xi_k)$$

asupra fiecăruia din cele $n_1 \ldots n_{k-1}$ intervale albe ale lui $\mathbf{E}_{k-1}$.

Se obțin astfel $n_1 \ldots n_{k-1}\, n_k$ intervale albe de lungime comună $\xi_1 \ldots \xi_k l$.

Se arată la fel ca și pînă acum că mulțimea

$$(^{*})\qquad \mathbf{E} = \bigcap_k \mathbf{E}_k$$

este o mulțime perfectă fără puncte interioare, că

$$(^{**})\qquad |\,\mathbf{E}\,| = \lim\, l\,(n_1\xi_1 \ldots n_k\xi_k)$$

și că pentru $x \in \mathbf{E}$ avem o scriere de forma :

$$(^{***})\quad x = a + l\,[\eta(j_1, 1) + \xi_1\eta(j_2, 2) + \ldots + \xi_1 \ldots \xi_{k-1}\eta(j_k, k) + \ldots]$$

unde $n(j_k, k) = \eta_{j_k,k}$ iar $j_k \in \{1, \ldots, n_k\}$; mai simplu, se vede că aceste puncte sînt de forma

$$(^{****})\qquad x = \sum_{1}^{\infty} x_k\,,$$

unde $x_0 = a$ iar $x_k \in \mathbf{X}_k$, mulțime finită de n_k elemente.

Proprietatea caracteristică mulțimilor perfecte de translație este exprimată prin următoarea :

(1) LEMĂ. *Mulțimile perfecte de translație sînt acele mulțimi perfecte care sînt decompozabile într-o infinitate de moduri într-un număr finit de porțiuni disjuncte egale prin translație.*

Este evident că o mulțime perfectă de translație are această proprietate, deoarece porțiunile purtate de intervalele albe din etapa k sînt egale prin translație.

Reciproc, să admitem că mulțimea perfectă $\mathbf{E}$ are proprietatea din enunț. Să observăm mai întîi că dacă o mulțime perfectă este decompozabilă în n porțiuni egale $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_n$ pe care le presupunem scrise de la stînga la dreapta, atunci această descompunere este unică. Într-adevăr, fie $\mathbf{P}'_1, \ldots, \mathbf{P}'_n$ o altă descompunere și să presupunem că $\mathbf{P}'_1 \supset \mathbf{P}_1$; cum ele au aceeași extremitate stîngă, extremitatea dreaptă a lui $\mathbf{P}'_1$ este strict mai la dreapta extremităţii drepte a lui $\mathbf{P}_1$; acest raţionament, din aproape în aproape, ne duce la o contradicţie evidentă.

Cum **E** este decompozabilă într-o infinitate de moduri, rezultă că pentru o infinitate de valori ale lui n ea este decompozabilă în n porţiuni egale prin translaţie ; cu alte cuvinte, descompunerea de acest tip se poate face în porţiuni cu diametrul oricît de mic.

Fie acum $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_{n_1}$ o descompunere a lui **E** în n_1 porţiuni egale prin translaţie şi $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_{n_1}$ cele mai mici segmente care conţin $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_{n_1}$ respectiv. Considerăm atunci pe $\mathbf{B}_1, \ldots \mathbf{B}_{n_1}$ ca segmente albe ale unei prime etape de disecţiune a lui **E** şi notăm cu $\mathbf{E}_1$ reuniunea lor. Ele sînt despărţite de „intervale negre".

Se consideră apoi o descompunere a lui **E** în porţiuni egale prin translaţie *cu diametrul mai mic decît diametrul celui mai mic interval negru* ; atunci fiecare din aceste porţiuni este conţinută într-un interval alb al primei etape şi fiecare interval alb al primei etape conţine acelaşi număr de porţiuni ; se procedează apoi la fel ca mai sus, ş.a.m.d.

16.14. Funcţia lui Lebesgue asociată. Interesul mulţimilor perfecte de translaţie constă tocmai în posibilitatea de a defini în mod natural funcţia lui Lebesgue $L(x)$ şi L-măsura, măsurile aproximante fiind, ca şi în cazurile precedente, repartiţii uniforme de mase pe $\mathbf{E}_k$ cu masa totală 1.

Transformata Fourier-Stieltjes este dată prin formula :

$$L^{\wedge}(y) = e^{iva}\, Q_1(yl) \prod_{1}^{\infty} Q_{k+1}(yl\xi_1 \ldots \xi_k), \tag{1}$$

unde :

$$Q_k(\varphi) = \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} e^{in_{j,k}\varphi} \tag{2}$$

sau, mai simplu :

$$L(y) = \prod_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{n_k} \sum_{\lambda \in \mathbf{X}_k} e^{i\lambda y} \right). \tag{3}$$

Are loc următoarea

16.15. PROPOZIŢIE. *Dacă* μ *este o măsură de masă totală* 1, *concentrată pe mulţimea perfectă de translaţie* **E** *şi care are proprietatea că două porţiuni ale lui* **E** *egale prin translaţie au aceeaşi măsură în raport cu* μ, *atunci* μ *coincide cu* L*-măsura pe* **E**. *Reciproc*, L*-măsura pe* **E** *are această proprietate.*

Într-adevăr, dacă μ are proprietatea din enunţ, atunci ea afectează fiecărei porţiuni suportate de un interval alb din etapa k masa $1/n_1 \ldots n_k$. Or, se vede uşor, această proprietate caracterizează L-măsura.

Reciproc, dacă $\mathbf{P}_1$ şi $\mathbf{P}_2$ sînt două porţiuni egale prin translaţie, atunci, într-o etapă suficient de avansată, ele vor fi decompozabile în acelaşi număr de porţiuni purtate de intervale albe ale etapei respective ; într-adevăr, pentru aceasta este suficient ca lungimea intervalelor albe să fie mai mică decît lungimea intervalelor contigue lui **E** care limitează pe $\mathbf{P}_1$ şi $\mathbf{P}_2$. Propoziţia este astfel demonstrată.

16.16. Note bibliografice. Pentru caracterizarea mulţimilor Cantor (teorema **16.8**) ne-am condus după Bourbaki [2] ch. IV, § 8 exerc. 11 şi după Hausdorff [7]; pentru expunere a fost necesar să introducem mulţimile perfecte de disecţie (**16.1**). În secţiunile relative la mulţimile perfecte simetrice, omogene sau de translaţie, ne-am condus după Kahane, Salem [17], ch. I.

§ 17. MULŢIMI INDEPENDENTE

17.0. În acest paragraf studiem, în cadrul general al l.c.a.-grupurilor, mulţimile independente şi strict independente şi un caz particular important de mulţimi strict independente — mulţimile Kronecker şi mulţimile de tip K_q.

17.1. Definiţie. O parte **E** a unui grup abelian **G** se numeşte *mulţime independentă* dacă are următoarea proprietate : pentru orice $k \in \mathbf{N}$, pentru orice $x_1, \ldots, x_k \in \mathbf{E}$ puncte distincte şi pentru orice $n_1, \ldots, n_k \in \mathbf{Z}$, relaţia :

(1) $$n_1 x_1 + \ldots + n_k x_k = 0$$

implică

(2) $$n_1 x_1 = \ldots = n_k x_k = 0.$$

17.2. Definiţie. O parte **E** a unui grup abelian **G** se numeşte *mulţime strict independentă* dacă are următoarea proprietate : pentru orice $k \in \mathbf{N}$, pentru orice $x_1, \ldots, x_k \in \mathbf{E}$ puncte distincte şi pentru orice $n_1, \ldots, n_k \in \mathbf{Z}$ relaţia :

(1) $$n_1 x_1 + \ldots + n_k x_k = 0$$

implică :

(2) $$n_1 x = \ldots + n_k x = 0 \quad \text{pentru orice } x \in \mathbf{E}.$$

Evident, orice mulţime strict independentă este o mulţime independentă, iar în grupuri fără torsiune aceste noţiuni coincid.

17.3. Definiţie. O parte **E** a unui l.c.a.-grup G se numeşte *mulţime Kronecker* dacă are următoarea proprietate : pentru orice funcţie continuă unimodulară f pe **E** şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\gamma \in \Gamma$ aşa ca

(1) $$\sup_{x \in \mathbf{E}} |f(x) - (x, \gamma)| < \varepsilon.$$

17.4. Pentru fiecare $q \geqslant 2$ (întreg) să facem identificarea :

(1) $$Z_q \equiv \{\exp (2\pi i j/q) \ ; \ 0 \leqslant j \leqslant q - 1\}.$$

Atunci $\mathbf{Z}_q$ apare ca un subgrup ciclic de ordin q al lui **T**.

Cu această identificare dăm următoarea :

Definiţie. O parte **E** a grupului compact $\mathbf{D}_q$ (**9.17**) se numeşte *mulţime de tip K_q* dacă are următoarea proprietate : orice funcţie continuă pe **E** care aplică pe **E** în $\mathbf{Z}_q$ coincide pe **E** cu un caracter continuu al lui $\mathbf{D}_q$.

17.5. Dacă G este un grup abelian iar $x \in G$ vom pune $S(x) = T$ dacă x are ordin infinit şi $S(x) = Z_q$ dacă x are ordinul q.

TEOREMĂ. *Fie* G *un l.c.a.-grup iar* $E \subset G$ *o mulţime independentă finită. Pentru orice funcţie* f *pe* E *aşa ca* $f(x) \in S(x)$ *oricare ar fi* $x \in E$ *şi pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\gamma \in \Gamma$ *aşa încît* :

$$(1) \qquad \sup_{x \in E} |(x, \gamma) - f(x)| < \varepsilon.$$

Fie $E = \{x_1, \ldots, x_k\}$ şi fie H grupul generat de E ; H este constituit din elemente de forma $\Sigma n_i x_i$ cu coeficienţi întregi n_i. Dacă $\Sigma n_i x_i = \Sigma m_i x_i$, atunci $\Sigma(n_i - m_i)x_i = 0$ deci pentru orice $i = 1, \ldots, k$ avem $(n_i - m_i)x_i = 0$; dacă x_i are ordinul infinit, atunci $n_i = m_i$; dacă x_i are ordinul q_i, atunci $n_i - m_i = q_i p_i$; cum $f(x) \in S(x)$, rezultă că în ambele cazuri avem :

$$[f(x_i)]^{n_i} = [f(x_i)]^{m_i}.$$

Prin urmare putem defini o funcţie φ pe H prin relaţia :

$$(2) \qquad \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i\right) = \prod_{i=1}^{k} [f(x_i)]^{n_i}$$

Observăm că $\varphi(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Pe de altă parte, φ este un homomorfism al lui H în T şi deci, conf. **9.10** (sau conf. **9.24**. (1) căci T este divizibil), rezultă că φ se extinde la un caracter — nu neapărat continuu — pe G. Cum E este finită, teorema **7.3** completează demonstraţia.

17.6. COROLAR. *Fie* E *o mulţime independentă şi finită din l.c.a.-grupul* G ;

(1) *Dacă orice* $x \in E$ *are ordin infinit, atunci* E *este o mulţime Kronecker.*

(2) *Dacă* $G = D_q$ *şi orice* $x \in E$ *are ordinul* q, *atunci* E *este de tip* K_q.

Partea (1) este evidentă. Pentru (2) observăm că pentru orice $\gamma \in \Gamma$ avem $(x, \gamma) \in Z_q$ pentru orice $x \in E$ deoarece γ este homomorfism ; de asemenea, pentru orice $x \in E$ şi $f : E \to Z_q, f(x) \in S(x) = Z_q$. Dar luînd două elemente oarecari $e^{i\alpha}, e^{i\beta} \in Z_q$ cu $\alpha = 2\pi k/q$ şi $\beta = 2\pi l/q$, $0 \leqslant l \leqslant k \leqslant$ $\leqslant q - 1$, obţinem :

$$|e^{i\alpha} - e^{i\beta}| = 2\left|\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\right| = 2 \sin\frac{k - l}{q}\pi ;$$

pentru $k \neq l$ valoarea minimă a acestei expresii este $2 \sin \dfrac{\pi}{q}$.

Deci pentru $\varepsilon < \sin \pi/q$ în **17.5**.(1) obţinem $(x, \gamma) = f(x)$ pentru orice $x \in E$, q.e.d.

17.7. TEOREMĂ. (i) *Mulţimile Kronecker sînt mulţimi strict independente şi nu conţin elemente de ordin finit.*

(ii) *Mulţimile de tip* K_q *sînt mulţimi strict independente şi conţin numai elemente de ordin* q.

(i) Fie E o mulţime Kronecker în l.c.a.-grupul G, $x_1, \ldots, x_k$ puncte distincte din E iar $n_1, \ldots, n_k \in E$ aşa ca

$$n_1 x_1 + \ldots + n_k x_k = 0 ;$$

atunci pentru orice $\gamma \in \Gamma$ avem:

$$(1) \qquad \prod_{i=1}^{k} (x_i, \gamma)^{n_i} = \prod_{i=1}^{k} (n_i x_i, \gamma) = \left(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i, \gamma\right) = 1.$$

Din (1) și din definiția mulțimilor Kronecker (**17.3**) rezultă că pentru orice funcție unimodulară și continuă pe **E** avem:

$$(2) \qquad \prod_{i=1}^{k} [f(x_i)]^{n_i} = 1;$$

dar $f(x_i)$ pot fi elemente arbitrare din T deoarece mulțimea $\{x_1, \ldots, x_k\}$ este finită și deci se poate defini o funcție continuă care să aibă în punctele x_i valori dinainte date.

Luînd $f(x_i) =$ un element de ordin infinit din **T** și $f(x_j) = 1$ pentru $j \neq i$, rezultă $n_i = 0$; deci $n_1 = \ldots = n_k = 0$ și ca urmare **E** este strict independentă. Este evident apoi că mulțimea **E** nu conține decît elemente de ordin infinit, căci aceasta revine la $k = 1$.

(ii) Se obține la fel relația (2) cu $f(x_i)$ elemente oarecari din $\mathbf{Z}_q$. Luînd $f(x_i) =$ un element de ordin q din $\mathbf{Z}_q$ și $f(x_j) = 1$ pentru $j \neq i$, rezultă $n_i \equiv 0 \pmod{q}$; deci $n_1 \equiv n_2 \equiv \ldots \equiv n_k \equiv 0 \pmod{q}$ și ca urmare **E** este strict independentă. În particular, dacă $k = 1$, se obține că fiecare $x \in \mathbf{E}$ are ordinul q.

17.8. NOTĂ. În secțiunile următoare urmărim să arătăm că fiecare l.c.a.-grup nediscret conține o mulțime Cantor care este o mulțime Kronecker sau o mulțime de tip K_q. Cu acestea arătăm că în orice l.c.a.-grup nediscret există părți metrizabile, perfecte și strict independente.

Înainte de a începe construcțiile corespunzătoare trimitem la secțiunea **9.27**; tocmai teorema **9.27** (2) justifică enunțul din următoarea teoremă și facilitează demonstrația ei.

17.9. TEOREMĂ. (i) *Orice* **I**-*grup conține o mulțime Cantor care este o mulțime Kronecker.*

(ii) *Grupul* $\mathbf{D}_q$ *conține o mulțime Cantor care este o mulțime de tip* K_q.

Demonstrația va imita construcția mulțimii triadice a lui Cantor. Ne este însă necesară următoarea:

17.10. LEMĂ. *Presupunem că* $\mathbf{G} = \mathbf{D}_q$ *sau* **G** *este un I-grup, iar* $\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_k$ *sînt mulțimi nevide deschise și disjuncte din* **G**. *Există punctele* $x_i \in \mathbf{V}_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, *așa ca*:

(i) $\{x_1, \ldots, x_k\}$ *să fie o mulțime Kronecker dacă* $\mathbf{G} =$ *I-grup.*

(ii) $\{x_1, \ldots, x_k\}$ *să fie o mulțime de tip* K_q *dacă* $\mathbf{G} = \mathbf{D}_q$.

(i) Pentru $y \in \mathbf{G}$ și $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$ să notăm

$$\mathbf{E}_{k,y} = \{x \in \mathbf{G};\ kx = y\};$$

mulțimea $\mathbf{E}_{k,y}$ *este închisă și are interiorul vid.* Afirmația relativă la închidere este evidentă; dacă $\mathbf{E}_{k,y}$ ar conține o mulțime deschisă nevidă, atunci $\mathbf{E}_{k,y} - \mathbf{E}_{k,y}$ ar fi o vecinătate **W** a originii; cum însă $kx = 0$ pentru orice $x \in \mathbf{W}$, aceasta ar contrazice definiția *I*-grupului.

Cu această precizare demonstrăm lema prin *inducție*. Mulțimea $\mathbf{V}_1$ este, cu topologia indusă, un spațiu local compact și deci — conf. teoremei lui Baire — ea nu poate fi acoperită de reuniunea mulțimilor $\mathbf{E}_{k,0}$; prin urmare $\mathbf{V}_1$ conține un element de ordin infinit $x_1 \in \mathbf{V}_1$; mulțimea $\{x_1\}$ este evident independentă și deci — **17.6** — o mulțime Kronecker.

Să presupunem că $x_1, \ldots, x_j$ au fost alese astfel ca $x_i \in \mathbf{V}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant j)$, ca mulțimea $\{x_1, \ldots, x_j\}$ să fie independentă și ca fiecare x_i $(1 \leqslant i \leqslant j)$ să aibă ordinul infinit. Fie **H** grupul generat de $x_1, \ldots, x_j$; evident, **H** este numărabil. Prin urmare — conf. teoremei lui Baire — $\mathbf{V}_{j+1}$ nu este acoperit de reuniunea mulțimilor $\mathbf{E}_{k,y}$ cu $k \in Z$, $k \neq 0$ și $y \in \mathbf{H}$; rezultă că există $x_{j+1} \in \mathbf{V}_{j+1}$ așa ca pentru orice $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$ să avem $kx_{j+1} \notin \mathbf{H}$. În particular rezultă că x_{j+1} are ordinul infinit și că mulțimea $\{x_1, \ldots, x_{j+1}\}$ este independentă, deci — **17.6** — este o mulțime Kronecker, q.e.d.

(ii) Observăm mai întîi că *orice vecinătate a originii în* $\mathbf{D}_q$ *conține un element de ordin* q; într-adevăr, $\mathbf{D}_q = \prod_{1}^{\infty} \mathbf{Z}_q^i$ cu $\mathbf{Z}_q^i = \mathbf{Z}_q$ și cum în topologia produs un sistem fundamental de vecinătăți este format de vecinătățile „elementare”, afirmația devine evidentă. Apoi, pentru orice $0 < k < q$ definim mulțimile $\mathbf{E}_{k,y}$ ca la (i); *ele sînt mulțimi închise cu interiorul vid* ceea ce rezultă ca la (i) ținînd cont de observația de mai sus. Apoi demonstrația se continuă prin inducție exact ca la (i).

17.10 bis. Pentru demonstrația teoremei **17.9** ne va fi necesară o formă ușor modificată a teoremei lui Tietze. Reamintim că într-un spațiu topologic **X** se numește *arc* orice imagine homeomorfă a unui segment liniar. Are loc următoarea:

TEOREMĂ. *Dacă* **K** *este o parte compactă a unui spațiu Hausdorf local compact* **X** *iar* f *este o aplicație continuă a lui* **K** *într-un arc* **L**, *atunci există o aplicație continuă* g *a lui* **X** *în* **L** *așa ca* $g(p) = f(p)$ *pentru orice* $p \in \mathbf{K}$.

17.11. Demonstrația teoremei 17.9. (i) (I) Deoarece orice I-grup conține un subgrup închis care este un I-grup metrizabil și deoarece — pe baza teoremei de prelungire a caracterelor — o mulțime Kronecker într-un subgrup închis din **G** este o mulțime Kronecker în **G**, putem presupune de la început că **G** *este un I-grup metrizabil* cu metrica d.

(II) Vom demonstra, prin *inducție*, următoarea afirmație:

Pentru fiecare $r = 0, 1, 2, \ldots$ *există*:

1°) $s = 2^r$ *vecinătăți compacte disjuncte* $\mathbf{P}_1^r, \ldots, \mathbf{P}_s^r$

2°) $x_j^r \subset \mathbf{P}_j^r$, $1 \leqslant j \leqslant s$

3°) $\mathbf{F}_r \subset \Gamma$, *mulțime finită*

cu proprietățile:

a) $\mathbf{P}_{2j-1}^{r+1}, \mathbf{P}_{2j}^{r+1} \subset \mathbf{P}_j^r$, $j = 1, \ldots, s$.

b) *Pentru orice familie* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ *de numere reale există* $\gamma \in \mathbf{F}_r$ *așa încît*

(*) $|e^{i\alpha_j} - (x_j^r, \gamma)| < 1/r$, $j = 1, \ldots, s$.

c) Pentru orice $x \in \mathbf{P}_j^r$, $\gamma \in \mathbf{F}_r$ are loc relația:

(**) $|(x, \gamma) - (x_j^r, \gamma)| < 1/r$, $j = 1, \ldots, s$.

d) *Pentru orice* $x \in \mathbf{P}_j^r$ *are loc relația*

$$d(x, x_j^r) < 1/r \quad , \quad j = 1, \ldots, s. \tag{***}$$

Să facem mai întîi construcția pentru $r = 0$; în loc de $1/r$ care nu are sens, vom lua 1, iar în pasul următor vom avea tot $1/r = 1$. Fie $\mathbf{W}_0^0$ o mulțime deschisă nevidă din $\mathbf{G}$; atunci, conf. lemei **17.10** există $x_1^0 \in \mathbf{W}_0^0$, așa ca $\{x_1^0\}$ să fie o mulțime Kronecker. Cum $\mathbf{T}$ este compact, este total mărginit și deci există o $1/2$ — rețea pe $\mathbf{T}$ dată de punctele $\{\exp (i\alpha_0^l)\}_{1 \leqslant l \leqslant m_0}$, unde α_0^l sînt numere reale convenabil alese; atunci, oricare ar fi numărul real α_0, există $1 \leqslant l \leqslant m_0$ așa ca:

$$|\mathrm{e}^{i\alpha_0} - \mathrm{e}^{i\alpha_0^l}| < \frac{1}{2}\cdot \tag{1}$$

Cum $\{x_1^0\}$ este în mod trivial o mulțime Kronecker finită, pentru fiecare $1 \leqslant l \leqslant m_0$ există $\gamma_l^0 \in \mathbf{\Gamma}$ așa ca:

$$|\mathrm{e}^{i\alpha_0^l} - (x_1^0, \gamma_l^0)| < \frac{1}{2}\cdot \tag{2}$$

În definitiv, notînd $\mathbf{F}_0 = \{\gamma_1^0, \ldots, \gamma_{m_0}^0\} \subset \Gamma$, F_0 este finită și pentru orice număr real α_0 există $\gamma \in \mathbf{F}_0$ așa ca:

$$|\mathrm{e}^{i\alpha_0} - (x_1^0, \gamma)| < 1. \tag{3}$$

Apoi se alege $\mathbf{P}_1^0$ vecinătate compactă a lui x_1^0, inclusă în $\mathbf{W}_0^0$ și astfel încît să fie verificate c) și d).

Să presupunem acum că am făcut construcția pentru $0, 1, \ldots, r-1$ și să arătăm că o putem face pentru r. Fie $\mathbf{P}_1^{r-1}, \ldots, \mathbf{P}_s^{r-1}$ ($s = 2^{r-1}$) construite la pasul $r-1$. Alegem — pentru fiecare $j = 1, \ldots, s$ — $\mathbf{W}_{2j-1}^r$ și $\mathbf{W}_{2j}^r$ mulțimi deschise, disjuncte și nevide în $\mathbf{P}_j^{r-1}$; conf. lemei **17.10**, există o mulțime Kronecker $\{x_1^r, \ldots, x_{2s}^r\}$ cu $x_j^r \in \mathbf{W}_j^r$ $(1 \leqslant j \leqslant 2s)$. Cum torul $2s$-dimensional $\mathbf{T}^{2s}$ este compact, deci total mărginit, există pe el o $1/2r$-rețea. „Nodurile” acestei rețele sînt punctele:

$$\{\exp (i \ \alpha_{r,j}^l)\}_{j=1}^{j=2s}$$

cu $l = 1, \ldots, m_r$. Deoarece $\{x_1^r, \ldots, x_{2s}^r\}$ este o mulțime Kronecker, acestor „noduri” le corespund caractere γ_l^r $(l = 1, \ldots, m_r)$ așa ca:

$$|\exp (i\alpha_{r,j}^l) - (x_j^r, \gamma_l^r)| < \frac{1}{2r}, \ j = 1, \ldots, 2s.$$

Se ia $\mathbf{F}_r = \{\gamma_1^r, \ldots, \gamma_{m_r}^r\}$ și condiția b) este verificată.

Apoi se aleg $\mathbf{P}_j^r$ așa ca $x_j^r \in \mathbf{P}_j^r \subset \mathbf{W}_j^r$ și ca să fie verificate condițiile c) și d) iar modul de construcție ne asigură că este verificată condiția a).

Inducția este completă.

(III) Să definim

$$\mathbf{P} = \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{2^r} \mathbf{P}_j^r.$$

(IV) Faptul că $\mathbf{P}$ *este o mulțime Cantor* (**16.7**), rezultă imediat fie din teorema **16.8**, fie din lema **16.9** (1).

(V) Să arătăm că $\mathbf{P}$ *este o mulțime Kronecker*; pentru aceasta fie $f \in \mathcal{C}(\mathbf{P})$, $|f| = 1$ și $\varepsilon > 0$. Cum f este uniform continuă și diam $(\mathbf{P}_j^r) \to 0$ pentru $r \to \infty$ uniform în raport cu j, rezultă că există r_0 așa ca f să aplice fiecare din mulțimile $\mathbf{P} \cap \mathbf{P}_j^{r_0}$ $(j = 1, \ldots, 2^{r_0})$ în cîte un arc suficient de mic din $\mathbf{T}$ (și nu pe întreg cercul). Atunci, conf. teoremei lui Tietze (**17.10** bis), f poate fi extinsă la o aplicație continuă a lui $\bigcup \mathbf{P}_j^{r_0} (1 \leqslant j \leqslant 2^{r_0})$ în $\mathbf{T}$; în particular, pentru $r \geqslant r_0$ va avea sens să luăm valoarea funcției f în punctul x_j^r. Conf. (***) putem alege $r > r_0$, $r > 3/\varepsilon$ așa ca pentru orice $x \in \mathbf{P}_j^r$ și $j = 1, \ldots, 2^r$ să avem:

$$(4) \qquad |f(x) - f(x_j^r)| < \varepsilon/3.$$

Apoi, conf. *b*), există $\gamma \in \mathbf{F}_r$ așa ca pentru orice $j = 1, \ldots, 2^r$ să avem:

$$(5) \qquad |f(x_j^r) - (x_j^r, \gamma)| < 1/r.$$

Din (**), (4) și (5) deducem atunci că pentru orice $x \in \bigcup \mathbf{P}_j^r$ și deci pentru orice $x \in \mathbf{P}$ avem

$$(6) \qquad |f(x) - (x, \gamma)| < 2/r + \varepsilon/3 < \varepsilon \quad , \quad \text{q.e.d.}$$

(ii) (I) Mai întîi demonstrăm prin *inducție* următoarea afirmație: *Pentru fiecare* $r = 0, 1, 2, \ldots$ *există*:

1°) $s = 2^r$ *vecinătăți compacte disjuncte* $\mathbf{P}_1^r, \ldots, \mathbf{P}_s^r$;

2°) $x_j^r \in \mathbf{P}_j^r$, $1 \leqslant j \leqslant s$.

3°) $\mathbf{F}_r \in \Gamma$ *mulțime finită*

cu proprietățile:

a) $\mathbf{P}_{2j-1}^{r+1}$, $\mathbf{P}_{2j}^{r+1} \subset \mathbf{P}_j^r$, $\quad j = 1, \ldots, s$;

b) *pentru orice familie* $\{z_1, \ldots, z_s\}$ *de elemente din* $\mathbf{Z}_q$ *există* $\gamma \in \mathbf{F}_r$ *așa ca*

$$(^*) \qquad (x_j^r, \gamma) = z_j, \quad j = 1, \ldots, s;$$

c) *pentru orice* $x \in \mathbf{P}_j^r$, $\gamma \in \mathbf{F}_r$ *are loc relația*:

$$(^{**}) \qquad (x_j^r, \gamma) = (x, \gamma), \quad j = 1, \ldots, s;$$

d) *pentru orice* $x \in \mathbf{P}_j^r$ *are loc relația*

$$(^{***}) \qquad d(x, x_j^r) < 1/r, \quad j = 1, \ldots, s.$$

Aici d este metrica naturală pe $\mathbf{G} = \mathbf{D}_q$ (vezi **16.10** bis — demonstrația).

Demonstrația acestei afirmații se face, în principiu, la fel ca la (i) (II). Ne oprim numai asupra părților care suferă o modificare — anume *b*) și *c*) — menținînd notațiile de la (i) (II). Conf. lemei **17.10** există punctele $x_j^r \in \mathbf{W}_j^r$ $(j = 1, \ldots, 2s)$ așa încît mulțimea $\{x_1^r, \ldots, x_{2s}^r\}$ să fie de tipul K_q; deoarece $\mathbf{Z}_q$ este finit, mulțimea finită $\mathbf{F}_r$ se alege acum cu ușurință în baza definiției mulțimilor de tip K_q (**17.4**). Pentru satisfacerea lui *c*) este suficient să alegem $\mathbf{P}_j^r$ prin condiția ca pentru orice $x \in \mathbf{P}_j^r$ și orice $\gamma \in \mathbf{F}_r$ să aibă loc relația :

$$|(x, \gamma) - (x_j^r, \gamma)| < \sin(\pi/q)$$

căci atunci automat are loc (**) (vezi demonstrația de la **17.6** (2)).

(II) Definim la fel mulțimea **P**.

(III) **P** *este o mulțime Cantor* (aceleași argumente).

(IV) **P** *este o mulțime de tip* K_q.

Fie $f : \mathbf{P} \to \mathbf{Z}_q$ continuă și $\mathbf{E}_j$ mulțimea pe care f ia valoarea $\exp(2\pi ij/q)$ pentru fiecare $j = 1, \ldots, q$. Atunci $\mathbf{P} = \bigcup \mathbf{E}_j$ iar $\mathbf{E}_j$ sînt compacte și disjuncte. Deoarece $\mathbf{G} = \mathbf{D}_q$ este total discontinuu, există mulțimi compacte și deschise $\mathbf{K}_j$ cu proprietățile : $\mathbf{E}_j \subset \mathbf{K}_j$, $G = \bigcup \mathbf{K}_j$ și $\mathbf{K}_j$ disjuncte ; într-adevăr, fie $\overline{xy}$ *distanța* dintre x și y definită la **16.10**[*]) și fie

$$\alpha = \min_{i \neq j} \inf_{\substack{x \in \mathbf{E}_i \\ y \in \mathbf{E}_j}} xy.$$

Cum $\mathbf{E}_i$ și $\mathbf{E}_j$ sînt compacte și disjuncte $(i \neq j)$, rezultă că $\alpha > 0$. Definim, pentru $1 \leqslant j \leqslant q-1$:

$$\mathbf{K}_j = \left\{ z \in \mathbf{D}_q ;\ \text{distanța de la } z \text{ la } \mathbf{E}_j < \frac{\alpha}{2} \right\}$$

și

$$\mathbf{K}_q = \mathbf{D}_q \setminus \bigcup_{1}^{q-1} \mathbf{K}_j .$$

Atunci $\mathbf{K}_j$ sînt deschise și închise, disjuncte, $\mathbf{E}_j \subset \mathbf{K}_j$ și $\mathbf{D}_q = \bigcup\limits_{1}^{q} \mathbf{K}_j$.

Extindem acum pe f așa încît să fie constantă pe fiecare $\mathbf{K}_j$; atunci f devine o aplicație continuă a lui $\mathbf{G}$ în $\mathbf{Z}_q$. Deoarece distanța dintre două mulțimi este > 0, conf. d), se poate alege r suficient de mare pentru ca f să fie constantă pe fiecare $\mathbf{P}_j^r$, $1 \leqslant j \leqslant 2^r$. După *b*) există $\gamma \in \mathbf{F}_r$ așa ca $f(x_j^r) = (x_j^r, \gamma)$, $1 \leqslant j \leqslant 2^r$, deci conf. (**) $f(x) = (x, \gamma)$ pentru orice $x \in \bigcup\limits_{j=1}^{2^r} \mathbf{P}_j^r$, în particular pentru orice $x \in \mathbf{P}$.

Teorema **17.9** este complet demonstrată.

17.12. TEOREMĂ. *Orice l.c.a.-grup nediscret* **G** *conține o mulțime Cantor strict independentă.*

Teorema rezultă din **9.27**, **17.9** și **17.7**.

17.13. NOTĂ. S-ar părea că mulțimile compacte independente sînt total discontinue. Acest fapt este trivial pe dreapta reală **R**, deoarece o mulțime compactă și independentă nu poate conține nici un interval închis. El este încă adevărat în grupurile care au dimensiunea topologică finită (**17.16**), dar nu este adevărat în general. Pentru a construi un contraexemplu (**17.15**) ne este necesară următoarea :

---

[*]) Deoarece $\mathbf{D}_q$ este compact, metrizabil și total discontinuu, distanța este echivalentă cu metrica.

17.14. LEMĂ. *Dacă* $0 < \alpha < \beta < 1$, *atunci orice funcţie continuă reală pe* $[\alpha; \beta]$ *poate fi aproximată uniform prin polinoame* $\sum_{r=1}^{k} n_r t^r$ *cu coeficienţi întregi* n_r.

Fie $\mathcal{A}$ mulţimea tuturor funcţiilor pe $[\alpha, \beta]$ care pot fi astfel aproximate. Evident, $\mathcal{A}$ este închisă la adunare şi înmulţire şi conţine funcţia identitate. Prin urmare $\mathcal{A}$ este un inel uniform închis de funcţii reale pe $[\alpha, \beta]$ care separă punctele lui $[\alpha, \beta]$. Dacă arătăm că $\mathcal{A}$ conţine toate constantele, atunci lema rezultă din teorema Weierstrass-Stone.

Fie c o constantă şi fie :

$$S_p(t) = \frac{1}{p}[1 - t^p - (1-t)^p], \tag{1}$$

unde p este un număr prim. S_p este un polinom cu coeficienţi întregi. Cum $pS_p = 1 - t^p - (1-t)^p$, rezultă că $|1 - pS_p| \leqslant |t|^p + |1-t|^p \leqslant \beta^p + (1-\beta)^p$ pe $[\alpha, \beta]$ deci $pS_p \to 1$ uniform pe $[\alpha, \beta]$ pentru $p \to \infty$. Să presupunem că *pentru orice* p *există un întreg* q_p *aşa ca* $|c - q_p/p| < 1/p$. Atunci şirul $\{q_p/p\}_p$ este majorat, să zicem de $M > 0$, şi avem :

$$\begin{aligned} |q_p S_p(t) - c| &= |(q_p/p)\, pS_p(t) - c| \leqslant \\ &\leqslant |(q_p/p)pS_p(t) - (q_p/p)| + |(q_p/p) - c| \leqslant \\ &\leqslant M\,|pS_p(t) - 1| + |(q_p/p) - c|. \end{aligned}$$

De aici rezultă evident că $q_p S_p(t) \to c$ uniform pe $[\alpha, \beta]$ pentru $p \to \infty$.

Rămîne să demonstrăm afirmaţia subliniată. Să presupunem mai întîi că $0 < c < 1$; împărţim intervalul $(0, 1)$ în p părţi egale deschise la stînga şi închise la dreapta ; atunci c se află într-un astfel de interval — să zicem al q_p-lea — şi deci $q_p/p - c < 1/p$. Dacă c este o constantă arbitrară, atunci $|c| = [c] + \langle c \rangle$ (partea întreagă şi partea fracţionară) ; se găseşte q'_p aşa ca $q'_p/p - \langle c \rangle < 1/p$ şi se ia

$$q_p = \begin{cases} [c]p + q'_p & \text{dacă } c > 0 \\ -[c]p + q'_p & \text{dacă } c < 0. \end{cases}$$

Lema este complet demonstrată.

17.15. PROPOZIŢIE. *Torul infinit dimensional* $\mathbf{T}^w$ (**9.18**) *conţine un arc care este o mulţime Kronecker.*

Orice $x \in \mathbf{T}^w$ este de forma

$$x = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots), \quad \xi_i \in R \ (\mathrm{mod}\ 2\pi) \equiv T. \tag{1}$$

Fie $0 < \alpha < \beta < 1$ şi fie $\mathbf{L}$ mulţimea tuturor $x(t) \in T^w$ de forma

$$x(t) = (2\pi t, \ldots, 2\pi t^n, \ldots), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \tag{2}$$

Evident, **L** este un arc. Pentru a arăta că **L** este o mulțime Kronecker, să alegem $f \in \mathcal{C}(\mathbf{L})$ cu $|f| = 1$; atunci $t \to f(x(t))$ este o funcție continuă și unimodulară pe $[\alpha, \beta]$ și deci

$$(3) \qquad f(x(t)) = \exp(2\pi i h(t)), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

unde h este o funcție reală și continuă pe $[\alpha, \beta]$. Dacă $n_1, \ldots, n_k \in \mathbf{Z}$ și dacă γ este caracterul pe $\mathbf{T}^{w}$ definit prin

$$(4) \qquad (x, \gamma) = \exp i(n_1 \xi_1 + \ldots + n_k \xi_k),$$

unde x este dat de (1), atunci din (3), (4) și inegalitatea evidentă $|\exp(ia) - \exp(ib)| \leqslant |a - b|$ deducem:

$$(5) \qquad |f(x(t)) - (x(t), \gamma)| \leqslant 2\pi \left| h(t) - \sum_{1}^{k} n_r t^r \right|, \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

Prin urmare propoziția rezultă din lema precedentă.

17.16. PROPOZIȚIE. *Dacă* **G** *este un l.c.a.-grup metrizabil iar* dim $\mathbf{G} = n < \infty$, *iar* **E** *este o parte independentă și compactă a lui* **G**, *atunci* **E** *este total discontinuă.*

Nu dăm demonstrația (vezi Rudin [26], 5.2.9.).

17.17. NOTĂ. Vom spune că o parte a unui l.c.a.-grup este o *mulțime fină* („thin set") dacă subgrupul generat de ea este neglijabil în raport cu măsura Haar.

În cartea lui Rudin, [26], se afirmă că *orice mulțime compactă independentă dintr-un l.c.a.-grup este o mulțime fină* (5.3.6.) însă demonstrația nu este convingătoare. Noi nu cunoaștem o altă demonstrație a acestei afirmații. Totuși se observă ușor că alegînd în demonstrația teoremei **17.9** mulțimile deschise $\mathbf{W}_j^r$ suficient de mici, obținem următoarea formă mai tare a teoremei **17.12**:

Orice l.c.a.-grup nediscret conține o mulțime Cantor, fină și strict independentă.

17.18. Vom arăta acum că *pe orice mulțime Cantor există măsuri continue netriviale.* Într-adevăr, fie **P** o mulțime Cantor; prin definiție ea este homeomorfă cu mulțimea triadică a lui Cantor **K**. Însă, după cum am văzut la **16.5**, L-măsura pe **K** are proprietățile:

(i) $L \in \mathcal{M}(\mathbf{K})$
(ii) $\|L\| = 1$
(iii) $\|L\| \geqslant 0$
(iv) L continuă.

Prin urmare, deoarece **K** este homeomorf cu **P**, există o măsură μ cu proprietățile:

(i) $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{P})$
(ii) $\|\mu\| = 1$
(iii) $\mu \geqslant 0$
(iv) μ continuă.

Dacă **P** este mulțimea Cantor independentă construită la **17.11**, atunci o astfel de măsură μ se poate construi direct.

Fie μ_r măsura concentrată pe mulțimea:

$$\{x_1^r, \ldots, x_s^r\}, \quad s = 2^r$$

așa ca $\mu_r(\{x_j^r\}) = 2^{-r}$, $j = 1, \ldots, s$; atunci $\mu_r \in \mathcal{M}(\mathbf{G})$ și $\|\mu_r\| = 1$.

PROPOZIȚIE. *Măsurile* μ_r *converg slab către o măsură* $\mu \in M(\mathbf{G})$ *cu următoarele proprietăți*:

(i) $\operatorname{supp} \mu \subset \mathbf{P}$

(ii) $\|\mu\| = 1$

(iii) $\mu \geqslant 0$

(iv) μ continuă

(v) μ singulară în raport cu măsura Haar.

Fie $f \in \mathcal{C}_{00}(\mathbf{G})$; deoarece f este uniform continuă iar

$$\int f\,d\mu_r = \frac{1}{2^r} \sum_{j=1}^{s} f(x_j^r) \tag{1}$$

rezultă că șirul $\left\{\int f\,d\mu_r\right\}$ este convergent. Cum $\mathcal{C}_{00}(\mathbf{G})$ este dens în $\mathcal{C}_0(\mathbf{G})$ iar $\mathcal{M}(\mathbf{G})$ este dualul lui $\mathcal{C}_0(\mathbf{G})$ (conf. **1.6**), rezultă că șirul μ_r converge slab către o măsură $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{G})$ (conf. **15.19** (2)).

Să notăm

$$\mathbf{E}_r = \bigcup_{j=1}^{s} \mathbf{P}_j^r; \tag{2}$$

atunci $\mathbf{P} = \bigcap_{r=1}^{\infty} \mathbf{E}_r$.

Fie f o funcție continuă cu suportul compact $\mathbf{L}$ disjunct de $\mathbf{P}$. Un raționament standard bazat pe compacitatea lui $\mathbf{L}$ ne arată că există un r_0 așa ca $\mathbf{L} \cap \mathbf{E}_{r_0} = \emptyset$, deci pentru orice $r \geqslant r_0$ avem $\mathbf{L} \cap \mathbf{E}_r = \emptyset$. Rezultă

$$\int f\,d\mu = \lim_{r \geqslant r_0} \int f\,d\mu_r = 0.$$

Prin urmare $\operatorname{supp} \mu \subset \mathbf{P}$, ceea ce demonstrează (i).

Deoarece grupul $\mathbf{G}$ poate fi presupus metrizabil, deci un spațiu topologic normal — teorema lui Urysohn — ne dă o funcție $f \in \mathcal{C}_{00}(\mathbf{G})$ care este egală cu 1 pe $\mathbf{E}_1$. Cum $\operatorname{supp} \mu \in \mathbf{P}$, rezultă:

$$\|\mu\| = \int f\,d\mu = \lim_{r \to \infty} \int f\,d\mu_r = \lim_{r \to \infty} \|\mu_r\| = 1$$

ceea ce demonstrează (ii).

Punctul (iii) este trivial, iar punctul (ii) este implicat de (i) și de teorema **17.17**.

Să arătăm că μ este o măsură continuă. Fie $p \in \mathbf{P}$ și fie $\mathbf{A}_k(p)$ acel $\mathbf{P}_j^k$ pentru care $p \in \mathbf{P}_j^k$. Există o funcție $f \in \mathcal{C}_{00}^{+}(\mathbf{G})$ egală cu 1 pe $\mathbf{A}_k(p)$ și egală cu 0 pe ceilalți $\mathbf{P}_j^k$. Atunci avem:

$$0 \leqslant \mu(\{p\}) \leqslant \int f_k\,d\mu = \lim_{r \geqslant k} \int f_k\,d\mu_r = \frac{1}{2^k}\cdot$$

Cum k a fost arbitrar, rezultă $\mu(\{p\}) = 0$, deci μ este o măsură continuă.

Propoziţia este complet demonstrată.

17.19. TEOREMĂ. *Orice l.c.a.-grup nediscret* **G** *conţine o mulţime Cantor* **P** *cu proprietatea că orice funcţională liniară pe* $\mathcal{M}_c(\mathbf{P})$ *de normă* $\leqslant 1$ *poate fi extinsă pînă la un homomorfism complex al lui* $\mathcal{M}(\mathbf{G})$.

Demonstraţia acestei teoreme va fi dată în secţiunea **17.22** folosind lemele **17.20** şi **17.21**. Un comentariu al acestei teoreme se află în secţiunea **17.23**. Deocamdată reamintim (**1.6**) că $\mathcal{M}_c(\mathbf{X})$ este spaţiul măsurilor continue din $\mathcal{M}(\mathbf{X})$ şi că $\mathcal{M}_c(\mathbf{X})$ este un subspaţiu liniar şi închis în $\mathcal{M}(\mathbf{X})$ pentru **X** spaţiu local compact.

17.20. Proprietatea lui Darboux pentru măsuri. Fie μ o măsură pozitivă pe un semitrib $\mathcal{S}$; spunem că *o mulţime* $\mathbf{E} \in \mathcal{S}$ *are proprietatea lui Darboux* dacă pentru orice $0 < \alpha < \mu(\mathbf{E})$ există $\mathbf{E}_\alpha \in \mathcal{S}$, $\mathbf{E}_\alpha \subset \mathbf{E}$ aşa ca $\mu(\mathbf{E}_\alpha) = \alpha$; vom spune că *măsura* μ *are proprietatea lui Darboux* dacă orice $\mathbf{E} \in \mathcal{S}$ are proprietatea lui Darboux.

(1) LEMĂ. *Fie* μ *o măsură pozitivă pe un semitrib* $\mathcal{S}$. *Dacă* $\mathbf{E} \in \mathcal{S}$ *are măsura* σ*-finită şi dacă* **E** *nu are atomi, atunci* **E** *are proprietatea lui Darboux.*

Să presupunem mai întîi că $\mu(\mathbf{E}) < \infty$ şi fie $0 < \alpha < \mu(\mathbf{E})$. Vom găsi prin recurenţă două şiruri $\{\mathbf{A}_n\}$ şi $\{\mathbf{B}_n\}$ de mulţimi din $\mathcal{S}$ cu următoarele proprietăţi:

(i) $\mathbf{A}_0 \subset \mathbf{A}_1 \subset \ldots \subset \mathbf{A}_n \subset \ldots \subset \mathbf{B}_n \subset \ldots \subset \mathbf{B}_1 \subset \mathbf{B}_0 \subset \mathbf{E}$;

(ii) dacă notăm:

$$a_n = \sup\{\mu(\mathbf{A});\ \mu(\mathbf{A}) \leqslant \alpha,\ \mathbf{A}_{n-1} \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{B}_{n-1}\}$$

$$b_n = \inf\{\mu(\mathbf{B});\ \mu(\mathbf{B}) \geqslant \alpha,\ \mathbf{A}_n \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{B}_{n-1}\}$$

atunci:

1°) şirul $\{a_n\}$ este descrescător

2°) şirul $\{b_n\}$ este crescător

3°) $a_n \leqslant \alpha \leqslant b_n$;

(iii) există două şiruri $\varepsilon_n \downarrow 0$, $\eta_n \downarrow 0$ aşa încît:

$$a_n - \varepsilon_n < \mu(\mathbf{A}_n) \leqslant a_n$$

$$b_n \leqslant \mu(\mathbf{B}_n) < b_n + \eta_n.$$

În fapt, fie $r_n \downarrow 0$ şi să notăm:

$$a_0 = \sup\{\mu(\mathbf{A});\ \mathbf{A} \subset \mathbf{E},\ \mu(\mathbf{A}) \leqslant \alpha;$$

atunci $0 \leqslant a_0 \leqslant \alpha$ şi pentru $\varepsilon_0 > 0$ există o mulţime $\mathbf{A}_0 \in \mathcal{S}$, $\mathbf{A}_0 \subset \mathbf{E}$, aşa ca:

$$a_0 - \varepsilon_0 < \mu(A_0) \leqslant a_0.$$

Fie apoi

$$b_0 = \inf\{\mu(\mathbf{B});\ \mathbf{A}_0 \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{E},\ \mu(\mathbf{B}) \geqslant \alpha\};$$

atunci $\alpha \leqslant b_0 \leqslant \mu(\mathbf{E})$ şi pentru $\eta_0 > 0$ există o mulţime $\mathbf{B}_0 \in \mathcal{S}$, $\mathbf{A}_0 \subset \mathbf{B}_0 \subset \mathbf{E}$, aşa ca:

$$b_0 \leqslant \mu(\mathbf{B}_0) < b_0 + \eta_0.$$

Trecem acum la pasul următor; să notăm:

$$a_1 = \sup \{\mu(\mathbf{A});\ \mathbf{A}_0 \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{B}_0,\ \mu(\mathbf{A}) \leqslant \alpha\};$$

atunci $a_0 - \varepsilon_0 < a_1 \leqslant a_0$ şi luînd $0 < \varepsilon_1 < r_1$ aşa ca $a_0 - \varepsilon_0 < a_1 - \varepsilon_1$ există o mulţime $\mathbf{A}_1 \in \mathcal{S}$, $\mathbf{A}_0 \subset \mathbf{A}_1 \subset \mathbf{B}_0$ aşa ca:

$$a_1 - \varepsilon_1 < \mu(\mathbf{A}_1) \leqslant a_1.$$

Fie apoi

$$b_1 = \inf \{\mu(\mathbf{B});\ \mathbf{A}_1 \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{B}_2,\ \mu(\mathbf{B}) \geqslant \alpha\};$$

atunci $b_0 \leqslant b_1 < b_0 + \eta_0$ şi luînd $0 < \eta_1 < r_1$ aşa ca $b_1 + \eta_1 < b_0 + \eta_0$, există o mulţime $\mathbf{B}_1 \in \mathcal{S}$ cu $\mathbf{A}_1 \subset \mathbf{B}_1 \subset \mathbf{B}_0$ aşa ca:

$$b_1 \leqslant \mu(\mathbf{A}_1) < b_1 + \eta_1.$$

Să presupunem acum că am găsit $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ şi $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n$ pe de o parte, iar pe de altă parte $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ şi $\eta_1, \ldots, \eta_n$ verificînd condiţiile (i), (ii), (iii) pînă la pasul n inclusiv. Atunci vom nota:

$$a_{n+1} = \sup \{\mu(\mathbf{A});\ \mathbf{A}_n \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{B}_n,\ \mu(\mathbf{A}) \leqslant \alpha\};$$

atunci $a_n - \varepsilon_n < a_{n+1} \leqslant a_n$ şi luînd $0 < \varepsilon_{n+1} < r_{n+1}$ aşa ca $a_n - \varepsilon_n < a_{n+1} - \varepsilon_{n+1}$, există o mulţime $\mathbf{A}_{n+1} \in \mathcal{S}$ cu $\mathbf{A}_n \subset \mathbf{A}_{n+1} \subset \mathbf{B}_n$ aşa ca:

$$a_{n+1} - \varepsilon_{n+1} < \mu(\mathbf{A}_{n+1}) \leqslant a_{n+1}.$$

Fie apoi

$$b_{n+1} = \inf \{\mu(\mathbf{B});\ \mathbf{A}_{n+1} \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{B}_n,\ \mu(\mathbf{B}) \geqslant \alpha\};$$

atunci $b_n \leqslant b_{n+1} < b_n + \eta_n$ şi luînd $0 < \eta_{n+1} < r_{n+1}$ aşa ca $b_{n+1} + \eta_{n+1} < b_n + \eta_n$, obţinem o mulţime $\mathbf{B}_{n+1} \in \mathcal{S}$, cu $\mathbf{A}_{n+1} \subset \mathbf{B}_{n+1} \subset \mathbf{B}_n$ aşa ca:

$$b_{n+1} \leqslant \mu(\mathbf{B}_{n+1}) < b_{n+1} + \eta_{n+1}.$$

Cu acestea construcţia anunţată a fost efectuată.

Cum şirurile $\{a_n\}$ şi $\{b_n\}$ sînt monotone şi mărginite, ele au limita a şi respectiv b şi avem:

$$0 \leqslant a \leqslant \alpha \leqslant b \leqslant \mu(\mathbf{E}) < \infty.$$

Pe de altă parte, mulţimile

$$\mathbf{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}_n \quad \text{şi} \quad B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{B}_n$$

aparţin lui $\mathcal{S}$ şi avem:

$$\mathbf{A}_n \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{B}_n \subset \mathbf{E},$$

iar din (iii) deducem:

$$(1) \quad \mu(\mathbf{A}) = \lim_{n \to \infty} \mu(\mathbf{A}_n) = a$$

$$(2) \quad \mu(\mathbf{B}) = \lim_{n \to \infty} \mu(\mathbf{B}_n) = b \qquad \text{(aici ipoteza } \mu(\mathbf{E}) < \infty\text{).}$$

Fie $\mathbf{C} \in \mathcal{S}$ aşa ca $\mathbf{C} \subset \mathbf{B} \setminus \mathbf{A}$; atunci, evident:

$$(3) \quad \mathbf{A}_n \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{A} \cup \mathbf{C} \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{B}_n,\ n = 0, 1, \ldots;$$

dacă $\mu(\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) < \infty$, atunci din (i) și (ii) deducem :

(4) $a_n - \varepsilon_n \leqslant \mu(\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) \leqslant a_{n+1}, \ n = 0, 1, \ldots ;$

dacă $\mu(\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) > \alpha$, atunci din (i) și (ii) deducem :

(5) $b_{n+1} \leqslant \mu(\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) \leqslant b_n + \eta_n .$

În primul caz rezultă $\mu(\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) = a$, deci $\mu(\mathbf{C}) = \mu(\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) - \mu(\mathbf{A}) = 0$, iar în al doilea caz rezultă $\mu(\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) = b$, deci $\mu(\mathbf{C}) = \mu(\mathbf{B}) - \mu(\mathbf{A}) = \mu(\mathbf{B} - \mathbf{A})$; cum $\mathbf{C} \subset \mathbf{B} \setminus \mathbf{A}$ a fost arbitrar, și cum $\mathbf{E}$ nu are atomi, rezultă $\mu(\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}) = 0$, deci $a = \alpha = b$, adică $\mu(\mathbf{A}) = \mu(\mathbf{B}) = \alpha$, q.e.d.

Să presupunem acum că $\mathbf{E}$ este de măsură σ-finită ; să punem $\mathbf{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n$ cu $\mathbf{E}_n \in \mathcal{S}$, $\mu(\mathbf{E}_n) < \infty$; putem considera mulțimile $\mathbf{E}_n$ disjuncte și $\mu(\mathbf{E}_n) > 0$ pentru orice n. Dacă $\alpha > 0$, se poate găsi un șir $\{\alpha_n\}$ așa ca $0 < \alpha_n < \mu(\mathbf{E}_n)$ și $\sum_{0}^{\infty} \alpha_n = \alpha$. Pentru fiecare n se poate găsi o mulțime $\mathbf{A}_n \in \mathcal{S}$ cu $\mathbf{A}_n \subset \mathbf{E}_n$ și $\mu(\mathbf{A}_n) = \alpha_n$. Mulțimile $\mathbf{A}_n$ sînt disjuncte, $\mathbf{A} = \bigcup_{1}^{\infty} \mathbf{A}_n \in \mathcal{S}$, $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}$ și

$$\mu(\mathbf{A}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\mathbf{A}_n) = \alpha .$$

(2) COROLAR. O măsură pozitivă σ-finită și fără atomi pe un semitrib are proprietatea lui Darboux.

(3) LEMĂ. Fie $\mathbf{X}$ un spațiu local compact și $\mu \in \mathcal{M}_c(\mathbf{X})$. Atunci μ nu are atomi.

În cazul contrar fie $\mathbf{E}$ un atom al lui μ ; putem, desigur, să presupunem că $\mu(\mathbf{E}) = 1$. Din regularitatea măsurii μ rezultă că există $\mathbf{K} \subset \mathbf{E}$, compact cu $\mu(\mathbf{K}) = 1$; familia mulțimilor $\mathbf{K}$ cu aceste proprietăți este inductiv ordonată (în „jos''), deci admite un element minimal $\mathbf{K}_0$; atunci $\mathbf{K}_0 \subset \mathbf{E}$, compactă, $\mu(\mathbf{K}_0) = 1$ și pentru orice $\mathbf{K} \subset \mathbf{E}$, compact, $\mathbf{K} \subset \mathbf{K}_0$, $\mathbf{K} \neq \mathbf{K}_0$ avem $\mu(\mathbf{K}) = 0$. Vom arăta că $\mathbf{K}_0$ are un singur element ; într-adevăr, în caz contrar fie $x_0 \in \mathbf{K}_0$, $\mathbf{V}$ o vecinătate compactă a lui x_0 în $\mathbf{X}$ iar $\mathbf{D} = \operatorname{int} \mathbf{V}$.

Fie $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_0 \cap \mathbf{D}'$; cum însă $\mathbf{V}$ poate fi aleasă astfel încît $\mathbf{K}_1 \neq \mathbf{K}_0$ (deoarece $\mathbf{X}$ este separat), rezultă $\mathbf{K}_1 \subset \mathbf{K}_0$, $\mathbf{K}_1 \neq \mathbf{K}_0$, $\mathbf{K}_1$ compactă. Fie apoi $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_0 \cap \mathbf{V}$; atunci $\mathbf{K}_2$ este tot o parte strictă și compactă a lui $\mathbf{K}_0$. Din cele de mai sus rezultă $\mu(\mathbf{K}_0) \leqslant \mu(\mathbf{K}_1) + \mu(\mathbf{K}_2) = 0$, absurd, căci $\mu(\mathbf{K}_0) = 1$.

Am obținut deci că $\mathbf{K}_0 = \{x_0\}$ și $\mu(\mathbf{K}_0) = 1$, ceea ce contrazice faptul că μ este o măsură continuă.

(4) COROLAR. *Dacă* $\mathbf{X}$ *este spațiu local compact iar* $\mu \in \mathcal{M}_c(\mathbf{X})$, *atunci* μ *are proprietatea lui Darboux.*

17.21. LEMĂ. *Fie* $\mathbf{P}$ *o mulțime compactă și independentă din* $\mathbf{G}$ *iar* $\mu_1, \ldots, \mu_r \in \mathcal{M}_c^+(\mathbf{G})$ *concentrate pe mulțimi disjuncte* $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_r$ *din* $\mathbf{P}$ *așa ca* $\|\mu_i\| = 1$, $i = 1, \ldots, r$. *Dacă* $z_1, \ldots, z_r$ *sînt numere complexe și* $|z_i| \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, r$, *atunci există un homomorfism complex* h *al lui* $\mathcal{M}(\mathbf{G})$ *așa ca*

$$h(\mu_i) = z_i , \quad 1 \leqslant i \leqslant r . \tag{1}$$

Pentru demonstraţie precizăm cîteva notaţii : pentru $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{G})$ şi $n \in \mathbf{N}$, $\mu^n = \mu \ast \ldots \ast \mu$ (de n ori) ; pentru $\mathbf{E} \subset \mathbf{G}$ şi $n \in \mathbf{N}$, $n\mathbf{E} = \mathbf{E} + \ldots + \mathbf{E}$ (de n ori) ; vom mai nota :

$$\mathbf{S}(n_1, \ldots, n_r) = n_1 \mathbf{E}_1 + \ldots + n_r \mathbf{E}_r$$

$$\begin{cases} \lambda = \mu_1^{n_1} \ast \ldots \ast \mu_r^{n_r} \\ \nu = \mu_1^{m_1} \ast \ldots \ast \mu_r^{m_r} \end{cases} ; \quad n_1 + \ldots + n_r \geqslant m_1 + \ldots + m_r .$$

Din ipoteză şi din **1.17** (1) deducem că λ este concentrată pe $\mathbf{S}(n_1, \ldots, n_r)$, iar ν este concentrată pe $\mathbf{S}(m_1, \ldots, m_r)$. Să notăm

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(n_1, \ldots, n_r) \cap \mathbf{S}(m_1, \ldots, m_r) ;$$

atunci fiecare $x \in \mathbf{S}$ are două reprezentări :

$$(2) \qquad \begin{aligned} &(x_1^1 + \ldots + x_1^{n_1}) + \ldots + (x_r^1 + \ldots + x_r^{n_r}) = \\ &= (y_1^1 + \ldots + y_1^{m_1}) + \ldots + (y_r^1 + \ldots + y_r^{m_r}) , \end{aligned}$$

unde $x_i^k \in \mathbf{E}_i$ şi $y_i^k \in \mathbf{E}_i$.

Pentru $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{G})$ şi $n \in \mathbf{N}$ vom nota

$$\mu^{(n)} = \mu \otimes \ldots \otimes \mu , \quad \text{(de } n \text{ ori)} .$$

Fie **D** mulţimea tuturor $x \in \mathbf{S}(n_1, \ldots, n_r)$ aşa ca în orice reprezentare de forma

$$x = x_1^1 + \ldots + x_1^{n_1} + \ldots + x_r^1 + \ldots + x_r^{n_r} ; \; x_i^j \in \mathbf{E}_i$$

sau un $x_i^j = 0$, *sau* există $i, j, k, j \neq k$, pentru care $x_i^j = x_i^k$; fie apoi $\widetilde{\mathbf{D}}$ mulţimea tuturor punctelor $(x_1^1, \ldots, x_1^{n_1}, \ldots, x_r^1, \ldots, x_r^{n_r}) \in \mathbf{G}^{n_1 + \ldots + n_r}$ cu proprietatea că *sau* $x_i^j = 0$, *sau* există $i, j, k, j \neq k$, pentru care $x_i^j = x_i^k$.

Se vede uşor că

$$(3) \qquad \begin{aligned} \lambda(\mathbf{D}) = (\mu_1^{n_1} \ast \ldots \ast \mu_r^{n_r})(\mathbf{D}) = (\mu_1^{(n_1)} \otimes \ldots \otimes \mu_r^{(n_r)})(\mathbf{D}_{n_1 + \ldots + n_r}) \leqslant \\ \leqslant (\mu_1^{(n_1)} \otimes \ldots \otimes \mu_r^{(n_r)} (\widetilde{\mathbf{D}}) \end{aligned}$$

căci $\mathbf{D}_{n_1 + \ldots + n_r} \subset \widetilde{\mathbf{D}}$ (pentru notaţii vezi **1.14**).

Pe de altă parte, aplicînd teorema lui Fubini, din continuitatea măsurilor μ_i rezultă că :

$$(\mu_1^{(n_1)} \otimes \ldots \otimes \mu_r^{(n_r)})(\widetilde{\mathbf{D}}) = 0.$$

Prin urmare $\lambda(\mathbf{D}) = 0$, deci dacă $\lambda(\mathbf{S}) > 0$, există $x \in \mathbf{S}$ şi o reprezentare a sa cu toate x_i^j distincte şi nenule. Cum x se scrie şi cu ajutorul lui y_i^k (vezi relaţia (2)) şi $\sum n_i \geqslant \sum m_i$, din independenţa lui **P** rezultă că y_i^k sînt permutări ale elementelor x_i^j şi cum $\mathbf{E}_i$ sînt disjuncte, rezultă că $n_i = m_i$ pentru orice $i = 1, \ldots, r$.

Din cele de mai sus rezultă că λ *şi* ν *sînt mutual singulare de îndată ce pentru un* i *avem* $m_i \neq n_i$. Reamintim că dacă λ şi ν sînt mutual singulare, atunci $\|\lambda + \nu\| = \|\lambda\| + \|\nu\|$. Deci, conf. celor de mai sus, cu ipotezele şi cu **1.17**. (2) rezultă că *dacă* f *este un polinom în* r *variabile* :

$$(4) \qquad f(t_1, \ldots, t_r) = \sum a(n_1, \ldots, n_r)\, t_1^{n_1} \ldots t_r^{n_r} ,$$

atunci avem :

$$\|f(\mu_1, \dots, \mu_r)\| = \sum |a(n_1, \dots, n_r)|. \tag{5}$$

Cu aceste pregătiri să *demonstrăm lema în cazul particular* :

$$|z_i| = 1, \qquad i = 1, \dots, r. \tag{6}$$

Vom pune

$$\sigma = \delta_0 + \bar{z}_1 \mu_1 + \dots + \bar{z}_r \mu_r \tag{7}$$

și vom considera polinomul

$$(t_0 + t_1 + \dots + t_r)^n = \sum a(n_0, n_1, \dots, n_r)\, t_0^{n_0} t_1^{n_1} \dots t_r^{n_r}\,; \tag{8}$$

punînd $t_0 = t_1 = \dots = t_r = 1$ obținem :

$$\sum a(n_0, n_1, \dots, n_r) = (r + 1)^n \tag{9}$$

iar punînd $t_0 = \delta_0$, $t_i = \bar{z}_i \mu_i$ $(i = 1, \dots, r)$ rezultă, conf. (5) și (9), că

$$\|\sigma^n\| = (r + 1)^n. \tag{10}$$

Prin urmare rezultă că $\|\sigma\|_{sp} = r+1$; cum însă $\mathcal{M}(\mathbf{G})$ este comutativă $\|\sigma\|_{sp} = \|\sigma^\wedge\|_\infty = \sup\{|h(\sigma)|\,;\ h \in \mathbf{\Delta}\}$ și cum $\mathcal{M}(\mathbf{G})$ au unitate, deci $\mathbf{\Delta}$ este compact, superiorul este atins, deci există $h \in \mathbf{\Delta}$ așa ca $|h(\sigma)| = r+1$, adică

$$|1 + \bar{z}_1 h(\mu_1) + \dots + \bar{z}_r h(\mu_r)| = r + 1. \tag{11}$$

Cum însă $|h(\mu_i)| \leqslant 1$ pentru orice $i = 1, \dots, r$, din (11) rezultă că $\bar{z}_i h(\mu_i) = 1$, adică $h(\mu_i) = z_i (i = 1, \dots, r)$ q.e.d. (a se vedea lema(*) de mai jos).

Demonstrăm acum cazul general al lemei ; pentru fiecare $|z_i| \leqslant 1$ există z_i' și z_i'' cu $|z_i'| = |z_i''| = 1$ așa ca $z_i = 1/2\,(z_i' + z_i'')$ (a se vedea lema (*) de mai jos). Din lema **17.20** (4) deducem că pentru fiecare i putem scrie $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_i' \cup \mathbf{E}_i''$, unde $\mathbf{E}_i' \cap \mathbf{E}_i'' = \emptyset$ și $\mu_i(\mathbf{E}_i') = \mu_i(\mathbf{E}_i'') = \dfrac{1}{2}$. Dacă μ_i', μ_i'' sînt restricțiile lui μ_i la $\mathbf{E}_i'$ și $\mathbf{E}_i''$, atunci cazul special de mai sus se aplică măsurilor $2\mu_1'$, $2\mu_1'', \dots, 2\mu_r'$, $2\mu_r''$ și se obține $h \in \mathbf{\Delta}$ așa ca :

$$2h(\mu_i') = z_i', \qquad 2h(\mu_i'') = z_i'', \qquad i = 1, \dots, r \tag{12}$$

Acesta este homomorfismul căutat.

(*) LEMĂ. (i) *Dacă* $|1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_r| = r+1$ *și* $|\alpha_k| \leqslant 1$ *pentru orice* k, *atunci* $\alpha_k = 1$ *pentru orice* k.

(ii) *Dacă* $|z| \leqslant 1$, *atunci există* $|z'| = |z''| = 1$ *așa ca* :

$$z = 1/2\,(z' + z'').$$

(i) Să observăm mai întîi că dacă $|\alpha| \leqslant 1$ și $|r+\alpha| = r+1$, atunci, $\alpha = 1$; într-adevăr, dacă $\alpha = a+ib$, $a^2+b^2 \leqslant 1$ și $(r+a)^2 + b^2 = (r + 1)^2$, atunci avem succesiv :

$$\begin{aligned} &a^2 + b^2 = 2r(1-a) + 1\,; \\ &2r(1 + a) + 1 \leqslant 1\,; \\ &2r(1 - a) \leqslant 0\,; \\ &a \geqslant 1. \end{aligned}$$

și de aici, deoarece $|a| \leqslant 1$, $a = 1$, $b = 0$ deci $\alpha = 1$.

Acum rezultatul dorit se obţine prin inducţie : pentru $r=1$ punctul (i), rezultă din observaţia de mai sus cu $r = 1$; să presupunem acum afirmaţia adevărată pentru $r-1$; atunci avem :

$$1 + r = |1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{r-1} + \alpha_r| \leqslant |1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{r-1}| + 1$$

de unde

$$r \leqslant |1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{r-1}| \leqslant r$$

adică

$$|1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{r-1}| = r = (r-1) + 1$$

şi conf. presupunerii inductive, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{r-1} = 1$; ipoteza se reduce la $|r + \alpha_r| = r + 1$, $|\alpha_r| \leqslant 1$ şi deci, conf. observaţiei de mai sus, $\alpha_r = 1$. q.e.d.

(ii) Justificare geometrică imediată.

17.22. Demonstraţia teoremei 17.19. Conf. **17.12**, **G** conţine o mulţime Cantor strict independentă **P**. Fie L o funcţională liniară pe $\mathcal{M}_c(\mathbf{P})$ cu $\|L\| \leqslant 1$. Pentru $\mu \in \mathcal{M}_c(\mathbf{P})$ şi $\varepsilon > 0$, fie :

$$\mathbf{H}(\mu, \varepsilon) = \{h \in \Delta ; |h(\mu) - L(\mu)| \leqslant \varepsilon\} = \tag{1}$$
$$= \{h \in \Delta ; |\mu\hat{}(h) - L(\mu)| \leqslant \varepsilon\}.$$

Cum Δ este compact iar $\mu\hat{}$ este continuă, rezultă că $\mathbf{H}(\mu, \varepsilon)$ este compact. Vom arăta că *familia tuturor mulţimilor* $\mathbf{H}(\mu, \varepsilon)$ *are proprietatea intersecţiei finite.* De aici va rezulta existenţa unui $h_0 \in \mathbf{H}(\mu, \varepsilon)$ pentru orice $\mu \in \mathcal{M}_c(\mathbf{P})$ şi orice $\varepsilon > 0$; adică pentru orice $\mu \in \mathcal{M}_c(\mathbf{P})$ vom avea :

$$h_0(\mu) = L(\mu) \tag{2}$$

ceea ce va demonstra teorema.

Fie deci $\mu_1, \ldots, \mu_r \in \mathcal{M}_c(\mathbf{P})$; $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r > 0$; să punem $\sigma = \sum |\mu_i|$, unde $|\mu_i|$ este variaţia totală a lui μ_i ; cum μ_i este absolut continuă în raport cu σ, teorema Radon-Nicodym ne dă o funcţie boreliană f_i aşa încît $d\mu_i = f_i\, d\sigma$; apoi găsim funcţiile boreliene simple g_i pe **P** aşa ca :

$$\int_{\mathbf{P}} |f_i - g_i|\, d\sigma < \frac{\varepsilon_i}{2}, \qquad i = 1, \ldots, r, \tag{3}$$

şi notăm $d\tau_i = g_i d\sigma$. Atunci $|\tau_i - \mu_i| = |g_i \cdot \sigma - f_i \cdot \sigma| = |(g_i - f_i)\sigma| = |g_i - f_i| \cdot \sigma$ şi deci :

$$\|\tau_i - \mu_i\| = \int_{\mathbf{P}} d|\tau_i - \mu_i| = \int_{\mathbf{P}} |f_i - g_i| d\sigma < \frac{\varepsilon_i}{2} \qquad i = 1, \ldots, r. \tag{4}$$

Putem scrie pe **P** ca o reuniune finită de mulţimi boreliene disjuncte $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ aşa ca g_i să fie constantă ($=c_{ik}$) pe fiecare $\mathbf{A}_k$, pentru orice i şi k. Fie σ_k restricţia lui σ la A_k. Deoarece $\|L\| \leqslant 1$, lema **17.21** ne asigură existenţa unui $h \in \Delta$ aşa ca $h(\sigma_k) = L(\sigma_k)$ pentru orice $k = 1, \ldots, n$. Cum :

$$\tau_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\, \sigma_k, \qquad i = 1, \ldots, r, \tag{5}$$

rezultă

$$(6)\quad h(\tau_i) = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\, h(\sigma_k) = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\, L(\sigma_k) = L(\tau_i), \qquad i = 1, \ldots, r$$

şi cum $\|L\| \leqslant 1$ şi $\|h\| \leqslant 1$, deducem :

$$(7)\quad |h(\mu_i) - L(\mu_i)| \leqslant |h(\mu_i - \tau_i)| + |L(\tau_i - \mu_i)| \leqslant$$

$$\leqslant 2\|\mu_i - \tau_i\| < \varepsilon_i, \qquad i=1,\ldots,r.$$

Prin urmare $h \in \mathbf{H}(\mu_i, \varepsilon_i)$ pentru orice i şi deci aceste mulţimi au o intersecţie nevidă, q.e.d.

17.23. Comentarii. (1) Să aplicăm rezultatul obţinut în cazul particular $\mathbf{G} = \mathbf{D}_2$; avem următoarea :

PROPOZIŢIE. *Fie* $\mathbf{P}$ *o mulţime Cantor independentă în* $\mathbf{D}_2$ *iar* μ *o măsură reală şi continuă concentrată pe* $\mathbf{P}$, *cu* $\|\mu\| = 1$. *Atunci* $\mu^\wedge$ (transformata Fourier-Stieltjes) *este o funcţie reală dar spectrul lui* μ (= imaginea transformării Ghelfand) *este întreg cercul unitate.*

Într-adevăr, deoarece fiecare $x \in \mathbf{D}_2$ are ordinul 2, caracterele lui $\mathbf{D}_2$ sînt homomorfisme în $\mathbf{Z}_2$, deci au numai valorile ± 1. Prin urmare $\mu^\wedge$ (transformata Fourier-Stieltjes) este reală. Dacă $|z| \leqslant 1$, cu ajutorul teoremei Hahn-Banach găsim o funcţională liniară L pe $\mathcal{M}_c(\mathbf{P})$ aşa încît $\|L\| \leqslant 1$ şi $L(\mu) = z$; conf. **17.19**, L se extinde la un homomorfism $h \in \Delta$ şi deci $h(\mu) = z$; cum z a fost arbitrar, propoziţia este complet demonstrată.

(2) Teorema **17.19** ne furnizează un exemplu de subspaţiu *infinit dimensional* $\mathbf{X}$ al unei algebre Banach $\mathcal{A}$ cu proprietatea că orice funcţională liniară de normă $\leqslant 1$ se extinde la un homomorfism complex al lui $\mathcal{A}$. Această afirmaţie are la bază următoarea :

LEMĂ. *Dacă* $\mathbf{X}$ *este un spaţiu metric perfect, atunci* $\mathcal{M}_c(\mathbf{X})$ *este infinit dimensional.*

Mai mult, se pare că acesta a fost primul exemplu în acest sens. Totuşi, acest fenomen nu este singular (vezi Rudin [26], 5.4.5).

17.24. În cele ce urmează ne vom ocupa de transformările Fourier-Stieltjes ale măsurilor concentrate pe mulţimi Kronecker şi pe mulţimi de tip K_q. În acest scop ne este necesară următoarea :

LEMĂ. *Fie* $\mathbf{X}$ *un spaţiu compact iar* $U = \{f \in \mathcal{C}(\mathbf{X})\,;\ |f| = 1\}$.

(i) *Dacă* $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{X})$, *atunci* $\|\mu\| = \sup\left\{\left|\int f\,\mathrm{d}\mu\right|;\ f \in U\right\}$.

(ii) *Dacă* $\mu \in \mathcal{M}_c(\mathbf{X})$, *atunci mulţimea* :

$$\left\{\int f\,\mathrm{d}\mu\,;\ \ f \in U\right\}$$

este densă în discul $|z| \leqslant \|\mu\|$.

Vom demonstra mai întîi punctul (ii). Să presupunem că $\|\mu\| = 1$, ceea ce nu restrînge generalitatea şi fie $|z| \leqslant 1$ fixat şi > 0. Atunci — conf. **17.21** (*) (ii) — putem scrie $z = z_1 + z_2$ cu $|z_1| = |z_2| = \dfrac{1}{2}$, iar cum μ este continuă, $\mathbf{X}$ se poate scrie ca reuniunea a două mulţimi disjuncte X_1, X_2 aşa ca $\mu(X_1) = \mu(X_2) = 1/2$ (conf. **17.20** (4)). Conf. teoremei Radon-Nikodym există o funcţie boreliană φ pe X aşa ca $|\varphi| = 1$ şi $\varphi\, d\mu = = d|\mu|$; dacă $z_k = \alpha_k |z_k|$ cu $|\alpha_k| = 1$ şi $\varphi_k = \alpha_k \varphi$, atunci $|\varphi_k| = 1$ $(k = 1,2)$ şi avem:

$$(1) \qquad \int_{X_k} \varphi_k\, d\mu = \alpha_k \int_{X_k} d|\mu| = \alpha_k \frac{1}{2} = \alpha_k |z_k| = z, \qquad (k = 1, 2);$$

cum φ_k este boreliană, există g_k boreliană, $0 \leqslant g_k \leqslant 2\pi$, aşa ca $\varphi_k = e^{ig_k}$ $(k = 1, 2$; am folosit $|\varphi_k| = 1)$. Prin urmare,

$$(2) \qquad \int_{X_k} e^{ig_k} d\mu = z_k, \qquad (k = 1, 2);$$

dacă definim

$$(3) \qquad g = \begin{cases} g_1 & \text{pe } X_1 \\ g_2 & \text{pe } X_2 \end{cases},$$

atunci g este încă boreliană pe X şi $0 \leqslant g \leqslant 2\pi$; în plus

$$(4) \qquad \int_X e^{ig} d\mu = z.$$

Conf. teoremei lui Luzin, există $h \in C(X)$, $0 \leqslant h \leqslant 2\pi$, aşa încît $h = g$ în complementara unei mulţimi E cu $|\mu|(E) < \varepsilon/2$. Punînd $f = e^{ih}$, obţinem:

$$(5) \qquad \left| \int_X f\, d\mu - z \right| = \left| \int_E (e^{ih} - e^{ig})\, d\mu \right| \leqslant 2|\mu|(E) < \varepsilon$$

ceea ce demonstrează (ii).

Pentru a demonstra (i) se găseşte ca mai sus o funcţie boreliană g, $0 \leqslant g \leqslant 2\pi$, aşa ca

$$(6) \qquad \|\mu\| = \int e^{ig}\, d\mu$$

şi se aplică, ca mai sus, teorema lui Luzin.

17.25. TEOREMĂ. *Fie* **P** *o mulţime Kronecker compactă în l.c.a.-grupul* **G**.

(i) *Dacă* $\mu \in \mathcal{M}(P)$, *atunci* $\|\mu^\wedge\|_\infty = \|\mu\|$.

(ii) *Dacă* $\mu \in \mathcal{M}_c(P)$, *atunci* $\mu^\wedge$ *aplică pe* Γ *pe o parte densă a discului* $|z| \leqslant \|\mu\|$.

(i) Fie $\varepsilon > 0$; conf. **17.24** (i) există $f \in \mathcal{C}(P)$ cu $|f| = 1$ aşa ca

$$(1) \qquad \left| \left| \int f\, d\mu \right| - \|\mu\| \right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

dar, deoarece P este o mulţime Kronecker, există $\gamma \in \Gamma$ aşa ca

$$(2) \qquad \sup_{x \in P} |f(x) - (-x, \gamma)| < \frac{\varepsilon}{2} \|\mu\|;$$

deducem

$$(3)\qquad \left|\int f\,\mathrm{d}\mu - \mu^{\wedge}(\gamma)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

și, prin urmare,

$$(4)\qquad \big|\,|\mu^{\wedge}(\gamma)| - \|\mu\|\,\big| < \varepsilon, \qquad \text{q.e.d.}$$

(ii) Se demonstrează absolut analog, folosind **17.24** (ii)

17.26. Note. (1) Atît **17.24** (ii) cît și **17.25** (ii) ne arată că fenomenul de la **17.23** (i) nu este singular.

(2) Din **17.25** (i) rezultă că pe $\mathcal{M}(\mathbf{P})$ normele $\|\mu\|$ și $\|\mu^{\wedge}\|_{\infty}$ sînt norme echivalente. Deci (conf. § **19**) orice *mulțime Kronecker compactă este o mulțime Helson.*

(3) Se pune în mod natural *problema dacă proprietatea* **17.25** (i) *caracterizează mulțimile Kronecker.* După cum vom vedea în secțiunea următoare, răspunsul este *negativ.* În particular, rezultă că *există mulțimi Helson care nu sînt mulțimi Kronecker.*

17.27. Fie $\mathbf{X}$ un spațiu compact (separat) iar $\mathbf{U}$ grupul funcțiilor complexe continue unimodulare pe $\mathbf{X}$. Fie apoi Γ un subgrup al lui $\mathbf{U}$ care separă punctele lui $\mathbf{X}$; Γ este considerat cu topologia discretă. Fie $\mathbf{G}$ dualul (compact) al lui Γ.

(1) Lemă. (i) $\mathbf{X}$ *se identifică topologic cu o parte a lui* $\mathbf{G}$.

(ii) $\mathbf{X}$ *este o mulțime Kronecker în* $\mathbf{G}$ *dacă și numai dacă* Γ *este dens în* $\mathbf{U}$ *în raport cu topologia uniformă din* $\mathcal{C}(\mathbf{X})$.

Dacă (i) este demonstrat, atunci (ii) este o traducere imediată a definiției **17.3**. Pentru a demonstra pe (i) definim o aplicație $\mathbf{X} \to \mathbf{G}$ asociind fiecărui $x \in \mathbf{X}$ un caracter $x^{\wedge}$ pe Γ definit prin $x^{\wedge}(f) = f(x)$; $f \in \Gamma$. Aplicația $x \to x^{\wedge}$ este *injectivă* deoarece Γ separă punctele lui $\mathbf{X}$. Rămîne de arătat (conf. [2], ch. I, § 10, corolar 2, th. 2) că această aplicație este continuă în raport cu topologia inițială pe $\mathbf{X}$ și topologia de dualitate (**2.7**; **2.11**) pe $\mathbf{G}$. Însă pentru aceasta este suficient să arătăm că pentru orice $F \in \mathcal{L}^1(\Gamma)$, funcția $F^{\wedge}$ este continuă pe $\mathbf{X}$ (conf. **2.7**); dar, dacă $F \in \mathcal{L}^1(\Gamma)$, atunci

$$(1)\qquad \sum_{f\in\Gamma} |F(f)| < \infty$$

și

$$(2)\qquad F^{\wedge}(x) = \sum_{f\in\Gamma} F(f)\, f(x), \qquad x \in \mathbf{X}$$

ar de aici rezultă ușor că F este continuă pe $\mathbf{X}$. q.e.d.

Vom obține deci un răspuns negativ la problema **17.26** (3) dacă vom găsi un spațiu $\mathbf{X}$ și un subgrup propriu Γ al lui $\mathbf{U}$ care să fie uniform închis, dar pentru care să fie satisfăcută relația **17.25** (i); într-adevăr, atunci $\mathbf{X}$ nu va fi o mulțime Kronecker în $\mathbf{G}$.

Fie $\mathbf{X} = [0, 1]$ iar $\Gamma = \{\exp\,(if);\ f \in \mathcal{C}^r(\mathbf{X}), \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0\}$; vom mai nota prin K subgrupul lui $\mathbf{U}$ format de funcțiile constante.

Avem

(2) LEMĂ. (i) $\boldsymbol{\Gamma}$ *este uniform închis în* $\mathscr{C}(\mathbf{X})$.

(ii) $\mathbf{U} = \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{K}$; *în particular* $\boldsymbol{\Gamma}$ *este subgrup propriu în* $\mathbf{U}$.

(iii) *Pentru orice* $\mu \in \mathscr{M}(\mathbf{X})$ *avem* $\|\mu\| = \|\mu^\wedge\|_\infty$.

Demonstrăm punctul (i) :

Definim aplicaţia $p : \mathbf{U} \to \mathbf{K}$ prin

$$p(\mathrm{e}^{if}) = \mathrm{e}^{i\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Din conexiunea lui $[0, 1]$ rezultă că

$$\mathrm{e}^{if} = \mathrm{e}^{ig} \Rightarrow f - g \equiv 2n\pi,\ n \text{ întreg constant} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{e}^{i\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{i\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x}$$

deci p este bine definită. Se vede uşor că p este un proiector al lui $\mathbf{U}$ pe $\mathbf{K}$. El este continuu cu topologia convergenţei uniforme în $\mathbf{U}$:

Pentru $\varepsilon > 0$ există $\eta > 0$ cu

$$|\mathrm{e}^{i\alpha} - 1| < \eta \Rightarrow \text{ex } n \text{ întreg cu } |\alpha - 2n\pi| < \varepsilon.$$

Atunci din conexiunea lui $[0, 1]$ rezultă că

$$\|\mathrm{e}^{if} - 1\|_\infty < \eta \Rightarrow \text{ex } n \text{ întreg constant cu } \|f - 2n\pi\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - 2n\pi\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\mathrm{e}^{i\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x} - 1\right| =$$

$$= \left|\mathrm{e}^{i\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x} - \mathrm{e}^{i2n\pi}\right| \leqslant \left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - 2n\pi\right| < \varepsilon$$

deci p este continuu în origine.

Acum $\boldsymbol{\Gamma} = p^{-1}(0)$, deci este închis.

Punctul (iii) rezultă cu uşurinţă din (ii) şi din lema **17.24** (i). Fie acum $u \in \mathbf{U}$; atunci există o funcţie continuă h cu $0 \leqslant h \leqslant 2\pi$ aşa ca $u = \exp(ih)$. Fie $c = \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$, $k = \exp(ic)$ şi $f = h - c$; evident, vom avea $u = k.\exp(if)$ şi deci (ii) este demonstrat. q.e.d.

17.28. TEOREMĂ. *Fie* $\mathbf{P}$ *o mulţime compactă de tip* K_q *în* $\mathbf{D}_q$ *şi* $\mu \in \mathscr{M}(\mathbf{P})$. *Atunci* $\|\mu^\wedge\|_\infty \geqslant \frac{1}{2}\|\mu\|$.

Fără a restrînge generalitatea, putem presupune $\|\mu\| = 1$. Conf. teoremei Radon-Nikodym, există o funcţie boreliană g pe $\mathbf{P}$ aşa ca $|g| = 1$ şi $g\mathrm{d}\mu = \mathrm{d}|\mu|$. Există o funcţie boreliană α pe $\mathbf{P}$ aşa ca

$$h(x) = \mathrm{e}^{i\alpha(x)} g(x) \in \mathbf{Z}_q, \qquad x \in \mathbf{P} \tag{1}$$

$$-\frac{\pi}{q} \leqslant \alpha(x) \leqslant \frac{\pi}{q}, \qquad x \in \mathbf{P}. \tag{2}$$

Într-adevăr, dacă $g(x) = \exp(i\theta(x))$ (cu θ boreliană), atunci alegem pe $\alpha(x)$ aşa ca $\alpha(x) + \theta(x) = 2\pi j_x/q$ $(0 \leqslant j_x \leqslant q - 1)$, unde j_x

este astfel ales încît $2\pi j_x/q$ să fie cel mai apropiat punct din Z_q de $\theta(x)$. Atunci există o partiție boreliană a lui **P** (fie ea $\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_{q-1}$) așa ca

$$\alpha = \sum_{j=1}^{q-i} \alpha_j \tag{3}$$

$$\alpha_j(x) = \varphi_{\mathbf{Y}_j}(x)\ [2\pi j/q - \theta(x)], \qquad j = 1, \ldots, q-1, \tag{4}$$

unde $\varphi_{\mathbf{Y}}$ este funcția caracteristică a lui **Y**; deci α este boreliană.

Fie $\varepsilon > 0$. Conform teoremei lui Luzin, există o mulțime deschisă **E** cu $|\mu|(\mathbf{E}) < \varepsilon/2$, astfel încît $h|_{\mathbf{P}\setminus\mathbf{E}}$ este continuă. Raționînd ca în **17.11** (ii) (IV), prelungim pe $h|_{\mathbf{P}\setminus\mathbf{E}}$ pînă la o funcție continuă f pe **P** care ia valori tot din $\mathbf{Z}_q$. Cum **P** este de tip K_q, există un caracter γ pe $\mathbf{D}_q$ astfel încît

$$f(x) = (-x, \gamma), \qquad x \in P. \tag{5}$$

De aici rezultă că

$$|\mu^{\wedge}(\gamma)| - \left|\int h\, d\mu\right| \leqslant \left|\mu^{\wedge}(\gamma) - \int h d\mu\right| =$$

$$= \left|\int_{\mathbf{P}\cap\mathbf{E}} [(-x, \gamma) - h(x)]\, d\mu(x)\right| \leqslant 2|\mu|(\mathbf{E}) < \varepsilon. \tag{5'}$$

Pe de altă parte,

$$\left|\int h\, d\mu\right| = \left|\int e^{i\alpha} d|\mu|\right| \geqslant \int \cos\alpha\, d|\mu| \geqslant \cos(\pi/q). \tag{6}$$

Din cele de mai sus se deduce ușor:

$$\|\mu^{\wedge}\|_{\infty} \geqslant \cos(\pi/q), \tag{7}$$

ceea ce demonstrează teorema pentru $q \geqslant 3$.

Dacă $q = 2$, g ia valori din $\mathbf{Z}_2$, deci putem lua $\alpha \equiv 0$, $h \equiv g$, Astfel (6) se transformă în

$$\int h\, d\mu = \int d|\mu| = 1 \tag{6'}$$

iar din (5′) și (6′) rezultă că $\|\mu^{\wedge}\|_{\infty} = 1$.

17.29 Note bibliografice. Definițiile **17.1**, **17.3**, **17.4** sînt clasice (Rudin [26], § 5.1) iar definiția **17.2** se datorește lui Varopoulos [34]. Teorema **17.5** și alte teoreme de aproximare se află în lucrarea Hewitt, Zuckerman [12]; o discuție a teoremelor de aproximare de tipul lemei **17.14** se află în Hewitt, Zuckerman [13]. Teorema **17.9** se datorește lui Rudin [25]. Teorema **17.19** se datorește lui Hewitt, Kakutani [10] și reprezintă o prelucrare a unui rezultat anterior al lui Șreider [28]. Teoremele **17.25** și **17.28** se datoresc lui Rudin [26], § 5.5; contraexemplul obținut la **17.27** se datorește lui Kaufman [19]. Perfecționarea rezultatelor auxiliare din secțiunea **17.20** se datorește lui Marcus [22] (vezi de asemenea Dinculeanu [5], § 2.9).

§ 18. ASIMETRIE ŞI FENOMENUL WIENER-PITT

18.1. Fie $\mathbf{G}$ un l.c.a.-grup iar $\mathbf{\Gamma}$ dualul său. Ca de obicei vom nota:

$\mathscr{M}(\mathbf{G})$ = algebra cu unitate a măsurilor regulate şi mărginite pe $\mathbf{G}$.
$\mathscr{L}^1(\mathbf{G})$ = idealul închis al măsurilor absolut continue din $\mathscr{M}(\mathbf{G})$.
$\mathscr{M}_c(\mathbf{G})$ = idealul închis al măsurilor continue (difuze) din $\mathscr{M}(\mathbf{G})$.

$$\mathscr{M}_0(\mathbf{G}) = \left\{\mu \in \mathscr{M}(\mathbf{G})\,;\ \mu^\wedge \in \mathscr{C}_0(\mathbf{\Gamma})\right\}.$$

Se verifică uşor că $\mathscr{M}_0(\mathbf{G})$ este un ideal închis în $\mathscr{M}(\mathbf{G})$ şi conform cu **2.4** şi **5.10**, au loc incluziunile:

$$(1) \qquad \mathscr{L}^1(\mathbf{G}) \subset \mathscr{M}_0(\mathbf{G}) \subset \mathscr{M}_c(\mathbf{G}) \subset \mathscr{M}(\mathbf{G}).$$

18.2. Involuţia lui $\mathscr{M}(\mathbf{G})$. Fie μ o măsură din $\mathscr{M}(\mathbf{G})$. Pentru orice $f \in \mathscr{C}_0(\mathbf{G})$ vom pune:

$$L(f) = \int \overline{f(-x)}\, \mathrm{d}\mu(x)\,;$$

se verifică uşor că L este o funcţională liniară şi continuă pe $\mathscr{C}_0(\mathbf{G})$. Teorema Riesz-Kakutani ne dă atunci o măsură $\tilde{\mu} \in \mathscr{M}(\mathbf{G})$ aşa ca pentru orice $f \in \mathscr{C}_0(\mathbf{G})$ să avem

$$L(f) = \int f(x)\, \mathrm{d}\tilde{\mu}(x).$$

Prin urmare am definit o aplicaţie $\mu \to \tilde{\mu}$ a lui $\mathscr{M}(\mathbf{G})$ pe $\mathscr{M}(\mathbf{G})$ aşa ca pentru orice funcţie $f \in \mathscr{C}_0(\mathbf{G})$ să avem:

$$\int f(x)\, \mathrm{d}\tilde{\mu}(x) = \int \overline{f(-x)}\, \mathrm{d}\mu(x).$$

Această aplicaţie se numeşte *involuţia* lui $\mathscr{M}(\mathbf{G})$; denumirea se justifică prin următoarea:

(1) LEMĂ. *Pentru orice* $\mu,\ \nu \in \mathscr{M}(\mathbf{G})$ *au loc relaţiile*

(i) $\mu^{\sim\sim} = \mu$
(ii) $(\mu + \nu)^\sim = \mu^\sim + \nu^\sim$
(iii) $(\lambda\mu)^\sim = \bar{\lambda}\,\mu^\sim$
(iv) $(\mu * \nu)^\sim = \mu^\sim * \nu^\sim$
(v) $|\mu^\sim| = |\mu|^\sim$
(vi) $\|\mu^\sim\| = \|\mu\|$

(Hewitt, Roos, [11], 20.22).

(2) LEMĂ. *Dacă* $\mu \in \mathscr{M}(\mathbf{G})$ *şi* $\mathbf{E} \subset \mathbf{G}$, *atunci*:

(i) $\mathbf{E}$ *este* $|\mu^\sim|$*-măsurabilă* $\Leftrightarrow$ $(-\mathbf{E})$ *este* $|\mu|$*-măsurabilă*:

$$\mu^\sim(\mathbf{E}) = \overline{\mu(-\mathbf{E})}$$

(ii) $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{G}, |\mu^{\sim}|) \Leftrightarrow f^{\sim} \in \mathcal{L}^1(\mathbf{G}, |\mu|)$;

$$\int f\,\mathrm{d}\mu^{\sim} = \overline{\int \mathrm{f}^{\sim}\,\mathrm{d}\mu}$$

(Hewitt, Ross, [11], 20.23).

(3) LEMĂ. (i) $\mathcal{L}^1(\mathbf{G})$, $\mathcal{M}_0(\mathbf{G})$, $\mathcal{M}_c(\mathbf{G})$ *sînt ideale închise în* $\mathcal{M}(\mathbf{G})$
(ii) $\mathrm{d}\mu = f\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}\mu^{\sim} = f^{\sim}\,\mathrm{d}x$.
Trivial.

18.3. (1) DEFINIȚIE. Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach comutativă *semisimplă*. Se spune că $\mathcal{A}$ este o *algebră simetrică* (*autoadjunctă*) dacă reprezentarea Ghelfand $\mathcal{A}^{\wedge}$ este închisă la conjugarea complexă.

Aceasta înseamnă că pentru orice $x \in \mathcal{A}$ există $x^* \in \mathcal{A}$ așa ca $(x^*)^{\wedge} = \overline{x^{\wedge}}$. Cum $\mathcal{A}$ este semisimplă, iar conjugarea complexă este o involuție, rezultă că aplicația $x \to x^*$ este o involuție pe $\mathcal{A}$, numită *involuție canonică*.

(2) OBSERVAȚIE. Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach comutativă semisimplă iar $x \to x^*$ o involuție pe $\mathcal{A}$; notăm:

$$\Delta(\mathcal{A}) = \boldsymbol{\Delta} = \text{spectrul lui } \mathcal{A}$$

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}) = \{h \in \boldsymbol{\Delta};\, h(x^*) = \overline{h(x)} \text{ or } x \in \mathcal{A}\}.$$

Dacă $\Delta(\mathcal{A}) = \mathcal{S}(\mathcal{A})$, atunci $\mathcal{A}$ este simetrică, iar involuția $x \to x^*$ coincide cu involuția canonică. Dar, desigur, s-ar putea ca $\mathcal{A}$ să fie simetrică și totuși, pentru o anumită involuție, să avem $\mathcal{S}(\mathcal{A}) \neq \boldsymbol{\Delta}(\mathcal{A})$.

(3) DEFINIȚIE. O algebră simetrică $\mathcal{A}$ se zice *complet simetrică* dacă involuția canonică pe $\mathcal{A}$ definește o structură de algebră Banach involutivă ($\|x^*\| = \|x\|$).

Sau, *echivalent*, o algebră Banach comutativă semisimplă, involutivă $(x \to x^*)$ $\mathcal{A}$, se numește complet simetrică, dacă $\boldsymbol{\Delta}(\mathcal{A}) = \mathcal{S}(\mathcal{A})$.

18.4. (1) Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach comutativă. O parte $\mathbf{S} \subset \boldsymbol{\Delta}$ se numește *frontieră* a lui $\mathcal{A}$ dacă orice funcție $x^{\wedge} \in \mathcal{A}^{\wedge}$ își atinge maximul modulului pe $\mathbf{S}$. Se notează prin $\boldsymbol{\Gamma}$ și se numește *frontieră Silov* pentru $\mathbf{A}$, frontiera obținută prin următoarea

TEOREMĂ. *Există o cea mai mică frontieră închisă pentru* $\mathcal{A}$.

Se știe că un punct $h \in \Delta$ se află în $\boldsymbol{\Gamma}$ dacă și numai dacă este satisfăcută condiția:

Pentru orice vecinătate deschisă $\mathbf{U} \subset \boldsymbol{\Delta}$ *a lui* h *există un element* $x \in \mathcal{A}$ *așa ca* $|x^{\wedge}|$ *își atinge maximul în* $\mathbf{U}$, *dar este strict mai mică decît acest maxim pe* $\boldsymbol{\Delta} \setminus \mathbf{U}$.

(2) TEOREMĂ. *Dacă* $\mathcal{A}$ *este o algebră complet simetrică, atunci* $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Delta}$.

(3) TEOREMĂ. *Dacă* $\mathcal{A}$ *este o algebră Banach comutativă iar* $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ *este un ideal închis, atunci are loc identificarea canonică.*

$$\boldsymbol{\Delta}(\mathcal{I}) = \boldsymbol{\Delta}(\mathcal{A}) / \mathbf{H}(\mathcal{I}).$$

(4) COROLAR. *Dacă* $\mathcal{A}$ *este o algebră Banach comutativă,* $x \to x^*$ *o involuție pe* $\mathcal{A}$, *iar* $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ *un* $*$*-ideal închis, atunci, prin identificarea de la* (3), *avem* $\mathcal{S}(\mathcal{I}) \subset \mathcal{S}(\mathcal{A})$.

Într-adevăr, fie $x \in \mathcal{A}$ şi $h \in \mathcal{S}(\mathcal{I}) \subset \boldsymbol{\Delta}(\mathcal{I})$; există $y \in \mathcal{I}$ aşa ca $h(y^*) = \overline{h(y)} \neq 0$; atunci $xy \in \mathcal{I}$ şi avem :

$$h(x^*)\, h(y^*) = h(x^* y^*) = \overline{h(xy)} = \overline{h(x)}\ \overline{h(y)}$$

deci $h(x^*) = \overline{h(x)}$. q.e.d.

18.5. Fenomenul Wiener-Pitt. Fie $\mathcal{M}$ o algebră Banach comutativă semisimplă cu unitate $x \to x^*$ o, involuţie pe $\mathcal{M}$, iar $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ un $*$-ideal închis cu proprietatea că structura lui $\mathcal{M}$ induce pe $\mathcal{L}$ o structură de algebră complet simetrică. Atunci, conf. celor precedente, $\boldsymbol{\Delta}(\mathcal{L}) \subset \boldsymbol{\Delta}(\mathcal{M})$ şi $\boldsymbol{\Delta}(\mathcal{L}) = \mathcal{S}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{S}(\mathcal{M})$.

(1) Definiţie. Vom spune că pentru cuplul $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ are loc *fenomenul Wiener-Pitt* dacă există $x \in \mathcal{M}$ şi $h_0 \in \boldsymbol{\Delta}(\mathcal{M})$ aşa ca

(i) $h_0(x) = x^\wedge(h_0) = 0$.

(ii) $\inf \{|h(x)| = |x^\vee(h)|\,;\ h \in \Delta(\mathcal{L})\} > 0$.

(2) Teoremă. *Sînt echivalente :*

(i) *Fenomenul Wiener-Pitt nu are loc pentru cuplul* $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$.

(ii) $\overline{\boldsymbol{\Delta}(\mathcal{L})}$ *este o frontieră a lui* $\mathcal{M}$.

iii) $\overline{\boldsymbol{\Delta}(\mathcal{L})} = \Delta(\mathcal{M})$.

Este trivial că (iii) $\Rightarrow$ (i). Pentru (i) $\Rightarrow$ (ii) să notăm prin $\boldsymbol{\Gamma}$ frontiera Şilov a lui $\mathcal{M}$. Atunci $\boldsymbol{\Gamma} \subset \overline{\boldsymbol{\Delta}(\mathcal{L})}$; în caz contrar ar exista $k \in \boldsymbol{\Delta}(\mathcal{M})$ şi $x \in \mathcal{M}$ aşa ca $|x^\wedge(k)| > \sup\{|x^\wedge(h)|\,;\ h \in \overline{\boldsymbol{\Delta}(\mathcal{L})}\}$; dacă $y = x^\wedge(k)\, 1_{\mathcal{M}} - x \in \mathcal{M}$, atunci $y^\wedge(k) = 0$ şi $\inf\{|y^\wedge(h)|\,;\ h \in \overline{\Delta(\mathcal{L})}\} > 0$, ceea ce contrazice ipoteza (i). Demonstrăm acum (ii) $\Rightarrow$ (iii) ; *pentru orice* $k \in \Delta(\mathcal{M})$ şi pentru orice $x \in \mathcal{M}$ avem :

$$(\ast)\ |x^\wedge(k)| \leqslant \sup\{|x^\wedge(h)|\,;\ h \in \overline{\boldsymbol{\Delta}(\mathcal{L})}\}.$$

Prin teorema Stone-Weierstrass obţinem că mulţimea

$$\mathcal{A} = \{x^\wedge \in \mathcal{C}((\overline{\boldsymbol{\Delta}(\mathcal{L})})\,;\ x \in \mathcal{M}\}$$

este densă în $\mathcal{C}(\overline{\Delta(\mathcal{L})})$, deoarece $h \in \overline{\Delta(\mathcal{L})} \Rightarrow h(x^*) = \overline{h(x)}$.

Însă, conf. $(\ast)$, aplicaţia $x^\wedge \to x^\wedge(k)$ este bine definită şi este un homomorfism complex continuu nenul al lui $\mathcal{A}$, deci se poate prelungi la un homomorfism complex nenul al lui $\mathcal{C}(\overline{\Delta(\mathcal{L})})$ prin continuitate. Cum însă $\boldsymbol{\Delta}(\mathcal{C}(\overline{\boldsymbol{\Delta}(\mathcal{L})})) = \overline{\boldsymbol{\Delta}(\mathcal{L})}$, rezultă că există $k_0 \in \overline{\boldsymbol{\Delta}(\mathcal{L})}$ aşa ca pentru orice $x \in \mathcal{M}$ să avem :

$$k(x) = x^\wedge(k) = x^\wedge(k_0) = k_0(x)$$

deci $k = k_0 \in \overline{\boldsymbol{\Delta}(\mathcal{L})}$. q.e.d.

18.6 Teoremă. $\mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ *este o algebră complet simetrică cu involuţia canonică* $f \to f^\sim$.

Trivial.

18.7. Lemă. *Dacă* $\mathcal{M}(\mathbf{G})$ *ar fi o algebră simetrică, atunci involuţia canonică ar fi* $\mu \to \mu^\sim$.

Fie $\mu \to \mu^*$ involuția pe $\mathcal{M}(\mathbf{G})$, și fie h_γ, cu $\gamma \in \Gamma \equiv \mathbf{G}^\wedge$ homomorfismul $\mu \to \mu^\wedge(\gamma)$. Atunci, pentru orice măsură $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{G})$, am avea:

$$h_\gamma(\mu^\sim) = \overline{h_\gamma(\mu)}, \quad \gamma \in \Gamma$$

$$h_\gamma(\mu^*) = \overline{h_\gamma(\mu)}, \quad \gamma \in \Gamma$$

așa încît $\mu^* = \mu^\sim$ din teorema de unicitate.

Observație. Același enunț (cu aceeași demonstrație) este valabil și pentru $\mathcal{M}_0(\mathbf{G})$.

18.8. Relativ la involuția naturală $\mu \to \mu^\sim$ a lui $\mathcal{M}(\mathbf{G})$ facem următoarele notații:

$$\Delta = \Delta(\mathcal{M}(\mathbf{G}))$$

$$\Delta_0 = \Delta(\mathcal{M}_0(\mathbf{G}))$$

$$\Gamma = \Delta(\mathcal{L}^1(\mathbf{G})) = \mathcal{S}(\mathcal{L}^1(\mathbf{G}))$$

$$\mathbf{S} = \mathcal{S}(\mathcal{M}(\mathbf{G}))$$

$$\mathbf{S}_0 = \mathcal{S}(\mathcal{M}_0(\mathbf{G}));$$

conf. cu **18.4** (3) și (4) avem:

(1) $$\Gamma \subset \Delta_0 \subset \Delta$$

(2) $$\bar{\Gamma} \subset \mathbf{S} \subset \Delta$$

(3) $$\Gamma \subset \mathbf{S}_0 \subset \Delta_0$$

(4) $$\Gamma \subset \mathbf{S}_0 \subset \mathbf{S}.$$

Incluziunile (1) sînt *stricte*, căci $\mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ este ideal închis în $\mathcal{M}_0(\mathbf{G})$, care este ideal închis în $\mathcal{M}(\mathbf{G})$. Vom arăta că a doua incluziune din (2) este *strictă*, ceea ce înseamnă că $\mathcal{M}(\mathbf{G})$ nu este o algebră simetrică, și *a fortiori*, pentru cuplul $(\mathcal{L}^1(\mathbf{G}), \mathcal{M}(\mathbf{G}))$, are loc fenomenul Wiener-Pitt (conf. **18.5** (2)); de fapt acest fenomen are loc pentru orice cuplu $(\mathcal{L}^1(\mathbf{G}), \mathcal{M})$, unde $\mathcal{L}^1(\mathbf{G}) \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{M}(\mathbf{G})$ și $\delta_0 \in \mathcal{M}$.

Bineînțeles, toate acestea au loc în cazul unui l.c.a.-grup $\mathbf{G}$ *nediscret*, căci dacă $\mathbf{G}$ este discret, $\mathcal{L}^1(\mathbf{G}) = \mathcal{M}_0(\mathbf{G}) = \mathcal{M}(\mathbf{G})$.

18.9. LEMĂ. *Dacă* $\mathbf{G}$ *este un l.c.a.-grup nediscret,* $\mathbf{P} \subset \mathbf{G}$ *este o mulțime compactă independentă,* $\mathbf{Q} = \mathbf{P} \cup (-\mathbf{P})$ *și* $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{G})$ *este o măsură continuă concentrată pe* $\mathbf{Q}$, *atunci măsurile* $\mu^0 = \delta_0, \mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^n, \ldots$ *sînt mutual singulare* $(\mu^{n+1} = \mu^n \divideontimes \mu)$.

Fără a restrînge generalitatea, putem presupune că $\mu \geqslant 0$. Cum μ^n este concentrată pe $\mathbf{Q}_n$, unde $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}_n = \mathbf{Q}_{n-1} + \mathbf{Q}$, este suficient să arătăm că

(1) $$\mu^n(\mathbf{Q}_m) = 0, \quad m < n.$$

Dar dacă, pentru $m < n$ fixați, notăm

$$\mathbf{S} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{G}^n;\ x_k \in \mathbf{Q}, \textstyle\sum x_k \in \mathbf{Q}_m\},$$

atunci avem

$$(2)\qquad \mu^{n}(\mathbf{Q}_{m}) = \mu_{(n)}(\mathbf{S}),$$

unde $\mu_{(1)} = \mu$, iar $\mu_{(n)} = \mu_{(n-1)} \otimes \mu$.

Din faptul că **P** este independentă iar μ ceste continuă, rezultă uşor că:

$$(3)\qquad \mu_{(n)}(S) = 0,$$

ceea ce demonstrează lema.

18.10. COROLAR. *În condiţiile lemei precedente cu* $\mu \geqslant 0$:

(i) *pentru orice* $n \geqslant 0$ *şi* $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$ *avem*:

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} a_k \mu^k \right\| = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \, \|\mu\|^k$$

(ii) $\|e^{i\mu}\| = e^{\|\mu\|}$.

18.11. TEOREMĂ. *Dacă* **G** *este un l.c.a.-grup nediscret, atunci* $\mathcal{M}(\mathbf{G})$ *nu este o algebră simetrică iar pentru cuplul* $(\mathcal{L}^1(\mathbf{G}), \mathcal{M}(\mathbf{G}))$ *are loc fenomenul Wiener-Pitt.*

Conf. **17.12**, **G** conţine o mulţime compactă şi independentă **P** iar conf. **17.18**, există o măsură $\mu_1 \in \mathrm{M}_c^+(\mathbf{G})$ concentrată pe **P** cu $\|\mu_1\| = 1$. Dacă

$$\mu = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_1^{\sim}),$$

atunci $\mu = \mu^{\sim}$ este concentrată pe $\mathbf{Q} = \mathbf{P} \cup (-\mathbf{P})$, $\mu > 0$ şi μ este continuă. Dacă $\sigma = \delta_0 - \mu^2$, atunci

$$\|\sigma^n\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \mu^{2k} \right\| = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

deci $\|\sigma^\wedge\|_\infty = \|\sigma\|_{sp} = 2$; cum $\boldsymbol{\Delta}$ este compact, există $h \in \boldsymbol{\Delta}$ cu $|h(\sigma)| = 2$ şi cum $\|\mu\| = 1$, rezultă $|h(\mu^2)| \leqslant 1$; şi cum $|1 - h(\mu)^2| = |h(\sigma)| = 2$, rezultă că $h(\mu) = \pm i$. Deci $h(\mu^{\sim}) = h(\mu) \neq \overline{h(\mu)}$, ceea ce demonstrează prima parte a teoremei.

O altă variantă a demonstraţiei este următoarea: fie $\nu = \mu^2$ şi $\lambda = \nu - \nu^2$. Atunci pentru orice $h \in \mathbf{S}$ avem $\mu^\wedge(h) = (\mu^{\sim})^\wedge(h) = \overline{\mu^\wedge(h)}$, deci $\nu^\wedge(h) \geqslant 0$; deoarece $\|\mu\| = 1$, $\nu^\wedge(h) \leqslant 1$, deci $0 \leqslant \lambda^\wedge(h) \leqslant 1$. Pe de altă parte, se obţine la fel, cu ajutorul **18.10**, că $\|\lambda\|_{sp} = 2$. Deci frontiera Şilov a lui $\mathcal{M}(\mathbf{G})$ nu este conţinută în **S** şi *a fortiori* $\mathbf{S} \neq \boldsymbol{\Delta}$, q.e.d.

A doua parte a teoremei este o consecinţă a lui **18.5** (2) şi **18.8** (2), dar rezultă şi direct: dacă $\theta = \delta_0 + \mu^2$, atunci din cele de mai sus obţinem $h(\theta) = 0$; pe de altă parte, deoarece $\mu = \mu^{\sim}$, $\mu^\wedge$ este reală şi $-1 \leqslant \mu^\wedge \leqslant 1$, deci $1 \leqslant \theta^\wedge(\gamma) \leqslant 2$ pentru $\gamma \in \boldsymbol{\Gamma}$, q.e.d.

Observaţii. (1) *Din cea de a doua demonstraţie a primei părţi a teoremei reţinem că* $\boldsymbol{\Gamma}$ *nu este frontiera Şilov a lui* $\mathcal{M}(\mathbf{G})$ *şi nici măcar o frontieră a lui* $\mathcal{M}(\mathbf{G})$; acelaşi lucru este valabil şi pentru **S** (2). Din cea de a doua parte a teoremei rezultă că: „*pentru orice l.c.a.-grup nediscret* **G**, *există o funcţie reală* $\varphi \in \mathcal{B}(\boldsymbol{\Gamma})$ *aşa ca* $1/\varphi \notin \mathcal{B}(\boldsymbol{\Gamma})$ *dar* $\varphi(\gamma) \geqslant 1$ *pentru orice* $\gamma \in \boldsymbol{\Gamma}$".

18.12. Note bibliografice. Pentru rezultatele de la **18.4** trimitem la Hoffman [14], ch. VI, VII și Naimark [23], §§ 13, 14. Denumirea fenomenului Wiener-Pitt și teorema **18.5** (2) se datoresc lui Varopoulos [31]; echivalența (i) ⟺ (iii) din teorema **18.5** (2) a fost conjecturată de Hartman [7 bis]. Observația (2) constituie o teoremă a lui Wiener și Pitt (35), ceea ce justifică numele fenomenului considerat. Teorema **18.11** a fost demonstrată de Șreider [27] pentru $\mathbf{G} = \mathbf{R}$, apoi de Hewitt [9] pentru I — grupuri și de Williamson [38] în general; a se vedea și Rudin [25—26]. În lucrarea [32], Varopoulos a arătat că nici algebra $\mathcal{M}_0(\mathbf{G})$ nu este simetrică. Ca un corolar la rezultatele generale din Varopoulos [33], [34], se obțin relațiile $\mathbf{\Gamma} \neq \mathbf{S}_0$, $\bar{\mathbf{\Gamma}} \neq \mathbf{S}$, $\mathbf{S}_0 \neq \mathbf{\Delta}_0$ (vezi **18.8**). O dezvoltare a rezultatelor expuse în acest paragraf se află în lucrarea lui Williamson [39].

§ 19. MULȚIMI HELSON ȘI CARLESON

19.1. Definiție. Fie $\mathbf{G}$ un l.c.a.-grup. O mulțime *compactă* $\mathbf{P} \subset \mathbf{G}$ se numește *mulțime Helson* dacă orice funcție $F \in \mathcal{C}(\mathbf{P})$ este restricția la $\mathbf{P}$ a unei funcții din $\mathcal{A}(\mathbf{G})$.

Aceasta înseamnă că pentru orice $F \in \mathcal{C}(\mathbf{P})$ există $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{\Gamma})$ așa ca pentru orice $x \in \mathbf{P}$,

$$F(x) = f^{\wedge}(x) = \int_{\mathbf{\Gamma}} f(\gamma)\,(x, \gamma)\,\mathrm{d}\gamma. \tag{1}$$

În particular, pentru $\mathbf{G} = \mathbf{T}$, o mulțime compactă $\mathbf{P} \subset \mathbf{T}$ este o mulțime Helson dacă și numai dacă orice funcție $F \in \mathcal{C}(\mathbf{P})$ se poate scrie

$$F(\mathrm{e}^{it}) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{int}, \quad \mathrm{e}^{it} \in P, \tag{2}$$

unde

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty. \tag{3}$$

19.2. Definiție. O mulțime *compactă* $\mathbf{P} \subset \mathbf{T}$ se numește *mulțime Carleson* dacă orice funcție $F \in \mathcal{C}(\mathbf{P})$ se poate scrie

$$F(\mathrm{e}^{it}) = \sum_{0}^{\infty} a_o \mathrm{e}^{int}, \quad \mathrm{e}^{it} \in \mathbf{P}, \tag{1}$$

unde

$$\sum_{0}^{\infty} |a_n| < \infty. \tag{2}$$

19.3. Fie $\mathbf{G}$ un l.c.a.-grup; de cîte ori va fi vorba de mulțimi Carleson vom subînțelege $\mathbf{G} = \mathbf{T}$. Fie apoi $\mathcal{A}(\mathbf{G})$ și $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ cu semnificația obișnuită, iar $\mathcal{A}^{+}(\mathbf{T})$ clasa funcțiilor de forma **19.2** (1) definite pe întregul $\mathbf{T}$ cu norma **19.2** (2); evident, $\mathcal{A}^{+}(\mathbf{T}) \subset \mathcal{A}(\mathbf{T})$ cu aceeași normă. Pentru $\mathbf{P} \subset \mathbf{G}$

compact, vom nota $\mathcal{A}(\mathbf{P})$, $\mathcal{A}^+(\mathbf{P})$, $\mathcal{C}(\mathbf{P})$ restricţiile la **P** ale funcţiilor din $\mathcal{A}(\mathbf{G})$, $\mathcal{A}^+(\mathbf{G})$, $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ respectiv [8]; sînt evidente relaţiile $\mathcal{A}^+(\mathbf{P})\subset\mathcal{A}(\mathbf{P})\subset\mathcal{C}(\mathbf{P})$. Mulţimile Helson sînt definite prin $\mathcal{A}(\mathbf{P}) = \mathcal{C}(\mathbf{P})$, iar mulţimile Carleson sînt definite prin $\mathcal{A}^+(\mathbf{P}) = \mathcal{C}(\mathbf{P})$.

Se impune astfel studiul spaţiilor $\mathcal{A}(\mathbf{P})$, $\mathcal{A}^+(\mathbf{P})$ şi $\mathcal{C}(\mathbf{P})$. Pentru aceasta reamintim mai întîi o teoremă asupra spaţiilor Banach.

19.4. TEOREMĂ. *Fie* $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ *spaţii Banach şi* $T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *un operator liniar continuu. Considerăm următoarele afirmaţii* :

(i) $T\mathbf{X} = \mathbf{Y}$.

(ii) *Există* $\delta > 0$ *astfel încît, pentru orice* $y^* \in Y^*$, $\|T^* y^*\| \geqslant \delta \|y^*\|$.

(iii) $T^* \mathbf{Y}^* = X^*$.

Atunci (i), (ii) *sînt echivalente, iar dacă* T *este injectiv şi* $\overline{T\mathbf{X}} = \mathbf{Y}$, (i), (ii), (iii) *sînt echivalente.*

Presupunem că (i) este satisfăcută. Notăm pentru un spaţiu Banach **Z** şi un număr $r > 0$ prin $S_r(\mathbf{Z})$ sfera închisă cu centrul în 0 şi de rază r în **Z**. Conform teoremei aplicaţiei deschise a lui Banach, există $\delta > 0$ astfel încît $T\,\mathrm{S}_1(\mathbf{X})\supset \mathrm{S}_\delta(\mathbf{Y})$, deci pentru orice $y^* \in \mathbf{Y}^*$

$$\|T^* y^*\| = \sup_{x\in \mathrm{S}_1(\mathbf{X})} |y^* Tx| = \sup_{y\in T\mathrm{S}_1(\mathbf{X})} |y^* y| \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{y\in \mathrm{S}_\delta(\mathbf{Y})} |y^* y| = \delta \sup_{y\in \mathrm{S}_1(\mathbf{Y})} |y^* y| = \delta \|y^*\|.$$

Fie acum (ii) satisfăcută. Arătăm întîi că $\overline{T\,\mathrm{S}_1(\mathbf{X})}\supset \mathrm{S}_\delta(\mathbf{Y})$. Fie $y_0 \notin \overline{T\,\mathrm{S}_1(\mathbf{X})}$. Conform teoremei Hahn-Banach, există o funcţională liniară continuă reală y^* pe **Y** astfel încît

$$|y^* y| < 1 \text{ pentru } y \in \overline{T\,\mathrm{S}_1(\mathbf{X})} \tag{1}$$

$$y^* y_0 > 1. \tag{2}$$

După (1) pentru orice $x \in \mathrm{S}_1(\mathbf{X})$, $|T^* y^* x| = |y^* Tx| < 1$, deci $\|T^* y^*\| \leqslant 1$. Prin urmare $\delta \|y^*\| \leqslant 1$, $\|y^*\| \leqslant \frac{1}{\delta}$, deci după (2), $1 < y^* y_0 \leqslant$ $\leqslant \|y^*\|\cdot\|y_0\| \leqslant \frac{1}{\delta} \|y_0\|$ deci $\|y_0\| \geqslant \delta$, adică $y_0 \notin \mathrm{S}_\delta(\mathbf{Y})$.

După cele de mai sus, pentru orice $y \in \mathbf{Y}$ cu $\|y\| = \delta$, există un $\varphi(y) \in \mathrm{S}_1(\mathbf{X})$ astfel încît

$$\|y - T\varphi(y)\| \leqslant \frac{\delta}{2}.$$

Punînd acum, pentru orice $y \in \mathbf{Y}$, $\varphi(y) = \frac{\|y\|}{2}\varphi\left(\frac{\delta}{\|y\|}\,y\right) \in \mathbf{X}$, obţinem o aplicaţie $\varphi : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ pentru care

$$\|\varphi(y)\| \leqslant \frac{\|y\|}{\delta} \tag{3}$$

$$\|y - T\varphi(y)\| \leqslant \frac{\|y\|}{2}. \tag{4}$$

---

[8] De cîte ori apare $\mathcal{A}^+(\mathbf{P})$, se consideră $\mathbf{P}\subset\mathbf{G} = \mathbf{T}$.

Fie $y \in \mathbf{Y}$. Definim prin inducție $y_0=y$, $x_n=\varphi(y_n)$, $y_{n+1}=y_n-Tx_n$. După (3):

$$\|x_n\| \leqslant \frac{\|y_n\|}{\delta}$$

iar după (4)

$$\|y_{n+1}\| \leqslant \frac{\|y_n\|}{2} \leqslant \ldots \leqslant \frac{\|y\|}{2^n}$$

deci

$$\|x_n\| \leqslant \frac{\|y\|}{\delta \cdot 2^{n-1}}$$

Prin urmare seria $\sum_0^\infty x_n$ converge la un $x \in \mathbf{X}$ și $Tx = y$.

Presupunem că T este injectiv și $\overline{T\mathbf{X}} = \mathbf{Y}$. Atunci implicația (i) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (iii) este imediată; iar T fiind injectiv, implicația (iii) $\Rightarrow$ (ii) rezultă din teorema aplicației deschise a lui Banach. Astfel, în acest caz, (i), (ii), (iii) sînt echivalente. q.e.d.

19.5. Fie $\mathbf{G}$ un l.c.a.-grup, $\mathbf{\Gamma}$ dualul său, iar $\mathbf{P} \subset \mathbf{G}$ o mulțime compactă; *vom organiza spațiile* $\mathcal{A}(\mathbf{P})$, $\mathcal{A}^+(\mathbf{P})$ *și* $\mathcal{C}(\mathbf{P})$ *ca spații Banach.*

(1) $\mathcal{A}(\mathbf{G})$ este o algebră Banach cu norma indusă din $\mathcal{L}^1(\mathbf{\Gamma})$. Dacă punem:

$$\mathcal{J}(\mathbf{P}) = \{f^\wedge \in \mathcal{A}(\mathbf{G});\ f^\wedge(x) = 0 \text{ or } x \in \mathbf{P}\},$$

atunci $\mathcal{J}(\mathbf{P})$ este un ideal închis în $\mathcal{A}(\mathbf{G})$ și anume *nucleul* mulțimii $\mathbf{P}$ de ideale maximale ale lui $\mathcal{A}(\mathbf{G}) \equiv \mathcal{L}^1(\mathbf{\Gamma})$. Este evident că $\mathcal{A}(\mathbf{P}) \equiv \mathcal{A}(\mathbf{G})/\mathcal{J}(\mathbf{P})$, identificarea fiind algebrică; identificarea devine și topologică, iar $\mathcal{A}(\mathbf{P})$ devine un spațiu Banach dacă pentru $F \in \mathcal{A}(\mathbf{P})$ definim norma

$$\|F\|_{\mathcal{A}} = \inf \{\|f^\wedge\|;\ f^\wedge \in \mathcal{A}(\mathbf{G}),\ f^\wedge|_{\mathbf{P}} = F\}.$$

Dualul lui $\mathcal{A}(\mathbf{G})$ este $\mathcal{PM}(\mathbf{G})$; deci dualul lui $\mathcal{A}(\mathbf{P})$ este subspațiul închis al lui $\mathcal{PM}(\mathbf{G})$ ortogonal pe $\mathcal{J}(\mathbf{P})$; acesta este evident inclus în $\mathcal{PM}(\mathbf{P})$, dar nu coincide cu el [9]. Prin identificarea $\mathcal{PM}(\mathbf{G}) \equiv \mathcal{L}^\infty(\mathbf{\Gamma})$ dualul lui $\mathcal{A}(\mathbf{P})$ corespunde cu subspațiul închis $\Phi(\mathbf{P})$ format din acele funcții $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbf{\Gamma})$ pentru care:

$$\text{(A)} \qquad \int_{\mathbf{\Gamma}} f(\gamma)\,\varphi(-\gamma)\,d\gamma = 0, \text{ or } f^\wedge \in \mathcal{J}(\mathbf{P}).$$

(2) În cazul $\mathbf{G} = \mathbf{T}$, $\mathcal{A}^+(\mathbf{G})$ este un subspațiu închis în $\mathcal{A}(\mathbf{G})$. Dualul lui $\mathcal{A}^+(\mathbf{G})$ se identifică cu subspațiul închis al lui $\mathcal{PM}(\mathbf{G})$ format din pseudo-

---

[9] Proprietatea $[\mathcal{A}(\mathbf{P})]^* = \mathcal{PM}(\mathbf{P})$ caracterizează mulțimile de sinteză spectrală (vezi § 21).

măsurile de forma $S \sim \sum\limits_{0}^{\infty} c_n e^{int}$[10]). $\mathcal{A}^+(\mathbf{P})$ se obţine prin factorizarea lui $\mathcal{A}^+(\mathbf{G})$ prin subspaţiul închis:

$$\mathcal{J}^+(\mathbf{P}) = \{f^\wedge \in \mathcal{A}^+(\mathbf{G});\ f^\wedge(x) = 0, \text{ or } x \in \mathbf{P}\}$$

şi devine în mod natural spaţiu Banach. Deci $\Phi^+(\mathbf{P})$ — dualul lui $\mathcal{A}^+(\mathbf{P})$ — se identifică cu complementul ortogonal al lui $\mathcal{J}^+(\mathbf{P})$ în dualul lui $\mathcal{A}^+(\mathbf{G})$. Cu alte cuvinte, $\Phi^+(\mathbf{P})$ constă din acele pseudomăsuri $S \sim \sum\limits_{0}^{\infty} c_n e^{int}$ care au proprietatea:

$$(\mathrm{A}^+) \qquad 2\pi \sum_{0}^{\infty} a_n \bar{c}_n = 0, \text{ or } f^\wedge \sim \sum_{0}^{\infty} a_n e^{int} \in \mathcal{J}^+(\mathbf{P}).$$

În cazul $G = T$, $\Phi(\mathbf{P})$ constă din acele pseudomăsuri $S \sim \sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ care au proprietatea:

$$2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \bar{c}_n = 0, \text{ or } f^\wedge \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int} \in \mathcal{J}(\mathbf{P}).$$

(3) $\mathcal{C}(\mathbf{P})$ se organizează ca spaţiu Banach cu norma uniformă, iar dualul lui este $\mathcal{M}(\mathbf{P})$. Procedeul de factorizare de la (1) şi (2) duce la acelaşi rezultat.

19.6. (1) TEOREMĂ. *Fie* $\mathbf{P} \subset \mathbf{G}$ *o mulţime Helson. Atunci există* $\alpha > 0$ *aşa ca pentru orice* $F \in \mathcal{C}(\mathbf{P}) = \mathcal{A}(\mathbf{P})$ *să avem* $\|F\|_{\mathcal{A}} \leqslant \alpha \|F\|_\infty$.

Deoarece $\|\cdot\|_\infty \leqslant \|\cdot\|_{\mathcal{A}}$, teorema rezultă din **19.4**

(2) COROLAR. *Fie* $\mathbf{P} \subset \mathbf{G}$ *o mulţime Helson. Atunci există* $\alpha > 0$ *aşa ca pentru orice* $F \in \mathcal{C}(\mathbf{P})$ *există* $f \in \mathcal{L}^1(\Gamma)$ *cu proprietatea că* $F = f^\wedge$ *pe* P *şi* $\|f\|_1 \leqslant \alpha \|F\|_\infty$.

(3) TEOREMĂ. *Fie* $\mathbf{P} \subset \mathbf{T}$ *o mulţime Carleson.*

Atunci există $\beta > 0$ *aşa ca pentru orice* $F \in \mathcal{C}(\mathbf{P}) = \mathcal{A}^+(\mathbf{P})$ *să avem* $\|F\|_{\mathcal{A}^+} \leqslant \beta \|F\|_\infty$.

19.7 Fie $\mathbf{G}$ un l.c.a.-grup iar $\mathbf{P} \subset \mathbf{G}$ o mulţime compactă. Fie

$$\pi : \mathcal{A}(\mathbf{P}) \to \mathcal{C}(\mathbf{P})$$

operatorul liniar şi continuu definit prin $\pi f = f$ pentru orice $f \in \mathcal{A}(\mathbf{P})$. Evident, π este injectiv, iar teorema Stone-Weierstrass ne asigură că $\mathcal{A}(\mathbf{P})$ este densă în $\mathcal{C}(\mathbf{P})$.

Adjunctul lui π este:

$$\pi^* : \mathcal{M}(\mathbf{P}) \to \Phi(\mathbf{P})$$

Relaţia $\pi^*\mu = \varphi \in \Phi(\mathbf{P})$ înseamnă:

$$\int_\Gamma f(\gamma)\, \varphi(-\gamma)\, d\gamma = \int_{\mathbf{P}} f^\wedge(x)\, d\mu(x);\ f \in \mathcal{L}^1(\Gamma).$$

---

[10] De fapt identificarea are loc mai întîi cu cîtul lui $\mathcal{PM}(\mathbf{G})$ prin anulatorul lui $\mathcal{A}^+(\mathbf{G})$ şi apoi acesta la rîndul său se identifică cu subspaţiul arătat.

Cum însă :

$$\int_{\mathbf{P}} f^{\wedge}(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbf{P}}\int_{\Gamma} f(\gamma)\,(x,\gamma)\,\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_{\Gamma} f(\gamma) \int_{\mathbf{P}} (x;\gamma)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\gamma =$$

$$= \int_{\Gamma} f(\gamma)\,\mu^{\wedge}(-\gamma)\,\mathrm{d}\gamma$$

rezultă

$$\int_{\Gamma} f(\gamma)\,\varphi(-\gamma)\,\mathrm{d}\gamma = \int_{\Gamma} f(\gamma)\,\mu^{\wedge}(-\gamma)\,\mathrm{d}\gamma\,; f \in \mathcal{L}^1(\Gamma)$$

deci $\varphi = \mu^{\wedge}$ a.p.t. și deci $\varphi = \mu^{\wedge}$ ca elemente din $\mathcal{L}^{\infty}(\Gamma)$.

Prin urmare

$$\pi^{*}\mu = \mu^{\wedge}.$$

Din teorema **19.4** rezultă atunci următoarea

(1) TEOREMĂ. *Fie* $\mathbf{G}$ *un l.c.a.-grup iar* $\mathbf{P} \subset \mathbf{G}$ *o mulțime compactă. Următoarele afirmații sînt echivalente* :

(i) $\mathbf{P}$ *este mulțime Helson.*

(ii) $\|\mu\|$ *și* $\|\mu^{\wedge}\|_{\infty}$ *sînt norme echivalente pe* $\mathcal{M}(\mathbf{P})$.

(iii) *Orice* $\varphi \in \Phi(\mathbf{P})$ *este egal* (a.p.t.) *cu transformata Fourier-Stieltjes a unei măsuri* $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{P})$.

(2) COROLAR. (a) *Orice compact* $\mathbf{P} \subset \mathbf{G}$ *care nu suportă o adevărată pseudomăsură este o mulțime Helson.*

(b) *Orice mulțime Helson care este și o mulțime de sinteză spectrală nu suportă o adevărată pseudomăsură.*

Evident (vezi §§ **15** și **21**).

Să particularizăm teorema (1) pentru $\mathbf{G} = \mathbf{T}$; se obține :

(3) COROLAR. *O condiție necesară și suficientă pentru ca mulțimea închisă* $\mathbf{P} \subset \mathbf{T}$ *să fie o mulțime Helson este să existe* $\delta > 0$ *așa ca pentru orice măsură* $\mathrm{d}\mu \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n\, e^{int} \in \mathcal{M}(\mathbf{P})$ *să avem*

$$\sup_{-\infty < n < \infty} |c_n| > \delta \|\mu\|.$$

19.8. În mod analog folosind **19.4** se demonstrează :

TEOREMĂ. *O condiție necesară și suficientă pentru ca mulțimea închisă* $\mathbf{P} \subset \mathbf{T}$ *să fie o mulțime Carleson este să existe* $\delta > 0$ *așa ca pentru orice măsură* $\mathrm{d}\mu \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n\, e^{int} \in \mathcal{M}(\mathbf{P})$ *să avem*

$$\sup_{0 \leqslant n < \infty} |c_n| > \delta \|\mu\|.$$

19.9. O proprietate aparent mai slabă decît cea descrisă la **19.6** (2) este în fapt echivalentă cu aceasta. Anume

TEOREMĂ. *Fie* $\mathbf{G}$ *un l.c.a.-grup iar* $\mathbf{P} \subset \mathbf{G}$ *o mulţime compactă. Dacă există constantele* $0 < \alpha$, $K < \infty$ *aşa încît pentru orice* $F \in \mathcal{C}(\mathbf{P})$ *cu* $|F| = 1$ *există o funcţie* $f \in \mathcal{L}^1(\Gamma)$ *cu proprietatea că* $\|f\|_1 \leqslant K$ *şi*

$$\sup_{x \in \mathbf{P}} |f^\wedge(x) - F(x)| < 1 - \alpha,$$

atunci $\mathbf{P}$ *este o mulţime Helson.*

Fie $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{P})$ iar F şi f ca în enunţul teoremei. Deoarece

$$\left|\int_{\mathbf{P}} f^\wedge(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right| = \left|\int_{\Gamma} f(\gamma)\,\mu^\wedge(-\gamma)\,\mathrm{d}\gamma\right| \leqslant K\|\mu^\wedge\|_\infty,$$

rezultă că

$$\left|\int_{\mathbf{P}} F\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_{\mathbf{P}} |F - f^\wedge|\,\mathrm{d}|\mu| + \left|\int_{\mathbf{P}} f^\wedge\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant$$

$$\leqslant (1-\alpha)\,\|\mu\| + K\,\|\mu^\wedge\|_\infty$$

şi deci conf. **17.24** (i)

$$\alpha\,\|\mu\| \leqslant K\,\|\mu^\wedge\|_\infty$$

ceea ce, conf. **19.7** (1), demonstrează teorema

19.10. NOTĂ. Existenţa mulţimilor Helson perfecte rezultă imediat din **17.12**, **17.26** şi **19.7** (1).

Adică *orice mulţime Kronecker* (în I-grupuri) *şi orice mulţime de tip* K_q (în $\mathbf{D}_q$) *este o mulţime Helson.* Un alt caz este considerat ulterior.

În cîteva din secţiunile următoare arătăm că *mulţimile Helson coincid cu mulţimile Carleson pentru* $\mathbf{G} = \mathbf{T}$, ceea ce ne va permite ca în acest caz să vorbim despre *mulţimi Carleson-Helson.*

19.11 [11]). LEMĂ. *Fie* $c_1, \ldots, c_n$ *numere complexe; se consideră variabila aleatoare:*

$$\pm c_1 \pm c_2 \pm \cdots \pm c_n$$

cu semnele $\pm$ *alese la întîmplare cu probabilitatea* 1/2 *şi independent unele faţă de celelalte. Notînd prin* E *valoarea medie, avem:*

$$E(|\pm c_1 \pm \cdots \pm c_n|) \geqslant \sqrt{3}/3\,(|c_1|^2 + \cdots + |c_n|^2)^{1/2}.$$

Scriind $|\pm c_1 + \cdots \pm c_n|^2 = |\pm c_1 \pm \cdots \pm c_n|^{\alpha+\beta}$ cu $\alpha = 2/3$ şi $\beta = 4/3$ şi ţinînd seama de inegalitatea lui Hölder se obţine :

$$E(|\pm c_1 \cdots \pm c_n|^2) \leqslant (E(|\pm c_1 \cdots \pm c_n|)^{2/3}(E(|\pm c_1 \cdots \pm c_n|^4))^{1/3}.$$

---

[11]) *Notaţii*: Ω_n = mulţimea tuturor sistemelor $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \varepsilon$ unde $\varepsilon_k = \pm 1$; P = probabilitatea pe Ω_n definită prin $P(\varepsilon) = \dfrac{1}{2^n}$; E valoarea medie în raport cu P (aceste notaţii vor fi folosite la **19.25**).

Cum însă :

$$E(|\pm c_1 \dots \pm c_n|^2) = |c_1|^2 + \dots + |c_n|^2$$

$$E(|\pm c_1 \dots \pm c_n|^4) = |c_1|^4 + \dots + |c_n|^4 + 6 \sum_{i<j} |c_i|^2 |c_j|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 3(|c_1|^2 + \dots + |c_n|^2)^2$$

lema devine evidentă.

19.12. LEMĂ. *Fiind dată măsura* $d\mu \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, *și* $\varepsilon > 0$, *există niște întregi* $n_1 = 0, n_2, \dots, n_k$, *așa ca, oricare ar fi alegerea semnelor* $\pm$, *măsura :*

$$(1) \quad d\nu = (\pm e^{in_1 t} \pm \dots \pm e^{in_k t})\, d\mu(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{int}$$

să satisfacă condiția :

$$(2) \qquad \sup_n |d_n| \leqslant \sup_n |c_n| + (k-1) \overline{\lim_{|n| \to \infty}} |c_n| + \varepsilon$$

Alegem l așa ca pentru $|m| > l$ să avem :

$$(3) \qquad |c_m| < \overline{\lim_{|n| \to \infty}} |c_n| + \frac{\varepsilon}{k-1}$$

iar apoi alegem $n_1 = 0$ și n_j așa ca :

$$n_{j+1} - n_j \geqslant 2\,l.$$

Vom arăta atunci că în suma

$$d_n = \pm c_{n-n_1} \pm c_{n-n_2} \pm \dots \pm c_{n-n_k}$$

toți termenii, cu excepția cel mult a unuia dintre ei, admit majorarea (3). În caz contrar ar exista $1 \leqslant i < j \leqslant k$ așa ca $|n - n_i| \leqslant l$ și $|n - n_j| \leqslant l$, deci $n_j - n_i \leqslant 2l$, absurd.

Cu acestea lema devine evidentă.

19.13. TEOREMĂ. *Fie* $\mathbf{G} = \mathbf{T}$ *și* $P \subset \mathbf{G}$ *o mulțime compactă. Sînt echivalente :*

(i) **P** *este mulțime Helson.*

(ii) *Există o constantă* $\rho > 0$ *așa încît pentru orice măsură* $d\mu \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \in \mathscr{M}(\mathbf{P})$ *să avem :*

$$\overline{\lim_{|n| \to \infty}} |c_n| > \rho \|\mu\|.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Evident, conf. **19.7** (3).

(i) $\Rightarrow$ (ii). Fie **P** o mulțime Helson și $\mu \in \mathscr{M}(\mathbf{P})$; teorema **19.7** (3) face să corespundă mulțimii P o constantă $\delta > 0$.

Să alegem un întreg k aşa ca $\delta \sqrt{k/3} > 2$ şi să luăm $\varepsilon = \|\mu\|$; alegem apoi numerele întregi $n_1, \ldots, n_k$ conf. lemei **19.12**. Considerînd măsura $d\nu$ de la **19.12** ca aleatoare (depinzînd de semnele $\pm$), avem :

$$E(\|\nu\|) = E\left(\int | \pm e^{in_1 t} \pm \ldots \pm e^{in_k t} | \, d|\mu|(t)\right) =$$

$$= \int E(| \pm e^{in_1 t} \pm \ldots \pm e^{in_k t}|) \, d|\mu|(t)$$

conf. teoremei lui Fubini.

Dar, conf. lemei **19.11**, avem :

$$E(| \pm e^{in_1 t} \ldots \pm e^{in_k t}|) \geqslant \sqrt{3}/3 \cdot \sqrt{k} = \sqrt{k/3}$$

şi prin urmare :

$$E(\|\nu\|) \geqslant \sqrt{k/3} \cdot \|\mu\|$$

deci există o alegere a semnelor $\pm$ astfel încît

$$\|\nu\| \geqslant \sqrt{k/3} \cdot \|\mu\|.$$

Se determină ν prin această alegere; cum $\nu \in \mathcal{M}(\mathbf{P})$, avem :

$$(1) \qquad \sup_n |d_n| \geqslant \delta \, \|\nu\| \geqslant \delta \sqrt{k/3} \cdot \|\mu\|$$

Dar, conf. **19.12**, avem :

$$\sup_n d_n \leqslant \sup_n |c_n| + (k-1) \varlimsup_{|n| \to \infty} |c_n| + \|\mu\|$$

şi cum $\sup_n |c_n| \leqslant \|\mu\|$ putem scrie :

$$(2) \qquad \sup_n |d_n| \leqslant 2\, \|\mu\| + (k-1) \varlimsup_{|n| \to \infty} |c_n|.$$

Comparînd (1) cu (2) se obţine :

$$\varlimsup_{|n| \to \infty} |c_n| \geqslant \frac{\delta \sqrt{k/3} - 2}{k-1} \|\mu\|,$$

deci teorema este demonstrată.

19.14. Reţinem, în cazul particular $\mathbf{G} = \mathbf{T}$, următorul rezultat al lui Helson, care va fi apoi extins la l.c.a.-grupuri oarecari, justificînd denumirea mulţimilor studiate în acest paragraf.

TEOREMĂ. *Dacă* $\mathbf{P} \subset \mathbf{T}$ *este o mulţime Helson iar* $\mu \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \in \mathcal{M}(\mathbf{P})$, *atunci* $|c_n| \neq o(1)$ *adică* $|c_n| \nrightarrow 0$.

Evident, conf. **19.13**.

O semnificaţie deosebită va căpăta acest rezultat în § **20**.

Pentru a demonstra echivalența între mulțimile Carleson și Helson ne mai este necesară următoarea :

19.15. LEMĂ . *Fie* $\mathbf{P} \subset \mathbf{T}$ *o mulțime Helson,* α *constanta asociată lui* $\mathbf{P}$ *ca la* **19.6** *iar* $d\mu \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \in \mathcal{M}(\mathbf{P})$. *Atunci* :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ |c_{-n}| \leqslant \alpha\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ |c_n|.$$

Măsura $d\bar{\mu} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{c}_{-n} e^{int}$ este absolut continuă în raport cu $d\mu$. Aplicînd teorema Radon-Nikodym rezultă că $d\bar{\mu}$ poate fi aproximată în normă prin măsuri de forma $f\,d\mu$, unde $f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int} \in \mathcal{C}(\mathbf{P}) = \mathcal{A}(\mathbf{P})$ și $|f| \leqslant 1$ pe $\mathbf{P}$. Dar, conf. **15.21** (3), rezultă că $f\,d\mu \sim \sum_{-\infty}^{\infty} d_n$, unde :

$$d_n = \sum_{-\infty}^{\infty} c_{n-p}\, a_p, \quad -\infty < n < \infty.$$

Pe de altă parte, conf. **19.6**, avem :

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n| < \alpha$$

deci

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ |d_n| \leqslant \alpha\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ c_n.$$

Dar primul membru este oricît de aproape de $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ |c_{-n}|$, ceea ce stabilește lema.

19.16. TEOREMĂ. *Mulțimile Helson sînt aceleași cu mulțimile Carleson* ($\mathbf{G} = \mathbf{T}$).

Evident, orice mulțime Carleson este o mulțime Helson. Reciproc, fie $\mathbf{P}$ o mulțime Helson, iar $d\mu \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \in \mathcal{M}(\mathbf{P})$; conf. **19.16** avem :

$$\overline{\lim_{|n|\to\infty}}\ |c_n| > \rho\, \|\mu\|$$

și, ținînd cont de **19.15**, obținem :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ |c_n| > \rho\, \alpha^{-1} \|\mu\|$$

ceea ce, conf. **19.8**, demonstrează teorema.

Putem vorbi așadar, în cazul $\mathbf{G} = \mathbf{T}$, de *mulțimi Carleson-Helson*. Din cele de mai sus rezultă și următoarea

19.17. TEOREMĂ. *Fie* $\mathbf{P} \subset \mathbf{T}$ *o mulțime închisă. Pentru ca* $\mathbf{P}$ *să fie o mulțime Carleson-Helson este necesar și suficient să existe o constantă*

δ_1 (resp. δ_2, δ_3, δ_4) *aşa ca pentru orice măsură* $d\mu \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \in \mathcal{M}(\mathbf{P})$ *să avem* :

$$\sup_{-\infty < n < \infty} |c_n| > \delta_1 \|\mu\|$$

(resp.

$$\sup_{n > 0} |c_n| > \delta_2 \|\mu\|$$

$$\overline{\lim_{|n| \to \infty}} |c_n| > \delta_3 \|\mu\|$$

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |c_n| > \delta_4 \|\mu\|).$$

Cele patru condiţii astfel definite sînt echivalente.

19.18. Vom prezenta acum o nouă clasă de mulţimi Helson în l.c.a.-grupuri.

TEOREMĂ. *Fie* $\mathbf{G}$ *un l.c.a.-grup iar* $\mathbf{P} \subset \mathbf{G}$ *o mulţime compactă independentă şi numărabilă. Atunci* $\mathbf{P}$ *este o mulţime Helson.*

(I) Fie $\mathbf{E} = \{x_1, \ldots, x_p\} \subset \mathbf{P}$ o parte finită a lui $\mathbf{P}$, fie $x_1, \ldots, x_r$ acele puncte din $\mathbf{E}$ al căror ordin este 2 (dacă există) şi fie $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{E})$ cu $\|\mu\| = 1$. Vom arăta că există numerele $a_j \in \mathbf{S}(x_j)$ (vezi **17.5**) aşa încît :

$$\left| \sum_1^n a_j \, \mu(\{x_j\}) \right| \geqslant 1/2. \tag{1}$$

Pentru aceasta inserăm următoarea :

LEMĂ. *Dacă* $\{z_1, \ldots, z_m\}$ *sînt numere complexe, atunci există* $\theta \in [0, 2\pi]$ *aşa ca, dacă* $w_j = e^{i\theta} z_j$, *să avem* :

$$\sum_1^m |\mathrm{Re}\, w_j| \geqslant 1/2 \sum_1^m |w_j| = 1/2 \sum_1^m |z_j|.$$

Lema rezultă din următoarele consideraţii geometrice: dacă S_n sînt nişte segmente de lungime l_n şi cu proiecţiile de lungime p_n şi q_n pe axa reală şi resp. cea imaginară, atunci avem cel puţin una din relaţiile :

$$\sum p_n \geqslant 1/2 \sum l_n, \tag{α}$$

$$\sum q_n \geqslant 1/2 \sum l_n; \tag{β}$$

deci, printr-o eventuală relaţie a axelor cu $\frac{\pi}{2}$, ajungem la situaţia (α) ceea ce demonstrează lema cu $\theta = 0$ sau $\theta = \pi/2$.

Prin urmare, dacă notăm $p_j = \mu(\{x_j\})$, putem presupune că :

$$\sum_1^r |\mathrm{Re}\, p_j| \geqslant 1/2 \sum_1^r |p_j|$$

deoarece nici $\|\mu\|$ şi nici membrul întîi din (1) nu se schimbă dacă μ se înmulţeşte cu un scalar unimodular.

Cu aceste precizări să punem, pentru $1 \leqslant j \leqslant r$, $a_j = \pm 1$ aşa ca $a_j \operatorname{Re} p_j \geqslant 0$; pentru $r + 1 \leqslant j \leqslant n$ să alegem b_j, $|b_j| = 1$, aşa ca $b_j p_j \geqslant 0$ şi $\theta_j - \pi/3 \leqslant \theta_j \leqslant \pi/3$, aşa ca $a_j = e^{i\theta_j} b_j \in \mathbf{S}(x_j)$. Atunci

$$\operatorname{Re} \sum_1^n a_j p_j = \sum_1^r a_j \operatorname{Re} p_i + \sum_{r+1}^n \cos \theta_j |p_j| =$$

$$= \sum_1^r |\operatorname{Re} p_j| + \sum_{r+1}^n \cos \theta_j |p_j| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \sum_1^r |p_j| + \frac{1}{2} \sum_{r+1}^n |p_j| = \frac{1}{2} \sum_1^n |p_j| = \frac{1}{2}$$

şi deci relaţia (1) este demonstrată.

(II) Arătăm că pentru măsura μ considerată mai sus are loc relaţia :

$$\|\mu^\wedge\|_\infty \geqslant 1/2. \tag{2}$$

Într-adevăr, fie $f : \mathbf{E} \to \mathbf{T}$ definită prin $f(x_j) = a_j \in \mathbf{S}(x_j)$ şi fie $\varepsilon > 0$. Conf. **17.5** există $\gamma \in \mathbf{\Gamma}$ aşa ca

$$|f(x_j) - (-x_j, \gamma)| < \varepsilon, j = 1, \dots n;$$

atunci

$$\mu^\wedge(\gamma) = \sum_1^n (-x_i, \gamma)\, \mu(\{x_i\})$$

şi deci :

$$\left\| \mu^\wedge(\gamma) | - \left| \sum_1^n a_j \mu(\{x_j\}) \right\| \leqslant\right.$$

$$\leqslant \left| \sum_1^n ((-x_j, \gamma) - f(x_j))\, \mu(\{x_j\}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_1^n |f(x_j) - (x_j, \gamma)|\, |\mu(\{x_j\})| \leqslant \varepsilon \|\mu\| = \varepsilon.$$

Prin urmare

$$|\mu^\wedge(\gamma)| \geqslant \left| \sum_1^n a_j \mu(\{x_j\}) \right| - \varepsilon \geqslant 1/2 - \varepsilon$$

şi deci

$$\|\mu^\wedge\|_\infty \geqslant 1/2 - \varepsilon.$$

Cum ε a fost arbitrar, relaţia (2) este demonstrată.

(III) Pînă acum am demonstrat că pentru măsuri $\mu \in \mathscr{M}(\mathbf{P})$, punctuale, avem :

$$\|\mu^\wedge\|_\infty \geqslant 1/2\, \|\mu\|. \tag{3}$$

Dar, cum **P** este numărabil, orice $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{P})$ este o măsură discretă, deci este o limită, în norma lui $\mathcal{M}(\mathbf{G})$, a unui şir de măsuri punctuale $\mu_n \in \mathcal{M}(\mathbf{P})$. De aici rezultă uşor relaţia (3) pentru orice $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{G})$ şi teorema este demonstrată.

19.19. NOTĂ. În cap. IV vom arăta că *există mulţimi compacte numărabile care nu sînt mulţimi Helson*. În cele ce urmează studiem, în cazul particular $\mathbf{G} = \mathbf{T}$, *proprietăţile aritmetice* ale mulţimilor Helson. Unele vor fi generalizate la l.c.a.-grupuri tot în cap. IV.

19.20. TEOREMĂ. *Fie* $\mathbf{P} \subset \mathbf{T}$ *o mulţime Carleson-Helson. Există* $k = k(\mathbf{P}) \in \mathbf{N}$ *aşa ca pentru orice* n, $s \in \mathbf{N}$ *şi orice* $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbf{T}$, *cel mult* kns *puncte de forma*

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n ;\ \alpha_j \in \mathbf{Z},\ |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n| < 2^s$$

se află în **P**.

Pentru demonstraţie sînt necesare cîteva leme. Înainte de a enunţa lemele şi de a da demonstraţia lor şi a teoremei, prezentăm cîteva consecinţe.

19.21. TEOREMĂ. *O mulţime perfectă simetrică* $\mathbf{P} \subset \mathbf{T}$ *nu este o mulţime Carleson-Helson.*

Într-adevăr, cu notaţiile de la §16, fie $n = 2^s$ şi $x_j = \xi_1 \ldots \xi_{j-1}(1 - \xi_j)$ pentru $1 \leqslant j \leqslant n$, unde ξ_i definesc mulţimea **P**. Dacă **P** ar fi o mulţime Carleson-Helson, atunci ar exista un $k \in \mathbf{N}$ aşa ca pentru orice s să avem $ks2^s > 2^{2^s}$ căci toate punctele de forma $\sum_1^n \alpha_j x_j$ cu $\alpha_j = 0, 1$ aparţin lui **P**. Dar această relaţie este evident falsă, q.e.d.

19.22. TEOREMĂ. *Fie* $\mathbf{P} \subset \mathbf{T}$ *o mulţime Carleson-Helson. Există* $k' = k'(P) \in \mathbf{N}$ *aşa ca pentru orice* $s \in \mathbf{N}$ *şi pentru orice progresie aritmetică de* 2^s *termeni, cel mult* $k's$ *termeni să aparţină lui* P.

Evident, conf. **19.20**, cu $n = 2$ şi $k' = 2k$.

19.23. TEOREMĂ. (S. Bernstein). *Fie*

$$T(u) = \sum_{\nu=1}^{K} r_\nu \cos(\nu u + \varphi_\nu) \tag{1}$$

un polinom trigonometric real şi

$$M = \sup_u |T(u)|.$$

Atunci

$$\sup_u |T'(u)| \leqslant K \cdot M, \tag{2}$$

egalitatea fiind atinsă doar în cazul $T(u) = M \cos(Ku + \varphi)$.

Considerăm punctele

$$u_k = \frac{(2k-1)\pi}{2K},\ 1 \leqslant k \leqslant 2K$$

şi măsura μ de masă $\frac{\pi}{K}$ în fiecare din aceste puncte. Se verifică printr-un calcul direct că :

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\mu = 2\pi,$$

$$(3) \qquad \begin{gathered} \int_0^{2\pi} \cos^2(\nu u)\,\mathrm{d}\mu(u) = \int_0^{2\pi} \sin^2(\nu u)\,\mathrm{d}\mu(u) = \pi\,;\ 1 \leqslant \nu \leqslant K-1 \\ \int_0^{2\pi} \cos^2(Ku)\,\mathrm{d}\mu(u) = 2\pi,\ \int_0^{2\pi} \sin^2(Ku)\,\mathrm{d}\mu(u) = 0, \end{gathered}$$

şi că $\left\{\frac{1}{2},\ \cos u,\ \sin u, \ldots,\ \cos(K-1)\,u,\ \sin(K-1)\,u\right\}$ este un sistem ortogonal în $\mathcal{L}^2(\mu)$.

Remarcăm că considerarea acestei măsuri şi stabilirea proprietăţilor (3) sînt legate de problema interpolării trigonometrice (vezi Zygmund, [40], ch. X).

O formă echivalentă formei (1) pentru polinoame trigonometrice reale este

$$T(u) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{K} (a_\nu \cos(\nu u) + b_\nu \sin(\nu u)).$$

În cursul acestei demonstraţii vom lucra numai cu forma de mai sus.

Notînd

$$D(x) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{K-1} \cos(\nu x) + \frac{1}{2}\cos(Kx),$$

avem

$$D(u-t) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{K-1} [\cos(\nu u)\sin(\nu t) + \sin(\nu u)\cos(\nu t)] +$$

$$+ \frac{1}{2}\cos(Ku)\sin(Kt) + \frac{1}{2}\sin(Ku)\cos(Kt),$$

deci, conf. lui (3),

$$\int_0^{2\pi} T(t)\,D(u-t)\,\mathrm{d}\mu(t) =$$

$$= \pi\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{K-1} [a_\nu \cos(\nu u) + b_\nu \sin(\nu u)] + b_K \sin(Ku)\right].$$

Astfel

$$(4) \qquad T(u) = a_K \cos(Ku) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T(t)\,D(u-t)\,\mathrm{d}\mu(t).$$

Formula (4) determină pe T în funcţie de valorile sale în u_k, $1 \leqslant k \leqslant \leqslant 2K$, şi a_K. Noi o utilizăm la majorarea lui $|T'(u)|$.

După (4)

$$T'(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T(t)\, D'(-t)\, \mathrm{d}\mu(t).$$

Cum

$$D(x) = \frac{\sin(Kx)}{2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)},$$

deci

$$D'(x) = \frac{K \cos(Kx) \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \frac{\sin(Kx)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{2 \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

obţinem

$$T'(0) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{2K} T(u_k) \frac{\frac{1}{2} \frac{\sin(Ku_k)}{\cos^2(u_k/2)}}{2 \operatorname{tg}^2\left(\frac{u_k}{2}\right)} \frac{\pi}{K} =$$

$$= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{2K} T(u_k) \frac{(-1)^{k+1}}{\left[2 \sin\left(\frac{u_k}{2}\right)\right]^2}.$$

Luînd în loc de $T(u)$ pe $T(\theta + u)$, rezultă

$$T'(\theta) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{2K} T(\theta + u_k) \frac{(-1)^{k+1}}{\left[2 \sin\left(\frac{u_k}{2}\right)\right]^2}. \tag{5}$$

Am obţinut deci chiar o expresie explicită a lui T' în funcţie de valorile lui T.

Punînd în (5) $T(u) = \sin(Ku)$, $\theta = 0$, obţinem

$$K = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{2K} \frac{1}{\left[2 \sin\left(\frac{u_k}{2}\right)\right]^2}. \tag{6}$$

Din (5) şi (6) rezultă că

$$|T'(\theta)| \leqslant K.\ M,$$

oricare ar fi θ, ceea ce demonstrează pe (2).

Dacă $\sup\limits_{u} |T'(u)| = K\cdot M$, există θ cu $|T'(\theta)| = K\cdot M$ deci conform (5) şi (6) *ori* $T(\theta+u_k) = M, 1 \leqslant k \leqslant 2K$, *ori* $T(\theta+u_k) = -M, 1\leqslant k \leqslant 2K$. Considerăm primul caz, celălalt fiind analog :

$$\Delta(u) = T(\theta + u) - M \sin (Ku)$$

are ca rădăcini pe $u_1,\dots, u_{2K}$. Însă în aceste puncte $T(\theta+u)$ şi sin (Ku) ating extremele, deci derivatele se anulează. Prin urmare $\Delta'(u_k) = 0$, $1\leqslant k\leqslant 2K$, deci rădăcinile u_k ale lui $\Delta(u)$ sînt duble. Cum $4K > 2K+1$, $\Delta(u)\equiv 0$, deci $T(\theta + u) = M \sin(Ku)$, $T(u) = M \sin K(u - \theta) = M \cos(Ku + \varphi)$.

19.24. LEMĂ. *Considerăm polinomul trigonometric real :*

$$T(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\substack{\alpha_i\in\mathbf{Z}\\ |\alpha_1|+\dots+|\alpha_n|<2^s}} r_{\alpha_1\dots\alpha_n} \cos(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \varphi_{\alpha_1\dots\alpha_n})$$

Dacă $M = \sup\limits_{u_1,\dots,u_n} |T(u_1,\dots,u_n)|$, *atunci există un produs* H *de* n *segmente de lungime* $\frac{1}{2^s}$ *astfel încît* $|T(u_1,\dots,u_n)| > \frac{M}{2}$ *pe* H.

Fără a restrînge generalitatea, putem presupune că $M = |T(0,\dots,0)|$. După formula creşterilor finite

$$T(u_1,\dots,u_n) - T(0,\dots,0) = u_1\frac{\partial T}{\partial u_1} + \dots + u_n\frac{\partial T}{\partial u_n}$$

derivatele fiind calculate într-un acelaşi punct $(a_1,\dots, a_n)$. Fie $H = \left\{(u_1,\dots, u_n);\ |u_j| \leqslant \frac{1}{2^{s+1}},\ 1\leqslant j\leqslant n\right\}$. Atunci pentru orice $(u_1,\dots,u_n)\in H$, notînd $\varepsilon_j = \operatorname{sgn}\frac{\partial T}{\partial u_j}$, avem :

$$|T(u_1,\dots,u_n) - T(0,\dots,0)| \leqslant \frac{1}{2^{s+1}}\left(\varepsilon_1\frac{\partial T}{\partial u_1} + \dots + \varepsilon_n \frac{\partial T}{\partial u_n}\right).$$

Însă $\varepsilon_1 \frac{\partial T}{\partial u_1} + \dots + \varepsilon_n\frac{\partial T}{\partial u_n}$ este derivata în 0 a polinomului trigonometric real de grad $< 2^s$: $T(a_1 + \varepsilon_1 u, \dots, a_n + \varepsilon_n u)$; deci, conform teoremei **19.23**, este $\leqslant (2^s - 1)M$.

Prin urmare

$$M - |T(u_1,\dots,u_n)| \leqslant |T(0,\dots,0) - T(u_1,\dots,u_n)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{s+1}}(2^s - 1)M = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{s+1}}\right)M < \frac{M}{2},$$

adică

$$|T(u_1,\dots,u_n)| > \frac{M}{2}.$$

19.25. LEMĂ. *Fie N numărul tuturor $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{Z}^n$ astfel încît $|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n| < 2^s$ şi Ω_N, P, E ca la* **19.11**, *iar*

$$T_\varepsilon(u_1, \ldots, u_n) =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha_i \in \mathbf{Z} \\ |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n| < 2^s}} \varepsilon_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} r_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \cos(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n + \varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_n})$$

polinoame trigonometrice reale, $M_\varepsilon = \sup\limits_{u_1, \ldots, u_n} |T_\varepsilon(u_1, \ldots, u_n)|$ *şi* $R = \sum\limits_{\substack{\alpha_i \in \mathbf{Z} \\ |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n| < 2^s}} r^2_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$. *Atunci pentru orice $\lambda > 0$ avem:*

$$E(\mathrm{e}^{\lambda M_\varepsilon}) \leqslant 2^{ns+1} (2\pi)^n \mathrm{e}^{2\lambda^2 R} \tag{1}$$

Într-adevăr, pentru orice x real

$$\mathrm{ch}\, x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

deci pentru orice $u_1, \ldots, u_n$

$$E(\mathrm{e}^{2\lambda T_\varepsilon(u_1, \ldots, u_n)}) =$$

$$= \prod_{\substack{\alpha_i \in \mathbf{Z} \\ |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n| < 2^s}} E(\mathrm{e}^{2\lambda \varepsilon_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} r_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \cos(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n + \varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_n})}) =$$

$$= \prod_{\substack{\alpha_i \in \mathbf{Z} \\ |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n| < 2^s}} \mathrm{ch}(2\lambda r_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \cos(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n + \varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_n})) \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{e}^{2\lambda^2 R}$$

şi analog

$$E(\mathrm{e}^{-2\lambda T_\varepsilon(u_1, \ldots, u_n)}) \leqslant \mathrm{e}^{2\lambda^2 R}.$$

Prin urmare

$$E(\mathrm{e}^{2\lambda |T_\varepsilon|}) \leqslant E(\mathrm{e}^{2\lambda T_\varepsilon}) + E(\mathrm{e}^{-2\lambda T_\varepsilon}) \leqslant 2\, \mathrm{e}^{2\lambda^2 R}$$

După lema **19.24**, pentru orice $\varepsilon \in \Omega_N$ există un produs $\mathbf{H}_\varepsilon$ de n segmente de lungime $\frac{1}{2^s}$ astfel încît $|T_\varepsilon| > \frac{M_\varepsilon}{2}$ pe $\mathbf{H}_\varepsilon$, deci conform (2)

$$\frac{1}{2^{ns}} E(\mathrm{e}^{\lambda M_\varepsilon}) = E\left(\frac{1}{2^{ns}} \mathrm{e}^{\lambda M_\varepsilon}\right) \leqslant E\left(\int \ldots \int_{\mathbf{H}_\varepsilon} \mathrm{e}^{2\lambda |T_\varepsilon|} \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_n\right) \leqslant$$

$$\leqslant E\left(\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{2\lambda |T_\varepsilon|} \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_n\right) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} E(\mathrm{e}^{2\lambda |T_\varepsilon|}) \,\mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_n \leqslant 2\,(2\pi)^n \mathrm{e}^{2\lambda^2 R}$$

adică tocmai inegalitatea (1).

19.26. Lemă. *Fie Ω_N, P, E ca în lema* **19.25** *și fie :*

$$T_{k\varepsilon}(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{\substack{\alpha_i \in \mathbf{Z} \\ |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n| < 2^s}} \varepsilon_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} r_{k\alpha_1 \ldots \alpha_n} \cos(\alpha_1 u_1 +$$

$$+ \ldots + \alpha_n u_n + \varphi_{k\alpha 1 \ldots \alpha_n}), \ (k = 1, 2)$$

poligoane trigonometrice reale, $M_{k\varepsilon} = \sup\limits_{u_1, \ldots u_n} |T_{k\varepsilon}(u_1, \ldots, u_n)|$

$$R_k = \sum_{\substack{\alpha_i \in \mathbf{Z} \\ |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n| < 2^s}} r^2_{h\alpha_1 \ldots \alpha_n}, \ M_\varepsilon = M_{1\varepsilon} + M_{2\varepsilon} \text{ și } R = R_1 + R_2.$$

Atunci există un $\varepsilon \in \Omega_N$ *astfel încît*

$$M_\varepsilon \leqslant A \sqrt{ns\,R},$$

unde A este o constantă absolută.

După inegalitatea lui Hölder și lema **19.25** pentru orice $\lambda > 0$ avem :

$$E(e^{\lambda M_\varepsilon}) \leqslant E(e^{\lambda M_{1\varepsilon}} \cdot e^{\lambda M_{2\varepsilon}}) \leqslant E(e^{2\lambda M_{1\varepsilon}})^{1/2} \cdot E(e^{2\lambda M_{2\varepsilon}})^{1/2} \leqslant 2^{ns+1}(2\pi)^n e^{4\lambda^2 R}.$$

Astfel există $\varepsilon \in \Omega_N$ cu

$$e^{\lambda M_\varepsilon} \leqslant 2^{ns+1}(2\pi)^n e^{4\lambda^2 R}$$

$$\lambda M_\varepsilon \leqslant \ln[2^{ns+1}(2\pi)^n] + 4\lambda^2 R \leqslant A_0' ns + 4\lambda^2 R,$$

unde A_0 este o constantă absolută. Alegînd $\lambda = \sqrt{\frac{ns}{R}}$ și punînd $A = A_0 + 4$ obținem

$$M_\varepsilon \leqslant A \sqrt{ns\,R} \cdot$$

19.27. *Demonstrația teoremei* **19.20.** Ordonăm total mulțimea tuturor $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{Z}^n$ pentru care $|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n| < 2^s$ și punem :

1) $r_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = 1$ dacă punctul $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$ aparține lui P fără să fi fost considerat anterior în acest fel.

2) $r_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = 0$ în caz contrar.

Atunci $\sum\limits_{\alpha} r_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ este tocmai cardinalul C al mulțimii

$$P \cap \{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n ; \alpha_j \in Z, |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n| < 2^s\}.$$

Considerînd familia de polinoame trigonometrice

$$T(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{\substack{\alpha_i \in \mathbf{Z} \\ |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n| < 2^s}} \varepsilon_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} r_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} e^{i(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n)}$$

din lema **19.26** rezultă că există un $\varepsilon \in \Omega_K$ astfel încît

$$\sup_{u_1, \ldots, u_n} |T_\varepsilon(u_1, \ldots, u_n)| \leqslant A \sqrt{2ns\,C},$$

unde A este o constantă absolută.

Fie μ măsura de masă $\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_n} r_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ în $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$. Evident, $\mu \in \mathscr{M}(\mathbf{P})$ şi coeficienţii Fourier-Stieltjes ai lui μ sînt

$$c_m = T_\varepsilon(mx_1, \ldots, mx_n).$$

După cele de mai sus

$$\sup_{-\infty < m < \infty} |c_m| \leqslant A\sqrt{2ns \cdot C}$$

iar cum P este o mulţime Carleson-Helson, conform **19.17** avem

$$\sup_{-\infty < m < \infty} |c_m| \geqslant \delta \, \|\mu\| = \delta C,$$

unde constanta $\delta > 0$ depinde numai de P. Prin urmare

$$\delta C \leqslant A \cdot \sqrt{2ns \cdot C},$$

$$\delta^2 C^2 \leqslant A^2 \cdot 2ns \cdot C,$$

$$C \leqslant \frac{2A^2}{\delta^2} ns$$

şi teorema rezultă cu $k = \dfrac{2A^2}{\delta^2}$.

19.28 Teoremă. *Fie* **G** *un l.c.a.-grup iar* $\mathbf{P} \subset \mathbf{G}$ *o mulţime Helson. Atunci :*

$$\sigma \in \mathscr{M}(\mathbf{P}) \Rightarrow \sigma^\wedge \notin \mathscr{C}_0(\Gamma).$$

(I) Fie $\mathscr{M}_0(\mathbf{P}) = \{\mu \in \mathscr{M}(\mathbf{P}) \, ; \, \mu^\wedge \in \mathscr{C}_0(\Gamma)\}$; $\mathscr{M}_0(\mathbf{P})$ este un subspaţiu închis în $\mathscr{M}(\mathbf{P})$. Deoarece $\|\mu\|$ şi $\|\mu^\wedge\|_\infty$ sînt norme echivalente pe $\mathscr{M}(\mathbf{P})$, rezultă că aplicaţia $\mu \to \mu^\wedge$ duce pe $\mathscr{M}_0(\mathbf{P})$ într-un subspaţiu uniform închis din $\mathscr{C}_0(\Gamma)$ şi admite o inversă continuă.

Fie $T \in [\mathscr{M}_0(\mathbf{P})]^*$; T poate fi privit ca o funcţională liniară şi continuă pe un subspaţiu uniform închis al lui $\mathscr{C}_0(\Gamma)$, deci se poate extinde la o funcţională liniară şi continuă pe $\mathscr{C}_0(\Gamma)$; în definitiv există o măsură $\lambda \in \mathscr{M}(\Gamma)$ aşa ca pentru orice $\mu \in \mathscr{M}_0(\mathbf{P})$ să avem :

$$T\mu = \int_\Gamma \mu^\wedge d\lambda. \tag{1}$$

Dar un calcul evident ne arată că

$$\int_\Gamma \mu^\wedge \, d\,\lambda = \int_{\mathbf{G}} \lambda^\wedge \, d\,\mu = \int_{\mathbf{P}} \lambda^\wedge d\mu. \tag{2}$$

Prin urmare, *pentru orice* $T \in [\mathscr{M}_0(\mathbf{P})]^*$ *există o funcţie* $f \in \mathscr{C}(\mathbf{P})$ *astfel încît*

$$T\mu = \int_{\mathbf{P}} f d\,\mu, \ \mu \in \mathscr{M}_0(\mathbf{P}). \tag{3}$$

(II) Dacă φ este o funcţie boreliană mărginită pe **P**, atunci $\mu \to \int_{\mathbf{P}} \varphi d\mu$ este o funcţională liniară şi continuă pe $\mathcal{M}_0(\mathbf{P})$ şi deci, conf. (I), există $f \in \mathcal{C}(\mathbf{P})$ aşa ca

$$\int_{\mathbf{P}} (f - \varphi)\, d\mu = 0, \quad \mu \in \mathcal{M}_0(\mathbf{P}). \tag{4}$$

Dacă pentru orice $\gamma \in \Gamma$ notăm $d\mu_\gamma(x) = (x, \gamma)\, d\mu(x)$, atunci $\mu_\gamma \in \mathcal{M}_0(\mathbf{P})$ şi deci :

$$\int_{\mathbf{P}} (\varphi(x) - f(x))\, (x, \gamma)\, d\mu(x) = 0 \tag{5}$$

pentru orice $\gamma \in \Gamma$ şi orice $\mu \in \mathcal{M}_0(\mathbf{P})$.

Conf. teoremei de unicitate (**5.4.** (1)). rezultă atunci $\varphi d\mu = f d\mu$ pentru orice $\mu \in \mathcal{M}_0(\mathbf{P})$.

Aşadar, *pentru orice funcţie boreliană şi mărginită* φ *pe* **P** *există o funcţie* $f \in \mathcal{C}(\mathbf{P})$ *astfel încît*

$$\varphi d\mu = f d\mu, \quad \mu \in \mathcal{M}_0(\mathbf{P}). \tag{6}$$

(III) Fie $\sigma \in \mathcal{M}_0(\mathbf{P})$, $\sigma \neq 0$ şi $\mathbf{S} = \operatorname{supp} \mu$; conf. **5.10** σ este o măsură continuă ; se verifică atunci uşor că **S** este o *mulţime perfectă şi* că pentru orice mulţime $\mathbf{V} \subset \mathbf{S}$ deschisă relativ la **S** avem $|\sigma|(\mathbf{V}) > 0$.

Să presupunem că — (*) — *există* $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2 \subset \mathbf{S}$, $\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2 = \emptyset$, $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ *deschise relativ la* **S** *aşa încît* $\overline{\mathbf{V}}_1 \cap \overline{\mathbf{V}}_2 \neq \emptyset$. Fie φ = funcţia caracteristică a lui $\mathbf{V}_1$; conf. (II) există $f \in C(P)$ aşa încît $\varphi d\sigma = f d\sigma$, deci $\varphi d|\sigma| = |f|\, d|\sigma|$.

Deoarece $\int_{\mathbf{V}_2} |f|\, d|\sigma| = \int_{\mathbf{V}_2} \varphi\, d|\sigma| = 0$ rezultă că $|f|$ este nulă σ-a.p.t. pe $\mathbf{V}_2$, deci :

$$|\sigma|(\mathbf{V}_2 \cap \{|f| \neq 0\}) = 0 ;$$

dar mulţimea

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{V}_2 \cap \{|f| \neq 0\}$$

este relativ deschisă în **S**, deci $\mathbf{U}_2 = \emptyset$ şi prin urmare $f = 0$ pe $\mathbf{V}_2$ deci pe $\overline{\mathbf{V}}_2$ căci **S** este perfect.

Pe de altă parte, $\int |f - \varphi|\, d|\sigma| = 0$ şi deci $f = 1$, σ-a.p.t. pe $\mathbf{V}_1$, deci :

$$|\sigma|(\mathbf{V}_1 \cap \{|f| \neq 1\}) = 0 ;$$

dar mulţimea :

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{V}_1 \cap \{|f| \neq 1\}$$

este relativ deschisă în S, deci $U_1 = \emptyset$ și prin urmare $|f| = 1$ pe V_1 deci pe $\bar{V}_1$ căci S este perfect.

Cum însă $\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2 \neq \emptyset$, concluziile obținute sînt contradictorii, ceea ce demonstrează teorema *în ipoteza făcută.*

(IV) Ipoteza (*) de la (III) nu este restrictivă. Într-adevăr, vom arăta că ea este satisfăcută fără a impune vreo condiție suplimentară; ea exprimă faptul că spațiul S cu topologia indusă nu este „extremal discontinuu" (vezi Kelley, [19 bis]).

Cum $\sigma^\wedge \in \mathcal{C}_0(\Gamma)$, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulțime compactă K_ε așa ca $|\sigma^\wedge| < \varepsilon$ pe K'_ε; cum $\sigma \neq 0$, rezultă că există un $\varepsilon_0 > 0$ așa ca K_{ε_0} să aibă interiorul nevid, și fără a restrînge generalitatea, putem presupune că K_{ε_0} este o vecinătate a originii (deoarece în loc de σ putem considera măsura $d\sigma_\gamma(x) = (x, \gamma)\, d\sigma(x)$ cu γ convenabil ales). Fie Λ subgrupul generat de mulțimea:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_{\varepsilon_0/n}.$$

Un raționament obișnuit de compacitate ne arată că Λ este *acoperit de o familie numărabilă de translatate ale lui* K_{ε_0}. Evident, Λ este *deschis* iar $\sigma^\wedge = 0$ în afara lui Λ.

Fie $H = A(G, \Lambda)$, atunci H este compact și $\sigma = \sigma * m_H$ deoarece $\sigma^\wedge = \sigma^\wedge \chi_\Lambda$, unde χ_Λ este funcția caracteristică a lui Λ. Deci, pentru orice mulțime boreliană $E \subset G$ și orice punct $x \in H$, avem:

$$\sigma(E - x) = \int_G \sigma(E - x - y)\, dm_H(y) = \int_G \sigma(E - y)\, dm_H(y) = \sigma(E);$$

prin urmare dacă $x \in S'$, atunci $x + H \subset S'$, ceea ce demonstrează că S este o reuniune de clase ale lui H. Cum $S \subset P$ iar P este o mulțime Helson, rezultă că H este o mulțime Helson; conf. **10.3**, rezultă atunci că $\mathcal{A}(H) = \mathcal{C}(H)$, deci, conf. **14.19**, bis, subgrupul H este finit. Cum $H \equiv (\Gamma/\Lambda)^\wedge$ rezultă că Λ are indice finit în Γ. În definitiv am obținut că Γ *este acoperit de o familie numărabilă de translatate ale lui* K_{ε_0}; *în particular orice compact din* Γ *este acoperit de o reuniune finită de translatate ale lui* K_{ε}

Această ultimă concluzie implică, la rîndul ei, conf. **2.6**, că *fiecar punct din* G *are o bază numărabilă de vecinătăți.*

Fie acum un punct $x \in S$; concluzia obținută împreună cu faptul că S este o mulțime perfectă ne arată că există:

(i) un șir numărabil $\{x_n\} \subset S$ cu proprietățile:

$$- \lim_n x_n = x$$

$$- x_n \neq x, \text{ or } n \in N$$

$$- x_n \neq x_m, \text{ or } n \neq m;$$

(ii) pentru orice $n \in N$, o vecinătate deschisă W_n a lui x_n așa ca

$$W_n \cap W_m = \Phi, \quad \text{or } n \neq m$$

Să punem:

$$V_1 = S \cap \bigcup W_{2n-1}$$

$$V_2 = S \cap \bigcup W_{2n}.$$

Atunci V_1, V_2 sînt relativ deschise în S, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, dar $x \in \overline{V}_1 \cap \overline{V}_2$. Teorema este complet demonstrată.

19.29. Note bibliografice. Mulțimile Carleson și mulțimile Helson se numesc astfel după numele autorilor care le-au considerat mai întîi (Carleson [3], Helson [8]). Echivalența dintre ele în cazul **G** = **T** a fost stabilită de Wik [36].

Teorema **19.20** se datorește lui Kahane și Salem ([16, [17]) iar teorema **19.28** se datorește lui Helson [9]. În expunerea de față ne-am condus după [17] și [26].

Nu se știe în ce condiții reuniunea a două mulțimi Helson este încă o mulțime Helson. Rezultate parțiale în acest sens au fost obținute de Malliavin [21]. Pentru alte rezultate în legătură cu mulțimile Helson se pot consulta lucrările : Rosenthal [24], Kahane [18] și Edwards [6 bis].

Primită la 4 aprilie 1967

Institutul de matematică
al Academiei
Republicii Socialiste România,
str. M. Eminescu nr. 47,
București

BIBLIOGRAFIE

1. Beurling, A., *Pseudomesures,...*, C. R. Acad. Sci. Paris, **258**, 406, 782, 1380, 1984, 2959, (1964).
2. Bourbaki, N., *Topologie générale*, II² éd., Hermann, Paris, 1959.
3. Carleson, L., *Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle*. Acta Math., **87**, 325–345 (1952).
4. Cartan, H., *Théorie des fonctions analytiques d'une ou de plusieurs variables complexes*, Hermann, Paris, 1961.
5. Dinculeanu, N., *Vector measures*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1966.
6. Dunford, N., Schwarz, I., *Linear Operators*, Part I, Interscience Publ., New York, 1958.

6 bis. Edwards, R.E., *Supports and singular supports of pseudomeasures*. J. Austral. Math. Soc., **6**, 65–75 (1966).

7. Hausdorff, F., *Mengenlehre*, Dover Publ., New York.

7bis. Hartman, S., *Some problems in the algebra of Borel measures*. In *Abstracts of short communications I.C.M.*, Stockholm, 1965.

8. Helson, H., *Fourier transforms on perfect sets*. Studia Math. **14**, 209–213 (1954).
9. Hewitt, E., *The asymmetry of certain algebras of Fourier-Stieltjes transforms*. Michigan Math. J., **5**, 149–158 (1955).
10. Hewitt, E., Kakutani, S., *A class of multiplicative linear functionals on the measure algebra of a l.c.a. group* Illinois J. of Math., **4**, 553–574 (1960).
11. Hewitt, E., Ross, K., *Abstract harmonic analysis*, I. Springer Verlag, Berlin, 1963.
12. Hewitt, E., Zuckerman, H.S., *A group theoretic method in approximation theory*. Ann. Math., **52**, 557–567 (1950).
13. — , *Approximation by polinomials, with integral coefficients, a reformulation of the Stone-Weierstrass theorem*. Duke Math. J., **26**, 305–324 (1959).
14. Hoffman, K., *Fondamentals of Banach Algebras*. Curitiba, 1962.
15. Hille, E., Phillips, R., *Functional Analysis and Semigroups*. Providence, New York, 1957.
16. Kahane, J.P., Salem, R., *Sur les ensembles de Carleson et de Helson*, C.R. Acad. Sci. Paris, **243**, 1706–1708 (1956).
17. — , *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*. Hermann, Paris, 1963.
18. Kahane, J.P., *Ensembles de Ryll-Nardjewski et ensembles de Helson*. Colloques math. Polska, *1*, 87–92 (1966).

19. Kaufman, R., *Examples in Helsons sets.* Bull. Amer. Math. Soc., **72**, 139–140 (1966).

19 bis. Kelley, J.L., *General Topology.* Ven Nostrand, New York, 1955.

20. Loomis, L.H., *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis.* Van Nostrand, New York, 1953.

21. Malliavin – Brameret, M-P et Malliavin P, *Caractérisation arithmétique d'une classe d'ensembles de Helson,* C. R. Acad. Sci. Paris, **264**, 192–193 (1967).

22. Marcus, S., *Atomic measures and Darboux property.* Revue math. pures et appl., **7**, 327–332 (1962).

23. Naimark, M.A., *Inele normate* (în limba rusă), Moscova, 1956.

24. Rosenthal, H.P., *Caractérisation des ensembles de Helson par des projecteurs.* C.R. Acad. Sci. Paris, **262**, 5 ; A 286-A 288 (1966).

25. Rudin, W., *Independent perfect sets in groups.* Michigan Math. J., **5**, 159–161 (1958).

26. — , *Fourier Analysis on Groups.* Interscience Publ., New-York, 1962.

27. Şreider, Iu.A., Mat. Sbornik N.S. **27** (**69**), 297–318 (1950).

28. — Mat. Sbornik N.S., **29** (**71**), 419–426 (1951).

29. Varopoulos, N. Th., *Algèbres de Banach. Algèbres de Groupes.* Publication du Séminaire de Math. d'Orsay, 1966.

30. Varopoulos, N. Th., *Measure algebras on locally compact Abelian groups,* Séminaire Bourbaki 1964/65 ; exposé no. 282.

31. Varopoulos, N. Th., *A note on the abstract Wiener-Pitt phenomenon.* Proc. Cambridge Phil. Soc., **61**, *1*, 297–298 (1965).

32. Varopoulos, N. Th., *Sur les mesures de Radon sur un groupe localement compact abélien,* C.R. Acad. Sci. Paris, **258**, 3805–3808, 4896–4898 (1964).

33. Varopoulos, N. Th., *A direct decomposition of measure algebra of a locally compact Abelian group.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **16** ,fasc. 1 (1966).

34. Varopoulos, N. Th., *Sets of multiplicity in locally compact Abelian groups.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **16**, fasc 2 (1966).

35. Wiener, N., Pitt, R.H., *On absolutely convergent Fourier-Stieltjes transforms.* Duke Math. J., **4**, 420–436 (1938).

36. Wik, I., *On linear dependence in closed sets.* Ark. Mat., **4** 209–218 (1960).

37. — , *Some examples of sets with linear independence.* Ark. Math., **5** (1964).

38. Williamson, J.H., *A theorem on algebras of measures on topological groups.* Proc. Edinburgh Math. Soc., **11**, 195–206 (1959).

39. — , *Banach algebra elements with independent powers and Wiener-Pitt phenomenon,* in *Function Algebras* (Proc. Int. Sympos. on Function Algebras ; Tulane University, 1965), pp. 186–197. Scott-Foresman, Chicago, Ill., 1966.

40. Zygmund, A., *Trigonometric Series,* 2nd ed., vols. I, II, Cambridge Univ. Press, 1959.

O METODĂ DE APROXIMARE ÎN STUDIUL MIŞCĂRII FLUIDELOR PERFECTE COMPRESIBILE

DE

ION GH. ŞABAC

Mişcările subsonice ale fluidelor compresibile în jurul unor obstacole au făcut obiectul a numeroase lucrări în care au fost propuse diverse metode de aproximare. În [4], cap. XVII, şi în [5] se găseşte o clasificare a acestor metode, precum şi bibliografia corespunzătoare.

În lucrare propunem o nouă metodă de aproximare referitoare la mişcările subsonice irotaţionale plane.

1°. Fie $\overline{V} = \overline{i}u + \overline{j}v$ viteza, ρ masa specifică, p presiunea. Aceste mărimi sînt legate prin următoarele relaţii :

$$(1) \qquad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \qquad \text{ecuaţia continuităţii,}$$

$$(2) \qquad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \text{condiţia de irotaţionalitate,}$$

$$(3) \qquad \begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \end{cases}, \quad \text{ecuaţiile lui Euler,}$$

$$(4) \qquad \rho = \rho(p), \qquad \text{ecuaţia caracteristică.}$$

De obicei, ecuaţiile (1) şi (2) se traduc prin posibilitatea introducerii a două funcţii $\varphi(x, y)$ şi $\psi(x, y)$,potenţialul vitezelor şi funcţia de curent, astfel ca

$$(5) \qquad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

ρ_0 fiind masa specifică în punctul de viteză nulă.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 3, P. 427–437, BUCUREŞTI, 1968

Dacă se ţine seama de (2), ecuaţiile (3) pot fi înlocuite prin

$$\mathrm{d}p = -\frac{1}{2}\rho\mathrm{d}(V^2) \tag{6}$$

care generalizează ecuaţia lui Bernoulli.

Mai departe, cu (4), (5), (6) şi cu formula lui Hugoniot

$$c^2 = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} \tag{7}$$

în care c este viteza de propagare a sunetului în mediul fluid, ecuaţia continuităţii (1) dă

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2c^2}\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}(V^2). \tag{8}$$

În cazul mişcărilor adiabatice, cînd ecuaţia caracteristică este $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}$, între c şi V există relaţia

$$c^2 = c_0^2\left(1 - \frac{\gamma - 1}{2}\frac{V^2}{c_0^2}\right), \tag{9}$$

unde c_0 este viteza sunetului în punctul de viteză nulă iar γ este o constantă (pentru aer, $\gamma \approx 1{,}405$).

Ecuaţia (8) se mai poate scrie sub forma

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - 2\frac{uv}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \tag{8'}$$

în care $u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$, iar c^2 are expresia (9). Ecuaţia (8′) este de tip Hugoniot. Integrarea exactă a acestei ecuaţii cu condiţiile la limită impuse de problema fizică este în general destul de dificilă. De aceea se recurge la diverse metode de aproximare.

2°. În cele ce urmează vom da o metodă de aproximare a soluţiei problemei fizice luînd ca funcţii necunoscute, în locul funcţiilor φ şi ψ pe V şi θ, adică modulul vitezei şi unghiul pe care acesta îl face cu axa Ox. Aceşti parametri dau direct cîmpul vitezelor şi din acest punct de vedere pare preferabil ca aproximările să se refere chiar la aceşti parametri.

Introducînd în (1) şi (2)

$$u = V\cos\theta, \qquad v = V\sin\theta \tag{10}$$

şi notînd apoi

$$\tau = \ln V, \qquad R = \ln\rho \tag{11}$$

sistemul format de ecuaţiile (1) şi (2) se înlocuieşte prin

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \tau}{\partial x} + \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = -\dfrac{dR}{ds}\cos\theta \\[2ex] \dfrac{\partial \tau}{\partial y} - \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -\dfrac{dR}{ds}\sin\theta \end{cases}$$

în care $\frac{dR}{ds} = \frac{\partial R}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial R}{\partial y}\sin\theta$ reprezintă derivata lui R după direcţia $\overline{s} = \frac{\overline{V}}{V}$.

Mai departe, ţinînd seama de (6) şi (7), se poate face înlocuirea

$$(13)\qquad \frac{dR}{ds} = \frac{dR}{d\tau}\frac{d\tau}{ds} = -M^2\frac{d\tau}{ds}$$

unde $M = \frac{V}{c} = \frac{e^{\tau}}{c}$ este numărul lui Mach.

În cazul fluidelor incompresibile, R este constant şi (12) se reduce la

$$(14)\qquad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$$

ceea ce arată că $\omega = \tau - i\theta$ este o funcţie olomorfă în domeniul considerat. Era de aşteptat, deoarece

$$e^{\omega} = e^{\tau}(\cos\theta - i\sin\theta) = u - iv = w$$

reprezintă viteza complexă în mişcarea irotaţională a fluidului incompresibil.

3°. Considerăm problema mişcării fluidului în jurul unui obstacol Γ cu viteza $\overline{V}_0 = iV_0$ la infinit, paralelă cu axa Ox. Va trebui să integrăm sistemul

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \tau}{\partial x} + \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = M^2\dfrac{d\tau}{ds}\cos\theta \\[2ex] \dfrac{\partial \tau}{\partial y} - \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = M^2\dfrac{d\tau}{ds}\sin\theta \end{cases}$$

cu condiţiile la limită

$$(16)\qquad \begin{cases} \theta = g(s) \text{ pe } \Gamma \\ \theta = 0 \text{ la infinit,} \end{cases}$$

unde $g(s)$ este funcţia dată[1] de mişcarea fluidului incompresibil în jurul obstacolului Γ,

$$(17)\qquad \tau = \tau_0 = \ln V_0 \text{ la infinit.}$$

---

[1] Vom presupune că sensul vectorului $\overline{V}$ pe frontiera obstacolului este acelaşi ca în mişcarea fluidului incompresibil, fapt care constituie o primă aproximare.

În cazul mişcărilor adiabatice, din (9) rezultă

$$M^2 = \frac{e^{2\tau}}{c_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2} e^{2\tau}}.$$

Încercarea de a obţine soluţii exacte, chiar cînd Γ ar avea anumite forme simple, întîmpină mari dificultăţi datorită neliniarităţii sistemului. De aceea vom căuta soluţii aproximative.

O cale ar fi metoda iteraţiei. O primă aproximaţie va fi dată de mişcarea în ipoteza incompresibilităţii fluidului. Aceasta va fi obţinută prin integrarea sistemului (14) cu condiţiile (16) şi (17). Eliminarea lui τ conduce la $\Delta\theta = 0$ şi va trebui să determinăm o funcţie armonică în exteriorul lui Γ supusă condiţiilor (16). Pentru determinarea lui τ urmează să integrăm o diferenţială totală exactă.

Fie θ_1 şi τ_1 funcţiile obţinute în această primă aproximaţie. Le introducem în (15) şi urmează să integrăm sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tau}{\partial x} + \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = M_1^2 \dfrac{d\tau_1}{ds_1} \cos\theta_1 \\[2ex] \dfrac{\partial \tau}{\partial y} - \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = M_1^2 \dfrac{d\tau_1}{ds_1} \sin\theta_1 \end{cases}$$

cu aceleaşi condiţii la limită (16) şi (17). Eliminarea lui τ va da

$$\Delta\theta = \frac{\partial}{\partial y}\left(M_1^2 \frac{d\tau_1}{ds_1}\cos\theta_1\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(M_1^2 \frac{d\tau_1}{ds_1}\sin\theta_1\right)$$

şi vom avea de rezolvat o problemă Dirichlet exterioară pentru o ecuaţie de tip Poisson, iar după aceea vom obţine pe τ prin integrarea unei diferenţiale exacte.

Procedeul poate fi continuat, dar stabilirea convergenţei acestui proces pare a fi destul de dificilă. Verificarea ar urma să se facă pe exemple comparînd fie unele rezultate cu date experimentale, fie cu rezultatele date de alte metode. Vom proceda la aproximarea soluţiei pe o altă cale.

4°. Căutăm soluţia sistemului (15) dezvoltată în serie de puteri ale lui $M_0 = \frac{V_0}{c_0}$, numărul lui Ciaplîghin.

Pentru aceasta ne vom ocupa mai întîi de membrul drept al ecuaţiilor (15). Cu $\tau_0 = \ln V_0$, avem

$$M^2 = \frac{V^2}{c^2} = \frac{V^2}{V_0^2}\frac{V_0^2}{c_0^2}\frac{c_0^2}{c^2} = M_0^2\, e^{2(\tau-\tau_0)} \frac{c_0^2}{c^2}$$

şi datorită relaţiei (9), obţinem

$$M^2 = \frac{e^{2(\tau-\tau_0)} M_0^2}{1 - \frac{\gamma-1}{2} e^{2(\tau-\tau_0)} M_0^2}.$$

În ipoteza

$$\frac{\gamma-1}{2}\frac{V^2}{c_0^2}=\frac{\gamma-1}{2}e^{2(\tau-\tau_0)}M_0^2<1 \tag{18}$$

vom putea dezvolta în serie :

$$M^2=M_0^2 e^{2(\tau-\tau_0)}\left[1+M_0^2\frac{\gamma-1}{2}e^{2(\tau-\tau_0)}+M_0^4\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^2e^{4(\tau-\tau_0)}+\dots\right].$$

Condiția (18) rezultă din existența relației (9) și revine la

$$V<c_0\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}\approx 2{,}23\ c_0.$$

Este indicată schimbarea de funcție

$$\sigma=\tau-\tau_0=\ln\frac{V}{V_0} \tag{19}$$

și sistemul (15) devine

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}+\dfrac{\partial\theta}{\partial y}=M_0^2 e^{2\sigma}\left[1+M_0^2\dfrac{\gamma-1}{2}e^{2\sigma}+\dots\right]\dfrac{d\sigma}{ds}\cos\theta\\[2mm] \dfrac{\partial\sigma}{\partial y}-\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=M_0^2 e^{2\sigma}\left[1+M_0^2\dfrac{\gamma-1}{2}e^{2\sigma}+\dots\right]\dfrac{d\sigma}{ds}\sin\theta\end{cases} \tag{20}$$

cu condițiile la limită

$$\begin{cases}\theta=g(s)\ \text{pe}\ \Gamma\\ \theta=0\ \text{la infinit}\end{cases} \tag{21}$$

$$\sigma=0\ \text{la infinit.} \tag{22}$$

Vom căuta funcțiile σ și θ dezvoltate în serie după puterile lui M_0^2 :

$$\sigma=\sigma_1+M_0^2\,\sigma_2+M_0^4\,\sigma_3+\dots$$

$$\theta=\theta_1+M_0^2\,\theta_2+M_0^4\,\theta_3+\dots$$

Avem

$$e^{2\sigma}=e^{2\sigma_1}+M_0^2(\dots)+\dots$$

$$\cos\theta=\cos\theta_1+M_0^2(\dots)+\dots$$

$$\sin\theta=\sin\theta_1+M_0^2(\dots)+\dots$$

Cu acestea,

$$\frac{d\sigma}{ds}=\frac{\partial\sigma}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial\sigma}{\partial y}\sin\theta=\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}\cos\theta_1+\frac{\partial\sigma_1}{\partial y}\sin\theta_1+$$

$$+M_0^2(\dots)+\dots=\frac{d\sigma_1}{ds_1}+M_0^2(\dots)+\dots$$

Introducînd în (20), se obţine

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}+\frac{\partial\theta_1}{\partial y}+M_0^2\left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial x}+\frac{\partial\theta_2}{\partial y}\right)+M_0^4(\ldots)+\ldots=$$

$$=M_0^2\left[e^{2\sigma_1}\frac{d\sigma_1}{ds_1}\cos\theta_1+M_0^2(\ldots)+\ldots\right]$$

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial y}-\frac{\partial\theta_1}{\partial x}+M_0^2\left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial y}-\frac{\partial\theta_2}{\partial x}\right)+M_0^4(\ldots)+\ldots=$$

$$=M_0^2\left[e^{2\sigma_1}\frac{d\sigma_1}{ds_1}\sin\theta_1+M_0^2(\ldots)+\ldots\right].$$

Identificăm după puterile lui M_0^2 şi neglijăm puterile M_0^4 şi mai mari. Obţinem

$$(23)\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_1}{\partial x}+\dfrac{\partial\theta_1}{\partial y}=0\\[2ex]\dfrac{\partial\sigma_1}{\partial y}-\dfrac{\partial\theta_1}{\partial x}=0\end{cases}$$

$$(24)\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_2}{\partial x}+\dfrac{\partial\theta_2}{\partial y}=e^{2\sigma_1}\dfrac{d\sigma_1}{ds_1}\cos\theta_1\\[2ex]\dfrac{\partial\sigma_2}{\partial y}-\dfrac{\partial\theta_2}{\partial x}=e^{2\sigma_1}\dfrac{d\sigma_1}{ds_1}\sin\theta_1\end{cases}$$

şi soluţia aproximativă a sistemului (20) este dată de

$$(25)\qquad\begin{cases}\theta=\theta_1+M_0^2\,\theta_2\\ \sigma=\sigma_1+M_0^2\sigma_2.\end{cases}$$

Pentru a satisface condiţiile la limită (21) şi (22) vom lua

$$(26)\qquad\begin{cases}\theta_1=g(s)\text{ pe }\Gamma,\ \theta_1=0\text{ la infinit}\\ \sigma_1=0\text{ la infinit}\end{cases}$$

$$(27)\qquad\begin{cases}\theta_2=0\text{ pe }\Gamma,\ \theta_2=0\text{ la infinit}\\ \sigma_2=0\text{ la infinit.}\end{cases}$$

5°. Integrarea sistemului (23) cu condiţiile la limită (26) se poate face în diverse moduri. De exemplu, prin eliminarea lui σ_1 sîntem conduşi la rezolvarea problemei lui Dirichlet exterioară pentru ecuaţia lui Laplace $\Delta\theta_1=0$ şi apoi τ_1 se obţine prin integrarea unei diferenţiale exacte.

Sistemul (24), cu condiţiile (27), poate fi redus tot la o problemă Dirichlet exterioară, însă pentru o ecuaţie Poisson

$$(28)\qquad\Delta\theta_2=e^{2\sigma_1}\left[\frac{\partial^2\sigma_1}{\partial x\partial y}\cos 2\theta_1+\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x\partial y}\sin 2\theta_1\right].$$

În unele probleme sînt de preferat alte coordonate în locul celor carteziene. În coordonate polare, r și α, sistemul (24) ia forma

$$(29)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_2}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\theta_2}{\partial\alpha} = e^{2\sigma_1}\dfrac{d\sigma_1}{ds_1}\cos(\alpha-\theta_1) \\[2ex] \dfrac{\partial\theta_2}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_2}{\partial\alpha} = e^{2\sigma_1}\dfrac{d\sigma_1}{ds_1}\sin(\alpha-\theta_1), \end{cases}$$

unde

$$(30)\qquad \frac{d\sigma_1}{ds_1} = \frac{\partial\sigma_1}{\partial r}\cos(\alpha-\theta_1) - \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_1}{\partial\alpha}\sin(\alpha-\theta_1).$$

6°. Vom aplica această metodă la studiul mișcării unui fluid compresibil în jurul unui obstacol circular cu viteza $\overline{V}_0 = i\overline{V}_0$ la infinit, problemă considerată de diverși autori : [1], [2] [3], [6], [7], [8], [9], [11], [12], [13] etc.

Mișcarea fără circulație a fluidului incompresibil este dată, așa cum se știe, de viteza complexă $w = V_0\left(1 - \dfrac{1}{z^2}\right)$. Cu notațiile de mai sus, vom avea

$$\frac{V}{V_0}e^{-i\theta_1} = 1 - \frac{1}{r^2}e^{-2i\alpha};\quad \frac{V}{V_0} = e^{\tau-\tau_0} = e^{\sigma_1}.$$

Rezultă

$$(31)\qquad \begin{cases} e^{\sigma_1}\cos\theta_1 = 1 - \dfrac{1}{r^2}\cos 2\alpha \\[2ex] e^{\sigma_1}\sin\theta_1 = -\dfrac{1}{r^2}\sin 2\alpha. \end{cases}$$

Condițiile (26) sînt, evident, îndeplinite.

Pentru a integra sistemul (24), vom înlocui aceste rezultate în (29). Din (31), deducem

$$(32)\qquad e^{2\sigma_1} = 1 - \frac{2}{r^2}\cos 2\alpha + \frac{1}{r^4}.$$

Derivăm această relație în raport cu r și α

$$e^{2\sigma_1}\frac{\partial\sigma_1}{\partial r} = \frac{2}{r^3}\cos 2\alpha - \frac{2}{r^5},\quad e^{2\sigma_1}\frac{\partial\sigma_1}{\partial\alpha} = \frac{2}{r^2}\sin 2\alpha.$$

Rezultă

$$(33)\qquad e^{2\sigma_1}\frac{d\sigma_1}{ds_1} = \frac{2}{r^3}\left[\cos(3\alpha-\theta_1) - \frac{1}{r^2}\cos(\alpha-\theta_1)\right].$$

Sistemul (29) devine

$$(34)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_2}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} &= f_1(r,\alpha) \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial r} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial \sigma_2}{\partial \alpha} &= f_2(r,\alpha) \end{aligned}$$

în care

$$f_1(r,\alpha) = \frac{1}{r^3}\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)\left[\cos 4\alpha + \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)^2 \cos 2\alpha + \frac{1}{r^4} - \frac{2}{r^2}\right] e^{-2\sigma_1}$$

$$f_2(r,\alpha) = \frac{1}{r^3}\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\left[\sin 4\alpha + \left(\frac{1}{r^4} - \frac{2}{r^2} - 1\right) \sin 2\alpha\right] e^{-2\sigma_1}$$

iar $e^{-2\sigma_1}$ este dat de (32). Această funcție poate fi dezvoltată în serie Fourier :

$$e^{-2\sigma_1} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{r^4}}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\alpha}{r^{2n}}\right].$$

Cu aceasta, se obține

$$\left\{\begin{aligned} f_1(r,\alpha) &= \frac{1}{r^5}\left(\frac{1}{r^2} - 1\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r^2} - 1\right)\left(\frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^2} - 1\right)\frac{\cos 2\alpha}{r^2} + \\ &\qquad + r\left(1 - \frac{1}{r^4}\right)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos 2n\alpha}{r^{2n}} \\ f_2(r,\alpha) &= \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r^2} + 1\right)\left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r^2} - 1\right)\frac{\sin 2\alpha}{r^2} + \\ &\qquad + r\left(1 - \frac{1}{r^4}\right)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin 2n\alpha}{r^{2n}}. \end{aligned}\right.$$

Vom căuta soluția sistemului (34) dezvoltată în serie Fourier în raport cu α. Din motive de simetrie,

$\sigma_2(r,\ \alpha) = \sigma_2(r,\ -\alpha)$ $\qquad$ σ_2 este o funcție pară

$\theta_2(r,\ \alpha) = -\,\theta_2(r,\ -\alpha),$ $\qquad$ θ_2 este impară,

deci vor avea dezvoltări de forma

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned} \sigma_2 &= a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)\,\cos n\alpha \\ \theta_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(r)\,\sin n\alpha. \end{aligned}\right.$$

Coeficienţii a_0, a_n, b_n vor fi determinaţi prin condiţia ca σ_2 şi θ_2 să satisfacă sistemul (34) şi condiţiile la limită (27), care se traduc prin

$$(27') \qquad \begin{cases} \theta_2(1, \alpha) = 0, \quad \theta_2(\infty, \alpha) = 0 \\ \sigma_2(\infty, \alpha) = 0. \end{cases}$$

Aceste condiţii vor fi evident satisfăcute dacă

$$(37) \qquad b_n(1) = 0, \quad b_n(\infty) = 0$$

$$(38) \qquad a_0(\infty) = 0, \quad a_n(\infty) = 0.$$

Introducînd expresiile (36) în (34), se obţin prin identificare relaţiile

$$(39) \qquad \begin{cases} ra_0' = \dfrac{1}{r^4}\left(\dfrac{1}{r^2} - 1\right) \\ ra_1' + b_1 = 0, \qquad rb_1' + a_1 = 0 \\ ra_2' + 2b_2 = \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{1}{r^2} - 1\right)\left(\dfrac{1}{r^4} + \dfrac{1}{r^2} - 1\right), \ rb_2' + 2a_2 = \\ \qquad = \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{1}{r^2} + 1\right)\left(\dfrac{1}{r^4} - \dfrac{1}{r^2} - 1\right) \end{cases}$$

$$(40) \qquad \begin{cases} ra_n' + nb_n = 0, \quad rb_n' + na_n = 0 \quad \text{pentru } n = 3, 5, 7, \ldots \\ ra_n' + nb_n = r^2\left(1 - \dfrac{1}{r^4}\right)^2 \dfrac{1}{r^n}, \ rb_n' + na_n = r^2\left(1 - \dfrac{1}{r^4}\right)\dfrac{1}{r^n}, \\ \qquad \text{pentru } n = 4, 6, 8, \ldots \end{cases}$$

Vom integra aceste sisteme, care sînt de tip Euler, cu condiţiile (37) şi (38).

Se obţine

$$a_0 = \frac{1}{4r^4} - \frac{1}{6r^6}$$

$$a_n = b_n = 0, \text{ pentru } n = 2k + 1 \ (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$a_2 = -\frac{4}{3} r^{-2} + r^{-4} - \frac{1}{6} r^{-8}$$

$$b_2 = -\frac{5}{6} r^{-2} + r^{-4} - \frac{1}{6} r^{-8}$$

$$a_n = b_n = \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{4}{3} r^{-2} - \frac{1}{6} r^{-6}\right)\frac{1}{r^n}, \text{ pentru } n = 2k \quad (k = 2, 3, 4, \ldots).$$

Cu acestea, soluţia sistemului (34), cu condiţiile la limită (27), este

$$(41)\quad \begin{cases} \sigma_2 = \dfrac{1}{4r^4} - \dfrac{1}{6r^6} - \dfrac{1}{2}\cos 2\alpha + \left(\dfrac{1}{2}r^2 - \dfrac{4}{3} + r^{-2} - \dfrac{1}{6}r^{-6}\right)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2n\alpha}{r^{2n}} \\ \theta_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r^2} - 1\right)\sin 2\alpha + \left(\dfrac{1}{2}r^2 - \dfrac{4}{3} + r^{-2} - \dfrac{1}{6}r^{-6}\right)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2n\alpha}{r^{2n}} \end{cases}$$

Aceste serii sînt, evident, absolut şi uniform convergente pentru $r > 1$, împreună cu derivatele lor parţiale de orice ordin, deci operaţiile de mai sus sînt justificate.

Pentru $r = 1$, $\theta_2 = 0$. De asemenea, pentru $r = 1$, toţi coeficienţii a_n sînt nuli începînd cu $n = 4$. Rămîne

$$[\sigma_2]_{r=1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} - \cos 2\alpha\right).$$

Repartiţia vitezelor pe cerc va fi dată de

$$\sigma = \sigma_1 + M_0^2\sigma_2.$$

Deoarece, pentru $r = 1$,

$$e^{2\sigma_1} = 2(1 - \cos 2\alpha) = 4\sin^2\alpha,$$

urmează că

$$(42)\quad \left[\frac{V}{V_0}\right]_{r=1} = [e^{\sigma_1 + M_0^2\sigma_2}]_{r=1} = 2\,|\sin\alpha|\,e^{\frac{M_0^2}{2}\left(\frac{1}{6} - \cos 2\alpha\right)}$$

sau, dezvoltat în serie după puterile lui M_0^2,

$$(42')\quad \left[\frac{V}{V_0}\right]_{r=1} = 2\,|\sin\alpha|\left[1 + \frac{M_0^2}{2}\left(\frac{1}{6} - \cos 2\alpha\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2!}\frac{M_0^4}{4}\left(\frac{1}{6} - \cos 2\alpha\right)^2 + \dots\right].$$

Acest rezultat coincide, în afara termenilor de ordin superior lui M_0^2, cu cel obţinut prin metoda lui Imai [1], [2], [4].

Viteza maximă pe cerc se obţine pentru $\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$ şi are expresia

$$(43)\quad \frac{V_{\max}}{V_0} = 2\,e^{\frac{7}{12}M_0^2} = 2 + \frac{7}{6}M_0^2 + \frac{49}{144}M_0^4 + \dots$$

Un alt element de comparaţie îl formează repartiţia vitezelor pe axa Oy. Pentru $\alpha = \pm\dfrac{\pi}{2}$, din (41) se obţine $\theta_2 = 0$, iar din (31), $\theta_1 = 0$. Deci $\theta = 0$. Vitezele sînt paralele cu axa Ox, adică cu $\overline{V}_0$.

Tot pentru $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, se obține

$$\sigma_2 = \frac{1}{4r^4} - \frac{1}{6r^6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+r^2}\left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{4}{3} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{6r^6}\right).$$

Cu aceasta și cu

$$e^{\sigma_1} = 1 + \frac{1}{r^2}$$

care rezultă din (32), deducem

$$\frac{V}{V_0} = e^{\sigma_1 + M_0^2\sigma_2} = 1 + r^{-2} + M_0^2\left(\frac{11}{6}r^{-2} - \frac{3}{4}r^{-4} + \frac{1}{12}r^{-6}\right) + M_0^4(\ldots). \tag{44}$$

Acest rezultat coincide, în afara termenilor de ordin superior lui M_0^2, cu cel obținut de I. Imai.

Primită la redacție la 13 iulie 1967

Institutul politehnic Gheorghe Gheorghiu-Dej
București, str. Polizu, nr. 1.

BIBLIOGRAFIE

1. I. Imai, *On the flow of a compressible fluid past a circular cylinder.* Proc. Phys. Math. Soc. Japan, **20**, 636–645 (1938).
2. I. Imai, *On the flow of a compressible fluid past a circular cylinder.* II. Proc. Phys. Math. Soc. Japan, **23**, 180–193 (1941).
3. C. Jacob, *Sur l'écoulement lent d'un fluide parfait compressible autour d'un cylindre circulaire.* Mathematica, **17**, 1–18 (1941).
4. C. Jacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides.* Ed. Acad. R.P.R. et Gauthier-Villars, București-Paris, 1959.
5. C. Jacob, *Détermination de la seconde approximation de l'écoulement compressible subsonique autour d'un profil donné.* Archiwum Mechaniki Stosowanej, **2**, 16, 273–284 (1964).
6. O. Janzen, *Beitrag zu einer Theorie der stationären Strömungen kompressibler Flüssigkeiten.* Physik. Zeitschr. **14**, 639 (1913).
7. Б. М. Киселев, *Обтекание тел заданной формы плоским дозвуковым потоком газа.* Сб. теор. работ по аэродинамике, Оборонгиз, Москва, 1957, 11—26.
8. H. Lamb, *On the flow of a compressible fluid past an obstacle.* Reports and Memoranda, No. 1156, 1928.
9. E. Pistolesi, *La portanza alle alte velocità inferiori a quella del suono.* Atti del Convegno Volta, Roma, 1935, 283–328.
10. L. Poggi, *Campo di velocità in una corrente di fluido compressible.* L'Aerotecnica, **12**, 1579–1593 (1932).
11. Simona Popp, *Asupra mișcării subsonice cu circulație în jurul unui cilindru circular,* St. cerc. mat., **17**, *9*, 1361–1365 (1965).
12. J. Rayleigh, *On the flow of a compressible fluid past an obstacle.* Philos. Mag. **32**, 1–6, (1916).
13. D. Socolescu, *Asupra mișcării subsonice în jurul unui cilindru circular.* St. cerc. mat., **17**, *7*, 1169–1176 (1965).

ASUPRA APROXIMĂRII MIŞCĂRII SUBSONICE CU CIRCULAŢIE A UNUI FLUID COMPRESIBIL ÎN JURUL UNUI OBSTACOL CIRCULAR

DE

ION GH. ŞABAC

Ne propunem să studiem mişcarea cu circulaţie a unui fluid perfect compresibil în jurul unui obstacol circular folosind o metodă de aproximare pe care am dat-o într-o lucrare anterioară [9].

Fie $\overline{V} = \bar{i}u + \bar{j}v$ viteza într-un punct oarecare de afix $z = x + iy$ şi $\overline{V}_0 = \bar{i}V_0$ viteza fluidului la infinit. Mişcarea va fi cunoscută dacă se determină V şi unghiul θ pe care $\overline{V}$ îl face cu axa Ox în punctele exterioare cercului cu centrul în origine şi de rază 1.

Notăm $\sigma = \ln \frac{V}{V_0}$. Am arătat în lucrarea citată că dezvoltînd în serie după puterile numărului lui Ciaplîghin $M_0 = \frac{V_0}{c_0}$ şi neglijînd puterile de ordin $n \geqslant 4$, aşa cum se face de obicei, avem

$$\left\{\begin{array}{l}\sigma = \sigma_1 + M_0^2\,\sigma_2\\ \theta = \theta_1 + M_0^2\,\theta_2.\end{array}\right. \tag{1}$$

Funcţiile σ_1 şi θ_1 corespund mişcării fluidului incompresibil în jurul aceluiaşi obstacol iar σ_2 şi θ_2 verifică sistemul

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial\sigma_2}{\partial x} + \dfrac{\partial\theta_2}{\partial y} = \mathrm{e}^{2\sigma_1}\dfrac{\mathrm{d}\sigma_1}{\mathrm{d}s_1}\cos\theta_1\\[2ex] \dfrac{\partial\sigma_2}{\partial y} - \dfrac{\partial\theta_2}{\partial x} = \mathrm{e}^{2\sigma_1}\dfrac{\mathrm{d}\sigma_1}{\mathrm{d}s_1}\sin\theta_1\end{array}\right. \tag{2}$$

şi condiţiile

$$\left\{\begin{array}{l}\theta_2 = 0 \text{ pe frontiera } \Gamma \text{ a obstacolului}\\ \theta_2 = 0,\ \sigma_2 = 0 \text{ la infinit.}\end{array}\right. \tag{3}$$

Am notat

$$\frac{d\sigma_1}{ds_1} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} \cos \theta_1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} \sin \theta_1$$

derivata lui σ_1 după direcţia determinată de viteza fluidului incompresibil în punctul considerat.

Fie $z = x + iy = r\, e^{i\alpha}$. În coordonate polare, sistemul (2) se scrie sub forma

$$(2') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial r} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} = \dfrac{1}{2} \dfrac{de^{2\sigma_1}}{ds_1} \cos(\alpha - \theta_1) \\[2ex] \dfrac{\partial \theta_2}{\partial r} - \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial \alpha} = \dfrac{1}{2} \dfrac{de^{2\sigma_1}}{ds_1} \sin(\alpha - \theta_1) \end{cases}$$

iar condiţiile (3), pentru $\theta_2(r, \alpha)$ şi $\sigma_2(r, \alpha)$, devin

$$(3') \quad \begin{cases} \theta_2(1, \alpha) = 0 \\ \theta_2(\infty, \alpha) = 0, \; \sigma_2(\infty, \alpha) = 0. \end{cases}$$

Dacă notăm

$$(4) \quad \omega_2(r, \alpha) = \sigma_2(r, \alpha) - i\theta_2(r, \alpha),$$

sistemul (2′) este echivalent cu ecuaţia

$$(5) \quad \frac{d\omega_2}{\partial r} + i \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \frac{de^{2\sigma_1}}{ds_1} e^{-i(\alpha - \theta_1)}.$$

Condiţiile (3′) se înlocuiesc prin

$$(6) \quad \begin{cases} I_m[\omega_2(1, \alpha)] = 0 \\ \omega_2(\infty, \alpha) = 0. \end{cases}$$

Se ştie că viteza complexă în mişcarea cu circulaţie a fluidului incompresibil în jurul obstacolului circular este

$$(7) \quad w = u - iv = \frac{k}{2\pi i} \frac{1}{z} + V_0 \left(1 - \frac{1}{z^2}\right).$$

Notăm

$$(8) \quad \frac{k}{4\pi V_0} = a, \; \frac{w}{V_0} = w_1 = e^{\sigma_1 - i\theta_1}$$

şi avem

$$(9) \quad e^{\sigma_1 - i\theta_1} = -\frac{2ai}{r} e^{-i\alpha} + 1 - \frac{1}{r^2} e^{-2i\alpha}$$

sau

$$(9') \quad \begin{cases} e^{\sigma_1} \cos \theta_1 = -\dfrac{2a}{r} \sin \alpha + 1 - \dfrac{1}{r^2} \cos 2\alpha \\[2ex] e^{\sigma_1} \sin \theta_1 = \dfrac{2a}{r} \cos \alpha - \dfrac{1}{r^2} \sin 2\alpha. \end{cases}$$

Aceste egalităţi determină funcţiile $\sigma_1(r, \alpha)$, $\theta_1(r, \alpha)$ care vor trebui înlocuite în membrul drept al ecuaţiei (5).

Din (9′) deducem

$$e^{2\sigma_1} = \left(1 + \frac{4a^2}{r^2} + \frac{1}{r^4}\right) - \frac{4a}{r}\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\sin\alpha - \frac{2}{r^2}\cos 2\alpha.$$

Se verifică uşor că, oricare ar fi $f(r, \alpha,)$, avem

$$\frac{df}{ds_1} = \frac{\partial f}{\partial r}\cos(\alpha - \theta_1) - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\sin(\alpha - \theta_1).$$

Deci,

$$\frac{de^{2\sigma_1}}{ds_1} = \left[-\left(\frac{8a^2}{r^3} + \frac{4}{r^5}\right) + \frac{4a}{r^2}\left(1 + \frac{3}{r^2}\right)\sin\alpha + \frac{4}{r^3}\cos 2\alpha\right]\cos(\alpha - \theta_1) +$$
$$+ \left[\frac{4a}{r^2}\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\cos\alpha - \frac{4}{r^3}\sin 2\alpha\right]\sin(\alpha - \theta_1).$$

Tot din (9′) obţinem

$$\cos(\alpha - \theta_1) = e^{-\sigma_1}\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha - \theta_1) = e^{-\sigma_1}\left[\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\sin\alpha - \frac{2a}{r}\right]$$

şi egalitatea de mai sus devine

$$\frac{1}{2}\frac{de^{2\sigma_1}}{ds_1} = e^{-\sigma_1}\left[\frac{2}{r^3}\left(\frac{1}{r^4} - \frac{2}{r^2} - 4a^2\right)\cos\alpha +\right.$$
$$\left. + \frac{2a}{r^2}\left(-\frac{1}{r^4} + \frac{4}{r^2} + 1\right)\sin 2\alpha + \frac{2}{r^3}\cos 3\alpha\right].$$

Introducînd în (5) şi ţinînd seama de (9), obţinem

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial r} + i\frac{1}{r}\frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha} = F(r, \alpha), \tag{10}$$

unde

$$F(r, \alpha) = \frac{\frac{2}{r}\left(\frac{1}{r^4} - \frac{2}{r^2} - 4a^2\right)\cos\alpha + 2a\left(-\frac{1}{r^4} + \frac{4}{r^2} + 1\right)\sin 2\alpha + \frac{2}{r}\cos\alpha}{r^2 e^{i\alpha} - 2air - e^{-i\alpha}}. \tag{11}$$

Dacă notăm

$$A = \frac{1}{r^5} - \frac{2}{r^3} - \frac{4a^2}{r},\ B = a\left(-\frac{1}{r^4} + \frac{4}{r^2} + 1\right),\ C = \frac{1}{r}, \tag{12}$$

$$\Phi(r,\ \alpha) = \frac{1}{r^2\,e^{i\alpha} - 2air - e^{-i\alpha}}, \tag{13}$$

funcţia $F(r,\ \alpha)$ se mai scrie

$$F(r,\alpha) = (Ce^{3i\alpha} - iBe^{2i\alpha} + Ae^{i\alpha} + Ae^{-i\alpha} + iBe^{-2i\alpha} + Ce^{-3i\alpha})\,\Phi(r,\ \alpha). \tag{14}$$

Datorită formei pe care o are funcţia $F(r,\ \alpha)$, este indicat să căutăm soluţia ecuaţiei (10) care satisface condiţiile (6) sub forma

$$\omega_2(r,\ \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n(r)\,e^{in\alpha}. \tag{15}$$

În acest scop, vom dezvolta mai întîi funcţia $\Phi(r,\ \alpha)$ în serie Fourier în raport cu α,

$$\Phi(r,\ \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(r)\,e^{in\alpha},\quad C_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(r,\ \alpha)\,e^{-in\alpha}\,d\alpha. \tag{16}$$

Ţinînd seama de (13), avem de calculat integralele

$$C_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-in\alpha}}{r^2\,e^{i\alpha} - 2air - e^{-i\alpha}}\,d\alpha. \tag{17}$$

Împărţim studiul în trei părţi, după valorile pe care le poate lua $|a|$.
Cazul I, $|a| < 1$. Putem nota

$$a = \sin\varphi,\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}. \tag{18}$$

Pentru $n \leqslant 0$, înlocuim $e^{i\alpha} = z$, $d\alpha = \frac{1}{iz}\,dz$ şi integrala (17) devine

$$C_n(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{z^{-n}}{r^2z^2 - 2airz - 1}\,dz.$$

Funcţia de sub semnul de integrare are polii simpli

$$z = \frac{1}{r}(ai \pm \sqrt{1-a^2})$$

sau, cu notaţia (18),

$$z_1 = \frac{1}{r}\,e^{i\varphi},\ z_2 = -\frac{1}{r}\,e^{-i\varphi}$$

Deoarece $r > 1$, ambii poli se găsesc în interiorul cercului $|z| = 1$. Deci,

$$C_n(r) = \left[\frac{z^{-n}}{2(r^2z - air)}\right]_{z=z_1} + \left[\frac{z^{-n}}{2(r^2z - air)}\right]_{z=z_2}.$$

Făcînd înlocuirile, obţinem

$$C_n(r) = \frac{1}{2r^{-n+1}}\left[\frac{e^{-in\varphi}}{e^{i\varphi}-ai} - \frac{(-1)^n e^{in\varphi}}{e^{-i\varphi}+ai}\right]$$

sau, ţinînd seama de (18),

$$C_n(r) = \frac{1}{r^{-n+1}\cos\varphi}\,\frac{e^{-in\varphi}-(-1)^n e^{in\varphi}}{2}.$$

Obţinem astfel

$$(19)\qquad \begin{cases} C_{2k+1}(r) = \dfrac{\cos(2k+1)\varphi}{\cos\varphi}\,\dfrac{1}{r^{-2k}}, & k = -1, -2, -3, \ldots \\ C_{2k}(r) = -i\,\dfrac{\sin 2k\varphi}{\cos\varphi}\,\dfrac{1}{r^{-2k+1}}, & k=0, -1, -2, -3, \ldots \end{cases}$$

Pentru $n>0$ înlocuim $e^{-i\alpha} = z$, $d\alpha = -\frac{dz}{iz}$ şi integrala (17) devine

$$C_n(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{z^n}{r^2-2airz-z^2}\,dz.$$

Polii funcţiei de sub semnul de integrare sînt

$$z_1 = -re^{i\varphi},\ z_2 = re^{-i\varphi},$$

amîndoi situaţi în exteriorul cercului şi integrala este nulă. Deci,

$$(20)\qquad C_n(r) = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dezvoltarea în serie Fourier a funcţiei (13) este

$$(21)\qquad \Phi(r, \alpha) = \frac{1}{r\cos\varphi}\left[\frac{\cos\varphi}{r}e^{-i\alpha} + i\frac{\sin 2\varphi}{r^2}e^{-2i\alpha} + \frac{\cos 3\varphi}{r^3}e^{-3i\alpha} + \right.$$
$$\left. + i\frac{\sin 4\varphi}{r^4}e^{-4i\alpha} + \ldots\right].$$

Introducem în (14) şi obţinem o dezvoltare de forma

$$(22)\qquad F(r, \alpha) = K_2(r)e^{2i\alpha} + K_1(r)e^{i\alpha} + K_0(r) + K_{-1}(r)e^{-i\alpha} +$$
$$+ K_2(r)e^{-2i\alpha} + \ldots + K_{-n}(r)e^{-ni\alpha} + \ldots$$

unde $K_p(r)$ sînt polinoame în $\dfrac{1}{r}$:

$$K_2(r)=\frac{1}{r\cos\varphi}\,\frac{C\cos\varphi}{r}$$

$$K_1(r)=\frac{i}{r\cos\varphi}\left(\frac{C\sin 2\varphi}{r^2}-\frac{B\cos\varphi}{r}\right)$$

$$K_0(r)=\frac{1}{r\cos\varphi}\left(\frac{C\cos 3\varphi}{r^3}+\frac{B\sin 2\varphi}{r^2}+\frac{A\cos\varphi}{r}\right)$$

$$K_{-1}(r)=\frac{i}{r\cos\varphi}\left(\frac{C\sin 4\varphi}{r^4}-\frac{B\cos 3\varphi}{r^3}+\frac{A\sin 2\varphi}{r^2}\right)$$

$$K_{-2}(r)=\frac{1}{r\cos\varphi}\left(\frac{C\cos 5\varphi}{r^5}+\frac{B\sin 4\varphi}{r^4}+\frac{A\cos 3\varphi}{r^3}+\frac{A\cos\varphi}{r}\right)$$

$$K_{-3}(r)=\frac{i}{r\cos\varphi}\left(\frac{C\sin 6\varphi}{r^6}-\frac{B\cos 5\varphi}{r^5}+\frac{A\sin 4\varphi}{r^4}+\frac{A\sin 2\varphi}{r^2}+\frac{B\cos\varphi}{r}\right)$$

$$K_{-2p}(r)=\frac{1}{r\cos\varphi}\left[A\left(\frac{\cos(2p+1)\varphi}{r^{2p+1}}+\frac{\cos(2p-1)\varphi}{r^{2p-1}}\right)+B\left(\frac{\sin(2p+2)\varphi}{r^{2p+2}}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\sin(2p-2)\varphi}{r^{2p-2}}\right)+C\left(\frac{\cos(2p+3)\varphi}{r^{2p+3}}+\frac{\cos(2p-3)\varphi}{r^{2p-3}}\right)\right]$$

$$K_{-2(p+1)}(r)=\frac{i}{r\cos\varphi}\left[A\left(\frac{\sin(2p+2)\varphi}{r^{2p+2}}+\frac{\sin 2p\varphi}{r^{2p}}\right)-B\left(\frac{\cos(2p+3)\varphi}{r^{2p+3}}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\cos(2p-1)\varphi}{r^{2p-1}}\right)+C\left(\frac{\sin(2p+4)\varphi}{r^{2p+4}}+\frac{\sin(2p-2)\varphi}{r^{2p-2}}\right)\right]$$

pentru $p=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$

Înlocuind A, B, C cu expresiile lor din (12), deducem

$$(23)\quad\left\{\begin{aligned}
&K_2(r)=\frac{1}{r^3},\quad K_1(r)=\frac{ia}{r^2}\left(\frac{1}{r^4}-\frac{2}{r^2}-1\right),\quad K_0(r)=\\
&\qquad=\frac{1}{r^3}\left(\frac{1-2a^2}{r^4}+\frac{4a^2-1}{r^2}-2a^2\right),\\
&K_{-1}(r)=\frac{ia}{r^4}\left(\frac{3-4a^2}{r^4}+\frac{12a^2-6}{r^2}-4a^2-1\right)\\
&K_{-2}(r)=\frac{1}{r^3}\left(\frac{1-8a^2+8a^4}{r^6}+\frac{12a^2-6a^4}{r^4}+\frac{8a^2-2}{r^2}-4a^2\right)\\
&K_{-3}(r)=\frac{ia}{r^3}\left(\frac{5-20a^2+16a^4}{r^8}+\frac{-4+32a^2-32a^4}{r^6}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{-6-4a^2+16a^4}{r^4}+\frac{4-8a^2}{r^2}+1\right)
\end{aligned}\right.$$

iar pentru coeficienţii următori,

$$\left\{\begin{aligned} K_{2p}(r) &= \frac{1}{r^{2p}}\left[\frac{\cos(2p+2)\varphi}{r^7} + \frac{4\sin\varphi\sin(2p+1)\varphi}{r^5} + \right. \\ &\left. + \frac{2(\cos 2\varphi-2)\cos 2p\varphi}{r^3} - \frac{4\sin\varphi\sin(2p-1)\varphi}{r} + r\cos(2p-2)\varphi\right] \\ K_{-(2p+1)}(r) &= \frac{i}{r^{2p+1}}\left[\frac{\sin(2p+3)\varphi}{r^7} - \frac{4\sin\varphi\cos(2p+2)\varphi}{r^5} + \right. \\ &\left. + \frac{2(\cos 2\varphi-2)\sin(2p+1)\varphi}{r^3} + \frac{4\sin\varphi\cos 2p\varphi}{r} + r\sin(2p-1)\varphi\right] \end{aligned}\right. \tag{24}$$

cu $p = 2, 3, 4, 5, \ldots$

Se observă că toţi coeficienţii de rang par sînt reali iar cei de rang impar sînt pur imaginari.

Căutînd soluţii ale ecuaţiei (10) de forma (15), avem

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\gamma_n'(r) - \frac{n}{r}\gamma_n(r)\right]e^{in\alpha} = K_2(r)\,e^{2i\alpha} + K_1(r)\,e^{i\alpha} + K_0(r) +$$

$$+ K_{-1}(r)\,e^{-i\alpha} + K_{-2}(r)\,e^{-2i\alpha} + \ldots + K_{-n}(r)\,e^{-ni\alpha} + \ldots$$

Rezultă

$$\gamma_n'(r) - \frac{n}{r}\gamma_n(r) = 0, \quad n = 3, 4, 5, \ldots \tag{25}$$

$$\gamma_n'(r) - \frac{n}{r}\gamma_n(r) = K_n(r), \quad n = 2, 1, 0, -1, -2, -3, \ldots \tag{26}$$

iar din a doua condiţie (6) deducem

$$\gamma_n(\infty) = 0. \tag{27}$$

Ecuaţiile (25) se integrează imediat

$$\gamma_n(r) = c_n r^n, \qquad n = 3, 4, 5, \ldots$$

cu c_n constante arbitrare.

Condiţia (27) nu poate fi satisfăcută decît pentru $c_n = 0$, deci

$$\gamma_n(r) = 0, \qquad n = 3, 4, 5, \ldots \tag{28}$$

În ecuaţiile (26) facem schimbarea de funcţie

$$\gamma_n(r) = r^n u_n(r)$$

şi obţinem ecuaţiile

$$u_n'(r) = \frac{1}{r^n}K_n(r), \qquad n = 2, 1, 0, -1, -2, -3, \ldots$$

Deducem astfel

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned}
\gamma_2(r) &= -\frac{1}{4}\frac{1}{r^2}\\
\gamma_1(r) &= \frac{ia}{2}\left(-\frac{1}{3}\frac{1}{r^5}+\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r}\right)\\
\gamma_0(r) &= \frac{1}{6}\frac{2a^2-1}{r^6}+\frac{1}{4}\frac{1-4a^2}{r^4}+\frac{a^2}{r^2}\\
\gamma_{-1}(r) &= \frac{ia}{2}\left(\frac{1}{3}\frac{4a^2-1}{r^7}+\frac{3-6a^2}{r^5}+\frac{4a^2+1}{r^3}\right)+\frac{c_{-1}}{r}\\
\gamma_{-2}(r) &= -\frac{1}{6}\frac{1-8a^2+8a^4}{r^8}+\frac{4a^4-3a^2}{r^6}+\frac{1-4a^2}{r^4}-4a^2\frac{\ln r}{r^2}+\frac{c_{-2}}{r^2}\\
\gamma_{-3}(r) &= ia\left(\frac{1}{7}\frac{-5+20a^2-16a^4}{r^{10}}+\frac{1}{5}\frac{4-32a^2+32a^4}{r^8}+\right.\\
&\left.+\frac{1}{3}\frac{6+4a^2-16a^4}{r^6}+\frac{8a^2-4}{r^4}+\frac{1}{r^2}\right)+\frac{c_{-3}}{r^3}
\end{aligned}\right.$$

iar pentru următorii

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned}
\gamma_{-2p}(r) &= -\frac{1}{6}\frac{\cos(2p+2)\varphi}{r^{2p+6}}-\frac{\sin\varphi\sin(2p+1)\varphi}{r^{2p+4}}+\\
&+\frac{(2-\cos 2\varphi)\cos 2p\varphi}{r^{2p+2}}-4\sin\varphi\sin(2p-1)\varphi\frac{\ln r}{r^{2p}}+\\
&+\frac{1}{2}\frac{\cos(2p-2)\varphi}{r^{2p-2}}+\frac{c_{-2p}}{r^{2p}}\\
\gamma_{-(2p+1)}(r) &= i\left(-\frac{1}{6}\frac{\sin 2(p+3)\varphi}{r^{2p+7}}+\frac{\sin\varphi\cos(2p+2)\varphi}{r^{2p+5}}+\right.\\
&+\frac{(2-\cos 2\varphi)\sin(2p+1)\varphi}{r^{2p+3}}+4\sin\varphi\cos 2p\varphi\frac{\ln r}{r^{2p+1}}+\\
&\left.+\frac{1}{2}\frac{\sin(2p-1)\varphi}{r^{2p-1}}+\frac{c_{-(2p+1)}}{r^{2p+1}}\right)
\end{aligned}\right.$$

cu $p = 2, 3, 4, \ldots$

Condiția (27) este îndeplinită oricare ar fi constantele $c_{-1}, c_{-2}, c_{-3}, \ldots$ Determinarea acestor constante se face folosind prima condiție (6). Pentru aceasta vom calcula mai întîi coeficienții $\gamma_n(r)$ pentru $r = 1$:

$$\gamma_2(1) = -\frac{1}{4},\quad \gamma_1(1) = \frac{5i}{6}a,\quad \gamma_0(1) = \frac{1+4a^2}{12}$$

$$\gamma_{-1}(1) = \frac{ia}{6}(9-2a^2) - c_{-1}$$

$$\gamma_{-2}(1) = \frac{5-34a^2+16a^4}{6} + c_{-2}$$

$$\gamma_{-3}(1) = \frac{ia}{105}(-96+608a^2-128a^4) + c_{-3}$$

$$\gamma_{-2p}(1) = \frac{1}{3}[4\cos 2p\varphi + \sin(2p+1)\varphi\sin\varphi] + c_{-2p}, \; p = 2, 3, 4, \ldots$$

$$\gamma_{-(2p+1)}(1) = \frac{i}{3}[4\sin(2p+1)\varphi - \cos(2p+2)\varphi\sin\varphi] + c_{-(2p+1)},$$

$$p = 2, 3, 4, \ldots$$

Funcţia $\omega_2(r, \alpha)$ are dezvoltarea

$$\omega_2(r,\alpha) = \gamma_2(r)\,e^{2i\alpha} + \gamma_1(r)\,e^{i\alpha} + \gamma_0(r) + \gamma_{-1}(r)\,e^{-i\alpha} +$$

$$+ \gamma_{-2}(r)\,e^{-2i\alpha} + \sum_{n=3}^{\infty}\gamma_{-n}(r)\,e^{-in\alpha}.$$

Notăm $\gamma_n = \alpha_n + i\beta_n$ şi avem

$$\gamma_n e^{in\alpha} = (\alpha_n + i\beta_n)(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

$$\gamma_{-n} e^{-in\alpha} = (\alpha_{-n} + i\beta_{-n})(\cos n\alpha - i\sin n\alpha).$$

Partea imaginară a funcţiei $\omega_2(r, \alpha)$ este

$$\mathrm{Im}[\omega_2(r,\alpha)] = (\beta_1+\beta_{-1})\cos\alpha + (\alpha_1-\alpha_{-1})\sin\alpha + (\beta_2+\beta_{-2})\cos 2\alpha +$$

$$+ (\alpha_2-\alpha_{-2})\sin 2\alpha + \sum_{n=3}^{\infty}(\beta_{-n}\cos n\alpha_{-n} - \sin n\alpha).$$

Din condiţia $\mathrm{Im}[\omega_2(1,\alpha)] = 0$ rezultă

$$\alpha_{-1}(1) = \alpha_1(1), \qquad \beta_{-1}(1) = -\beta_1(1)$$

$$\alpha_{-2}(1) = \alpha_2(1), \qquad \beta_{-2}(1) = -\beta_2(1)$$

$$\alpha_{-n}(1) = 0, \qquad \beta_{-n}(1) = 0, \qquad n = 3, 4, 5,$$

Din primele patru egalităţi rezultă

$$\gamma_{-1}(1) = \gamma_1^*(1), \qquad \gamma_{-2}(1) = \gamma_2^*(1)$$

de unde deducem

$$c_{-1} = \frac{ia(a^2-7)}{3}, \quad c_{-2} = \frac{-13+68a^2-32a^4}{12}$$

iar ultimele două revin la

$$\gamma_{-n}(1) = 0, \qquad n = 3, 4, 5, \ldots \tag{31}$$

Rezultă

$$c_{-3} = \frac{ia}{105}(96 - 608\,a^2 + 128\,a^4)$$

$$c_{-2p} = -\frac{1}{3}[4\cos 2p\varphi + \sin(2p+1)\varphi \sin\varphi]$$

$$c_{-(2p+1)} = -\frac{i}{3}[4\sin(2p+1)\varphi - \cos(2p+2)\varphi \sin\varphi]$$

cu $p = 2, 3, 4,$

Soluţia ecuaţiei (10) care satisface condiţiile (6) are dezvoltarea în serie

$$\omega_2(r, \alpha) = \gamma_2 e^{2i\alpha} + \gamma_1 e^{i\alpha} + \gamma_0 + \gamma_{-1} e^{-i\alpha} + \gamma_{-2} e^{-2i\alpha} + \sum_{n=3}^{\infty} \gamma_{-n} e^{-in\alpha} \tag{32}$$

cu coeficienţii

$$\left\{\begin{aligned}
\gamma_2 &= -\frac{1}{4}\frac{1}{r^2} \\
\gamma_1 &= \frac{ia}{2}\left(-\frac{1}{3}\frac{1}{r^5} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r}\right) \\
\gamma_0 &= \frac{1}{6}\frac{2a^2-1}{r^6} + \frac{1}{4}\frac{1-4a^2}{r^4} + \frac{a^2}{r^2} \\
\gamma_{-1} &= \frac{ia}{2}\left[\frac{1}{3}\frac{4a^2-3}{r^7} + \frac{3-6a^2}{r^5} + \frac{4a^2+1}{r^3} + \frac{1}{3}\frac{2(a^2-7)}{r}\right] \\
\gamma_{-2} &= -\frac{1}{6}\frac{1-8a^2+8a^4}{r^8} + \frac{4a^4-3a^2}{r^6} + \frac{1-4a^2}{r^4} - \frac{4a^2\ln r}{r^2} + \\
&\quad + \frac{1}{12}\frac{-13+68a^2-32a^4}{r^2} \\
\gamma_{-3} &= ia\left[\frac{1}{7}\frac{-5+20a^2-16\,a^4}{r^{10}} + \frac{1}{5}\frac{4-32a^2+32a^4}{r^8} + \right. \\
&\quad + \frac{1}{3}\frac{6+4a^2-16a^4}{r^6} + \frac{8a^4-1}{r^4} + \frac{1}{r^2} + \\
&\quad \left. + \frac{1}{105}\frac{96-608\,a^2+128\,a^4}{r^3}\right]
\end{aligned}\right. \tag{33}$$

$$\tag{34}\left\{\begin{aligned}
\gamma_{-2p} &= -\frac{1}{6}\frac{\cos(2p+2)\varphi}{r^{2p+6}} - \frac{\sin\varphi\sin(2p+1)\varphi}{r^{2p+4}} + \\
&+ \frac{(2-\cos 2\varphi)\cos 2p\varphi}{r^{2p+2}} - 4\sin\varphi\sin(2p-1)\varphi\frac{\ln r}{r^{2p}} + \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\cos(2p-2)\varphi}{r^{2p-2}} - \frac{1}{3}\frac{4\cos 2p\varphi\sin(2p+1)\varphi\sin\varphi}{r^{2p}} \\
\gamma_{-(2p+1)} &= i\left[+\frac{1}{6}\frac{\sin(2p+3)\varphi}{r^{2p}+7} + \frac{\sin\varphi\cos(2p+2)\varphi}{r^{2p+5}} + \right. \\
&+ \frac{(2-\cos 2\varphi)\sin(2p+1)\varphi}{r^{2p+3}} + 4\sin\varphi\cos 2p\varphi\frac{\ln r}{r^{2p+1}} + \\
&\left. + \frac{1}{2}\frac{\sin(2p-1)\varphi}{r^{2p-1}} - \frac{1}{3}\frac{4\sin(2p+1)\varphi - \cos(2p+2)\varphi\sin\varphi}{r^{2p+1}}\right]
\end{aligned}\right.$$

cu $p = 2, 3, 4, \ldots$

Repartiția vitezelor pe frontiera obstacolului se obține calculînd mai întîi $\omega_2(1, \alpha)$. Avem

$$\omega_2(1, \alpha) = \gamma_2(1)\, e^{2i\alpha} + \gamma_1(1)\, e^{i\alpha} + \gamma_0(1) + \gamma_{-1}(1)\, e^{-i\alpha} + \gamma_{-2}(1)\, e^{-2i\alpha}$$

deoarece conform egalităților (31) ceilalți termeni sînt nuli. Deci,

$$\sigma_2(1, \alpha) = \mathrm{Re}\,[\omega_2(1, \alpha)] = \gamma_0(1) + [\alpha_1(1) + \alpha_{-1}(1)]\cos\alpha + [\beta_{-1}(1) - \\ - \beta_1(1)]\sin\alpha + [\alpha_2(1) + \alpha_{-2}(1)]\cos 2\alpha + [\beta_{-2}(1) - \beta_2(1)]\sin 2\alpha.$$

Deducem

$$\sigma_2(1, \alpha) = \frac{1 + 4a^2}{12} - \frac{5a}{3}\sin\alpha - \frac{1}{2}\cos 2\alpha.$$

Conform primei egalități (1), avem

$$\sigma(1, \alpha) = \sigma_1(1, \alpha) + M_0^2\,\sigma_2(1, \alpha),$$

deci

$$\left[\frac{V}{V_0}\right]_{r=1} = e^{\sigma(1,\alpha)} = e^{\sigma_1(1,\alpha)}\, e^{M_0^2\sigma_2(1,\alpha)}.$$

Din (9′) obținem

$$e^{\sigma_1(1,\alpha)} = \sqrt{(2 + 4a^2) - 8a\sin\alpha - 2\cos 2\alpha} = 2\,|a - \sin\alpha|.$$

Cu aceasta,

$$\tag{35}\left[\frac{V}{V_0}\right]_{r=1} = 2\,|a - \sin\alpha|\, e^{\frac{M_0^2}{12}(1 + 4a^2 - 20a\sin\alpha - 6\cos 2\alpha)}.$$

Se observă că punctele de oprire sînt aceleaşi ca în cazul fluidului incompresibil deoarece $V = 0$ dacă şi numai dacă $\sin\alpha = a$ cu a dat de (8).

Maximele relative ale vitezei pe frontieră se obţin pentru $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$:

$$(36)\quad\begin{cases}\left[\dfrac{V}{V_0}\right]_{\substack{r=1\\ \alpha=\frac{\pi}{2}}} = 2(1-a)\,e^{\frac{M_0^2}{12}(7-20a+4a^2)} = 2(1-a)+\dfrac{M_0^2}{6}(7-27a+\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +24a^2-4a^3)+\ldots\\[2ex] \left[\dfrac{V}{V_0}\right]_{\substack{r=1\\ \alpha=-\frac{\pi}{2}}} = 2(1+a)\,e^{\frac{M_0^2}{12}(7+20a+4a^2)} = 2(1+a)+\dfrac{M_0^2}{6}(7+27a+\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +24a^2+4a^3)+\ldots\end{cases}$$

Pentru determinarea repartiţiei vitezelor pe axa Oy vom înlocui în (32) pe α cu $\pm\frac{\pi}{2}$:

$$\omega_2\left(r,\ \frac{\pi}{2}\right) = -\gamma_2 + i\gamma_1 + \gamma_0 - i\gamma_{-1} - \gamma_{-2} + \sum_{n=3}^{\infty}\gamma_{-n}\,i^{-n}.$$

Se constată uşor că $\omega_2\left(r,\ \frac{\pi}{2}\right)$ este real, deci $\sigma_2\left(r,\ \frac{\pi}{2}\right) = \omega_2\left(r,\ \frac{\pi}{2}\right)$:

$$(37)\quad \sigma_2\left(r,\ \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a^3-5a}{r} + \frac{4a^2\ln r}{r^2} + \frac{8a^4-14a^2+4}{3r^2} + \frac{2a^3}{r^3} +$$
$$+\frac{3(4a^2-1)}{4r^4} + \frac{10-18a^2}{3r^5} + \frac{-24a^4+20a^2-1}{6r^6} +$$
$$+\frac{4a^3-3a}{6r^7} + \frac{1-8a^2+8a^4}{6r^8} +$$
$$+\sum_{p=2}^{\infty}(-1)^p\left[\gamma_{-2p} + \frac{1}{i}\gamma_{-(2p+1)}\right]$$

unde γ_{-2p}, $\gamma_{-(2p+1)}$ au expresiile (34) cu $a = \sin\varphi$. Mai departe,

$$\left[\frac{V}{V_0}\right]_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = e^{\sigma_1\left(r,\ \frac{\pi}{2}\right) + M_0^2\,\sigma_2\left(r,\ \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Un calcul simplu arată că

$$e^{\sigma_1\left(r,\ \frac{\pi}{2}\right)} = \left|1 - \frac{2a}{r} + \frac{1}{r^2}\right|,$$

deci

$$\left[\frac{V}{V_0}\right]_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = \left|1-\frac{2\,a}{r}+\frac{1}{r^2}\right|\left[1+M_0^2\,\sigma_2\left(r,\ \frac{\pi}{2}\right)+\cdots\right] \tag{38}$$

unde $\sigma_2\left(r,\ \frac{\pi}{2}\right)$ are expresia (37).

Analog se determină $\frac{V}{V_0}$ pentru $\alpha=-\frac{\pi}{2}\cdot$

Dacă în (33) și (34) se înlocuiește $a=\sin\varphi=0$, din (32) deducem imediat

$$\sigma_2(r,\ \alpha) = -\frac{1}{6}\,\frac{1}{r^6}+\frac{1}{4}\,\frac{1}{r^4}+\left(-\frac{1}{6}\,\frac{1}{r^6}+\frac{1}{r^2}-\frac{4}{3}\right)\frac{\cos 2\,\alpha}{r^2}+$$
$$+\left(-\frac{1}{6}\,\frac{1}{r^6}+\frac{1}{r^2}-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\,r^2\right)\sum_{p=2}^{\infty}\frac{\cos 2\,p\,\alpha}{r^{2p}}$$

corespunzător mișcării fără circulație.

Cazul II, $|a|=1$. Integralele (17) se pot calcula pe aceeași cale și se obține

$$C_n(r)=\begin{cases}-\dfrac{n}{r^2}\left(\dfrac{ai}{r}\right)^{-n-1} & \text{pentru } n=-1,\ -2,\ -3,\ldots\\[2ex] 0 & \text{pentru } n=\ \ 0,\ \ 1,\ 2,\ 3,\ldots\end{cases}$$

Un calcul simplu arată că acești coeficienți se pot deduce din (19) pentru $a=\pm 1$ adică pentru $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$. De aici rezultă că și coeficienții dezvoltării (22) se pot obține pe aceeași cale. De asemenea coeficienții $\gamma_n(r)$ din dezvoltarea (15) pot fi deduși înlocuind $a=\pm 1$, respectiv $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$, în (29) și (30). Deci,

$$\omega_2(r,\ \alpha)=\frac{1}{6}\,\frac{1}{r^6}-\frac{3}{4}\,\frac{1}{r^4}+\frac{1}{r^2}+\frac{ia}{2}\left(-\frac{1}{3}\,\frac{1}{r^5}+\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r}\right)e^{i\alpha}+$$
$$+\frac{ia}{2}\left(\frac{1}{3}\,\frac{1}{r^7}-\frac{3}{r^5}+\frac{5}{r^3}-\frac{4}{r}\right)e^{-i\alpha}-\frac{1}{4}\,\frac{1}{r^2}\,e^{2i\alpha}+$$
$$+\left(-\frac{1}{6}\,\frac{1}{r^8}+\frac{1}{r^6}-\frac{3}{r^4}-\frac{4\ln r}{r^2}+\frac{23}{12}\,\frac{1}{r^2}\right)e^{-2i\alpha}+ \tag{39}$$
$$+\,ia\left(-\frac{1}{7}\,\frac{1}{r^{10}}+\frac{4}{5}\,\frac{1}{r^8}-\frac{2}{r^6}+\frac{4}{r^4}+\frac{1}{r^2}-\frac{128}{35}\,\frac{1}{r^3}\right)e^{-3i\alpha}+$$
$$+\left[\frac{1}{6}\,\frac{1}{r^6}-\frac{1}{r^4}+\frac{3}{r^2}+4\ln r-\frac{5}{3}\right)-\frac{1}{2}\,r^2\Bigr]\,S(r,\ \alpha)$$

unde

$$(40)\qquad S(r,\ \alpha) = \sum_{p=2}^{\infty} (-1)^p \left[\frac{e^{-2pi\alpha}}{r^{2p}} + ia\,\frac{e^{-(2p+1)i\alpha}}{r^{2p+1}} \right]$$

care se mai scrie sub forma :

$$(41)\qquad S(r,\ \alpha) = \frac{re^{-4i\alpha} + iae^{-3i\alpha}}{r^3(r^2 - 2ar\sin\alpha + 1)}\,.$$

Se observă că $\theta_2\left(r,\ \pm\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{Im}\left[\omega_2\left(r,\ \pm\frac{\pi}{2}\right)\right] = 0$, deci în punctele axei Oy vectorii viteză sînt paraleli cu axa Ox.

Repartiţia vitezelor pe axa Oy sau pe frontieră se obţine pe aceeaşi cale ca în primul caz. Avem astfel

$$\sigma_2\left(r,\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{5a}{2}\frac{1}{r} - \frac{2+3a}{3}\frac{1}{r^2} + \frac{198a}{35}\frac{1}{r^3} + \frac{9-16a}{4}\frac{1}{r^4} - \frac{4a}{3}\frac{1}{r^5} +$$

$$(42)\qquad + \frac{12a-5}{6}\frac{1}{r^6} + \frac{a}{6}\frac{1}{r^7} + \frac{5-24a}{30}\frac{1}{r^8} + \frac{a}{7}\frac{1}{r^{10}} + \frac{4\ln r}{r^2} +$$

$$+ \frac{1}{r-a}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{r} - \frac{5}{3}\frac{1}{r^3} + \frac{3}{r^5} - \frac{1}{r^7} + \frac{1}{6}\frac{1}{r^9} + \frac{4\ln r}{r^3}\right].$$

Deoarece

$$\left[\frac{V}{V_0}\right]_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = e^{\sigma_1\left(r,\frac{\pi}{2}\right)}\, e^{M_0^2\,\sigma_2\left(r,\frac{\pi}{2}\right)}$$

obţinem

$$\left[\frac{V}{V_0}\right]_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = \left|1 - \frac{2a}{r} + \frac{1}{r^2}\right| e^{M_0^2\sigma_2\left(r,\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \left|1 - \frac{2a}{r} + \frac{1}{r^2}\right| \left[1 + M_0^2\,\sigma_2\left(r,\frac{\pi}{2}\right) + \ldots\right]$$

unde $\sigma_2\left(r,\frac{\pi}{2}\right)$ are expresia (42).

Repartiţia vitezelor pe frontieră este dată de

$$(44)\qquad \left[\frac{V}{V_0}\right]_{r=1} = 2\,|\sin\alpha - a\,|\,e^{M_0^2\sigma_2(1,\,\alpha)} = 2\,|\sin\alpha - a\,|\,[1 + M_0^2\,\sigma_2(1,\,\alpha) + \ldots]$$

unde

$$\sigma_2(1, \alpha) = \frac{1}{12}(5 - 20\, a \sin \alpha - 6 \cos 2\alpha) \tag{45}$$

rezultat care se poate obține și din (35) pentru $a = \pm 1$.

Cazul III, $|a| > 1$. Avem de calculat integralele

$$C_n(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{z^{-n}}{r^2 z^2 - 2airz - 1}\, \mathrm{d}z, \qquad n=0, -1, -2, \ldots \tag{46}$$

$$C_n(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{z^{n}}{r^2 - 2airz - z^2}\, \mathrm{d}z, \qquad n=1, 2, 3, \ldots \tag{47}$$

Notînd

$$a = \mathrm{ch}\, \varphi, \qquad \varphi > 0, \tag{48}$$

polii funcției din (46) sînt

$$z_1 = \frac{i}{r}\mathrm{e}^{-\varphi}, \quad z_2 = \frac{i}{r}\mathrm{e}^{\varphi}$$

iar polii funcției din integrala (47)

$$z_3 = -ir\,\mathrm{e}^{-\varphi}, \quad z_4 = -ir\,\mathrm{e}^{\varphi}$$

Domeniul ocupat de fluid va trebui împărțit în două regiuni : R_1 în care $r < \mathrm{e}^{\varphi}$ și R_2 cu $r > \mathrm{e}^{\varphi}$.

Calculele sînt analoge cu cele din primul caz, de aceea vom da numai cîteva indicații referitoare la mersul lor. Astfel, pentru mișcarea din prima regiune,

$$C_n(r) = \frac{1}{2\mathrm{sh}\varphi}\frac{i}{r}\left(\frac{r\mathrm{e}^{\varphi}}{i}\right)^n, \qquad n=0, -1, -2, \ldots$$

$$C_n(r) = \frac{1}{2\mathrm{sh}\varphi}\frac{i}{r}\left(\frac{r\mathrm{e}^{-\varphi}}{i}\right)^n, \qquad n=1, 2, 3, \ldots$$

Introducînd în (16), dezvoltarea (14) este determinată. Coeficienții $\gamma_n(r)$ din (15) se vor obține prin integrarea unor ecuații de forma (26) cu condițiile la limită care rezultă din (6) și din racordarea mișcărilor din regiunile R_1 și R_2 pe cercul $r = \mathrm{e}^{\varphi}$ care le separă.

Primită la redacție la 13 iulie 1967

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”
București, str. Polizu nr. 1

BIBLIOGRAFIE

1. I. Filimon, *Asupra corecţiilor de compresibilitate în mişcări continue subsonice în jurul unui obstacol dat*, Bul. Şt. al Acad. R.P.R., 9 (1957), 431–449.
2. C. Jacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Ed. Acad. R.P.R. et Gauthier-Villars, Bucureşti-Paris, 1959.
3. C. Jacob, *Détermination de la seconde approximation de l'écoulement compressible subsonique autour d'un profil donné*, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 2, 16 (1964), 273–284.
4. C. Jacob, *Cercetări asupra mişcării la mari viteze subsonice în jurul unor profile date*, Studii şi cerc. mat. **17**, 2 (1965), 173–187.
5. H. Lamb, *On the flow of a compressible fluid past an obstacle*, Reports and Memoranda, No. 1156, 1928.
6. E. Pistolesi, *La portanza alle alte velocità inferiori a quella del suono*, Atti del Convegno Volta, Roma, 1935, 283–328.
7. Simona Popp, *Cercetări asupra determinării corecţiilor de compresibilitate la mişcări plane în regim subsonic*. Studii şi cerc. mat., **12**, 1 (1961), 37–90.
8. Simona Popp, *Asupra mişcării subsonice cu circulaţie în jurul unui cilindru circular*, Studii şi cerc. mat. **17**, 9 (1965), 1361–1365.
9. I. Şabac, *O metodă de aproximare în studiul mişcării fluidelor perfecte compresibile*. Studii şi cerc. mat. **20**, 3 427–437, (1968).

MŰSZAKI KÖNYVT... ...ENTÁCIÓS KÖZ... 1883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale. Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, Str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

1968 APR 20

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, A. DELEANU, M. JURCHESCU, **Topologie, Categorii, Suprafeţe riemanniene**, 1967, 394 p., 21,50 lei.

ROMULUS CRISTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.

I. CUCULESCU, **Procese Markov şi funcţii excesive**, 1968, 356 p., 19 lei.

N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.

ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, **Metode matematice în hidrogazodinamica subterană**, 1966, 582 p., 31 lei.

AL. GHIKA, **Analiza funcţională**, 1967, 594 p., 31 lei.

S. GUIAŞU şi R. THEODORESCU, **Teoria matematică a informaţiei**, 1966, 227 p., 8,25 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, 1966, 669 p., 38 lei.

S. SANIELEVICI, **Opera matematică**, 1968, 297 p., 15,50 lei.

I. SINGER, **Cea mai bună aproximare în spaţii vectoriale normate prin elemente din subspaţii vectoriale**, 1967, 386 p., 23 lei.

M. STOKA, **Geometria integrală**, 1967, 239 p., 9,75 lei.

S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 3, P. 313–454, BUCUREŞTI, 1968

I. P. I. — c. 6307

43831

Lei 12.—

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

4

TOMUL 20

1968

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAȘ — secretar de redacție.

La revue „STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE" paraît 10 fois par an. Le prix d'un abonnement annuel est de $ 10. — ; FF 49. — ; D.M. 40.—.

Toute commande de l'étranger sera adressée a CARTIMEX, Boîte postale 134—135 Bucarest, Roumanie, ou à ses représentants à l'étranger.

En Roumanie, vous pourrez vous abonner par les bureaux de poste ou chez votre facteur.

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție al revistei pe adresa : Str. Mihai Eminescu nr. 47, București.

TOM. 20, NR. 4
1968

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR
1883

SUMAR

Pag.

IULIAN BEJU, Asupra ecuaţiilor teoriei elasticităţii în coordonate oarecare 457
ȘT. I. GHEORGHIȚĂ, Asupra mişcărilor liniare în mediile poroase neomogene 469
G. GODINI, Despre modulele de convexitate şi netezime uniformă slabă 475
SILVIU GUIAȘU, Modelul informaţional al teoriei învăţării . . 481
VIOREL HIRIȘ, Operatori realizaţi de automate finite 497
VASILE ISTRĂŢESCU şi IOANA ISTRĂŢESCU, Operatori normaloizi 503
MIRCEA LUPU, Asupra unei probleme din teoria mişcării plane staţionare a apelor arteziene 511
PETRIȘOR MAZILU, Asupra determinării funcţiei de reprezentare conformă în cîteva cazuri particulare 519
PETRIȘOR MAZILU, Metodă de rezolvare a unei probleme plane a elasticităţii. Domenii multiplu conexe 525
EUGEN MĂRGĂRITESCU, Asupra unui criteriu pentru verificarea ipotezei nule din analiza dispersională 545
I. L. POPESCU, Asupra unor corecţii de compresibilitate în dinamica gazelor [1] 551
ELEMÉR ROSINGER, Spaţii pseudotopologice. Scufundarea distribuţiilor $\mathcal{D}'_n$ în algebre 553
GEORGE THEILER, Asupra lanţurilor cu legături complete neomogene 583
GEORGE THEILER, Asupra lanţurilor ergodice de ordin infinit . 587
RODICA TRANDAFIR, Probleme de geometrie integrală ale reţelelor dintr-un spaţiu riemannian V_2 cu curbură constantă 599
IONEL ŢEVY, Teoreme de existenţă a funcţiilor implicite . . 605
GEORGETA VOICULESCU PLEȘI, Metoda aproximativă I. Imai — E. Lamla — C. Iacob aplicată la studiul mişcării compresibile subsonice în jurul unor profile 613

ST. CERC. MAT., TOM. 20, Nr. 4, P. 455 – 632, BUCUREȘTI, 1968

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

ASUPRA ECUAȚIILOR TEORIEI ELASTICITĂȚII ÎN COORDONATE OARECARE

DE

IULIAN BEJU

În prima parte a lucrării se urmărește scrierea ecuațiilor geometrice și a ecuațiilor de echilibru ale teoriei elasticității în coordonate oarecare, făcîndu-se uz de mijloacele geometriei diferențiale.

În partea a doua se dau cîteva particularizări pentru sisteme de coordonate des utilizate. Se obțin astfel drept cazuri particulare rezultate anterior stabilite prin raționamente distincte pentru fiecare caz în parte.

Notații folosite : E_n-spațiu euclidian. $\mathcal{V}_n$-spațiu riemannian cu metrica $G_{kl}\ (X^i)$, tensor de curbură R^i_{jkl} și curbură totală K. $|ij, k| =$ simbolul lui Christoffel de speța I, $|{}^{\,i}_{jk}| =$ simbolul lui Christoffel de speța II. (X^i) sau (I) sistemul de coordonate $(X^1, X^2, \ldots, X^n)$, (x^i) sau (i) sistemul de coordonate $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. $(\ldots)_{;\,k}$-derivata parțială în raport cu x^k. $(\ldots)_{,\,k}$-derivata parțială în raport cu X^k. $(\ldots)|_k$-derivata covariantă în metrica inițială a spațiului.

Un vector de componente V^k se va numi pe scurt vectorul V^k. $\mathcal{M}$ este punct al spațiului $\mathcal{V}_n$ și vom scrie $\mathcal{M} \in \mathcal{V}_n$. Vom folosi convenția de sumare după indicii ce se repetă. Dacă un indice apare în membri diferiți ai unei egalități, el nu este indice de sumare. Alte situații vor fi specificate de la caz la caz.

1.0. TENSORUL DEFORMAȚIE

Fie $\mathcal{V}_n$ raportat la sistemul de coordonate (I) de tensor metric fundamental $G_{kl}(X^i)$. Să considerăm transformarea regulată în sensul din [1]

$$x^i = x^i(X^k). \tag{1}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 20 Nr. 4, P. 457–467, BUCUREȘTI, 1968

Ea constituie o transformare de coordonate în $\mathcal{V}_n$. În acelaşi timp o astfel de transformare are ca efect modificări centroafine ale vecinătăţilor punctelor $\mathcal{M} \in \mathcal{V}_n$[1]. Vom caracteriza mai amănunţit aceste modificări.

Deoarece lungimea δS a unui vector δX^k este un invariant, putem scrie

$$\delta S^2 = G_{kl} \delta X^k \delta X^l = g_{ij} \delta x^i \delta x^\gamma, \tag{2}$$

unde

$$x^i = x^i_{.k} \, \delta X^k \tag{3}$$

$$g_{ij} = X^k_{:i} \, X^l_{:j} \, G_{kl}. \tag{4}$$

Vom numi vectorul δx^i vectorul transformat prin (1) din vectorul δX^k. Fie $\mathcal{M} \in \mathcal{V}_n$ punctul în vecinătatea căruia efectuăm studiul. În cele două sisteme de coordonate, $\mathcal{M}$ are, respectiv, coordonatele X^k şi x^k şi vom scrie $\mathcal{M}(X^k)$, respectiv $\mathcal{M}(x^k)$.

Fie (X^k) considerate drept coordonate carteziene ale unui spaţiu E_n. Putem realiza o corespondenţă biunivocă şi bicontinuă între $\mathcal{V}_n$ şi E_n, luînd ca puncte corespondente $\mathcal{M} \in \mathcal{V}_n$ şi $\mathcal{N} \in E_n$ pe acelea care au aceleaşi coordonate X^k în cele două spaţii. Vom desemna această corespondenţă simbolic prin $E_n \longleftrightarrow \mathcal{V}_n$.

În urma transformării (1) punctul $\mathcal{M}$ de coordonate X^k capătă în $\mathcal{V}_n$ coordonatele x^i deci în E_n îi corespunde şi un punct $\mathcal{N}^* \neq \mathcal{N}$ dacă (1) nu este transformarea identică. Vectorul $\mathcal{N}\mathcal{N}^*$ din E_n, ce va avea componentele

$$u^k(X^j) = x^k - X^k \tag{5}$$

se va numi vector deplasare.

Vectorul δX^k din $\mathcal{V}_n$ capătă în urma transformării (1) componentele δx^i. Deci în $\mathcal{V}_n$, δX^k şi δx^i desemnează acelaşi vector, în E_n, δX^k în $\mathcal{N}$ desemnează un vector diferit de vectorul δx^i în $\mathcal{N}$. Pe baza corespondenţei $E_n \longleftrightarrow \mathcal{V}_n$ putem analiza vectorul de componente δx^i în $\mathcal{V}_n$ folosind metrica $G_{kl}(x^i)$. (A nu se confunda cu $G_{kl}(X^j(x^i))$. $G_{kl}(x^i)$ înseamnă folosirea în forma funcţiilor G_{kl} a valorilor x^i pentru variabilele X^i).

În mod similar putem analiza vectorul de componente δX^i folosind metrica $g_{ij}(X^k)$.

Deoarece urmărim şi analiza modificărilor unghiulare, vom considera în mod similar în $\mathcal{M} \in \mathcal{V}_n$ un al doilea vector $\mathrm{d}X^i$ şi transformatul său $\mathrm{d}x^i$.

Vom avea de comparat mărimile

$$\delta \varnothing = G_{kl}(X^i) \, \delta X^k \, \mathrm{d}X^l \tag{6}$$

$$\delta \varphi = G_{kl}(x^i) \, \delta x^k \, \mathrm{d}x^l. \tag{7}$$

Folosind relaţia (3) obţinem

$$\delta \varphi = G_{kl}(x^i) \, x^k_{.p} \, x^l_{.q} \, \delta X^p dX^q. \tag{8}$$

---

[1] vezi [2], cap I, § 1.

Notăm

$$H_{pq}(X^s) = G_{kl}(x^i X^r))\, x^k_{,p}\, x^l_{,q}. \tag{9}$$

Rezultă imediat că H_{pq} constituie componentele unui tensor dublu covariant simetric. (Fie transformarea de coordonate

$$\overline{X}^{\bar{k}} = \overline{X}^{\bar{k}}(X^i).$$

Atunci

$$\overline{H}_{\bar{m}\bar{n}}\, \overline{X}^{\bar{m}}_{,p}\, \overline{X}^{\bar{n}}_{,q} = \overline{G}_{\bar{k}\bar{l}}(x^{\bar{i}})\, x^{\bar{k}}_{,\bar{m}}\, x^{\bar{l}}_{,\bar{n}}\, \overline{X}^{\bar{m}}_{,p}\, \overline{X}^{\bar{n}}_{,q} =$$

$$= \overline{G}_{\bar{k}\bar{l}}(x^{\bar{i}})\, x^{\bar{k}}_{,p}\, x^{\bar{l}}_{,q} = G_{rs}\, x^r_{,\bar{k}}\, x^s_{,\bar{l}}\, x^{\bar{k}}_{,p}\, x^{\bar{l}}_{,q} = G_{rs}\, x^r_{,p}\, x^s_{,q} = H_{pq}.$$

În relațiile de mai sus, $x^{\bar{i}} = x^i(X^k(\overline{X}^{\bar{l}}))$. Am folosit de asemenea legea de transformare pentru componentele G_{kj}, unde am ținut seama că argumentele acestora iau valorile x^k).

Din relația (9) rezultă deci dotarea spațiului $\mathcal{V}_n$ și cu metrica $H_{pq}(X^k)$, impusă de transformarea (1). Relația (8) devine

$$\delta\varphi = H_{pq}(X^r)\, \delta X^p\, \mathrm{d}X^q. \tag{8'}$$

Vom nota cu

$$2\varepsilon_{kl} = H_{kl}(X^i) - G_{kl}(X^i). \tag{10}$$

Deoarece H_{kl} și G_{kl} sînt tensori, rezultă că ε_{kl} constituie componentele unui tensor și el va caracteriza mărimea :

$$\delta\varphi - \delta\varnothing = 2\,\varepsilon_{kl}\, \delta X^k\, \mathrm{d}X^l. \tag{11}$$

Din (10) rezultă imediat că

$$H_{kl} = G_{kl} + 2\,\varepsilon_{kl}. \tag{12}$$

Observație. Dacă $\mathcal{V}_n$ este un spațiu euclidian raportat la coordonatele curbilinii X^k, există un sistem de coordonate ξ^i astfel ca

$$\xi^i = \xi^i(X^k)$$

și

$$G_{kl} = \xi^i_{,k}\, \xi^i_{,l}.$$

Considerînd ca spațiu euclidian atașat lui $\mathcal{V}_n$ spațiul $\mathcal{V}_n$ raportat la coordonatele ξ^i, tensorul ε_{kl} coincide cu tensorul de deformație al lui Green (v. [3], cap. II).

Cînd transformarea (1) se efectuiază în timp, vom spune că ea determină o deformație a lui $\mathcal{V}_n$, iar tensorul ε_{kl} se va numi tensor de deformație.

Cunoașterea lui ε_{kl} conduce la aflarea lui H_{kl} din (12). Deci (9) devine un sistem de ecuații

$$G_{kl}(x^i)\, x^k_{,p}\, x^l_{,q} = H_{pq}(X^{i}t) \tag{9'}$$

pentru determinarea transformării $x^k = x^k(X^i t)$, unde t are rol de parametru. De reținut faptul că mărimile $G_{kl}(x^i)$ sînt cunoscute ca formă și nu depind de t explicit.

Numărul funcţiilor necunoscute este n, iar al ecuaţiilor $n(n+1)/2$. Prin urmare mărimile H_{pq}, adică în ultima instanţă ε_{pq}, trebuie să satisfacă condiţii pentru compatibilitatea sistemului (9′). Acest lucru va fi analizat în (1.4.)

1.1. INTERPRETAREA MĂRIMILOR ε_{kl}

Fie $\delta X^k = \mathrm{d}X^k$. Relaţiile (6) şi (7) devin

$$\delta\varnothing = \mathrm{d}S^2 = G_{pq}(X^i)\,\mathrm{d}X^p\,\mathrm{d}X^q$$

$$\delta\,\varphi = \mathrm{d}s^2 = H_{pq}(X^i)\,\mathrm{d}X^p\,\mathrm{d}X^q.$$

Deci

(13) $$\mathrm{d}s^2 - \mathrm{d}S^2 = 2\varepsilon_{pq}\,\mathrm{d}X^p\,\mathrm{d}X^q.$$

Pentru $\mathrm{d}X^p$ de forma $(0, 0, \ldots 0, \mathrm{d}X^k, 0, \ldots, 0)$ cu k fixat, rezultă

$$\mathrm{d}s/\mathrm{d}S = (1 + 2\varepsilon_{kk}/G_{kk})^{1/2}.$$

Prin urmare mărimile ε_{kk} caracterizează variaţia lungimii elementelor din direcţia axei „k". Pentru deformaţii mici obţinem o relaţie de tip Cauchy pentru alungiri specifice şi anume $(\mathrm{d}s - \mathrm{d}S)/\mathrm{d}S = \varepsilon_{kk}/G_{kk}$. Dacă vectorii δX^p şi $\mathrm{d}X^p$ sînt în particular de forma $(0, \ldots 0, \delta X^p, 0, \ldots 0)$ şi respectiv $(0, \ldots 0, \mathrm{d}X^l, 0, \ldots 0)$, unde k şi l sînt fixaţi ($k \neq 1$), din relaţiile (11) obţinem

$$(1 + 2\varepsilon_{kk}/G_{kk})^{1/2}(1 + 2\varepsilon_{ll}/G_{ll})^{1/2}\cos\omega_{kl} = \cos\Omega_{kl} + 2\varepsilon_{kl}/(G_{kk}G_{ll})^{1/2},$$

unde prin ω_{kl} şi Ω_{kl} am notat unghiurile dintre axele „k" şi „l" în metrica H_{kl} respectiv G_{kl}.

Pentru deformaţii mici deducem că

$$\Delta\Omega_{kl} = 2\varepsilon_{kl}/(G_{kk}G_{ll} - G_{kl}^2)^{1/2},$$

unde $\Delta\Omega_{kl} = \omega_{kl} - \Omega_{kl}$. Prin urmare mărimile ε_{kl} ($k \neq 1$) caracterizează deformaţia unghiulară a direcţiilor „k" şi „l".

1.2. LEGĂTURA ÎNTRE DEPLASĂRI ŞI DEFORMAŢII

Dacă mărimile u^k şi $u^k_{.l}$ sînt suficient de mici pentru a putea fi permisă neglijarea termenilor de ordin superior faţă de termeni liniari în raport cu aceste mărimi, atunci din relaţia (10) obţinem

(14) $$2\varepsilon_{kl} = G_{kl,m}\,u^m + G_{lp}\,u^p_{.k} + G_{kp}\,u^p_{.l}$$

adică

(14′) $$2\varepsilon_{kl} = \underset{u}{L}\,G_{kl},$$

unde prin $\underset{u}{L}\,G_{kl}$ am notat derivata Lie a tensorului G_{kl} în raport cu vectorul de componente u^k (v. [2] cap. V §7). De asemenea rezultă imediat că

(15) $$2\varepsilon_{kl} = u_l|_k + u_k|_l.$$

1.3. DEPLASARE RIGIDĂ ÎNTR-UN SPAȚIU RIEMANN $\mathcal{V}_n$

O deplasare rigidă este evident caracterizată de $ds = dS$. Din relația (13), ținînd seama de simetria tensorului ε_{kl}, rezultă $\varepsilon_{kl} = 0$ sau

$$\underset{u}{L}\, G_{kl} = 0. \tag{16}$$

Acestea nu sînt altceva decît ecuațiile lui Killing (v.[2], cap. V, §7), ce dau izometriile spațiului Riemann considerat. Prin urmare deplasările rigide sînt date de transformările izometrice, fapt ce era de așteptat în urma ipotezei asupra metricii în sistemul (i).

1.4. CONDIȚII DE COMPATIBILITATE A DEFORMAȚIILOR

Dacă transformarea (1) e dată, atunci din relațiile (9) și (12) se poate determina tensorul ε_{kl}.

Dacă însă sînt date arbitrar componentele ε_{kl}, acestea impun din relația (12) metrica

$$H_{kl} = G_{kl} + 2\varepsilon_{kl}. \tag{12'}$$

Pentru ca cele două spații de metrică G_{kl} și H_{kl} să fie echivalente, pe lîngă relația (9′), transformarea căutată $x^k = x^k(X^p, t)$ trebuie să mai satisfacă condițiile impuse de legătura între conexiuni și tensorii de curbură (v.[2], cap. V, §7).

În cazul unui spațiu Riemann de curbură riemanniană constantă K, condiția de echivalență se reduce la (9′) și $H = K$, unde H reprezintă curbura riemanniană calculată cu metrica H_{pq}. Egalitatea $H = K$ impune egalitatea tensorilor de curbură (v. [2], cap. V, §5), deci

$$H_{ijkl} = R_{ijkl}, \tag{17}$$

unde H_{ijkl} sînt componentele tensorului de curbură calculate cu metrica H_{kl}. Numărul componentelor distincte ale tensorului de curbură, deci numărul condițiilor ce decurg din (17) pentru componentele ε_{kl} este de $n^2(n^2 - 1)/12$. Folosind (12), relațiile (17) devin

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{il,jk} + \varepsilon_{jk,il} - \varepsilon_{jl,ik} - \varepsilon_{ik,jl} - 2\varepsilon^{rs}\left(|jk, r|\,|il, s| - |jl, r|\,|ik, s|\right) + \\ &+ 2(G^{rs} - 2\varepsilon^{rs})\left(|jk, r|_\varepsilon\,|il, s| + |il, s|_\varepsilon\,|jk, r| - |jl, r|_\varepsilon\,|ik, s| - \right. \\ &\left. - |ik, s|_\varepsilon\,|jl, r|\right) + 4(G^{rs} - 2\varepsilon^{rs})\left(|jk, r|_\varepsilon\,|il, s|_\varepsilon - |jl, r|_\varepsilon\,|ik, s|_\varepsilon\right) = 0, \end{aligned} \tag{18}$$

unde

$$\varepsilon^{ij} = G^{il} H^{jk} \varepsilon_{lk} = (G^{ij} - H^{ij})/2 \text{ și } 2\,|ij, k|_\varepsilon = (\varepsilon_{ik,j} + \varepsilon_{jk,i} - \varepsilon_{ij,k}).$$

În cazul deformațiilor mici relațiile (18) devin

$$\varepsilon_{il}|_{jk} + \varepsilon_{jk}|_{il} - \varepsilon_{ik}|_{jl} - \varepsilon_{jl}|_{ik} = R^p_{ikl}\,\varepsilon_{pj} - R^p_{jkl}\,\varepsilon_{ip}. \tag{19}$$

Deoarece pentru K constantă $R^p_{ikl} = K(\delta^p_k G_{il} - \delta^p_l G_{ik})$, rezultă din (19)

$$\varepsilon_{il}|_{jk} + \varepsilon_{jk}|_{il} - \varepsilon_{ik}|_{jl} - \varepsilon_{jl}|_{ik} = K(\varepsilon_{il} G_{jk} + \varepsilon_{jk} G_{il} - \varepsilon_{ik} G_{jl} - \varepsilon_{jl} G_{ik}). \tag{20}$$

Pentru cazul spaţiului euclidian (de curbură $K = 0$) se obţin evident relaţiile de compatibilitate de tip Saint-Venant (v. [4], cap. I, § 7)

$$\varepsilon_{il}|_{jk} + \varepsilon_{jk}|_{il} - \varepsilon_{ik}|_{jl} - \varepsilon_{jl}|_{ik} = 0.$$

2.0. TENSORUL TENSIUNE

Se postulează că forţa ce acţionează pe un element de suprafaţă ΔS nu depinde de forma suprafeţei, ci de elementul orientat

$$\mathbf{s} = \mathbf{n}\Delta S, \tag{1}$$

unde **n** este normala la elementul de suprafaţă.

De asemenea forţa este proporţională cu aria elementului de suprafaţă. Prin urmare ea trebuie căutată ca o funcţie de **s** cu proprietatea

$$\mathbf{f}(\alpha\mathbf{s}) = \alpha\,\mathbf{f}(\mathbf{s}). \tag{2}$$

În particular

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \mathbf{f}(\mathbf{n}\,\Delta S) = \mathbf{f}(\mathbf{n})\,\Delta S. \tag{3}$$

$\mathbf{f}(\mathbf{n})$ exprimă deci forţa ce acţionează pe elementul unitate de suprafaţă şi se numeşte tensiune :

$$\boldsymbol{\tau}^{n} = \mathbf{f}(\mathbf{n}). \tag{4}$$

În spaţiul euclidian, $\mathbf{f}(\mathbf{n})$ este o funcţie liniară de componentele normalei. Ne vom limita în cele ce urmează la a determina forma funcţiei $\mathbf{f}(\mathbf{n})$ pentru un spaţiu tridimensional cu metrica dată de mărimile $a_{ij}(X^k)$. (Vezi observaţia de la finele punctului 2.1.)

Fie $P(X_0^i)$ punctul în care efectuăm studiul, $P\,P_1P_2P_3$ elementul de volum determinat de punctele $P(X_0^i)$, $P_k(X_0^i + \Delta X\,\delta_k^i)$ şi de suprafeţele coordonate $X^i = X_0^i$. Elementul de suprafaţă $P_1P_2P_3$ este caracterizat de normala $\mathbf{n}$ $(a_{ij}\,n^i n^j = 1)$ şi aria sa ΔS, iar elementele de suprafaţă $P\,P_iP_j$ sînt caracterizate de normalele la suprafeţele coordonate şi respectiv ariile lor $\Delta S_k\,(i \neq j \neq k \neq i)$. Sensul normalei la suprafaţă va fi cel îndreptat spre exteriorul volumului dat.

Vectorii covarianţi ce caracterizează aceste elemente de suprafaţă au componentele $n_i\,\Delta S$ şi $\delta_{ik}\,\Delta S_k/(a^{kk})^{1/2}$ cu k fixat. Se vede imediat că

$$(\Delta S_k)^2 = a^{ij}\,\frac{\delta_{ik}}{\sqrt{a^{kk}}}\,\Delta S_k\,\frac{\delta_{jk}}{\sqrt{a^{kk}}}\,\Delta S_k$$

$$(\Delta S)^2 = a^{ij}\,n_i\,\Delta S n_j\,\Delta S.$$

Pe baza egalităţii sumei vectorilor $\mathbf{s}_k$ cu vectorul $\mathbf{s}$, unde $\mathbf{s} = \mathbf{n}\,\Delta S$ şi $\mathbf{s}_k$ are componentele $\delta_{ik}\,\Delta S_k/(a^{kk})^{1/2}$, rezultă

$$n_i\,\Delta S = \Delta S_i/(a^{ii})^{1/2}$$

sau

$$\Delta S_i = \Delta S\,(a^{ii})^{1/2}\,n_i. \tag{5}$$

Fie, conform relaţiei (3), $\boldsymbol{\tau}^k \Delta S_k$ (fără sumare!) şi $\boldsymbol{\tau}^n \Delta S$ forţele ce acţionează pe elementele de suprafaţă s_k şi respectiv s. Fie pe de altă parte $\mathbf{F}$ forţa ce acţionează pe unitatea de volum. Condiţia de echilibru a forţelor pentru elementul de volum $P\,P_1P_2P_3$ avînd volumul ΔV este

$$\boldsymbol{\tau}^n \Delta S - \boldsymbol{\tau}^i \Delta S_i + \mathbf{F}\Delta V = 0. \tag{6}$$

Împărţind cu ΔS, trecînd la limită pentru $\Delta X \to 0$, şi ţinînd seama de (5), obţinem

$$\boldsymbol{\tau}^n = \boldsymbol{\tau}^i n_i \sqrt{a^{ii}} \tag{6'}$$

sau încă, pentru componente,

$$\tau^{nk} = \tau^{ik} n_{ni} \sqrt{a^{ii}}. \tag{7}$$

Cunoaşterea tensiunii pe elementele de suprafaţă coordonate permite determinarea tensiunii pe orice element de suprafaţă în punctul considerat. Din (7) se vede că τ^{ik} nu sînt componentele unui tensor. Pentru acest motiv ele vor fi înlocuite cu mărimile

$$\sigma^{ik} = \tau^{ik} \sqrt{a^{ii}}$$

mărimi ce alcătuiesc componentele unui tensor dublu contravariant conform regulii cîtului (v. [3], cap. I, § 1.4.), întrucît

$$\tau^{nk} = \sigma^{ik} n_i. \tag{8}$$

Din condiţia de echilibru a momentelor forţelor rezultă

$$\tau^{ik} \Delta S_i = \tau^{ki} \Delta S_k$$

sau încă

$$\tau^{ik} \sqrt{a^{ii}} = \tau^{ki} \sqrt{a^{kk}} \tag{9}$$

ceea ce arată că tensorul de componente σ^{ik} este simetric

$$\sigma^{ik} = \sigma^{ki} \tag{10}$$

Componentele vectorului $\boldsymbol{\tau}^i$ sînt τ^{ik}. Componentele fizice ale aceluiaşi vector (v. [5], cap. IV, § 32) sînt notate cu t^{ik} şi avem

$$\tau^{ik} = t^{ik} / \sqrt{a_{kk}}.$$

De aici rezultă că

$$t^{ik} = \sqrt{a_{kk}/a^{ii}}\,\sigma^{ik}. \tag{11}$$

Observaţie. Dacă pentru σ^{ij} rolul indicilor i şi j este similar datorită relaţiei de simetrie (10), pentru τ^{ij} indicii au o semnificaţie bine precizată, semnificaţie ce rezultă din definiţia mărimilor τ^{ij}.

2.1. ECUAŢIILE DE ECHILIBRU

Fiind dat un element de volum paralelipipedic, avînd feţele definite de suprafeţele coordonate ce trec prin punctele $P\,(X_0^i)$ şi $Q\,(X_0^i + \Delta X^i)$, vom desemna cu notaţii analoage celor din 2.0. elementele de suprafaţă ce mărginesc paralelipipedul şi tensiunile ce acţionează pe ele. Astfel, spre exemplu, ΔS_i este aria paralelipipedului curbiliniu construit pe axele j, k $(i \neq j \neq k \neq i)$, iar $\boldsymbol{\tau}^i$ este tensiunea corespunzătoare.

Forțele ce acționează pe fețele paralelipipedului curbiliniu sînt respectiv $\boldsymbol{\tau}^i \Delta S_i$, $\boldsymbol{\tau}^i \Delta S_i + D_i(\boldsymbol{\tau}^i \Delta S_i)$, $\mathbf{F} \Delta V$, de unde rezultă relația de echilibru

$$D_i(\boldsymbol{\tau}^i \Delta S_i) + \mathbf{F} \Delta V = 0, \tag{12}$$

unde simbolul D_i înseamnă diferențiala absolută în lungul unui drum particular, de componente $\Delta X^k \delta^i_k$. Din relația (12) obținem

$$(\tau^{iq} \sqrt{a} \sqrt{a^{ii}})|_i \Delta X^i \Delta X^j \Delta X^k + F^q \sqrt{a}\, \Delta X^i \Delta X^j \Delta X^k = 0$$

sau

$$(\sqrt{a}\, \sigma^{iq})|_i + F^q \sqrt{a} = 0. \tag{13}$$

Ținînd seama de faptul că $\sqrt{a}_{,\,i} = \sqrt{a} \left|{}^{\,p}_{pi}\right|$, această relație devine

$$\sigma^{ij}_{.\,i} + \left|{}^{\,j}_{ir}\right| \sigma^{ir} + \left|{}^{\,i}_{pi}\right| \sigma^{pj} + F^j = 0. \tag{14}$$

Relația (14) se scrie și sub forma

$$\sigma^{ij}|_i + F^j = 0, \tag{15}$$

unde derivata covariantă este aplicată tensorului de componente σ^{ij} spre deosebire de relația (13) unde apare derivata covariantă a unui vector.

Observație. În stabilirea ecuațiilor de echilibru am folosit o metrică neprecizată $a_{ij}(X^k)$. Făcînd legătura cu cele spuse în prima parte (1.0), rezultă că putem scrie ecuațiile de echilibru atît în metrica $G_{ij}(X^k)$ cît și în metrica $H_{ij}(X^k)$, ele păstrînd același aspect. Notînd cu $(\ldots.)||_i$ derivata covariantă cu metrica H_{ij} obținem deci

$$\sigma^{ij}|_i + F^j = 0 \tag{15'}$$

$$\sigma^{ij}||_i + F^{*j} = 0. \tag{16}$$

În relațiile (15′) și (16) F^j și F^{*j} reprezintă componentele forțelor de volum în cele două metrici diferite.

3.0. PARTICULARIZĂRI

3.1. SPAȚIUL EUCLIDIAN RAPORTAT LA COORDONATE CARTEZIENE ORTOGONALE

Metrica spațiului este definită de $G_{ij} = \delta_{ij}$. Relațiile (1.2.14) și (2.1.15′) devin

$$\begin{gathered} 2\varepsilon_{ij} = u_{i,\,j} + u_{j,\,i} \\ \sigma_{ij,\,j} + F_i = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

3.2. SPAȚIUL EUCLIDIAN RAPORTAT LA COORDONATE CARTEZIENE OBLICE

Metrica spațiului este definită de $G_{ij} = \cos \Omega_{ij}$ și deci relațiile (1.2.14) și (2.1.15′) devin aici

$$\begin{gathered} 2\varepsilon_{ij} = \cos \Omega_{ik}\, u^k_{.\,j} + \cos \Omega_{jk}\, u^k_{.\,i} \\ \sigma^{ij}_{.\,j} + F^i = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

3.3. SPAŢIUL EUCLIDIAN RAPORTAT LA COORDONATE CURBILINII ORTOGONALE

Metrica spaţiului este definită de $G_{ij} = H_i^2\, \delta_{ij} = H_j^2\, \delta_{ij}$. Din relaţiile (1.2.14) obţinem imediat

$$2\varepsilon_{ij} = 2H_i\, H_{i,k}\, u^k\, \delta_{ij} + H_i^2\, u^i_{,j} + H_j^2\, u^j_{,i}.$$

Introducînd componentele fizice ale deplasării ([5], cap. IV, § 32) $\widetilde{u}_i$ şi ţinînd seama de relaţia $\frac{1}{2}\, \Delta\Omega_{ij} = \widetilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}/(G_{ii}\, G_{jj} - G_{ij}^2)^{1/2} = \varepsilon_{ij}/H_i\, H_j$ rezultă relaţiile cunoscute

$$2\widetilde{\varepsilon}_{ij} = (1/H_j)\, \widetilde{u}_{i,j} + (1/H_i)\, \widetilde{u}_{j,i} + (\widetilde{u}_k/H_i)\, [(1/H_k)\, H_{j,k}\, \delta_{ij} - (1/H_j)\, H_{k,j}\, \delta_{ik}] + $$
$$+ (\widetilde{u}_k/H_j)\, [(1/H_k) H_{i,k}\, \delta_{ij} - (1/H_i)\, H_{k,i}\, \delta_{jk}]$$

adică

$$\begin{aligned} \widetilde{\varepsilon}_{11} &= (1/H_1)\, \widetilde{u}_{1,1} + (1/H_1H_2)\, H_{1,2}\, \widetilde{u}_2 + (1/H_1H_3)\, H_{1,3}\, \widetilde{u}_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \widetilde{\varepsilon}_{12} &= (H_1/H_2)\, (\widetilde{u}_1/H_1)_{,2} + (H_2/H_1)\, (\widetilde{u}_2/H_2)_{,1} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Din ecuaţiile de echilibru (2.1.13) înlocuind a_{ij} cu G_{ij} şi trecînd la componentele fizice ale tensiunii şi forţelor de volum ($\sigma^{ik} = t^{ik}/H_iH_k$ — deci componentele fizice sînt simetrice — ; $F^j = P^j/H_j$), obţinem ecuaţiile

$$(t^{ij}\, H_1H_2H_3/H_i)_{,i} + (t^{ik}\, H_1H_2H_3/H_iH_k)\left(H_j \left| {}^{\,j}_{ik} \right| - \delta_{jk} H_{k,i}\right) + H_1H_2H_3P^j = 0. \tag{4}$$

Dacă folosim valorile simbolurilor lui Christoffel de speţa a doua pentru metrica dată se obţin ecuaţiile sub forma obişnuită ([9], cap. I)

$$\begin{aligned} &(H_2H_3t^{11})_{,1} + (H_1H_3t^{12})_{,2} + (H_1H_2t^{13})_{,3} - t^{22}H_3H_{2,1} - t^{33}\, H_2H_{3,1} + \\ &+ t^{21}H_3H_{1,2} + t^{31}H_2H_{1,3} + H_1H_2H_3P^1 = 0 \end{aligned} \tag{4'}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

3.4. SPAŢIUL EUCLIDIAN RAPORTAT LA COORDONATE CURBILINII OARECARE. PROBLEMA PLANĂ

Metrica are componentele $G_{\alpha,\beta}$ (cu $\alpha, \beta = 1,2$). Relaţiile (1.2.14) şi (2.1.15′) devin

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta,\gamma}\, u^\gamma + G_{\alpha\gamma}\, u^\gamma_{,\beta} + G_{\gamma\beta}\, u^\gamma_{,\alpha}$$

$$\sigma^{\alpha\beta}|_\alpha + F = 0. \tag{5}$$

În cazul unei metrici plane rezultă imediat simetria componentelor fizice $t^{\alpha\beta}$ ($\alpha \neq \beta$) deoarece

$$\sigma^{\alpha\beta} = \sqrt{G^{\alpha\alpha}/G_{\beta\beta}}\, t^{\alpha\beta} = t^{\alpha\beta}/G. \tag{6}$$

3.5. PROBLEMA PLANĂ ÎN COORDONATE OARECARI, FOLOSIREA COMPONENTELOR NORMALE ŞI TANGENŢIALE ALE VECTORULUI TENSIUNE

În unele probleme este mai practică folosirea componentelor normale (N) şi tangenţiale (T) ale vectorului tensiune. Legătura între componentele folosite pînă acum şi acestea din urmă este, după cum rezultă din figură : $t^{11} = N_1$ cosec ω ; $t^{12} = T_{12} - N_1$ ctg ω ; $t^{22} = N_2$ cosec ω ; $t^{21} = T_{21} - N_2$ ctg ω.

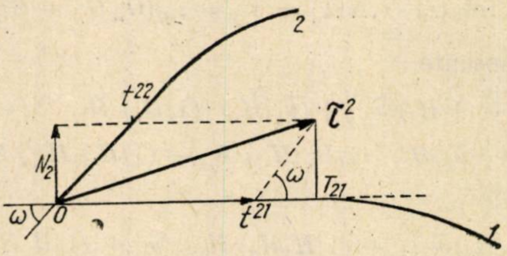


Fig. 1

Aceasta revine la a privi vectorul tensiune $\boldsymbol{\tau}^\alpha$ ca avînd fie componentele $(t^{\alpha 1}, t^{\alpha 2})$, fie componentele $(N_\alpha, T_{\alpha\beta})$ $(\alpha \neq \beta)$.

Simetria componentelor fizice $t^{12} = t^{21}$ (v. relaţia (6)) atrage după sine relaţia

$$T_{12} - T_{21} = (N_1 - N_2) \text{ ctg } \omega, \tag{7}$$

relaţie ce stabileşte legătura dintre componentele tangenţiale (T). Această relaţie a fost stabilită de Teodorescu în [6].

Spre exemplificare să scriem ecuaţiile de echilibru pentru cazul coordonatelor carteziene oblice. Din (5) obţinem

$$t^{\alpha\beta}_{.\,\alpha} + \sin \omega\, F^\beta = 0 \tag{8}$$

sau

$$N_{1,1} + T_{21,2} \sin \omega - N_{2,2} \cos \omega + \sin^2 \omega\, F^1 = 0$$

$$N_{2,2} + T_{12,1} \sin \omega - N_{1,1} \cos \omega + \sin^2 \omega\, F^2 = 0.$$

Aceste ecuaţii au fost stabilite pe cale directă în [7].

3.6. PROBLEMA PLANĂ ÎN COORDONATE ARMONICE

Se numesc coordonate armonice sistemele de coordonate (X^α) pentru care relaţiile de trecere la un sistem cartezian ortogonal (ξ^α) verifică relaţii de tipul relaţiilor Cauchy-Riemann. (v. [8], cap. XV, § 15.3). Rezultă că metrica este de forma $G_{11} = G_{22} = 1/h^2$, $G_{12} = 0$. Introducînd mărimile fizice $\varepsilon_{\alpha\beta} = \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}/h^2$, $u^\alpha = h\tilde{u}^\alpha$, relaţiile (1.2.14) devin

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = h\,(\tilde{u}^\alpha_{.\,\beta} + \tilde{u}^\beta_{.\,\alpha}) + \tilde{u}^\alpha h_{,\beta} + \tilde{u}^\beta h_{,\alpha} - 2\tilde{u}^\gamma h_{,\gamma}\, \delta_{\alpha\beta}$$

adică

$$\widetilde{\varepsilon}_{11} = h\widetilde{u}^{1}_{.1} - \widetilde{u}^{2}\, h,_{2}$$

$$\widetilde{\varepsilon}_{22} = h\widetilde{u}^{2}_{.2} - \widetilde{u}^{1}\, h,_{1}$$

$$2\widetilde{\varepsilon}_{12} = (\widetilde{u}^{1}_{.2} + \widetilde{u}^{2}_{.1})\, h + \widetilde{u}^{1}\, h,_{2} + \widetilde{u}^{2} h,_{1} = u^{1}_{.2} + u^{2}_{.1} = (h\widetilde{u}^{1}),_{2} + (h\widetilde{u}^{2}),_{1}.$$

Ecuațiile de echilibru se deduc din (2.1.14) folosind valorile simbolurilor lui Christoffel $|{}^{\,1}_{11}| = |{}^{\,2}_{12}| = -h,_{1}/h$, $|{}^{\,2}_{22}| = |{}^{\,1}_{12}| = -h,_{2}/h, |{}^{\,2}_{11}| = h,_{2}/h, |{}^{\,1}_{22}| = h,_{1}/h$ și relațiile $\sigma^{\alpha\beta} = h^{2}t^{\alpha\beta}$, $F^{\beta} = hP^{\beta}$, ajungîndu-se la forma

$$\begin{aligned} &h\,(t^{11}_{.1} + t^{21}_{.2}) - (t^{11} - t^{22})\, h,_{1} - 2h,_{2}\, t^{12} + P^{1} = 0 \\ &h\,(t^{12}_{.1} + t^{22}_{.2}) - (t^{22} - t^{11})\, h,_{2} - 2h,_{1}\, t^{12} + P^{2} = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Aceste ecuații se găsesc în [8], cap. XV, § 15.3

Primită la redacție la 10 iulie 1967

Universitatea din București
Facultatea de matematică și mecanică,
Str. Academiei nr. 14

BIBLIOGRAFIE

1. A. SIGNORINI, *Transformazioni termoelastiche finite.* Ann. di matematica pura ed. appl.., IV, XXII, *1* (1943).
2. GH. VRĂNCEANU, *Lecții de geometrie diferențială.* vol. I, Editura didactică și pedagogică, București, 1962.
3. A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical elasticity.* Oxford, 1954.
4. J. N. SNEDDON, D. S. BERRY, *The classical theory of elasticity.* Springer-Verlag, 1958.
5. Н. Е. Кочин, *Векторное исчисление и начала тензорного исчисления*, Москва, 1961.
6. P. P. TEODORESCU, *Le problème plan de la théorie de l'élasticité en coordonnées curvilignes arbitraires.* I—V. Bull. de l'Acad. Pologne Série des Sci. Techn., X, *7*, *8* (1962).
7. P. P. TEODORESCU, *On the Plane Problem of Elasticity in Oblique Coordinates.* Rev. Méc. Appl., IV, *3*, 497 (1959).
8. P. P. TEODORESCU, *Probleme plane în teoria elasticității*, vol. II, Ed. Academiei, București, 1966.
9. С. А. Амбарцумян, *Теория анизотропных оболочек.* Москва, 1961.

ASUPRA MIŞCĂRILOR LINIARE ÎN MEDIILE POROASE NEOMOGENE

DE

Şt. I. GHEORGHIŢĂ

Se obţin mişcări plane staţionare în medii de tipul I sau II—I, plecînd de la mişcări plane în medii omogene sau neomogene de tipul I sau II.

1. Pentru studiul mişcărilor plane staţionare liniare în mediile poroase se folosesc şi metodele inversă şi semiinversă. Prin metoda inversă, de pildă, se caută a se determina mişcarea cînd se dau anumite relaţii între funcţiile de variabilă complexă care pot interveni, sau se caută a se deduce o mişcare dintr-o mişcare cunoscută; astfel s-a obţinut soluţia unor probleme de mişcări cu suprafaţă liberă, mediul poros presupunîndu-se omogen ([1], p. 202). Cazul mediilor neomogene şi al mişcării plane liniare fără suprafaţă liberă nu a fost studiat prin metoda inversă, şi aici vom arăta cum se poate obţine prin această metodă mişcări relative la mediile neomogene de tipul I sau de tipul II—I. Soluţiile se vor obţine prin intermediul reprezentărilor conforme şi a soluţiei unei probleme de mişcare într-un plan iniţial. Mai întîi ne vom ocupa de mişcări în medii neomogene de tipul I, obţinute pe baza unor mişcări în medii omogene, apoi de mişcări în medii de tipul I, obţinute plecînd de la o mişcare într-un mediu de tipul I, şi, în fine, de mişcări în medii de tipul II—I obţinute cu ajutorul unor mişcări în medii de tipul II.

2. Fie o mişcare într-un mediu omogen nelimitat, caracterizată prin singularităţile plasate în $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Liniile de curent vor avea ecuaţiile

$$\psi(x, y) = \text{const.} \tag{1}$$

şi ele vor reprezenta curbe închise sau deschise. Să luăm un arc *MN* de pe o linie de curent anumită, arc pe care să-l considerăm ca o tăietură, adică, din punct de vedere hidrodinamic, ca o placă de grosime neglijabilă care nu perturbă liniile de curent date de (1). Vom reprezenta conform exteriorul tăieturii pe exteriorul unei curbe închise, care ar figura în planul mişcării frontiera unui mediu impermeabil, prin transformarea

$$z = G(Z), \tag{2}$$

unde $z = x + iy$, $Z = X + iY$, trecerea de la planul z la planul variabilei Z putîndu-se efectua prin intermediul a mai multor reprezentări conforme; alegînd în mod convenabil parametrii de care depind aceste reprezentări conforme, putem face ca frontiera construită să fie cît mai apropiată de o frontieră dată. Potenţialul complex din planul fizic, $f(z)$, se va transforma prin (2) în potenţialul complex $f[G(z)] = F(Z)$, iar singularităţile se vor găsi acum în $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

Să observăm că metoda poate fi aplicată de mai multe ori pentru obţinerea mişcării din planul fizic care ne interesează, adică din planul Z. Printr-o primă reprezentare conformă

$$z = G_1(z_1) \tag{3}$$

facem ca o tăietură M_1N_1 de pe linia de curent $\psi(x, y) = C_1$ să se reprezinte conform pe exteriorul curbei simple închise Γ_1 din planul z_1. În planul z_1 vom considera pe linia de curent $\psi(x, y) = C_1$ două puncte M_2 şi N_2 pe care le presupunem într-una din situaţiile următoare : a) de o parte şi de alta a lui Γ_1; b) ambele pe Γ_1; c) $M_2 \in \Gamma_1$, $N_2 \notin \Gamma_1$ $(M_2 \not\equiv M_1$, $M_2 \not\equiv N_1)$; d) $M_2 \equiv N_1$ (sau $M_2 \equiv N_1$), $N_2 \notin \Gamma_1$. Exteriorul domeniului limitat de Γ_1 plus două tăieturi, de Γ_1 sau de Γ_1 plus o tăietură, îl vom reprezenta pe exteriorul curbei Γ_2 din planul z_2. În cazul a), de exemplu, Γ_2 va conţine punctele M_2', N_2', imaginile lui M_2 şi N_2, precum şi punctele M_1', $\widetilde{M}_1'$, N_1', şi $\widetilde{N}_1'$, ce se găseau în planul z_1 pe bordurile tăieturilor practicate. Trecerea de la planul z_1 la planul z_2 o vom efectua prin transformarea

$$z_1 = G_2(z_2), \tag{4}$$

şi în planul z_2 pe linia de curent $\psi(x_2, y_2) = C_1$ putem considera alte două puncte M_3 şi N_3, ş.a.m.d. De la ultimul plan z_n vom trece la planul Z printr-o transformare

$$z_n = G(Z), \tag{5}$$

şi deci vom putea obţine prin transformările $G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}, G$ legătura dintre z şi Z,

$$z = G_1(G_2(\ldots G(Z) \ldots)). \tag{6}$$

Exemplu. Să considerăm în planul z două izvoare pozitive de intensitate q, plasate în punctele de afixe b şi $\bar{b}$, deci potenţialul complex va fi

$$f(z) = \frac{q}{2\pi} \ln [(z - b)(z - \bar{b})].$$

Luăm tăietura $(-a, a)$, unde a este un număr real, şi să reprezentăm exteriorul ei pe exteriorul cercului $|Z| = a$. Singularităţile vor trece în punctele de afixe, respectiv b' şi $\bar{b}'$, astfel încît

$$2b = b' + a^2 b'^{-1}, \quad 2\bar{b} = \bar{b}' + a^2 \bar{b}'^{-1}$$

şi deci în planul Z vom avea potenţialul complex, abstracţie făcînd de o constantă reală,

$$(7)\quad F(Z) = \frac{q}{2\pi} \ln \{[Z-b'+a^2(Z^{-1}-b'^{-1})]\,[Z-b'+a^2(Z^{-1}-\bar{b}'^{-1})]\}.$$

Se recunoaşte uşor că (7) coincide cu rezultatul ce se obţine aplicînd teorema cercului.

3. Fie în mediul omogen nelimitat o incluziune impermeabilă limitată în planul mişcării de curba simplă închisă C. Pe ea vom avea (1), şi luînd o anumită valoare a constantei, să considerăm o tăietură pe linia de curent, tăietură practicată pornind de la C. Vom trece de la exteriorul lui C plus tăietura pe exteriorul unei curbe simple închise în planul Z, printr-o serie de reprezentări conforme succesive. Ţinînd seama de relaţia ce se stabileşte între z şi Z, din $f(z)$ se obţine potenţialul complex $F(Z)$ în planul fizic.

Exemplu. Fie un curent uniform la mari distanţe, paralel cu axa Ox, aşadar

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = V_0,$$

şi fie o placă de lăţime $2b$ aşezată normal pe axa reală, astfel încît ea se reprezintă prin tăietura $(ib, -ib)$. Să considerăm segmentul $[0, 2a]$ ca o tăietură, pe care s-o reprezentăm pe exteriorul cercului de rază a cu centrul în punctul $(a, 0)$. Ecuaţiile parametrice ale plăcii vor fi în ultimul plan, pentru partea de deasupra axei reale,

$$2^{1/2}(\xi + a) = -[y(y^2+4a^2)^{1/2} - y^2]^{1/2}, \quad 2^{1/2}\eta = 2^{1/2}y + \\ + [y(y^2+4a^2)^{1/2} + y^2]^{1/2},$$

unde y variază între 0 şi b. Potenţialul complex în planul fizic va fi

$$F(Z) = 2V_0 \left\{\left[\frac{1}{2}\left(Z + \frac{a^2}{Z}\right) + a\right]^2 + b^2\right\}^{1/2},$$

şi calculînd viteza complexă găsim

$$w = V_0\left(1 - \frac{a^2}{Z^2}\right)\left[\frac{1}{2}\left(Z + \frac{a^2}{Z}\right) + a\right]\left\{\left[\frac{1}{2}\left(Z + \frac{a^2}{Z}\right) + a\right]^2 + b^2\right\}^{-1/2}.$$

Să observă că pentru $Z = ai$ avem

$$w = 2a\,V_0(a^2 + b^2)^{-1/2},$$

şi cînd $b = 0$ găsim rezultatul clasic, adică $w = 2V_0$.

Viteza se anulează în punctele $Z = \pm a$, iar pe axa reală este mai mică decît în cazul $b = 0$. Pătratul vitezei pe cilindru este, în funcţie de unghiul la centru θ,

$$w\bar{w} = 16\,V_0^2\,a^2 \sin^2\theta \cos^4\frac{\theta}{2}\left(4a^2\cos^4\frac{\theta}{2} + b^2\right)^{-1},$$

şi se deduce că maximul vitezei se deplasează spre $\theta = 0$ faţă de cazul absenţei plăcii.

4. Dacă cele prezentate mai sus se aplică, evident, și mișcărilor staționare irotaționale ale fluidelor incompresibile, în schimb aplicarea la mediile de tipul II—I este specifică numai acestei părți a hidrodinamicii, putîndu-se aplica și altor capitole ale fizicii matematice, ca teoria propagării căldurii sau teoria electromagnetismului.

Să considerăm soluția exactă a unei probleme de mișcare relativă la un mediu de tipul II, cînd frontiera de separare a celor două medii este o curbă simplă închisă L_1 definită prin ecuațiile parametrice $x = U(\theta)$, $y = V(\theta)$. Pe o linie de curent $\psi(x, y) = C$ alegem un arc MN pe care îl presupunem a fi o tăietură, și să reprezentăm conform exteriorul acestei tăieturi pe exteriorul unei curbe simple închise E_1 din planul z_1. Atunci curba L_1, corespondenta curbei închise L prin reprezentarea conformă, va avea ecuațiile parametrice $x_1 = U_1(\theta), y_1 = V_1(\theta)$, ecuații care se pot scrie odată ce cunoaștem relația dintre planele z și z_1. În felul acesta obținem potențialele complexe ale mișcării în cele două domenii ocupate de medii omogene diferite în noul plan, în care există frontiera L_1 între cele două domenii, precum și frontiera E_1 care mărginește un domeniu impermeabil.

În mod similar cu cele arătate la § 3, putem porni de la o mișcare într-un mediu de tipul II—I și să obținem o mișcare într-un mediu de același tip.

Exemple. a) Fie în planul z mișcarea în prezența unei neomogeneități limitată de curba L dată de $|z| = a$, cînd la mari distanțe avem un curent uniform, deci cînd în domeniile D_1 ($|z| > a$) și D_2 ($|z| < a$) potențialele complexe vor fi, respectiv,

$$f_1(z) = V_0\left(z + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \cdot \frac{a^2}{z}\right), \quad f_2(z) = \frac{2V_0 k_2 z}{k_1 + k_2}. \tag{8}$$

Cum se observă din (8), liniile de curent în domeniul D_2 sînt paralele cu axa reală. Să luăm în D_2 pe linia de curent de ordonată b un segment MN de lățime $2c$ cu centrul pe axa imaginară. Considerăm segmentul ca o tăietură și reprezentăm exteriorul tăieturii pe exteriorul cercului de rază c, cu centrul în mijlocul lui MN. Legătura dintre z_1 și z se stabilește ușor :

$$z_1 = z - ib + [(z - ib)^2 - c^2]^{1/2}.$$

De aici rezultă ecuațiile parametrice ale lui L_1 ; notînd

$$A = [a^2(a^2 + 4b^2 - 4ab\sin\theta) - 2(b^2 + c^2)(a^2\cos 2\theta + 2ab\sin\theta)]^{1/2},$$

$$B = a^2\cos 2\theta + 2ab\sin\theta - c^2 - b^2,$$

avem

$$x_1 = a\cos\theta \pm [(A + B)/2]^{1/2}, \quad y_1 = a\sin\theta - b \pm [(A - B)/2]^{1/2},$$

unde $\theta \in (0, 2\pi)$.

Cît privește potențialele complexe, ele vor fi în planul z_1 :

$$F_1(z_1) = V_0\left[z_1^2 + c^2 z_1^{-1} + 2ib + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \cdot \frac{4a^2}{z_1 + c^2 z_1^{-1} + 2ib}\right],$$

$$F_2(z_1) = 2k_2(k_1 + k_2)^{-1}[z_1 + c^2 z_1^{-1} + 2ib]V_0.$$

Este de observat că forma liniilor de curent rămîne neschimbată în D_2, faţă de forma liniilor de curent cînd $k_2 = k_1$. Într-adevăr, notînd $w_0 = (1 - c^2 z_1^{-2}) V_0$,

$$w_1 = w_0\left(1 + \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} \cdot \frac{4a^2}{z_1 + c^2 z_1^{-1} + 2ib}\right),$$

$$w_2 = 2w_0 k_2 (k_1 + k_2)^{-1},$$

şi, de pildă, pentru z_1 real avem w_2 real, pe cînd $w_1 = u_1 + iv_1$, cu u_1 şi $v_1 \neq 0$.

b) Se ştie că dacă avem ca frontieră de separare între D_1 şi D_2 o elipsă E

$$x^2 s^{-2} + y^2 t^{-2} = 1,$$

iar la mari distanţe un curent uniform face unghiul α cu axa mare a elipsei, adică

$$\lim_{z \to \infty} w_1 = V_0 \, e^{-i\alpha},$$

atunci în interiorul elipsei avem ([1], p. 280)

$$f_2(z) = V_0 z (s + t)\left(\frac{\cos \alpha}{sk_1 - tk_2} + \frac{i \sin \alpha}{tk_1 - sk_2}\right),$$

adică în D_2 avem tot un curent uniform ce face cu axa reală unghiul β dat de relaţia

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{tk_2 + sk_1}{sk_2 + tk_1} \operatorname{tg} \alpha. \tag{9}$$

Putem obţine o mişcare într-un mediu de tipul II—I considerînd în D_2 un segment de dreaptă ce face unghiul β dat de (9) cu axa reală şi reprezentînd exteriorul acestui segment pe exteriorul unui domeniu $\mathcal{D}$ limitat de o curbă simplă închisă în planul Z. Atunci $\mathcal{D}$ va reprezenta un domeniu ocupat de un mediu impermeabil, iar E se va transforma într-o curbă E_1 ale cărei ecuaţii parametrice se pot scrie exprimînd pe Z în funcţie de z.

Primită la redacţie la 21 septembrie 1967

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, *Metode matematice în hidrogazodinamica subterană*. Ed. Academiei, Bucureşti, 1966.

DESPRE MODULELE DE CONVEXITATE ȘI NETEZIME UNIFORMĂ SLABĂ

DE

G. GODINI

În acest articol se introduc noi definiții pentru modulele de netezime uniformă slabă care să conducă la aceeași clasă de spații uniform netede slab.

Fie E un spațiu Banach real și fie $\delta_E(\varepsilon)$ și $\rho_E(\tau)$ modulele de convexitate uniformă și netezime respectiv, definite prin

$$\delta_E(\varepsilon) = \frac{1}{2} \inf_{\substack{\|x\|=\|y\|=1 \\ \|x-y\|\geqslant\varepsilon}} (2 - \|x + y\|), \qquad (0 < \varepsilon \leqslant 2)$$

$$\rho_E(\tau) = \frac{1}{2} \sup_{\|x\|=\|y\|=1} (\|x + \tau y\| + \|x - \tau y\| - 2). \qquad (\tau \geqslant 0).$$

Spațiul E se numește uniform convex dacă $\delta_E(\varepsilon) > 0$ pentru orice $\varepsilon > 0$ și uniform neted dacă $\lim\limits_{\tau\to 0} \frac{\rho_E(\tau)}{\tau} = 0$.

J. Lindenstrauss [1] a demonstrat că

$$\rho_E(\tau) = \sup_{0<\varepsilon\leqslant 2} \left[\frac{\tau\varepsilon}{2} - \delta_{E^*}(\varepsilon)\right] \tag{1}$$

$$\rho_{E^*}(\tau) = \sup_{0<\varepsilon\leqslant 2} \left[\frac{\tau\varepsilon}{2} - \delta_E(\varepsilon)\right]. \tag{2}$$

În [2], Gurarii a definit noi module de convexitate uniformă și netezime, care să conducă la aceeași clasă de spații uniform convexe și uniform netede astfel ca relațiile (1) și (2) să fie mai simple. El a definit :

— modulul de convexitate uniformă al spațiului Banach E funcția :

$$\beta_E(\omega) = \inf_{\substack{\|x\|=\|y\|=1 \\ \theta(L_x, L_y)\geqslant\omega}} \max_{0\leqslant t\leqslant 1} (1 - \|tx + (1 - t) y\|), \qquad 0 \leqslant \omega \leqslant 1,$$

ST. CERC. MAT., TOM. 20, Nr. 4, P. 475–480, BUCUREȘTI, 1968

unde L_z este subspațiul unidimensional generat de z, iar pentru două subspații P și Q din spațiul Banach E

$$\theta(P, Q) = \max\{\sup_{x\in P, \|x\|=1} \rho(x, Q), \sup_{y\in Q, \|y\|=1} \rho(y, P)\},$$

unde $\rho(z, R)$ este distanța de la punctul z la subspațiul R;

— modulul de netezime al spațiului E funcția

$$\gamma_E(\omega) = \inf_{\substack{x\in E, \|x\|=1 \\ \theta(P_1, P_2)\geqslant\omega}} \max\{1-\rho(x, P_1), \quad 1-\rho(x, P_2)\}, \qquad 0 \leqslant \omega \leqslant 1$$

unde P_1 și P_2 sînt subspații maximale din E.

Cu aceste definiții avem:

$$(1') \qquad \gamma_E(\omega) = \beta_{E^*}(\omega)$$

$$(2') \qquad \beta_E(\omega) = \gamma_{E^*}(\omega).$$

Fie f, g elemente din E^*, $\|f\| = \|g\| = 1$. D. F. Cudia [3] definește:

— modulul de convexitate uniformă slabă a spațiului E în f și direcția g funcția:

$$(3) \qquad \delta_E(\varepsilon, f, g) = \frac{1}{2} \inf_{\substack{\|x\|=\|y\|=1 \\ |g(x-y)|\geqslant\varepsilon}} [2 - |f(x+y)|], \qquad 0 < \varepsilon \leqslant 2;$$

— modulul de convexitate uniformă slabă a spațiului E în f funcția:

$$(4) \qquad \delta_E(\varepsilon, f) = \frac{1}{2} \inf_{\substack{\|x\|=\|y\|=1 \\ \|x-y\|\geqslant\varepsilon}} [2 - |f(x+y)|], \qquad 0 < \varepsilon \leqslant 2;$$

— modulul de convexitate uniformă slabă a spațiului E în direcția g funcția:

$$(5) \qquad \bar{\delta}_E(\varepsilon, g) = \frac{1}{2} \inf_{\substack{\|x\|=\|y\|=1 \\ |g(x-y)|\geqslant\varepsilon}} (2 - \|x+y\|), \qquad 0 < \varepsilon \leqslant 2.$$

Spațiul E se numește slab uniform convex în f în direcția g, slab uniform convex în f sau uniform convex în direcția g dacă modulele corespunzătoare sînt pozitive pentru $0 < \varepsilon \leqslant 2$.

În [4] s-au definit module de netezime duale modulelor de convexitate uniformă slabă (3), (4), (5), în sensul că sînt legate printr-o relație de tipul (1), (2) în felul următor: Fie x, $y \in E$, $\|x\| = \|y\| = 1$; vom numi:

— modul de netezime slabă al spațiului E în x și direcția y funcția:

$$\rho_E(\tau, x, y) = \frac{1}{2}(\|x+\tau y\| + \|x - \tau y\| - 2), \qquad \tau \geqslant 0;$$

— modul de netezime uniformă al spaţiului E în x funcţia :

$$\rho_E(\tau, x) = \frac{1}{2} \sup_{\|y\|=1} (\|x + \tau y\| + \|x - \tau y\| - 2), \qquad \tau \geqslant 0;$$

— modul de netezime uniformă slabă al spaţiului E în direcţia y funcţia :

$$\bar{\rho}_E(\tau, y) = \frac{1}{2} \sup_{\|x\|=1} (\|x + \tau y\| + \|x - \tau y\| - 2), \qquad \tau \geqslant 0.$$

Spaţiul E se numeşte slab neted în x în direcţia y, uniform neted în x sau slab uniform neted în direcţia y dacă limita modulelor corespunzătoare împărţite la τ tinde către zero cînd τ tinde către zero.

Următoarele formule sînt valabile :

$$\rho_{E^*}(\tau, f, g) = \sup_{0<\varepsilon\leqslant 2} \left[\frac{\tau\varepsilon}{2} - \delta_E(\varepsilon, f, g)\right]$$

$$\rho_{E^*}(\tau, f) = \sup_{0<\varepsilon\leqslant 2} \left[\frac{\tau\varepsilon}{2} - \delta_E(\varepsilon, f)\right]$$

$$\bar{\rho}_{E^*}(\tau, g) = \sup_{0<\varepsilon\leqslant 2} \left[\frac{\tau\varepsilon}{2} - \bar{\delta}_E(\varepsilon, g)\right]$$

ca şi formulele :

$$\rho_E(\tau, x, y) = \sup_{0<\varepsilon\leqslant 2} \left[\frac{\tau\varepsilon}{2} - \delta_{E^*}(\varepsilon, Qx, Qy)\right]$$

$$\rho_E(\tau, x) = \sup_{0<\varepsilon\leqslant 2} \left[\frac{\tau\varepsilon}{2} - \delta_{E^*}(\varepsilon, Qx)\right]$$

$$\bar{\rho}_E(\tau, y) = \sup_{0<\varepsilon\leqslant 2} \left[\frac{\tau\varepsilon}{2} - \bar{\delta}_{E^*}(\varepsilon, Qy)\right],$$

unde Q este aplicaţia canonică de scufundare a lui E în E^{**}.

În [5] s-a dat o nouă definiţie a modulelor de convexitate uniformă slabă care să conducă la aceeaşi clasă de spaţii uniform convexe slab, astfel : pentru $f, g \in E^*$, $\|f\| = \|g\| = 1$ vom numi :

— modul de convexitate uniformă slabă a spaţiului E în f şi direcţia g următoarea funcţie :

$$\beta_E(\omega, f, g) = \inf_{\substack{\|x\|=\|y\|=1 \\ \theta(L_x, L_y, g)\geqslant\omega}} \max_{0\leqslant t\leqslant 1} (1 - |f(tx + (1-t)y)|), \qquad 0 < \omega \leqslant 1,$$

unde

$$\theta(L_x, L_y, g) = \max(\rho(x, L_y, g), \rho(y, L_x, g))$$

şi

$$\rho(x, L_y, g) = \inf_{|\alpha|\leqslant 1} |g(x - \alpha y)|;$$

— modul de convexitate uniformă slabă în f funcţia

$$\beta_E(\omega, f) = \inf_{\substack{\|x\|=\|y\|=1\\ \theta(L_x,\, L_y)\geqslant\omega}} \max_{0\leqslant t\leqslant 1} (1 - |f(tx + (1-t)y)|), \qquad 0 < \omega \leqslant 1;$$

— modul de convexitate uniformă slabă a spaţiului E în direcţia g următoarea funcţie :

$$\bar{\beta}_E(\omega, g) = \inf_{\substack{\|x\|=\|y\|=1\\ \theta(L_x,\, L_y,\, g)\geqslant\omega}} \max_{0\leqslant t\leqslant 1} (1 - \|tx + (1-t)y\|), \qquad 0 < \omega \leqslant 1.$$

În această notă vom da noi definiţii pentru modulele de netezime uniformă slabă care să fie legate de modulele corespunzătoare de convexitate uniformă slabă printr-o relaţie de tipul (1′), (2′).

DEFINIŢIE. Fie P_1, P_2 subspaţii maximale din E determinate respectiv de f_1, $f_2 \in E^*$, $\|f_1\| = \|f_2\| = 1$, adică $P_1 = \{z \in E \mid f_i(z) = 0\}$ $i = 1, 2$ şi fie

$$\theta(P_1, P_2, y) = \max\{\inf_{|\alpha|\leqslant 1} |f_1(y) - \alpha f_2(y)|, \inf_{|\alpha|\leqslant 1} |f_2(y) - \alpha f_1(y)|\}.$$

Pentru $x, y \in E$, $\|x\| = \|y\| = 1$ se numeşte :

— modul de netezime slabă a spaţiului E în x şi direcţia y funcţia :

$$\gamma_E(\omega, x, y) = \inf_{\theta(P_1,\, P_2,\, y)\geqslant\omega} \max\{1 - \rho(x, P_1), 1 - \rho(x, P_2)\},$$

unde P_1, P_2 sînt subspaţii maximale ale lui E;

— modul de netezime uniformă a spaţiului E în x funcţia :

$$\gamma_E(\omega, x) = \inf_{\theta(P_1,\, P_2)\geqslant\omega} \max\{1 - \rho(x, P_1), 1 - \rho(x, P_2)\}$$

P_1, P_2 fiind luaţi ca mai sus ;

— modul de netezime uniformă slabă a spaţiului E în direcţia y, funcţia :

$$\bar{\gamma}_E(\omega, y) = \inf_{\substack{\|x\|=1\\ \theta(P_1,\, P_2,\, y)\geqslant\omega}} \max\{1 - \rho(x, P_1), 1 - \rho(x, P_2)\}.$$

Avem atunci următoarele evaluări :

TEOREMA 1. *Pentru orice spaţiu Banach E*

$$\gamma_E(\omega, x, y) = \beta_{E^*}(\omega, Qx, Qy), \tag{6}$$
$$\beta_E(\omega, f, g) = \gamma_{E^*}(\omega, f, g), \tag{6'}$$

$$\gamma_E(\omega, x) = \beta_{E^*}(\omega, Qx), \tag{7}$$
$$\beta_E(\omega, f) = \gamma_{E^*}(\omega, f), \tag{7'}$$

$$\bar{\gamma}_E(\omega, y) = \bar{\beta}_{E^*}(\omega, Qy), \tag{8}$$
$$\bar{\beta}_E(\omega, g) = \bar{\gamma}_{E^*}(\omega, g). \tag{8'}$$

Demonstraţie. Vom da demonstraţia formulei (6). Fie $\varepsilon > 0$ dat şi $0 \leqslant \omega \leqslant 1$. Există atunci două subspaţii maximale P_1, P_2 în E cu $\theta(P_1, P_2, y) \geqslant \omega$ şi astfel ca

$$\max\{1 - \rho(x, P_1), 1 - \rho(x, P_2)\} \leqslant \gamma_E(\omega, x, y) + \varepsilon.$$

Fie $f_1, f_2 \in E^*$, $\|f_1\| = \|f_2\| = 1$ astfel ca $P_i = \{z \in E / f_i(z) = 0\}$ şi $f_i(x) = \rho(x, P_i)$, $(i = 1, 2)$. Avem

$$f_1(x) = \rho(x, P_1) \geqslant 1 - \gamma_E(\omega, x, y) - \varepsilon$$

$$f_2(x) = \rho(x, P_2) \geqslant 1 - \gamma_E(\omega, x, y) - \varepsilon$$

şi deci pentru orice $0 \leqslant t \leqslant 1$, $tf_1(x) + (1 - t) f_2(x) \geqslant 1 - \gamma_E(\omega, x, y) - \varepsilon$. Dar $\theta(L_{f_1}, L_{f_2}, Qy) = \max\{\rho(f_1, L_{f_2}, Qy), \rho(f_2, L_{f_1}, Qy)\} =$

$$= \max\{\inf_{|\alpha| \leqslant 1} |Qy(f_1 - \alpha f_2)|, \inf_{|\alpha| \leqslant 1} |Qy(f_2 - \alpha f_1)| =$$

$$= \max\{\inf_{|\alpha| \leqslant 1} |f_1(y) - \alpha f_2(y)|, \inf_{|\alpha| \leqslant 1} |f_2(y) - \alpha f_1(y)| = \theta(P_1, P_2, y) \geqslant \omega.$$

Deci

$$\beta_{E^*}(\omega, Qx, Qy) \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} (1 - |Qx(tf_1 + (1 - t) f_2)|) =$$

$$= \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} (1 - |tf_1(x) + (1 - t) f_2(x)|) \leqslant \gamma_E(\omega, x, y) + \varepsilon.$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar ales, avem

$$\beta_{E^*}(\omega, Qx, Qy) \leqslant \gamma_E(\omega, x, y). \tag{9}$$

Reciproc, fie $\varepsilon > 0$ şi $0 \leqslant \omega \leqslant 1$. Există atunci $f_1, f_2 \in E^*$, $\|f_1\| = \|f_2\| = 1$ astfel ca $\theta(L_{f_1}, L_{f_2}, Qy) \geqslant \omega$ şi

$$\begin{aligned} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} (1 - |Qx(tf_1 + (1 - t) f_2)|) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} (1 - |tf_1(x) + \\ + (1 - t) f_2(x)|) \leqslant \beta_{E^*}(\omega, Qx, Qy) + \varepsilon. \end{aligned} \tag{10}$$

Fie $P_1 = \{z \in E \mid f_1(x) = 0\}$, $P_2 = \{z \in E \mid f_2(z) = 0\}$. Atunci $\theta(P_1, P_2, y) = \theta(L_{f_1}, L_{f_2}, Qy) \geqslant \omega$ şi deci

$$\max\{1 - \rho(x, P_1), 1 - \rho(x, P_2)\} \geqslant \gamma_E(\omega, x, y).$$

Dar $|f_1(x)| = \rho(x, P_1)$, $|f_2(x)| = \rho(x, P_2)$ şi din (10) avem

$$1 - |f_1(x)| \leqslant \beta_{E^*}(\omega, Qx, Qy) + \varepsilon$$

$$1 - |f_2(x)| \leqslant \beta_{E^*}(\omega, Qx, Qy) + \varepsilon.$$

Rezultă

$$\gamma_E(\omega, x, y) \leqslant \max\{1 - |f_1(x)|, 1 - |f_2(x)|\} \leqslant \beta_{E^*}(\omega, Qx, Qy) + \varepsilon.$$

Cum ε a fost arbitrar, avem $\gamma_E(\omega, x, y) \leqslant \beta_{E^*}(\omega, Qx, Qy)$ care împreună cu (9) ne dă relaţia (6).

Relaţia (6′) se demonstrează asemănător.

Demonstraţia formulelor (7), (7′), (8), (8′) se face folosind părţi din demonstraţiile teoremei 2 [2] şi a relaţiei (6).

Din relaţia (6), teorema 6 [5] şi corolarul 1′ (a) [4], rezultă :

TEOREMA 2. *Pentru ca un spaţiu Banach E să fie slab neted în x în direcţia y este necesar şi suficient ca* $\gamma_E(\omega, x, y) > 0$ *pentru* $0 < \omega \leqslant 1$.

Din relaţia (7), teorema 2 [5] şi corolarul 1′ (b) [4] rezultă :

TEOREMA 3. *Pentru ca un spaţiu Banach E să fie uniform neted în x este necesar şi suficient ca* $\gamma_E(\omega, x) > 0$ *pentru* $0 < \omega \leqslant 1$.

Din relaţia (8), teorema 4 [5] rezultă :

TEOREMA 4. *Pentru ca un spaţiu Banach E să fie slab uniform neted în direcţia y, este necesar şi suficient ca* $\overline{\gamma}_E(\omega, y) > 0$ *pentru* $0 < \omega \leqslant 1$.

Prin teoremele 2, 3, 4 obţinem o nouă caracterizare a spaţiilor netede slab.

Primită la redacţie la 25 septembrie 1967

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. J. Lindenstrauss, *On the modulus of smoothness and divergent series in Banach spaces.* The Michigan Math. Journal, **10** (1963).
2. В. И. Гурарий, *О модулях выпуклости банаховых пространств.* ДАН СССР, **161**, 5 (1965).
3. D. F. Cudia, *On the localization and directionalization of uniform convexity.* Bull. Amer. Math. Soc., **69** (1963).
4. G. Godini, *On the localization and directionalization of uniform convexity and uniform smootheness.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **10** (1966).
5. G. Godini, *Despre modulele de convexitate uniformă slabă.* St. cerc. mat., **20** (1968).

MODELUL INFORMAȚIONAL AL TEORIEI ÎNVĂȚĂRII

DE

SILVIU GUIAȘU

În această lucrare se studiază un model informațional al teoriei învățării, un sistem instruibil, format dintr-un organism, un experimentator și un ansamblu de stimuli, fiind considerat ca un sistem de comunicație, căruia i se aplică rezultate ale teoriei informației. Se examinează desfășurarea în timp a procesului de învățare și se dau condiții necesare și suficiente pentru ca acest proces de învățare a organismului în cadrul unui sistem instruibil, să se încheie.

§ 1. INTRODUCERE

Prin teoria învățării se înțelege studiul procesului de învățare în general. Fiind supus unor anumiți stimuli, care rămîn constanți sau variază în timp, un anumit subiect sau „organism", dă o serie de răspunsuri, într-o serie de experiențe, fiecare răspuns fiind însoțit de un anumit rezultat, ca urmare a acțiunii „experimentatorului", sau mediului, asupra subiectului. Acest rezultat poate fi o recompensă sau o pedeapsă dată de un experimentator, o întărire (reinforcement) în cazul unei mașini, o reacție, o modificare în mediul înconjurător sau orice altă schimbare care depinde de natura experienței considerate. La procesul de învățare participă deci, în general, trei elemente : ansamblul de stimuli, care poate eventual rămîne constant în timp, organismul care învață sau este învățat, conștient sau nu, și experimentatorul, modelul acțiunilor externe asupra organismului. Organismul nu știe să dea de la început răspunsul potrivit și după fiecare experiență el dă cu o anumită probabilitate un răspuns din mulțimea răspunsurilor posibile. Procesul de învățare constă dintr-un șir de experiențe succesive, în cadrul lor organismul învățînd să dea răspunsul sau răspunsurile potrivite. În cursul procesului de învățare, în fiecare experiență probabilitatea răspunsului se schimbă pe baza răspunsului în experiența precedentă și pe baza acțiunii experimentato-

ST. CERC. MAT., TOM. 20, Nr. 4, P. 481–496, BUCUREȘTI, 1968

rului asupra organismului între experienţa precedentă şi cea prezentă. Un model pentru învăţare constă deci dintr-un şir de experienţe, fiecare experienţă conducînd la un răspuns şi la un rezultat care-l urmează şi care împreună modifică probabilităţile respective.

În cele ce urmează, vom da un model informaţional al teoriei învăţării. Influenţa teoriei informaţiei în cadrul acestui model va consta din două părţi : a) procesul de învăţare este privit, împreună cu organismul şi experimentatorul care participă la acest proces ca un sistem de comunicaţie cu conexiune inversă (feed-back), ceea ce permite stabilirea în detaliu a desfăşurării procesului de învăţare şi reducerea acestui proces la procesele cunoscute ale teoriei probabilităţilor, în speţă la lanţurile Markov ; b) examinarea procesului de învăţare se face cu ajutorul entropiei, conceptul fundamental al teoriei informaţiei, ceea ce permite un studiu global al acestui proces de învăţare. În acest fel, rezultatele teoriei clasice a învăţării, de tip Bush-Mosteller, furnizînd legi de evoluţie pentru probabilităţile răspunsurilor pe care le dă organismul în timpul procesului de învăţare, se pot exprima şi cu ajutorul entropiei spaţiului răspunsurilor, în schimb, în modelul informaţional, se pun în evidenţă legi de evoluţie a acestei entropii globale care caracterizează procesul de învăţare, făcîndu-se abstracţie de evoluţia în parte a probabilităţilor răspunsurilor posibile, ceea ce nu îşi găseşte locul în teoria clasică a învăţării de care aminteam mai sus.

§ 2. PROCESUL DE INVĂŢARE. CAZUL STIMULILOR CONSTANŢI

Să considerăm un organism care este pus în anumite condiţii stabile, invariante în timp, şi care învaţă să dea răspunsul, sau răspunsurile potrivite, printr-un şir de experienţe succesive, orientîndu-se sau fiind orientat în cursul procesului de învăţare de către rezultatele experienţelor sale succesive, rezultate puse în evidenţă de către un experimentator.

Fie A mulţimea răspunsurilor posibile ale organismului şi fie O mulţimea rezultatelor, ambele mulţimi fiind presupuse finite, dar nu neapărat cu acelaşi număr de elemente.

A defini un proces de învăţare, a caracteriza un sistem instruibil, înseamnă a cunoaşte următoarele probabilităţi :

$p_1(a)$ — probabilitatea răspunsului $a \in A$ la momentul iniţial, mai precis probabilitatea ca organismul să dea răspunsul $a \in A$ la momentul iniţial ;

$p_n(o \mid a)$ — probabilitatea ca să aibă loc rezultatul $o \in O$ în cadrul experienţei a n-a, dacă organismul a dat răspunsul $a \in A$ în cursul acestei experienţe, aceasta pentru orice n, $a \in A$, $o \in O$. $p_n(o \mid a)$ este o probabilitate pe O condiţionată de $a \in A$, deci $p_n(o \mid a)$ reprezintă pentru fiecare n o matrice de probabilităţi.

$p_{n+1}(a' \mid (a, o))$ — probabilitatea răspunsului $a' \in A$ după efectuarea experienţei a n-a, condiţionată de perechea răspuns-rezultat (a, o), $a \in A$, $o \in O$; aceasta deoarece după cum s-a subliniat şi în introducere, în procesul de învăţare, fiecare experienţă conduce la un răspuns şi la un rezultat care-l urmează şi care *împreună* modifică probabilităţile răspunsurilor. $p_{n+1}(a' \mid (a, o))$ este o probabilitate pe A condiţionată de perechea $a, o)$, pentru orice $a \in A$, $o \in O$.

Avem evident

$$\sum_{a \in A} p_1(a) = 1$$

şi oricare ar fi $n \geqslant 1$, $a \in A$, $o \in O$,

$$\sum_{o \in O} p_n(o \mid a) = 1\,; \quad \sum_{a' \in A} p_{n+1}(a' \mid (a, o)) = 1.$$

Procesul de învățare se va desfășura în felul următor : La momentul inițial, răspunsurile pe care le poate da organismul au probabilitățile $p_1(a)$, $a \in A$. Efectuînd o primă experiență, organismul dă un răspuns $a \in A$ cu probabilitatea $p_1(a)$, care este urmat de rezultatul $o \in O$ cu o anumită probabilitate $p_1(o \mid a)$, iar răspunsul a împreună cu rezultatul o din această experiență modifică probabilitățile răspunsurilor, probabilitatea unui răspuns oarecare $\acute{a} \in A$, condiționată de perechea (a, o) fiind $p_2(a' \mid (a, o))$. La fel se întîmplă și în experiențele următoare, și în experiența a n-a de exemplu, organismul dă un răspuns a cu o anumită probabilitate, influențată de toate experiențele anterioare, răspuns care este urmat cu probabilitatea $p_n(o \mid a)$ de rezultatul o, acest răspuns a împreună cu rezultatul o modificînd probabilitățile răspunsurilor pe care le poate da organismul, ca urmare a experienței a n-a, probabilitatea unui răspuns arbitrar $\acute{a} \in A$, condiționată de perechea răspuns-rezultat (a, o) fiind $p_{n+1}(a' \mid (a, o))$.

Ansamblul format din organism și experimentator, în cadrul procesului de învățare, îl vom numi, pe scurt, *sistem instruibil*.

DEFINIȚIA 1. *Se numește sistem instruibil, obiectul matematic*

$$\{A,\ O,\ p_1(a),\ p_n(o \mid a),\ p_{n+1}(a' \mid (a, o))\}$$

definit de două mulțimi finite : A — *mulțimea răspunsurilor* ; O — *mulțimea rezultatelor* ; *și de probabilitățile* : $p_1(a)$ — *probabilitatea răspunsului* $a \in A$ *la momentul inițial* ; $p_n(o \mid a)$ — *probabilitatea ca în experiența* n *răspunsul* $a \in A$ *să fie urmat de rezultatul* $o \in A$; $p_{n+1}(a' \mid (a, o))$ — *probabilitatea răspunsului* $a' \in A$ *după experiența* n *dacă în experiența* n *a avut loc perechea răspuns-rezultat* (a, o), *toate acestea pentru orice* $n \geqslant 1$, $a \in A$, $a' \in A$, $o \in O$.

Înainte de a merge mai departe, este necesar să facem cîteva convenții. Astfel, dacă avem două mulțimi finite X, Y și o probabilitate $p(x)$ pe X, adică $p(x) \geqslant 0$, $\sum_{x \in X} p(x) = 1$, atunci o probabilitate condiționată $p(y \mid x) \geqslant 0$, $\sum_{y \in Y} p(y \mid x) = 1$ pentru orice $x \in X$ definește o corespondență aleatoare între X și Y, pe care o vom scrie

$$X \xrightarrow{p(y \mid x)} Y$$

și care definește o probabilitate pe Y definită de relația

$$p(y) = \sum_{x \in X} p(x)\, p(y \mid x)\,.$$

Probabilitatea condiţionată $p(y \mid x)$, $x \in X$, $y \in Y$, defineşte de asemenea o corespondenţă aleatoare între X şi $X \times Y$ pe care o notăm

$$X \xrightarrow{p(y \mid x)} X \times Y$$

care induce pe $X \times Y$ probabilitatea

$$p(x, y) = p(x) p(y \mid x).$$

Cu aceste precizări, diagrama experienţei n este

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p_n(o \mid a)"] & A \times O \arrow[d, "p_{n+1}(a' \mid (a, o))"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Diagrama 1

iar procesul de învăţare se va reprezenta prin diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p_1(o \mid a)"] & A \times O \arrow[d, "p_2(a' \mid (a, o))"] & & \\ & A \arrow[r, "p_2(o \mid a)"] & A \times O \arrow[d, "p_3(a' \mid (a, o))"] & \\ & & A \arrow[r, dashed] & {} \end{tikzcd}$$

Diagrama 2

TEOREMA 1. *Fiind dat sistemul instruibil*

$$\{A, O, p_1(a), p_n(o \mid a), p_{n+1}(a' \mid (a, o))\}$$

procesul de învăţare se reduce la un lanţ Markov pe mulţimea răspunsurilor A.

Demonstraţie. Din diagrama 1 se vede că dacă cunoaştem pe $p_1(a)$, $p_n(o \mid a)$, $p_{n+1}(a' \mid (a, o))$, pentru orice $o \in O$, $a \in A$, $a' \in A$, $n \geqslant 1$, putem calcula probabilităţile perechilor răspuns-rezultat după fiecare experienţă, şi anume

$$p_n(a, o) = p_n(o \mid a) p_n(a). \tag{1}$$

Probabilitatea răspunsurilor după experienţa a n-a va fi atunci

$$p_{n+1}(a') = \sum_{(a, o) \in A \times O} p_n(a, o) \; p_{n+1}(a' \mid (a, o)). \tag{2}$$

Din (1) şi (2), notînd

$$p_{n+1}(a' \mid a) = \sum_{o \in O} p_n(o \mid a) p_{n+1}(a' \mid (a, o)) \tag{3}$$

obţinem

$$p_{n+1}(a') = \sum_{a \in A} p_n(a) p_{n+1}(a' \mid a)$$

$p_{n+1}(a' \mid a)$ reprezintă probabilitatea de trecere de la răspunsul a la răspunsul a' după experiența a n-a. $p_{n+1}(a' \mid a)$ este într-adevăr o probabilitate pe A, pentru orice $a \in A$, deoarece

$$\sum_{a'\in A} p_{n+1}(a' \mid a) = \sum_{o\in O} p_n(o \mid a)\Big(\sum_{a'\in A} p_{n+1}(a' \mid (a,\ o))\Big) = \sum_{o\in O} p_n(o \mid a) = 1$$

oricare ar fi $a \in A$.

Dacă ne concentrăm deci atenția asupra spațiului răspunsurilor, evoluția în timp a răspunsurilor reprezintă un lanț Markov, cu A drept mulțime a stărilor, cu probabilitatea inițială a acestor stări $p_1(a)$, și cu probabilitățile de trecere depinzînd de timp, $p_{n+1}(a' \mid a)$.
Se vede că această evoluție a răspunsurilor se obține prin închiderea diagramei 2, care devine

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "p_1(o \mid a)"] \arrow[dr, "p_2(a' \mid a)"'] & A\times O \arrow[d, "p_2(a' \mid (a,o))"] & & \\
& A \arrow[r, "p_2(o \mid a)"] \arrow[dr, "p_3(a' \mid a)"'] & A\times O \arrow[d, "p_3(a' \mid (a,o))"] & \\
& & A \arrow[r, dashed] \arrow[dr, dashed] & {} \\
& & & {}
\end{tikzcd}$$

Diagrama 3

Cu aceasta teorema 1 este demonstrată, q.e.d.

În teoria învățării prezintă cea mai mare importanță cazul semistaționar, în care probabilitatea răspunsurilor, condiționată de perechile răspuns-rezultat sînt invariante în timp, mai precis cazul în care

$$p_{n+1}(a' \mid (a,\ o)) = p(a' \mid (a,\ o)) \tag{4}$$

oricare ar fi n. Diagrama procesului de învățare în acest caz va fi

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "p_1(o \mid a)"] \arrow[dr, "p_2(a' \mid a)"'] & A\times O \arrow[d, "p(a' \mid (a,o))"] & & \\
& A \arrow[r, "p_2(o \mid a)"] \arrow[dr, "p_3(a' \mid a)"'] & A\times O \arrow[d, "p(a' \mid (a,o))"] & \\
& & A \arrow[r, dashed] \arrow[dr, dashed] & {} \\
& & & {}
\end{tikzcd}$$

Diagrama 4

în care caz, conform relaţiei (3), avem

$$p_{n+1}(a' \mid a) = \sum_{o \in O} p_n(o \mid a)\, p(a' \mid (a, o)). \tag{5}$$

Trei subcazuri ale acestui caz semistaţionar, interesante din punctul de vedere al corelaţiei dintre organism şi experimentator în procesul de învăţare, se impun atenţiei, şi anume :

a. *Evenimente controlate de experimentator.* În acest caz, organismul nu participă la procesul de învăţare, ceea ce revine la a spune că în fiecare experienţă, probabilitatea rezultatelor nu mai este condiţionată de răspunsurile organismului, adică

$$p_n(o \mid a) = p_n(o) \tag{6}$$

oricare ar fi $a \in A$ şi $o \in O$. Se poate întîmpla în acest caz ca să avem şi

$$p_n(o) = p(o) \tag{7}$$

oricare ar fi $n \geqslant 1$. Exemplul clasic al acestui caz este cel al şoarecelui lui Shannon, care într-un labirint în formă de T, este pus în situaţia de a o lua la dreapta sau la stînga, evenimente pe care să le notăm cu a_1 şi respectiv a_2. Fie o_1 şi o_2 rezultatele care constau în a pune o recompensă la dreapta sau la stînga, cu probabilităţile corespunzătoare $p(o_1)$ şi $p(o_2)$. Fie că şoarecele o ia la dreapta, fie că o ia la stînga, rezultatele o_1 şi o_2 au aceleaşi probabilităţi, organismul neparticipînd la procesul de învăţare.

În acest caz al evenimentelor controlate de către experimentator, din (5) şi (6) avem

$$p_{n+1}(a' \mid a) = \sum_{o \in O} p_n(o)\, p(a' \mid (a, o)) \tag{8}$$

iar în cazul în care avem şi (7), rezultă din (8) că

$$p(a' \mid a) = \sum_{o \in O} p(o)\, p(a' \mid (a, o)) \tag{9}$$

procesul de învăţare reducîndu-se la un lanţ Markov omogen, definit pe mulţimea A cu probabilităţile iniţiale $p_1(a)$ şi cu probabilităţile de trecere staţionare $p(a' \mid a)$.

b. *Evenimente controlate de organism.* În acest caz evenimentul (a, o) are loc ori de cîte ori are loc a şi deci (a, o) se identifică cu a, probabilităţile evenimentelor (a, o) fiind identice cu probabilităţile evenimentelor a, în acest caz experimentatorul neparticipînd la procesul de învăţare. În acest caz deci $O = A$ şi

$$p_n(a, o) = \begin{cases} p_n(a) & \text{dacă} \quad o = a \\ 0 & \text{dacă} \quad o \neq a \end{cases}.$$

Să considerăm din nou exemplul cu şoarecele lui Shannon. Dacă şoarecele o ia la dreapta, deci dacă are loc evenimentul a_1, el va găsi întotdeauna o recompensă, dacă şoarecele o ia la stînga, deci dacă are loc evenimentul a_2, el nu va găsi niciodată o recompensă.

Deci, în acest caz,

$$p_n(o \mid a) = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad o = a \\ 0 & \text{dacă} \quad o \neq a \end{cases} \tag{10}$$

și din (5) obținem

$$p(a' \mid a) = p(a' \mid (a, a))$$

procesul de învățare reducîndu-se din nou la un lanț Markov omogen.

c. *Evenimente controlate și de organism și de experimentator.* Acest caz, cel mai interesant, vine să presupună că în procesul de învățare participă și organismul și experimentatorul, iar probabilitatea rezultatelor condiționată de răspunsuri este constantă de la un experiment la altul, adică

$$p_n(o \mid a) = p(o \mid a) \tag{11}$$

și deci din (5), pe baza lui (11), rezultă

$$p(a' \mid a) = \sum_{o \in O} p(o \mid a)\, p(a' \mid (a, o)) \tag{12}$$

procesul de învățare fiind deci tot un lanț Markov omogen, cu probabilitățile de trecere staționare date de relația (12).

§ 3. PROCESUL DE ÎNVĂȚARE. CAZUL STIMULILOR VARIABILI

Să considerăm acum problema mult mai generală a unui organism care fiind supus la anumiți stimuli care variază în timp, învață să dea răspunsul potrivit sau răspunsurile potrivite, printr-un șir de experiențe succesive, orientîndu-se sau fiind orientat în acest proces de învățare de rezultatele experiențelor sale, rezultate puse în evidență de către un experimentator. Variația în timp a stimulilor complică procesul de învățare, în cadrul căruia vor interveni acum și stimulii alături de răspunsurile organismului și de rezultatele experimentatorului.

DEFINIȚIA 2. *Se numește sistem instruibil cu stimuli variabili, obiectul matematic*

$$\{S,\ A,\ O,\ p_1(s),\ p_1(a \mid s),\ p_n(o \mid (s, a)),\ p_{n+1}((s', a') \mid (s, a, o))\}$$

compus din trei mulțimi finite: A — *mulțimea răspunsurilor*, S — *mulțimea stimulilor*, O — *mulțimea rezultatelor*, *și din probabilitățile*: $p_1(s)$ — *probabilitatea stimulului* $s \in S$ *în timpul primei experiențe*, $p_1(a \mid s)$ — *probabilitatea răspunsului* $a \in A$ *în prima experiență, condiționată de stimulul* $s \in S$, $p_n(o \mid (s, a))$ — *probabilitatea rezultatului* $o \in O$ *în experiența* n *condiționată de stimulul* $s \in S$ *și de răspunsul* $a \in A$ *din aceeași experiență*, $p_{n+1}((s', a') \mid (s, a, o))$ — *probabilitatea stimulului* $s' \in S$ *și răspunsului* $a' \in A$ *după experiența* n *dacă în această experiență a avut loc stimulul* $s \in S$ *răspunsul* $a \in A$ *și rezultatul* $o \in O$, *toate acestea pentru fiecare* $a \in A$, $a' \in A$, $s \in S$, $s' \in S$, $o \in O$ *și* $n = 1, 2, \ldots$

Pentru a da diagrama procesului de învăţare într-un asemenea sistem instruibil cu stimuli variabili, este necesar să mai facem o precizare. Dacă avem două mulţimi finite X, Y şi o probabilitate $p(x, y)$ pe $X \times Y$, adică

$$p(x, y) \geqslant 0, \ (x \in X, \ y \in Y), \ \sum_{x \in X,\, y \in Y} p(x, y) = 1$$

vom nota cu Σ corespondenţa aleatoare dintre $X \times Y$ şi Y, care face ca unui element $(x, y) \in X \times Y$ să-i corespundă proiecţia sa pe Y, adică y şi care induce pe Y probabilitatea

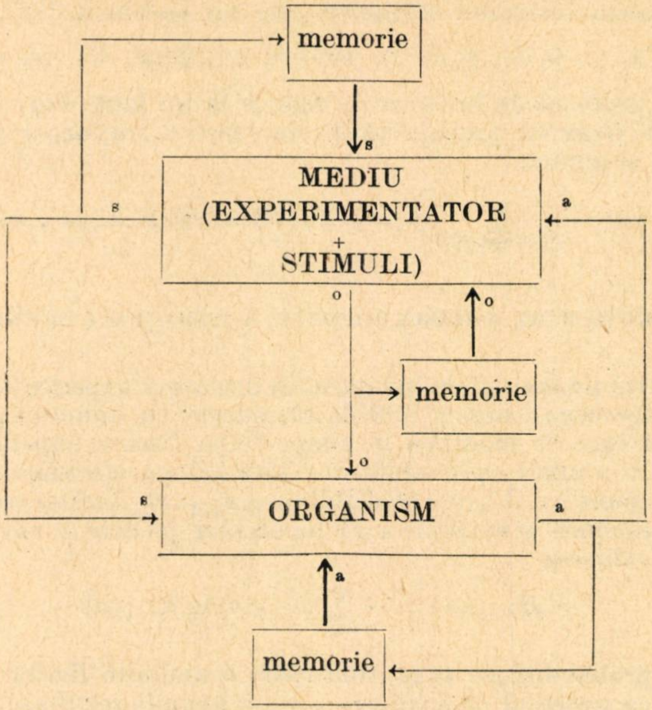
$$p(y) = \sum_{x \in X} p(x, y)$$

pentru fiecare $y \in Y$. Cu această precizare, diagrama procesului de învăţare care are loc într-un sistem instruibil cu stimuli variabili este următoarea :

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[d, "p_1(a \mid s)"] & & & & & \\
S \times A \arrow[r, "p_1(o \mid (s, a))"'] \arrow[d, "\Sigma"] & S \times A \times O \arrow[d, "p_2((s', a') \mid (s, a, o))"] & & & & \\
A \arrow[dr, "p_2(a' \mid a)"'] & S \times A \arrow[r, "p_2(o \mid (s, a))"'] \arrow[d, "\Sigma"] & S \times A \times O \arrow[d, dashed] & & & \\
& A \arrow[dr, "p_3(a' \mid a)"'] & S \times A \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & S \times A \times O \arrow[d, "p_n((s', a') \mid (s, a, o))"] & & \\
& & A \arrow[dr, dashed] & S \times A \arrow[r, "p_n(o \mid (s, a))"'] \arrow[d, "\Sigma"] & S \times A \times O \arrow[d, "p_{n+1}((s', a') \mid (s, a, o))"] & \\
& & & A \arrow[dr, "p_{n+1}(a' \mid a)"'] & A \times A \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d, "\Sigma"] & {} \\
& & & & A \arrow[dr, dashed] & \\
& & & & & {}
\end{tikzcd}$$

Diagrama 5

Această diagramă reprezintă evoluţia în timp a procesului de comunicaţie cu conexiune inversă care se poate reprezenta prin schema bloc de tip „black-box" (figură) :


memorie
s
MEDIU
(EXPERIMENTATOR
+
STIMULI)
s
a
o
o
memorie
o
s
ORGANISM
a
a
memorie

Din diagrama 5 rezultă că

$$(13)\quad \begin{aligned} &p_n(s,\ a,\ o) = p_n(o\,|\,(s,\ a))\ p_n(s,\ a) = p_n(o\,|\,(s,\ a))\ p_n(s\ |a)\ p_n(a)\\ &p_{n+1}(s',\ a') = \sum_{s\in S,\ a\in A,\ o\in O} p_{n+1}((s',\ a')\,|\,((s,\ a,\ o))\ p_n(s,\ a,\ o)\end{aligned}$$

și deci

$$p_{n+1}(a') = \sum_{s'\in S} p_{n+1}(s',\ a') =$$

$$= \sum_{s'\in S,\ s\in S,\ a\in A\ o\in O} p_{n+1}((s',\ a')\,|\,(s,\ a,\ o))\ p_n(o\,|\,(s,\ a))\ p_n(s\ |\ a)\ p_n(a) =$$

$$= \sum_{a\in A} p_{n+1}(a'\ |\ a)\ p_n(a),$$

unde

$$(14)\qquad p_{n+1}(a'\,|\,a) = \sum_{s'\in S,\ s\in S,\ o\in O} p_{n+1}((s',\ a')\,|\,(s,\ a,\ o))\ p_n(o\,|\,(s,\ a))\ p_n(s\,|a).$$

Deci evoluția răspunsurilor este un lanț Markov cu condițiile inițiale

$$p_1(a) = \sum_{s\in S} p_1(s)\, p_1(a\,|\,s)$$

și probabilitățile de trecere $p_{n+1}(a'\ |\ a)$ definite de relația (14).

Un sistem instruibil staţionar este un sistem instruibil de forma

$$\{S,\ A,\ O,\ p_1(s),\ p_1(a \mid s),\ p(o \mid (s,\ a)),\ p((s',\ a') \mid (s,\ a,\ o))\}$$

în care caz procesul de învăţare se reduce la un lanţ Markov definit pe mulţimea A şi avînd probabilităţile de trecere staţionare obţinute din relaţia (14), şi anume

$$p(a' \mid a) = \sum_{s' \in S, s \in S, O \in O} p((s',\ a') \mid (s,\ a,\ o))\, p(o \mid (s\ ,\ a))\, p(s \mid a). \tag{15}$$

§ 4. CONDIŢII CARE ASIGURĂ ÎNCHEIEREA PROCESULUI DE ÎNVĂŢARE

În cadrul procesului de învăţare, ca urmare a experienţelor succesive pe care le efectuează, organismul dă răspunsuri cu anumite probabilităţi, probabilităţi care se modifică în timp. După fiecare experienţă, fiecare răspuns are o anumită probabilitate. Astfel după efectuarea experienţei n, fiecare răspuns $a \in A$ are o probabilitate $p_{n+1}(a)$. Acestei repartiţii aleatoare îi corespunde o entropie a răspunsurilor pe care o notăm $H_{n+1}(A)$ şi care are valoarea

$$H_{n+1}(A) = -\sum_{a \in A} p_{n+1}(a) \lg p_{n+1}(a). \tag{16}$$

Dacă probabilităţile $p_n(a)$ tind către o anumită limită $p(a)$, atunci vom spune că procesul de învăţare are un anumit rezultat, care reflectă comportarea organismului respectiv. Evident, dacă probabilităţile $p_n(a)$ tind către $p(a)$ şi entropia corespunzătoare $H_n(A)$ tinde către o entropie limită $H(A)$, entropia fiind o funcţie continuă de probabilităţi. Din această cauză, atunci cînd putem studia evoluţia asimptotică a probabilităţilor răspunsurilor, obţinem şi legi de evoluţie pentru entropia răspunsurilor organismului. Reciproca însă nu este întotdeauna adevărată, deoarece putem să găsim legi de evoluţie pentru entropia răspunsurilor fără ca să avem informaţii despre evoluţia în parte a probabilităţilor răspunsurilor.

Să mai observăm că în cazul în care organismul a învăţat complet şi ştie să dea cu certitudine un singur răspuns, cu probabilitatea 1, celelalte răspunsuri avînd probabilitatea zero, entropia răspunsurilor este nulă, neexistînd nici o nedeterminare în modul în care organismul dă răspunsurile.

DEFINIŢIA 3. *Vom spune că un organism, în cadrul unui sistem instruibil, învaţă, dacă există o entropie limită a răspunsurilor. Organismul învaţă complet dacă această entropie limită a răspunsurilor este nulă.*

Să considerăm sistemul instruibil staţionar

$$\{A,\ O,\ p_1(a),\ p(o \mid a),\ p(a' \mid (a,\ o))\} \tag{17}$$

şi să notăm, pentru simplificarea scrierii [1]) cu a_i un răspuns bine precizat pe care îl dă organismul în cadrul experienţei i şi cu o_i un rezultat anumit, în cadrul experienţei i, perechea $(a_i,\ o_i)$ modificînd probabilităţile răspunsurilor pe care le dă organismul în experiența următoare. Să notăm de asemenea cu $p^{(n)}(a' \mid a)$ probabilitatea ca organismul să dea răspunsul a' după efectuarea a n experiențe, dacă la momentul inițial a dat răspunsul a.

---

[1]) Această notaţie o vom utiliza numai în enunţul şi demonstraţia teoremei 2

DEFINIȚIA 4. *Vom spune că procesul de învățare este ergodic, dacă există limita*

$$\lim_{n\to+\infty} p^{(n)}(a' \mid a) = p^{\infty}(a')$$

și această limită este independentă de răspunsul organismului la momentul inițial $a \in A$, *pentru orice* $a' \in A$, $a \in A$.

Evident, dacă procesul de învățare este ergodic, organismul învață. Reciproca nu este însă adevărată, organismul putînd să învețe fără ca procesul de învățare să fie ergodic.

TEOREMA 2. *Fiind dat sistemul instruibil staționar* (17), *procesul de învățare corespunzător este ergodic dacă și numai dacă există un număr natural* n_0 *și un răspuns* a_{n_0} *în cadrul experienței a* n_0*-a, astfel încît oricare ar fi răspunsul* a_1 *pe care îl dă organismul în prima experiență, există rezultatele* $o_i^1 = o_i(a_1)(i = 1, 2, \ldots, n_0 - 1)$ *și răspunsurile* $a_i^1 = a_i(a_1)$, $i = 2, 3, \ldots, n_{0-1})$, *cîte unul în fiecare experiență următoare, astfel încît*

$$p(o_1^1 \mid a_1) > 0,\ p(o_i^1 \mid a_i^1) > 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n_0 - 1)$$

$$p(a_{i+1}^1 \mid (a_i^1, o_i^1)) > 0,\ (i = 2, 3, \ldots, n_0 - 2),\ p(a_2^1 \mid (a_1, o_1^1)) > 0$$

$$p(a_{n_0} \mid (a_{n_0-1}^1, o_{n_0-1}^1)) > 0.$$

Demonstrație. Ținînd cont de relația (12) și de faptul că

$$p^{(n_0)}(a_{n_0} \mid a_1) = \sum_{a_2\in A,\, a_3\in A, \ldots,\ a_{n_0-1}\in A} p(a_2 \mid a_1)\, p(a_3 \mid a_2) \ldots p(a_{n_0} \mid a_{n_0-1})$$

condiția din teoremă este necesară și suficientă pentru că fiind dați a_{n_0} și n_0 să avem

$$p^{(n_0)}(a_{n_0} \mid a_1) > 0$$

oricare ar fi $a_1 \in A$. Aceasta este însă tocmai condiția necesară și suficientă pentru ca lanțul Markov asociat procesului de învățare, avînd probabilitățile de trecere staționare $p(a' \mid a)$, să fie ergodic, în care caz există

$$\lim_{n\to+\infty} p^{(n)}(a' \mid a) = p^{\infty}(a')$$

pentru orice $a \in A$, $a' \in A$, q.e.d.

TEOREMA 3. *Fiind dat sistemul instruibil staționar* (17), *dacă matricea pătratică*

$$\mathcal{A} = \left(\sum_{o\in O} p(o \mid a)\, p(a' \mid (a, o))\right)_{\substack{a\in A\\ a'\in A}} \tag{18}$$

are pe 1 drept singura valoare proprie de modul 1, atunci organismul învață, însă entropia finală a răspunsurilor depinde de răspunsul inițial al organismului. Dacă 1 este singura valoare proprie de modul 1 și este de multiplicitate 1, organismul învață de asemenea, iar entropia limită a răspunsurilor este independentă de răspunsul organismului la momentul inițial.

Demonstrație. Din relația (12) se vede că matricea (18) nu este altceva decît matricea probabilităților de trecere staționare corespunzătoare lanțului Markov asociat procesului de învățare care are loc în sistemul instruibil staționar (17). Din teoria generală a lanțurilor Markov rezultă că dacă matricea probabilităților de trecere staționare $p\,(a' \mid a)$ are pe 1 drept singura valoare proprie de modul 1, există limita

$$\lim_{n \to +\infty} p^{(n)}(a' \mid a) = p^{\infty}(a' \mid a)$$

și deci există o entropie limită a răspunsurilor, care depinde de situația de la momentul inițial. Dacă, în plus, 1 este de multiplicitate 1, limita precedentă nu mai depinde de situația de la momentul inițial

$$p^{\infty}(a' \mid a) = p^{\infty}(a')$$

și deci entropia finală nu depinde de răspunsul organismului la momentul inițial, q.e.d.

REMARCĂ. Cu ajutorul formulei clasice a lui Perron putem să calculăm care este entropia răspunsurilor la un anumit moment n. Într-adevăr, fie matricea $\mathcal{A}$, ecuația caracteristică

$$\Delta(\lambda) = |\lambda \mathcal{E} - \mathcal{A}|$$

unde $\mathcal{E}$ este matricea unitate, și matricea adjunctă $\mathcal{B}(\lambda)$. Avem relația matricială

$$(\lambda \mathcal{E} - \mathcal{A})\, \mathcal{C}(\lambda) = \psi(\lambda)\, \mathcal{E},$$

unde matricea adjunctă redusă $\mathcal{C}(\lambda)$ este dată de relația

$$\mathcal{B}(\lambda) = \mathcal{D}_{n-1}(\lambda)\, \mathcal{C}(\lambda)$$

$\mathcal{D}_{n-1}(\lambda)$ fiind c.m.m.d.c. al elementelor matricii $\mathcal{B}(\lambda)$ iar $\psi(\lambda)$ polinomul minimal al matricii $\mathcal{A}$,

$$\psi(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{\mathcal{D}_{n-1}(\lambda)}.$$

Polinomul caracteristic și cel minimal admit respectiv descompunerile

$$\Delta(\lambda) = \prod_{k=1}^{s} (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$$

$$\psi(\lambda) = \prod_{k=1}^{s} (\lambda - \lambda_k)^{m_k},$$

unde

$$0 < m_k \leqslant n_k; \quad \lambda_k \neq \lambda_j \ (k \neq j), \ (j,\ k = 1, 2, \ldots, s).$$

Atunci avem pentru puterile matricii $\mathcal{A}$ expresia

$$\mathcal{A}^{p} = \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{(m_k - 1)!} \left(\frac{\mathcal{C}(\lambda)}{\psi^{(k)}(\lambda)}\, \lambda^{p} \right)_{\lambda=\lambda_k}^{(m_k - 1)},$$

unde $(f(x))_{x=a}^{(n)}$ reprezintă derivata de ordinul n a funcției $f(x)$ în punctul $x = a$. Cunoscînd elementele matricii $\mathcal{A}^p$, putem să calculăm cu ușurință entropia răspunsurilor după experiența p.

Un caz particular foarte utilizat în teoria clasică a învățării este acela al unui sistem instruibil cu stimuli constanți, cu două răspunsuri posibile. Fie deci sistemul instruibil cu stimuli constanți, semistaționar

$$\{A,\ O,\ p_1(a),\ p(o \mid a),\ p_{n+1}(a' \mid (a,\ o))\}$$

cu două răspunsuri posibile $A = \{a_1,\ a_2\}$ și t rezultate posibile

$$O = \{o_1,\ o_2, \ldots,\ o_t\}.$$

TEOREMA 4. *Dacă pentru* $n = 2, 3, \ldots;\ j = 1, 2;\ k = 1, 2, \ldots, t$ *avem*

$$p_{n+1}(a_1 \mid (a_j,\ o_k)) = \alpha_{jk}\, p_n(a_1 \mid (a_j,\ o_k)) + (1 - \alpha_{jk}) \tag{19}$$

unde α_{jk} *sînt numere reale astfel încît* $0 \leqslant \alpha_{jk} \leqslant 1$, *atunci organismul învață complet.*

Demonstrație. Ținînd cont de (19) avem evident

$$p_{n+1}(a_2 \mid (a_j,\ o_k)) = 1 - p_{n+1}(a_1 \mid (a_j,\ o_k)) =$$
$$= \alpha_{jk}(1 - p_n(a_1 \mid (a_j,\ o_k))) = \alpha_{jk}\, p_n(a_2 \mid (a_j,\ o_k)).$$

Să observăm că din egalitatea

$$p_3(a_1 \mid (a_j,\ o_k)) = \alpha_{jk}\, p_2(a_1 \mid (a_j,\ o_k)) + (1 - \alpha_{jk})$$

rezultă pe baza lui (19) că

$$p_4(a_1 \mid (a_j,\ o_k)) = \alpha_{jk}\ p_3(a_1 \mid (a_j,\ o_k)) + (1 - \alpha_{jk}) =$$
$$= \alpha_{jk}^2\, p_2(a_1 \mid (a_j,\ o_k)) + 1 - \alpha_{jk}^2.$$

Prin inducție obținem

$$p_{n+1}(a_1 \mid (a_j,\ o_k)) = \alpha_{jk}^{n-1}\ p_2(a_1 \mid (a_j,\ o_k)) + 1 - \alpha_{jk}^{n-1} \tag{20}$$

și corespunzător

$$p_{n+1}(a_2 \mid (a_j,\ o_k)) = \alpha_{jk}^{n-1}\, p_2(a_2 \mid (a_j,\ o_k)). \tag{21}$$

Din (20) și (21) se vede că

$$\lim_{n \to +\infty} p_{n+1}(a_1 \mid (a_j,\ o_k)) = 1;\ \lim_{n \to +\infty} p_{n+1}(a_2 \mid (a_j,\ o_k)) = 0$$

oricare ar fi $j = 1,\ 2;\ k = 1,\ 2, \ldots, t$ și notînd cu $H_{n+1}(A \mid (a_j,\ o_k))$ entropia răspunsurilor după experiența a n-a, condiționată de perechea $(a_j,\ o_k)$, adică

$$H_{n+1}(A \mid (a_j,\ o_k)) = -\sum_{i=1,2} p_{n+1}(a_i \mid (a_j,\ o_k)) \lg p_{n+1}(a_i \mid (a_j,\ o_k))$$

avem

$$\lim_{n \to +\infty} H_{n+1}(A \mid (a_j,\ o_k)) = 0$$

pentru orice j, k şi deci pentru entropia totală avem

$$\lim_{n\to+\infty} H_{n+1}(A) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{\substack{j=1,2\\ k=1,2,\dots t,}} p_{n+1}(a_j, o_k)\, H_{n+1}(A \mid (a_j, o_k)) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to+\infty} \sum_{\substack{j=1,2\\ k=1,2,\dots,t}} H_{n+1}(A \mid (a_j, o_k)) = 0$$

şi deci, deoarece entropia este nenegativă, rezultă

$$\lim_{n\to+\infty} H_{n+1}(A) = 0 \qquad \text{q.e.d.}$$

REMARCĂ. Expresia (19) nu exprimă altceva decît faptul că $p_{n+1}(a_1 \mid (a_j, o_k))$ este o funcţie liniară de $p_n((a_1 \mid (a_j, o_k))$ şi de pantă α_{jk}. Se vede că $p_{n+1}(a_1 \mid (a_j, o_k)) = p_n(a_1 \mid (a_j, o_k))$ dacă şi numai dacă $p_n(a_1 \mid (a_j, o_k)) = 1$ ceea ce înseamnă că dacă $p_n(a_1 \mid (a_j, o_k))$ a atins valoarea 1, ea nu se mai schimbă.

Să considerăm acum un sistem instruibil cu stimuli variabili, conform definiţiei 2, procesul de învăţare care are loc într-un asemenea sistem fiind reprezentat în diagrama 7, şi fie probabilităţile de trecere $p_{n+1}(a' \mid a)$ definite de relaţia (14) şi care se obţin prin închiderea diagramei 6. Avem atunci

TEOREMA 5. *Dacă pentru fiecare n matricea $(p_{n+1}(a' \mid a))_{\substack{a\in A\\ a'\in A}}$ este dublu stocastică, entropia răspunsurilor evoluează în sens crescător şi sistemul învaţă.*

Demonstraţie. Să presupunem că avem m răspunsuri posibile $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ şi să notăm cu $p_{n+1}(a_i)$ probabilitatea răspunsului a_i după efectuarea experienţei a n-a, iar cu $p_{n+1}(a_i \mid a_j)$ probabilitatea de trecere de la răspunsul a_j la răspunsul a_i în urma efectuării experienţei a n-a, probabilitate de trecere dată de relaţia (14). Avem

$$p_{n+1}(a_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{n+1}(a_i \mid a_j)\, p_n(a_j) \qquad (i = 1, 2, \dots, m) \tag{22}$$

şi conform ipotezei să presupunem că matricea $(p_{n+1}(a_i \mid a_j))_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ este dublu stocastică (sau bistocastică), adică,

$$\sum_{i=1}^{m} p_{n+1}(a_i \mid a_j) = \sum_{j=1}^{m} p_{n+1}(a_i \mid a_j) = 1. \tag{23}$$

Vom utiliza două inegalităţi cunoscute. Prima ne spune că dacă

$$\pi_{ij} \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \pi_{ij} = 1, \quad p_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \qquad (i, j = 1, 2, \dots, m),$$

atunci avem

$$\prod_{i=1}^{m} (p_i)^{\pi_{ij}} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \pi_{ij} p_i \text{ [2]}. \tag{24}$$

A doua afirmă că dacă

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{i=1}^{m} q_i = 1, \quad p_i \geqslant 0, \quad q_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

atunci

$$-\sum_{i=1}^{m} q_i \lg q_i \leqslant -\sum_{i=1}^{m} q_i \lg p_i \text{ [3]}. \tag{25}$$

Din (22) — (25) obținem inegalitățile următoare

$$\begin{aligned} H_{n+1}(A) &= -\sum_{i=1}^{m} p_{n+1}(a_i) \lg p_{n+1}(a_i) = \\ &= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} p_n(a_j)\, p_{n+1}(a_i \mid a_j) \lg p_n(a_i) = \\ &= -\sum_{j=1}^{m} p_n(a_j) \lg \left(\prod_{i=1}^{m} [p_{n+1}(a_i)]^{p_{n+1}(a_i \mid a_j)} \right) \geqslant \\ &\geqslant -\sum_{j=1}^{m} p_n(a_j) \lg \left(\sum_{i=1}^{m} p_{n+1}(a_i \mid a_j)\, p_{n+1}(a_i) \right) \geqslant \\ &\geqslant -\sum_{j=1}^{n} p_n(a_j) \lg p_n(a_j) = H_n(A). \end{aligned}$$

---

[2] Din inegalitatea lui Jensen, dacă $y = f(x)$ este o funcție convexă pe intervalul $[a, b]$, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sînt valori oarecare ale argumentului aparținînd intervalului $[a, b]$, neegale toate între ele și $q_1, q_2, \ldots, q_m$ sînt m numere pozitive cu suma egală cu 1, avem

$$\sum_{i=1}^{m} q_i f(x_i) \leqslant f\left(\sum_{i=1}^{m} q_i x_i \right).$$

Fie acum $y = \lg x$. Atunci

$$\sum_{i=1}^{m} q_i \lg x_i \leqslant \lg \left(\sum_{i=1}^{m} q_i x_i \right) \tag{26}$$

deci

$$\prod_{i=1}^{m} (x_i)^{q_i} \leqslant \sum_{i=1}^{m} q_i x_i.$$

[3] Dacă în inegalitatea (26) punem $x_1 = \frac{p_1}{q_1}$, $x_2 = \frac{p_2}{q_2}$, $\ldots$, $x_m = \frac{p_m}{q_m}$, $\sum_{k=1}^{m} p_k =$ unde $p_k \geqslant 0$, $(k = 1, 2, \ldots, m)$, obținem $-\sum_{k=1}^{m} q_k \lg q_k \leqslant -\sum_{k=1}^{m} q_k \lg p_k$

Deci entropia răspunsurilor evoluează în sens crescător

$$H_1(A) \leqslant H_2(A) \leqslant \ldots \leqslant H_{n-1}(A) \leqslant H_n(A) \leqslant \ldots \leqslant \lg m.$$

Există deci limita

$$\lim_{n \to +\infty} H_n(A) = H_\infty(A)$$

ceea ce arată că organismul învaţă, q.e.d.

Remarcări: Un prim model informaţional al teoriei învăţării a fost dat de către M. Beliş [5]. Lucrarea de faţă a fost determinată de lectura acestui articol, şi ea a fost prezentată în luna iunie 1967, în cadrul ciclului de expuneri lunare consacrate sistemelor instruibile, organizat de către Comisia de Cibernetică a Academiei la Centrul de Calcul al Universităţii Bucureşti.

Primită la redacţie la 17 iulie 1967

Institutul de matematică al
Academiei RapubliciiSocialiste România.
Str. M. Eminescu nr. 47
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Bush R. R., Mosteller F., *Stochastic models for learning*. Wiley & Sons, New York — Chapman & Hall, London, 1955.
2. *Studies in mathematical learning theory*. Edited by R. R. Bush., W. K. Estes. Stanford University Press, Stanford, California, 1959.
3. Ciucu G., Theodorescu R., *Procese cu legături complete*. Edit. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1960.
4. Onicescu O., Guiaşu S., *Finite abstract random automata*. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie, *3*,279—285 (1965).
5. Beliş M., *Informationstheoretisches Lernmodell*. Kybernetik, *3*, 238—240 (1967).

OPERATORI REALIZAȚI DE AUTOMATE FINITE

DE

VIOREL HIRIŞ
(Timişoara)

Lucrarea se ocupă de studiul operatorilor realizați de automatele finite. Se extinde noțiunea de automat finit pentru mulțimi infinite de stări, cu păstrarea proprietăților esențiale din teoria abstractă a automatelor finite.

Teoretic, se poate considera că un automat prelucrează informația primită printr-un canal de intrare cu un operator, iar apoi transmite în exterior printr-un canal de ieșire semnale de răspuns. Semnalele de intrare și ieșire sînt exprimate prin simboluri (numite litere), care formează două mulțimi, numite respectiv alfabetul de intrare și alfabetul de ieșire. Operatorul realizat de automat este descris de funcții pe care le realizează organizarea fizică interioară. Construcția fizică a automatului, considerat „cutie neagră", este caracterizată printr-o mulțime de stări interioare, ale căror simboluri formează o mulțime numită alfabet de stare.

Comparînd [1] și [2], automatele finite se pot aborda într-un mod mai general, precizîndu-se noțiunea de operator automat din [2].

DEFINIȚIA 1. Vom numi *sistem canonic* (S), ansamblul format din mulțimile X, Z, Q și ecuațiile:

$$z(t) = \Phi\,[x(t), q(t)]$$

$$q(t+1) = \Psi\,[x(t), q(t)],$$

unde Φ și Ψ sînt funcții discrete uniforme, iar $x(t) \in X$, $z(t) \in Z$, $q(t) \in Q$, în tactul t. Mulțimile X, Z, Q le vom numi respectiv alfabet de intrare, alfabet de ieșire și alfabet de stare.

DEFINIȚIA 2. Se numește *operator indus* de starea $q_j \in Q$, o aplicație θ_j care pune în corespondență șirurilor arbitrare cu litere din X, șiruri de ieșire cu litere din Z, corespunzătoare ecuațiilor canonice date, pornind cu starea inițială q_j.

Toți operatorii induși de literele alfabetului Q formează o familie de operatori.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, Nr. 4, P. 497–502, BUCUREȘTI, 1968

DEFINIŢIA 3. Două sisteme canonice (S^1) şi (S^2), la care coincid alfabetele de intrare şi ieşire, se numesc *echivalente,* dacă cele două alfabete de stare induc familii identice de operatori.

Două stări se numesc echivalente dacă induc acelaşi operator. O consecinţă imediată a acestei definiţii.

TEOREMA 1. *Două sisteme canonice sînt echivalente între ele dacă şi numai dacă pentru o stare oarecare a unui sistem există o stare a celuilalt sistem, echivalentă cu ea şi reciproc.*

Considerăm o familie arbitrară de sisteme canonice (S^i) :

$$z^i(t) = \Phi^i[x^i(t), q^i(t)]$$

$$q^i(t+1) = \Psi^i[x^i(t), q^i(t)]$$

cu alfabetele X^i, Z^i, Q^i.

DEFINIŢIA 4. Se numeşte *omomorfism* al sistemului (S^1) în (pe) sistemul (S^2), dacă este dat, ansamblul a trei aplicaţii.

$$\varphi_1 : X^1 \xrightarrow{\text{în (pe)}} X^2$$

$$\varphi_2 : Z^1 \xrightarrow{\text{în (pe)}} Z^2$$

$$\varphi_3 : Q^1 \xrightarrow{\text{în (pe)}} Q^2$$

care pentru orice elemente $q \in Q^1$ şi $x \in X^1$ satisfac relaţiilor :

$$\varphi_2[\Phi^1(x, q)] = \Phi^2[\varphi_1(x), \varphi_3(q)]$$

$$\varphi_3[\Psi^1(x, q)] = \Psi^2[\varphi_1(x), \varphi_3(q)].$$

Dacă $X^1 \equiv X^2$, $Z^1 \equiv Z^2$, iar φ_1 şi φ_2 sînt aplicaţii identice, vom spune că φ este un *omomorfism de stare.*

În cele ce urmează ne vom mărgini la acest caz, care evident nu restrînge generalitatea.

TEOREMA 2. *Dacă există un omomorfism de stare* φ *al sistemului canonic* (S^1) *pe sistemul canonic* (S^2), *atunci ele sînt echivalente.*

Demonstraţie. Teorema 1 ne asigură că este suficient să demonstrăm echivalenţa stărilor q_i^1 şi $\varphi(q_i^1)$.

Fie $x = x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$ un şir de intrare arbitrar.

Aplicînd funcţia Ψ^1, obţinem şirul de stări

$$q^1 = q_{i_1}^1 q_{i_2}^1 \ldots q_{i_n}^1 \ldots$$

Aplicînd aceluiaşi şir funcţia Ψ^2, obţinem alt şir de stări, $q^2 = q_{i_1}^2 q_{i_2}^2 \ldots q_{i_n}^2 \ldots$, plecînd cu starea iniţială $q_i^2 = \varphi(q_i^1)$.

Deoarece φ este un omomorfism de stare, avem :

$$\varphi(q_{i_1}^1) = \varphi[\Psi^1(x_1, q_i^1)] = \Psi^2[x_1, \varphi(q_i^1)] = \Psi^2[x_1, q_i^2] = q_{i_1}^2$$

. . . .

$$\varphi(q_{i_n}^1) = \varphi[\Psi^1(x_n, q_{i_{n-1}}^1)] = \Psi^2[x_n, \varphi(q_{i_{n-1}}^1)] = \Psi^2[x_n, q_{i_{n-1}}^2] = q_{i_n}^2.$$

. . . .

Fie acum șirurile de ieșire corespunzătoare celor două sisteme canonice, pentru condițiile inițiale q_i și $\varphi(q_i^1) = q_i^2$:

$$z^1 = z_1^1 z_2^1 \dots z_n^1 \dots \quad \text{și} \quad z^2 = z_1^2 z_2^2 \dots z_n^2 \dots$$

Conform omomorfismului avem :

$$z_1^1 = \Phi^1(x_1, q_i^1) = \varphi\,[\Phi^1(x_1, q_i^1)] = \Phi^2\,[x_1, \varphi(q_i^1)] = \Phi^2\,(x_1, q_i^2) = z_1^2.$$

. . . .

$$z_n^1 = \Phi^1\,(x_n, q_{i_{n-1}}^1) = \varphi\,[\Phi^1(x_n, q_{i_{n-1}}^1)] = \Phi^2\,[x_n, \varphi(q_{i_{n-1}}^1)] = \Phi^2(x_n, q_{i_n}^2) = z_n^2.$$

. . . .

Rezultă $z^1 \equiv z^2$, adică stările q_i^1 și q_i^2 sînt echivalente.

TEOREMA 3. *Dacă două stări q_1 și q_2 sînt echivalente, atunci și imaginile lor $\Psi(x, q_1)$ și $\Psi(x, q_2)$ sînt echivalente.*

Demonstrație. Dacă stările q_1 și q_2 sînt echivalente, oricare ar fi șirul $x = x_1\, x_2 \dots x_n \dots$, ele induc același șir de ieșire $z = z_1\, z_2 \dots z_n \dots$

$$z_1 = \Phi(x_1, q_1) = \Phi(x_1, q_2)$$

$$z_2 = \Phi(x_2, q_1') = \Phi(x_2, q_2'), \quad \text{unde } q_1' = \Psi(x_1, q_1) \text{ și } q_2' = \Psi(x_1, q_2)$$

$$z_3 = \Phi(x_3, q_1'') = \Phi(x_3, q_2''), \quad \text{unde } q_1'' = \Psi(x_2, q_1') \text{ și } q_2'' = \Psi(x_2, q_2') \text{ etc.}$$

Evident, dacă luăm drept condiții inițiale pe q_1 și q_2, șirul de intrare arbitrar $x' = x_2\, x_3 \dots x_n \dots$, induce același șir de ieșire $z' = z_2\, z_3 \dots z_n \dots$, ceea ce ne arată că stările $\Psi(x_1, q_1)$ și $\Psi(x_1, q_2)$ sînt echivalente.

Rezultă că dacă două stări sînt echivalente, imaginile lor prin funcția Ψ se mențin echivalente și după aplicarea unui șir de intrare.

TEOREMA 4. *Într-o clasă maximală $\mathcal{S}$ de sisteme echivalente între ele, există unul și (abstracție făcînd de un omomorfism de stare) numai unul, cu următoarele proprietăți :*

1° *stările acestui sistem sînt neechivalente două cîte două ;*

2° *puterea mulțimii stărilor lui (numită* ponderea clasei), *nu depășește puterea oricărei mulțimi de stări din $\mathcal{S}$.*

Demonstrație. Fie (S) un sistem arbitrar din $\mathcal{S}$:

$$z(t) = \Phi\,[x(t),\ q(t)]$$

$$q(t+1) = \Psi\,[x(t),\ q(t)]$$

cu alfabetele X, Z, Q.

Descompunem mulțimea Q în clase disjuncte de stări echivalente între ele. Notăm cu P mulțimea acestor clase.

Construim un nou sistem $(\widetilde{S})$ cu alfabetele X, Z, P :

$$z(t) = \widetilde{\Phi}\,[x\,(t),\ p\,(t)]$$

$$p\,(t+1) = \widetilde{\Psi}\,[x\,(t), p\,(t)]$$

în care cele două funcţii sînt definite astfel:

$\widetilde{\Phi}(x, p) = \Phi(x, q)$, dacă $q \in p$, oricare ar fi $x \in X$ şi $p \in P$ $\widetilde{\Psi}(x, p) = p_1$, unde p_1 este clasa care conţine toate stările $\Psi(x, q)$ pentru orice $q \in p$, $x \in X$. Stările q din clasa p, fiind echivalente, determină o imagine unică prin Φ, deci $\widetilde{\Phi}$ este o funcţie uniformă. De asemenea, conform teoremei 3, $\widetilde{\Psi}(x, p)$ determină o clasă unică p_1 şi deci este şi ea uniformă. Fie φ o aplicaţie care aplică identic alfabetele X şi Z şi pune în corespondenţă fiecărei stări $q \in Q$ clasa $p \in P$ din care face parte. Conform definiţiilor funcţiilor $\widetilde{\Phi}$ şi $\widetilde{\Psi}$ avem:

$$\varphi[\Phi(x, q)] = \Phi(x, q) = \widetilde{\Phi}(x, p) = \widetilde{\Phi}[x, \varphi(q)]$$

$$\varphi[\Psi(x, q)] = \varphi(p) = p_1 = \widetilde{\Psi}(x, p) = \widetilde{\Psi}[x, \varphi(q)].$$

Deci φ este un omomorfism de stare. Conform teoremei 2, sistemele canonice (S) şi $(\widetilde{S})$ sînt echivalente. Clasa $\mathcal{S}$ fiind maximală, $(\widetilde{S})$ va fi conţinut în $\mathcal{S}$.

Să mai arătăm că sistemul $(\widetilde{S})$ verifică proprietăţile: 1° stările sistemului $(\widetilde{S})$ sînt clase disjuncte de stări echivalente între ele. Urmează că aceste clase sînt neechivalente două cîte două; 2° orice stare $p \in P$ are prin omomorfismul φ preimagini în Q, deci aplicaţia φ este pe; de aici rezultă că ponderea clasei $\mathcal{S}$ nu depăşeşte puterea mulţimii Q, oricare ar fi Q.

DEFINIŢIA 5. Un sistem canonic se numeşte *redus*, dacă oricare două stări diferite ale lui nu sînt echivalente între ele.

TEOREMA 4 prezintă importanţă tocmai pentru că indică metoda de a reduce un sistem arbitrar.

Considerăm un sistem canonic (S) cu alfabetele X, Z *finite* şi Q *numărabil*, dat de ecuaţiile canonice

$$z(t) = \Phi[x(t), q(t)]$$

$$q(t+1) = \Psi[x(t), q(t)].$$

Luăm pe rînd cîte o stare q_i a alfabetului Q şi formăm mulţimile Q_i în care intră starea q_i şi toate stările ce rezultă din ea prin sistemul (S). Fie familia sistemelor canonice (S^i):

$$z(t) = \Phi[x(t), q(t)]$$

$$q(t+1) = \Psi[x(t), q(t)]$$

cu alfabetele X, Z, Q_i.

Aceste sisteme diferă între ele numai prin alfabetele de stare Q_i.

DEFINIŢIA 6. Toţi operatorii induşi de literele alfabetului Q_i se numesc operatori reziduali ai operatorului indus de starea q_i.

Aşadar, fiecare sistem (S^i) defineşte un operator indus de o stare şi toate reziduurile sale. Descompunem familia acestor sisteme în clase de echivalenţă. Fiecare clasă va determina în mod unic un operator şi toate reziduurile lui. Conform teoremei 4, în fiecare clasă există un sistem unic, echivalent cu celelalte din clasă, încît toate stările lui sînt neechivalente două cîte două, iar puterea mulțimii stărilor lui e minimă.

Putem enunța

TEOREMA 5. *În fiecare clasă maximală de operatori induși identici, există unul și numai unul cu proprietățile* :

1° *toți operatorii reziduali ai acestui operator sînt distincți între ei* ;

2° *puterea mulțimii operatorilor reziduali* (*numită* ponderea operatorului) *este mai mică decît puterile mulțimilor operatorilor reziduali ai oricărui operator din clasă.*

DEFINIȚIA 7. Un operator cu proprietățile 1°, 2° se numește *operator redus.*

DEFINIȚIA 8. Vom numi *operator general* determinat de sistemul canonic (S), clasa tuturor operatorilor reduși, induși de stările alfabetului Q.

Operatorii reziduali ai operatorului general vor fi toți operatorii reduși și operatorii reziduali ai acestora.

Ponderea operatorului general va fi dată de puterea mulțimii tuturor reziduurilor distincte. Ea poate să fie finită sau nu, depinzînd atît de numărul operatorilor reduși, cît și de ponderea fiecăruia din ei.

DEFINIȚIA 9. Un operator (general sau indus de o stare) are *memorie finită*, dacă ponderea lui este un număr finit.

Evident, o condiție suficientă, pentru ca un operator să aibă memorie finită, este ca numărul literelor alfabetului Q să fie finit.

Observație. În toate considerațiile noastre presupunem că literele de ieșire și de stare nu depind de literele de intrare și ieșire care le urmează ; cu alte cuvinte vom lua în considerare numai operatori fără anticipare.

Următoarea teoremă ne permite, ca atunci cînd studiem caracterul de finitudine al memoriei, să ne mărginim numai la operatori induși de o stare.

TEOREMA 6. *Un operator general cu memorie finită, fiecare din cei K operatori distincți determinați de literele neechivalente ale alfabetului de stare Q, avînd ponderile $p_i (i = 1, 2, \ldots, K)$, poate fi scufundat într-un operator cu memorie finită, indus de una din stările alfabetului Q sau altă stare, ponderea căruia nu depășește* $\sum_{i=1}^{K} p_i + 2$.

Demonstrație. Fiecare din cei K operatori reziduali distincți poate fi caracterizat cu ajutorul unui graf arborescent construit după procedeul indicat în [2]. Unim apoi rădăcinile celor K arbori prin muchii care se vor întîlni într-un punct, pe care-l vom considera rădăcina unui nou arbore construit prin atașarea de noi vîrfuri și muchii. Atașăm apoi fiecărei muchii nou construite o aceeași literă de ieșire.

Au apărut astfel cel mult doi arbori distincți : unul este arborele determinat de noua rădăcină, iar celălalt arborele cu rădăcina aflată la extremitatea fiecărei muchii nou construite. Astfel încît operatorul determinat de noul arbore are ponderea cel mult $\sum_{i=1}^{K} p_i + 2$ și el este indus de starea aflată la rădăcina noului arbore.

Consideraţiile de mai sus ne permit să definim un automat finit ca fiind sistemul (X, Z, Q, q_0, θ), unde X şi Z sînt două mulţimi finite, Q o mulţime numărabilă, iar θ un operator cu memorie finită indus de litera $q_0 \in Q$. Făcînd un studiu amănunţit al obiectului definit, regăsim proprietăţile automatelor finite din teoria clasică, ceea ce justifică denumirea adoptată aici.

Primită la redacţie la 30 octombrie 1967

Universitatea din Timişoara
Facultatea de matematică-mecanică

BIBLIOGRAFIE

1. V. M. Gluşkov, *Teoria abstractă a automatelor*. Analele rom. sov., 2, 3—59 (1962).
2. Н. Е. Кобринский, Б. А. Трахтенброд, *Введение в теорию конечных автоматов*, Физматгиз, Москва, 1962.

OPERATORI NORMALOIZI

DE

VASILE ISTRĂŢESCU şi IOANA ISTRĂŢESCU

În lucrare se studiază clasa operatorilor normaloizi introdusă de A. Wintner dîndu-se teoreme de structură pentru o subclasă importantă : operatorii invariant-normaloizi. Un operator este invariant normaloid dacă restricţia la orice subspaţiu invariant este normaloid.

1. Fie H un spaţiu Hilbert şi T un operator mărginit pe H. Rangul numeric este mulţimea definită prin

$$W(T)=\{\langle Tx, x\rangle, \quad \|x\|=1\}$$

iar $\sigma(T)$ va însemna spectrul operatorului T. Prin con E vom însemna înfăşurătoarea convexă a mulţimii E. Printre mulţimile închise din planul complex strîns legate de operatori sînt aşa-numitele mulţimi spectrale în sensul lui von Neumann.

DEFINIŢIA 1. O mulţime E închisă în plan complex este mulţime spectrală pentru operatorul T dacă

$$\|u(T)\| \leqslant \sup_{t\in E}\|u(t)\|$$

oricare ar fi funcţia raţională u cu poli în afara mulţimii E.

A. Wintner a încercat să dea o caracterizare a operatorilor pentru care

$$(^{*}) \qquad \operatorname{con}\sigma(T)=\overline{\mathrm{W}(T)},$$

(bara înseamnă închiderea mulţimii).

Pentru a caracteriza operatorii cu această proprietate, A. Wintner a introdus noţiunea de operator normaloid prin :

DEFINIŢIA 2. Un operator este normaloid dacă

$$\|T\|=\sup\{|\langle Tx, x\rangle|, \quad \|x\|=1\}.$$

ST. CERC. MAT., TOM. 20, Nr. 4, P. 503 – 509, BUCUREŞTI, 1968

Următorul exemplu, datorit lui P. R. Halmos, arată că operatorii pentru care relaţia (*) este adevărată nu pot fi caracterizaţi prin proprietatea de a fi normaloizi.

Fie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şi I operatorul identitate 1-dimensional. Să considerăm operatorul

$$T = A \oplus I.$$

Avem

$$\overline{W(A)} = \left\{z, |z| \leqslant \frac{1}{2}\right\}$$

şi

$$\overline{W(T)} = \text{con}\ \{\overline{W(A)}\ U\{1\}\}.$$

Cum

$$\sup \{|\langle Tx, x\rangle|, \quad \|x\| = 1\} \geqslant 1 = \|T\|,$$

rezultă că T este normaloid. Dar

$$\text{con}\ \sigma(T) = [0,1].$$

Următoarea teoremă dă o caracterizare a operatorilor normaloizi.

Să notăm prin $\gamma_T = \lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ raza spectrală a operatorului T. Se ştie că

$$\gamma_T = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

TEOREMA 1. *Operatorul T este normaloid dacă şi numai dacă* $\gamma_T = \|T\|$.

Demonstraţie. Necesitatea. Fie T normaloid. În acest caz există şirul $\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$, astfel ca

$$\lim |\langle Tx_n, x_n\rangle| = \|T\|.$$

Luînd eventual un subşir, putem presupune că

$$\lim \langle Tx_n, x_n\rangle = \lambda$$

cu $|\lambda| = \|T\|$.

Dar

$$\|Tx_n - \lambda x_n\|^2 = \langle Tx_n, Tx_n\rangle - \lambda \langle x_n, Tx_n\rangle - \bar{\lambda} \langle Tx_n, x_n\rangle + |\lambda|^2$$

şi deci

$$\|Tx_n - \lambda x_n\| \to 0.$$

Este evident că pentru orice întreg m avem

$$T^m x_n - \lambda^m x_n \to 0$$

şi deci

$$\|T^m\| = \|T\|^m$$

adică

$$\gamma_T = \| T \|.$$

Suficienţa condiţiei este evidentă.

Vom da aici o demonstraţie pentru suficienţă, care prezintă interes deoarece este strîns legată de un rezultat al lui C. Berger.

Pentru aceasta să punem

$$\rho (T) = \sup |\langle Tx, x \rangle|.$$

Să arătăm că au loc relaţiile

$$\| T \| \leqslant 2 \rho (T).$$

$$\rho (T^2) \leqslant [\rho(T)]^2 .$$

Să considerăm identitatea

$$\| Tx \|^2 + e^{2i\theta} \langle Tx^2, x \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \langle \lambda e^{2i\theta} T^2 x + \lambda^{-2} e^{i\theta} Tx, \lambda e^{i\theta} Tx + \lambda^{-1} x \rangle +$$

$$+ \frac{1}{2} \langle \lambda e^{2i\theta} T^2 x - \lambda^{-1} e^{i\theta} Tx, \lambda e^{i\theta} Tx - \lambda^{-1} x \rangle.$$

Din inegalitatea

$$|\langle Ty, y \rangle| \leqslant \rho (T) \| y \|^2$$

rezultă

$$| \| Tx \|^2 + e^{2i\theta} \langle T^2 x, x \rangle | \leqslant \frac{1}{2} \rho (T) (\| \lambda e^{i\theta} Tx + \lambda^{-1} x \|^2 + \| \lambda e^{i\theta} Tx - \lambda^{-1} x \|^2) =$$

$$= \rho (T) \left(\lambda^2 \| Tx \|^2 + \frac{1}{\lambda^2} \| x \|^2 \right).$$

Dacă $Tx \neq 0$, alegem λ astfel ca

$$\lambda^2 \| Tx \| = \| x \|$$

şi obţinem

$$| \| Tx \|^2 + e^{2i\theta} \langle T^2 x, x \rangle | \leqslant 2 \rho (T) \| Tx \| \| x \|.$$

Fie θ astfel ca

$$e^{2i\theta} \langle T^2 x, x \rangle = |\langle T^2 x, x \rangle|$$

şi vom avea

$$\| T \| \leqslant 2 \rho (T).$$

Pentru a demonstra cea de-a doua relaţie scriem

$$((\| Tx \| - \rho (T))^2 + |\langle T^2 x, x \rangle| \leqslant [\rho (T)]^2$$

care ne dă

$$\rho (T^2) \leqslant [\rho (T)]^2$$

şi cele două relaţii sînt demonstrate.

Deducem

$$\|T^{2^n}\| \leqslant 2\rho(T^{2^n}) \leqslant 2(\rho(T))^{2^n}$$

de unde

$$\gamma_T \leqslant \rho(T).$$

Dar cum

$$\|T\| = \gamma_T \leqslant \rho(T) \leqslant \|T\|$$

afirmația este demonstrată.

Teoremele următoare arată legătura dintre proprietatea de a fi normaloid și noțiunea de mulțime spectrală în sensul lui von Neumann.

TEOREMA 2. *Condiția necesară și suficientă ca spectrul operatorului T, $\sigma(T)$, să fie mulțime spectrală pentru T este ca $f(T)$ să fie normaloid oricare ar fi funcția rațională cu poli în afara mulțimii $\sigma(T)$.*

Demonstrație. Fie f o funcție rațională cu poli în afara spectrului $\sigma(T)$. În acest caz, cum $f(\sigma(T)) = \sigma(f(T))$, rezultă

$$\gamma_{f(T)} = \|f\|_{\sigma(T)}$$

$(\|f\|_{\sigma(T)} = \sup\limits_{t\in\sigma(T)} |f(t)|)$.

Dacă $\sigma(T)$ este mulțime spectrală, avem

$$\|f(T)\| \leqslant \|f\|_{\sigma(T)} = \gamma_{f(T)} \leqslant \|f(T)\|$$

și din teorema 1 rezultă că $f(T)$ este normaloid.

Reciproc, dacă $f(T)$ este normaloid oricare ar fi f rațională, deducem

$$\|f(T)\| = \gamma_{f(T)} = \|f\|_{\sigma(T)}$$

și teorema este demonstrată.

TEOREMA 3. *Pentru orice funcție olomorfă în $\{z, |z| \leqslant \|T\|\}$, operatorul $f(T)$ este normaloid cînd $\sigma(T) = \{|z| \leqslant \|T\|\}$.*

Demonstrație. Mulțimea $\mathcal{D}_T = \{z, |z| \leqslant \|T\|\}$ este mulțime spectrală pentru operatorul T. De aici rezultă că

$$\|f(T)\| \leqslant \|f\|_{\mathcal{D}_T} = \gamma_{f(T)} \leqslant \|f(T)\|$$

și deci conform teoremei 1 rezultă că $f(T)$ este normaloid.

Pentru teoremele de structură care urmează vom avea nevoie de o condiție suplimentară pe care trebuie să o îndeplinească operatorii T. Aceasta o introducem prin :

DEFINIȚIA 3. Un operator se spune că este invariant-normaloid dacă restricția sa la orice subspațiu invariant este din nou un operator normaloid.

Are loc

TEOREMA 4. *Dacă T este un operator invariant-normalid și compact, atunci T este normal.*

Demonstrație. Fie $\lambda \in \sigma(T)$ astfel ca $|\lambda| = \|T\|$. Se deduce imediat (din faptul că T este compact) că

$$\mathcal{M}_T(\lambda) = \{x, x \in H, \quad Tx = \lambda x\}$$

este un subspațiu invariant pentru T și T^*.

Este uşor de văzut că

$$\{\mathcal{M}_T(\lambda)\cap\mathcal{M}_{T^*}(\bar{\lambda}),\quad \lambda\in\sigma_p(T)\}$$

formează o familie de subspaţii ortogonale ($\lambda\neq\lambda'$). Fie

$$H_0=\sum_{\lambda\in\sigma_p(T)}\{\mathcal{M}_T(\lambda)\cap\mathcal{M}_{T^*}(\bar{\lambda})\}$$

care este un subspaţiu care reduce pe T şi să notăm $H_1=H_0^{\perp}$. Pentru a demonstra teorema va fi suficient să arătăm că $T/H_1=0$.

Operatorul T/H_1 fiind normaloid, există $\mu\in\sigma\,(T/H_1)$ astfel ca $\|T/H_1\|=|\mu|$ şi cum este compact, există y astfel ca

$$T_{1y}=\mu y$$

(am notat $T_1=T/H_1$). Se verifică imediat că $T_1^*y=\bar{\mu}\,y$. Deci

$$\mathcal{M}_T(\mu)\cap\mathcal{M}_{T^*}(\mu)\neq 0$$

şi este ortogonal spaţiului H_0. Am obţinut o contradicţie şi teorema este demonastrată.

În mod asemănător se demonstrează şi următoarele teoreme:

TEOREMA 5. *Dacă T este un operator invariant-normaloid şi $p(\lambda)$ este un polinom care nu se anulează pe $\sigma(T)-\{0\}$ şi astfel încît $P(T)$ este un operator compact, atunci T este normal.*

TEOREMA 6. *Dacă T este un operator invariant-normaloid şi*

$$T^{*p_1}T^{q_1}\dots T^{*p_n}T^{q_n}$$

este un operator compact pentru un sistem de întregi $p_1, q_1\dots p_n, q_n$, atunci T este normal.

2. *Exemple de operatori normaloizi.*

1. *Operatorii hyponormali.* Un operator definit pe un spaţiu Hilbert este hyponormal dacă pentru orice $x\in H$

$$\|T^*x\|\leqslant\|Tx\|$$

2. *Operatorii de clasă* (N). Un operator T este de clasă (N) dacă

$$\|Tx\|^2\leqslant\|T^2x\|$$

oricare ar fi $x\in H$, $\|x\|=1$.

Este cunoscut că orice operator hyponormal este de clasă (N) şi că operatorii de clasă (N) sînt normaloizi [5]. De asemenea există operatori de clasă (N) care nu sînt hyponormali [6], [7].

3. *Operatorii de clasă* (N, k). Un operator T este de clasă (N, k) dacă

$$\|Tx\|^k\leqslant\|T^kx\|.$$

Orice operator de clasă (N) este de clasă (N, k) pentru orice k şi operatorii de clasă (N, k) sînt normaloizi [5].

4. Fie $L^2(\Gamma)$ şi H^2 clasa Hardy asociată, $\Gamma = \{z, |z| = 1\}$. P este proiecţia $L^2 \to H^2$. Dacă φ este o funcţie măsurabilă mărginită, operatorul

$$L_\varphi(f) = \varphi f$$

este denumit operator Laurent. Operatorul Toeplitz asociat este definit prin

$$T_\varphi(f) = P(\varphi f).$$

Operatorul T este normaloid ([2], problema 196, corollary 1).

Este evident că operatorii din exemplele 1—3 sînt invarianţi normaloizi.

3. *Produsul tensorial a doi operatori normaloizi*

Fie T_1 şi T_2 operatori definiţi pe un spaţiu Hilbert H şi să presupunem că sînt normaloizi. Este natural să ne punem problema naturii operatorului — produsul tensorial $T_1 \otimes T_2$ care acţionează pe spaţiul $H \otimes H$. Răspunsul la această problemă este dat de

TEOREMA 7. *Produsul tensorial* $T_1 \otimes T_2$ *este normaloid.*

Demonstraţie. A. Brown şi C. Pearcy [8] au demonstrat că

$$\sigma(T_1 \otimes T_2) = \sigma(T_1) \cdot \sigma(T_2).$$

De aici rezultă că

$$\sup_{\mu \in \sigma(T_1 \otimes T_2)} |\mu| = \|T_1\| \, \|T_2\|.$$

Cum $T_1 \otimes T_2$ satisface inegalitatea

$$\sup_{\mu \in \sigma(T_1 \otimes T_2)} |\mu| \leqslant \|T_1 \otimes T_2\| \leqslant \|T_1\| \, \|T_2\|,$$

rezultă că $T_1 \otimes T_2$ este normaloid.

În [8] a fost remarcat că dacă T_1 şi T_2 sînt hyponormali, $T_1 \otimes T_2$ este de asemenea hyponormal şi deci normaloid.

4. Vom remarca faptul că produsul a doi operatori normaloizi nu este în general normaloid.

Pentru aceasta să considerăm $H = L^2[0,1]$ şi operatorii T_f, T_g definiţi prin

$$T_f(\varphi) = f\varphi$$

$$T_g(\varphi) = g\varphi,$$

unde f, g sînt funcţii caracteristice pentru intervalele $[0,1/2]$, $[1/2,1]$ respectiv. Este evident că $T_f T_g = 0$. Cum

$$\langle T_f(\varphi), \varphi \rangle = \int_0^{\frac{1}{2}} |\varphi|^2 \, dt$$

putem alege φ astfel ca să fie egală cu 1. Analog pentru T_g. Cum însă

$$\|T_f\| = \|T_g\| = 1$$

ei sînt normaloizi.

Remarcă. *Dacă definim (pe spații Banach) operatorii normaloizi prin faptul că are loc egalitatea*

$$\gamma_T = \|T\|,$$

atunci exemple de produse de operatori care nu sînt normaloizi pot fi date cu ușurință

Observații. Teorema 1 este standard. Demonstrația dată este inspirată din [1], [3].

Teorema 2 este dată în [1].

Teoremele de structură și exemplele sînt inspirate după [4], [5], [6], [7].

Primită la redacție la 25 septembrie 1967

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România
str. M. Eminescu nr. 47,

Institutul politehnic
Timișoara

BIBLIOGRAFIE

1. S. Berberian, *A note on operators whose spectrum is a spectral set.* Acta Math. Sz., **XXVII**, *3–4.*
2. P. Halmos, *A Hilbert space problem book.* Van Nostrand, 1967.
3. S. Bernau, F. Smithies, *A note on normal operators.* Proc. Com. Philos. Soc., **59** (1963).
4. V. Istrățescu, T. Saito, T. Yoshino, *On a class of operators* Tohoku Math. J., **18**(**4**) (1966).
5. V. Istrățescu, I. Istrățescu, *On some classes of operators,* I, II Proc. Jap. Acad.
6. V. Istrățescu, *On operators of class (N).*
7. I. Furuta, *On paranormal operators.* Proc. Jap. Acad.
8. T. Saito, *Numerical range of tensor products of operators.* Tohoku Math. J., (**19**/**1**) (1967).
9. A. Wintner, *Zur Theorie der beschräknten Bilinearformen.* Math. Z., **30** (1929).

ASUPRA UNEI PROBLEME DIN TEORIA MIŞCĂRII PLANE STAŢIONARE A APELOR ARTEZIENE

DE

MIRCEA LUPU

În lucrarea de faţă se studiază mişcarea apelor arteziene spre un puţ practicat într-un mediu poros omogen limitat de trei arce de cerc şi un segment de dreaptă. Pentru rezolvarea problemei vom folosi formulele date de S. Gogonea [6] pentru o problemă pusă de M. Muskat [10]. În încheiere se particularizează potenţialul complex pentru cîteva cazuri şi se dă un exemplu de variaţie a debitului cu poziţia puţului.

§ 1. Ne propunem să studiem problema mişcării apelor arteziene spre un puţ practicat într-un mediu poros omogen, care ocupă un domeniu a cărui frontieră este parţial impermeabilă, iar restul este frontieră de alimentare.

Probleme de acest gen şi în care ca frontieră sînt considerate arce de cerc au fost studiate de A. Houpeurt [8], Gh. Petrescu [12], H. Ene [1], S. Gogonea ([6], [7]) etc.

Aici vom considera un mediu poros omogen limitat de trei arce de cerc şi un segment de dreaptă ortogonale între ele. Pentru reducerea problemei la o problemă la limită relativă la un semiplan, vom utiliza o serie de transformări conforme; în primul rînd transformarea

$$\zeta = \ln \frac{a+z}{a-z}, \tag{1}$$

unde a este un număr real pozitiv.

Această transformare defineşte coordonatele bipolare (coaxiale) utilizate foarte des în probleme de hidrodinamica fluidelor perfecte [9] şi vîscoase [2], în teoria filtraţiei [4], [12], în teoria elasticităţii [5] etc.

Alegem determinaţia logaritmului ca în figura 1; această transformare realizează o corespondenţă între planul fizic z care are o tăietură

ST. CERC. MAT., TOM. 20, Nr. 4, P. 511–518, BUCUREŞTI, 1968

pe axa Ox în exteriorul segmentului $P_1\,P_2$ şi banda infinită $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, $\beta \in [-\pi, \pi]$ din planul $\zeta = \alpha + i\beta$.

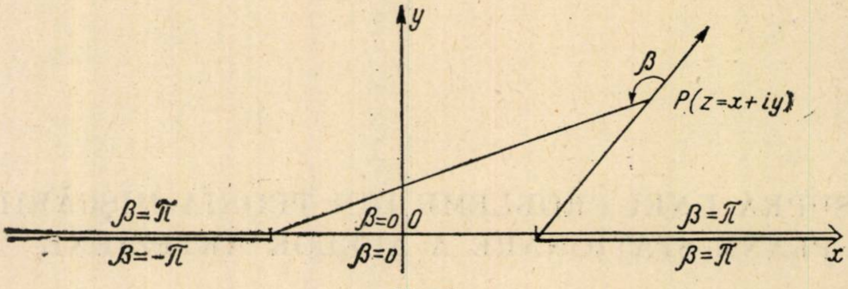


Fig. 1.

Inversînd relaţia (1) se obţine $z = a\,\text{th}\,\dfrac{\zeta}{2}$, unde partea reală şi imaginară vor fi : $x = a\,\dfrac{\text{sh}\,\alpha}{\text{ch}\,\alpha + \cos\beta}$, $y = a\,\dfrac{\sin\beta}{\text{ch}\,\alpha + \cos\beta}$. Transformarea (1) reprezintă o reţea ortogonală de curbe unde $\alpha = \text{const.}$ sînt cercuri cu centrul pe axa Ox, iar $\beta = \text{const.}$ sînt cercuri cu centrul pe axa Oy, care trec prin polii P_1 şi P_2.

§ 2. Considerăm planul fizic $z = x + iy$ şi deducem un arc de cerc de rază R cu centrul $C_0 \in Oy$; acest arc taie axa Ox în $P_1(-a, 0)$ şi $P_2(a, 0)$ care sînt polii sistemului de axe. Ducem apoi încă două arce de cerc, ortogonale primului arc, de raze R_1 şi R_2, cu centrele $C_1(-c_1, 0)$ şi $C_2(c_2, 0)$. Mediul poros considerat în domeniul D va avea frontiera $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, unde $\Gamma_1 = EF$ este frontiera de alimentare, iar $\Gamma_2 = FA_4A_1A_2A_3E$ este frontiera impermeabilă. În domeniul D considerăm un puţ de rază $r \lll d$, unde d este distanţa minimă pînă la frontieră (fig. 2).

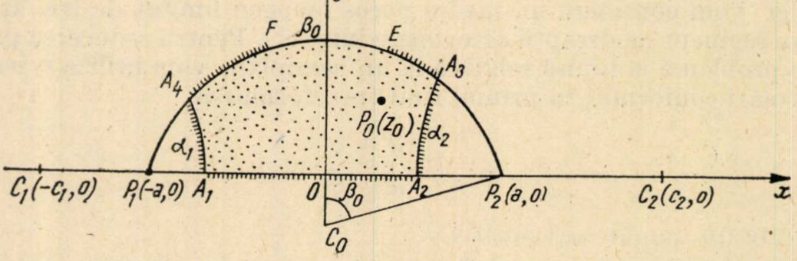


Fig. 2.

Presupunem întotdeauna că $(x_{A_2} - x_{A_1}) \neq 0$; din relaţia $z = a\,\text{th}\,\dfrac{\zeta}{2}$ obţinem $c_2 - R_2 = a\left(\text{th}\,\dfrac{\alpha_2}{2}\right)$ şi $R_1 - c_1 = a\left(\text{th}\,\dfrac{\alpha_1}{2}\right)$, iar din triunghiul C_0OP_2, $\beta_0 = \arcsin\dfrac{a}{R}$.

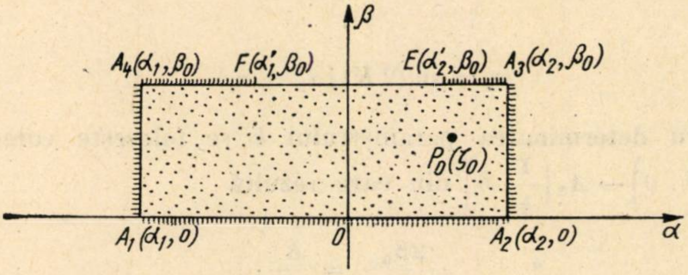
Admiţînd în această mişcare plană staţionară valabilitatea legii lui Darcy, problema care se pune este următoarea ([3], [13]) : să se determine potenţialul complex al mişcării $f(z) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y)$, funcţie analitică şi regulată în domeniul D, cu excepţia punctului z_0, unde avem o singularitate logaritmică, astfel încît să fie satisfăcute condiţiile la limită :

a) $\varphi(P) = 0$ pt $P \in \Gamma_1$

b) $\psi(P) = 0$ pt $P \in \Gamma_2$

c) $\varphi = k^* H$ pe cercul $|z - z_0| = r$,

unde H este diferenţa de nivel a fluidului liber şi a celui din puţ, iar k^* este coeficientul de filtraţie al mediului poros. Aplicînd transformarea (1) domeniului D din planul z îi va corespunde în planul ζ un dreptunghi, unde pe A_1A_4, $\alpha = \alpha_1$, pe A_2A_3, $\alpha = \alpha_2$ şi pe A_3A_4, $\beta = \beta_0$ (fig. 3).



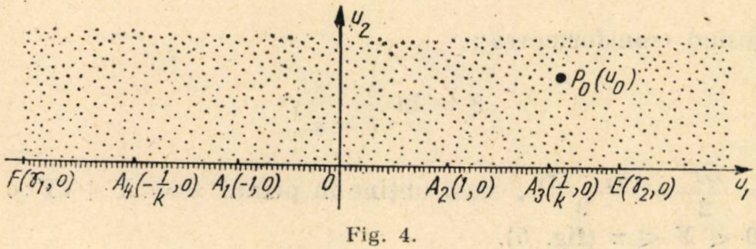
β
$A_4(\alpha_1,\beta_0)$
$F(\alpha_1',\beta_0)$
$E(\alpha_2',\beta_0)$
$A_3(\alpha_2,\beta_0)$
$P_0(\zeta_0)$
$A_1(\alpha_1,0)$
0
$A_2(\alpha_2,0)$
α

Fig. 3.

Facem translaţia

$$t = \zeta - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \tag{2}$$

pentru ca axa O_β să devină axă de simetrie pentru dreptunghi. În planul $t = t_1 + it_2$ afixele punctelor A_1 şi A_2 vor fi, respectiv, $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}$, $\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$. Să reprezentăm conform acest domeniu dreptunghiular pe semiplanul $\operatorname{Im} u > 0$, cu ajutorul formulei Schwartz—Christoffel, impunînd condiţiile : originile să se conserve, punctul A_2 $\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}, 0\right)$ să corespundă punctului $A_2\,(1, 0)$, iar punctul de la infinit din planul (u) să corespundă punctului (O, β_0) (fig. 4).



u_2
$P_0(u_0)$
$F(\tau_1,0)$
$A_4(-\frac{1}{k},0)$
$A_1(-1,0)$
0
$A_2(1,0)$
$A_3(\frac{1}{k},0)$
$E(\tau_2,0)$
u_1

Fig. 4.

Formula de transformare este :

$$t = k_1 \int_0^u \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} + k_2 , \tag{3}$$

unde $u = u_1 + iu_2$.

Folosind corespondenţa menţionată se determină uşor ([12], [13]) k_1 şi k_2 din (3) şi obţinem :

$$t = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2K} \int_0^u \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2)(1-k^2u^2)}} \tag{4}$$

sau

$$\frac{2Kt}{\alpha_2 - \alpha_1} = \int_0^u \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \tag{4'}$$

de unde

$$u = \operatorname{sn}(2Kt/\alpha_2 - \alpha_1) . \tag{5}$$

Pentru determinarea parametrului k se foloseşte corespondenţa $A_3\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}, 0\right) \longleftrightarrow A_3\left(\frac{1}{k}, 0\right)$ din care rezultă

$$\frac{2\beta_0}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{K'}{K} . \tag{6}$$

Presupunem că am determinat afixele lui E şi F în planul (u), astfel încît $u(F) = \gamma_1$ şi $u(E) = \gamma_2$. Făcînd translaţia

$$s = \operatorname{sn} \frac{2Kt}{\alpha_2 - \alpha_1} - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \tag{7}$$

axa Os_2 devine axă de simetrie pentru aceste puncte.

Coordonatele punctelor E şi F în planul $s = s_1 + is_2$ vor fi respectiv $\left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2}, 0\right)$ şi $\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}, 0\right)$.

Se observă că am ajuns la determinarea potenţialului complex al mişcării în semiplanul superior $\operatorname{Im} s > 0$, în prezenţa unui izvor negativ P, unde $EF \subset Os_1$ este impermeabil, iar restul axei frontieră de alimentare.

Folosind transformarea :

$$Z = \ln \frac{l + s}{l - s} , \tag{8}$$

unde $l = \frac{EF}{2} = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2}$, vom obţine în planul $Z = X + iY$ o bandă infinită $0 < Y < \pi$ (fig. 5).

Dacă facem translația $Z' = Z - i\pi$, obținem cazul tratat de S. Gogonea [6] care prin metoda imaginilor a obținut următorul potențial complex :

$$f(Z') = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{th} \dfrac{\pi [Z' - (a + ib)]}{4L}}{\operatorname{th} \dfrac{\pi [(Z' - (a - ib)]}{4L}}. \tag{9}$$

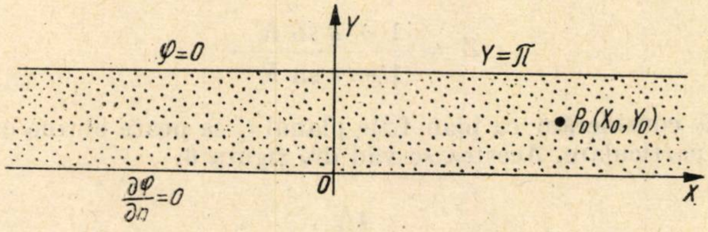


Fig. 5.

În cazul nostru $L = \pi$, iar $a + ib = X_0 - i(Y_0 - \pi)$, adică vom obține

$$f(Z) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{th} \dfrac{Z - [X_0 + i(2\pi - Y_0)]}{4}}{\operatorname{th} \dfrac{Z - (X_0 + iY_0)}{4}}. \tag{10}$$

Din (1), (2), (5), (7), (8) rezultă relația dintre Z și z :

$$Z = \ln \frac{-\gamma_1 + \operatorname{sn}\left[\dfrac{2K}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(\ln \dfrac{a+z}{a-z} - \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)\right]}{\gamma_2 - \operatorname{sn}\left[\dfrac{2K}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(\ln \dfrac{a+z}{a-z} - \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)\right]} = \ln \tau(z). \tag{11}$$

Folosind condițiile de limită c) și ținînd cont de (10) și (11), determinăm debitul

$$q = \frac{2\pi k^* H}{\ln \left| \dfrac{\operatorname{th} \dfrac{\ln \tau(z) - [X_0 + i(2\pi - Y_0)]}{4}}{\operatorname{th} \dfrac{\ln \tau(z) - (X_0 + iY_0)}{4}} \right|_{(x_0 + r,\, y_0)}}. \tag{12}$$

§ 3. Semnalăm cîteva cazuri particulare :

a) Cînd $\alpha_1 = \alpha_F = -\infty$, $\alpha_2 = +\infty$ se obține cazul tratat de H. Ene [1].

b) Cînd $\alpha_1 = \alpha_F = -\infty$, $\alpha_2 = \alpha_E = +\infty$ se obține cazul tratat de A. Houpeurt [8].

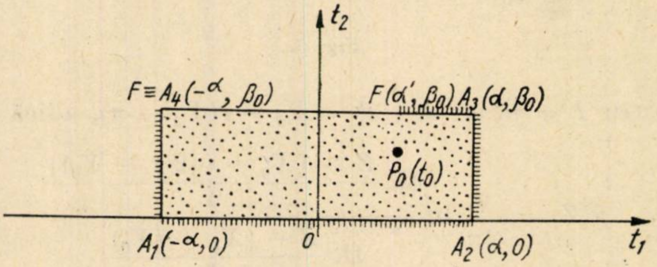
c) Cînd $\alpha_1 = \alpha_F$, $\alpha_2 = \alpha_E\,(\Gamma_1 = A_4A_3$, $\Gamma_2 = A_4A_1A_2A_3)$ avem

$$Z = \frac{1 + k\,\mathrm{sn}\left[\dfrac{2K}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(-\ln\dfrac{a+z}{a-z} - \dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)\right]}{1 - k\,\mathrm{sn}\left[\dfrac{2K}{\alpha_2 - \alpha_1}\left(-\ln\dfrac{a+z}{a-z} - \dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)\right]}. \tag{13}$$

d) Cînd $\alpha_1 = \alpha_F = -\infty$, $\alpha_2 = \alpha_E\,(\Gamma_1 = A_3P_1$, $\Gamma_2 = P_1A_2A_3)$ avem

$$Z = \frac{1 + k\,\mathrm{sn}\,K}{1 - k\,\mathrm{sn}\,K}. \tag{14}$$

Dacă considerăm ca plan fizic planul t, se poate obţine o altă serie de cazuri particulare. Acestea se văd din figura 6.



t_2
$F \equiv A_4(-\alpha, \beta_0)$
$F(\alpha', \beta_0)\,A_3(\alpha, \beta_0)$
$P_0(t_0)$
$A_1(-\alpha, 0)$
0
$A_2(\alpha, 0)$
t_1

Fig. 6.

e) În cazul din figură, (11) devine

$$Z = \ln\frac{k^{-1} + \mathrm{sn}\,(Kt/\alpha)}{\gamma_2 - \mathrm{sn}\,(Kt/\alpha)}. \tag{15}$$

f) Cînd $\Gamma_1 = A_4A_3$, $\Gamma_2 = A_4A_1A_2A_3$ obţinem :

$$Z = \ln\frac{1 + k\,\mathrm{sn}\,(Kt/\alpha)}{1 - k\,\mathrm{sn}\,(Kt/\alpha)}. \tag{16}$$

g) Cînd $\Gamma_1 = A_1$, A_4A_3, $\Gamma_2 = A_1A_2A_3$ obţinem

$$Z = \ln\frac{1 + \mathrm{sn}\,(Kt/\alpha)}{k^{-1} - \mathrm{sn}\,(Kt/\alpha)}. \tag{17}$$

h) Cînd $\Gamma_1 = A_1A_4A_3A_2$, $\Gamma_2 = A_1A_2$ obţinem

$$Z = \ln\frac{1 - \mathrm{sn}\,(Kt/\alpha)}{1 + \mathrm{sn}\,(Kt/\alpha)}. \tag{18}$$

În toate aceste cazuri particulare se poate determina potenţialul complex şi debitul, înlocuind z din fiecare caz în formulele (10), (12).

§ 4. Ca aplicaţie, vom trasa graficul variaţiei debitului unui puţ artezian cînd acesta este plasat pe o dreaptă paralelă la Ot_1 sau la Ot_2 în cazul f).

Vom alege $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$ şi raza puţului are în planul fizic z mărimea $r = 0{,}20$ m.

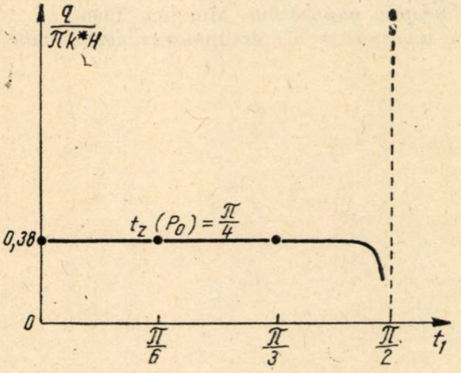


Fig. 7.

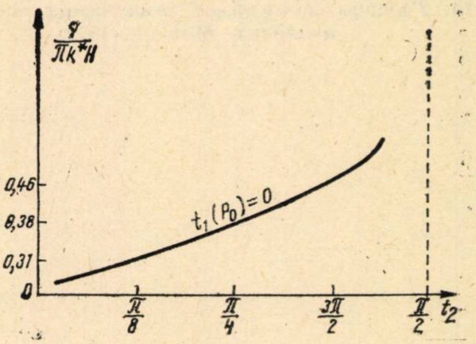


Fig. 8.

Abscisele centrului puţului pe dreapta $t_1 = 0$ sînt : $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$, iar ordonatele centrului puţului pe dreapta $t_1 = 0$ sînt : $\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}$.

Folosind relaţia (6) obţinem $\frac{K'}{K} = 1$ şi de aici determinăm [11] $k^2 = 0{,}5$ şi $K(0{,}5) = 1{,}85407$.

Rezultatele obţinute folosind (16), (12), (13), (14) sînt caracterizate în cele două grafice alăturate (fig. 7) (fig. 8). Rezultatele sînt pe deplin justificate.

Primită la redacţie la 7 septembrie 1967

Universitatea din Bucureşti
Facultatea de matematică şi mecanică,
Str. Academiei nr. 14.

BIBLIOGRAFIE

1. H. ENE, *Generalizarea unei probleme din mişcarea apelor arteziene.* St. cerc. mec. apl., **19**, 4, 1043–1049 (1965).
2. ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, *Două aplicaţii ale coordonatelor bipolare în hidrodinamica fluidelor viscoase.* Gazeta matematică şi fizică, seria A, *4*, 149–164 (1954).
3. ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, *Capitole din teoria mişcărilor în medii poroase.* Bucureşti, 1957.
4. ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, *Aplicaţii ale coordonatelor bipolare în mişcări sub baraje.* Gazeta matematică–fizică, seria A, *5*, 232–238 (1963).
5. ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, *Metode matematice în hidrogazo-dinamica subterană.* Ed. Academiei, Bucureşti, 1966, pag. 128–150 şi 98–101.
6. S. GOGONEA, *Cîteva mişcări în medii poroase în prezenţa unui contur de alimentare finit.* St. cerc. mat., **15**, 7, 825–835 (1964).

7. S. Gogonea, *Sur les mouvements dans les mileux poreux en présence d'une classe des frontières d'alimentation*. Journal de Mécanique, **5**, *3*, sept. 1966.
8. A. Houpeurt, *Éléments de mécaniques dans fluides des mileux poreux*. Paris, 1957.
9. L. M. Milne-Thomson, *Theoretical Hydrodynamics*. Londra, 1960.
10. M. Muskat, *The flow of homogeneous fluids through porous media*. Michigan, 1946.
11. Fritz Oberhettinge, W. Magnus, *Anwendung der elliptischen Funcktionen in Physik und Technik*. Berlin, 1949.
12. Gh. Petrescu, *Asupra mişcării apelor arteziene într-un domeniu concav*. St. cerc. mat., **17**, *7*, 1153 (1965).
13. Я. Уфлянд, *Биполярные координаты в теории упругости*. Москва, 1950.
14. *Тадлицы логарифмов комплексных чисел и переход от декартовых координат в полярных*. Москва, 1952.

ASUPRA DETERMINĂRII FUNCŢIEI DE REPREZENTARE CONFORMĂ ÎN CÎTEVA CAZURI PARTICULARE

DE

PETRIŞOR MAZILU

Se propune o metodă de reprezentare conformă a interiorului unui cerc pe un domeniu a cărui frontieră diferă puţin de o circumferinţă.

Presupunînd frontiera domeniului exprimată de ecuaţia implicită (1), se caută funcţia de reprezentare conformă sub forma seriei (2). Se arată că, în aceste condiţii, sîntem conduşi la a considera o succesiune de probleme la limită de tip Hilbert pentru cerc, care, la rîndul lor, se reduc imediat la probleme la limită de tip Dirichlet.

În virtutea acestor fapte se remarcă că în cazul particular în care curba este exprimată prin intermediul unei funcţii raţionale, putem face uz de formulele de rezolvare a problemei lui Dirichlet pentru cerc propuse de Caius Iacob [1].

Introducere. După cum se ştie, a reprezenta conform un domeniu pe interiorul unui cerc, înseamnă a construi o funcţie olomorfă care realizează o corespondenţă biunivocă între punctele domeniului şi cele ale cercului. De asemenea, a reprezenta conform interiorul unui cerc pe un domeniu revine la a determina o funcţie olomorfă în interiorul cercului, astfel încît ea să stabilească o corespondenţă biunivocă între punctele acestui cerc şi cele ale domeniului.

Dacă impunem corespondenţa a două puncte şi a două direcţii date, atunci cele două funcţii olomorfe de mai sus sînt una inversa celeilalte.

Prima formulare a problemei transformării conforme s-a dovedit a fi fructuoasă în ceea ce priveşte metodele de construcţie efectivă a funcţiei de reprezentare. Acest fapt este pe deplin explicabil dacă ţinem seama de numeroasele proprietăţi ale funcţiei de reprezentare conformă a unui domeniu pe un cerc. Astfel posibilitatea de a exprima funcţia de reprezentare conformă prin intermediul funcţiei lui Green a domeniului, ne poate conduce la rezolvarea unei probleme la limită de tip Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace [2].

De asemenea, proprietăţile variaţionale ale funcţiei de reprezentare conformă permit utilizarea unor metode de calcul cum sînt metoda

ST. CERC. MAT., TOM. 20, Nr. 4, P. 519–524, BUCUREŞTI, 1968

lui Ritz, sau metoda polinoamelor ortogonale [3]. În sfîrşit, legătura cu funcţia nucleu a domeniului ne pune la dispoziţie o metodă bazată pe ortonormalizarea unui şir complet de funcţii analitice [4].

Cea de-a doua formulare conduce la o funcţie ale cărei proprietăţi au fost mai puţin puse în evidenţă. Cu toate acestea ea se dovedeşte a fi utilă în cazul anumitor domenii particulare.

Astfel în cele ce urmează vom determina funcţia de reprezentare conformă a interiorului cercului unitate pe un domeniu cu frontiera apropiată de acest cerc.

Fie în planul $z = x + iy$ un domeniu simplu conex D mărginit de curba C dată de ecuaţia implicită

$$x^2 + y^2 - \lambda P(x, y) = 1, \tag{1}$$

unde $P(x, y)$ este funcţia analitică, iar λ este un parametru real (dacă $\lambda = 0$, curba C este de cercul de rază unitate).

Notînd $\bar{z} = x - iy$ şi înlocuind în (1) variabilele x, y cu $\frac{1}{2}(z + \bar{z})$; $\frac{1}{2}(z - \bar{z})$, obţinem

$$z\bar{z} - \lambda \Pi(z, \bar{z}) = 1. \tag{1'}$$

Considerăm în planul $\zeta = \xi + i\eta$ cercul $|\zeta| = 1$. Fie $z = z(\zeta)$ transformarea conformă a interiorului cercului $|\zeta| = 1$ pe domeniul D, determinată astfel încît $z(0) = 0$ şi $\operatorname{Im}\left\{\frac{dz}{d\xi}(0)\right\} = 0$.

Admitem că funcţia $z(\zeta)$ este analitică de parametru λ, deci

$$z(\zeta) = z_0\zeta + \lambda z_1(\zeta) + \lambda^2 z_2(\zeta) + \dots \tag{2}$$

Condiţiile impuse funcţiei de transformare conformă implică în mod evident

$$z_n(0) = 0; \quad \operatorname{Im}\left\{\frac{dz_n}{d\zeta}(0)\right\} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{3}$$

Menţionăm aici că determinarea funcţiei de transformare conformă corespunzătoare acestui caz a făcut şi obiectul lucrărilor lui L. V. Kantorovici care pentru a determina funcţiile $z_0(\zeta)$, $z_1(\zeta)\dots$, consideră un sistem infinit de ecuaţii cu o infinitate de necunoscute (amănunte ale metodei sînt expuse în [3]).

Înlocuind (2) în (1′) şi identificînd termenii ce nu conţin parametrul λ drept factor, obţinem pentru $|\zeta| = 1$

$$z_0(\zeta)\,\bar{z}_0(\zeta) = 1. \tag{4}$$

Condiţiile (3) şi (4) determină pe deplin funcţia $z_0(\zeta) \equiv \zeta$; deci (2) devine

$$z(\zeta) = \zeta + \lambda z_1(\zeta) + \lambda^2 z_2(\zeta) + \dots \tag{5}$$

Funcţia $\Pi(z, \bar{z})$ fiind analitică de $z, \bar{z}$ iar acestea la rîndul lor fiind analitice de parametrul λ, rezultă

$$(6)\quad \Pi[z(\zeta), \bar{z}(\zeta)] = \Pi(\zeta, \bar{\zeta}) + \lambda\left[z_1(\zeta)\frac{\partial\Pi}{\partial z}(\zeta, \bar{\zeta}) + \bar{z}_1(\zeta)\frac{\partial\Pi}{\partial\bar{z}}(\zeta, \bar{\zeta})\right] +$$

$$+ \lambda^2\left[z_2(\zeta)\frac{\partial\Pi}{\partial z}(\zeta, \bar{\zeta}) + \bar{z}_2(\zeta)\frac{\partial\Pi}{\partial\bar{z}}(\zeta, \zeta) + \frac{z_1^2(\zeta)}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial\bar{z}^2}(\zeta, \zeta) +\right.$$

$$\left.+ \frac{z_1^2(\zeta)}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial\bar{z}^2}(\zeta, \bar{\zeta}) + \frac{z_1(\zeta)\bar{z}_2(\zeta) + \bar{z}_1(\zeta)z_2(\zeta)}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial z\,\partial\bar{z}}\right] +$$

$$+ \lambda^3[\cdots] + \cdots$$

Introducînd (5) şi (6) în (1′) după transformări simple, rezultă pentru $(\zeta) = 1$

$$(7)\quad \zeta\bar{\zeta} + \lambda[\bar{\zeta}z_1(\zeta) + \zeta\bar{z}_1(\zeta)] + \lambda^2[\bar{\zeta}z_2(\zeta) + \zeta\bar{z}_2(\zeta) + z_1(\zeta)z_2(\zeta)] +$$

$$- \lambda\Pi(\zeta, \bar{\zeta}) - \lambda^2\left[z_1(\zeta)\frac{\partial\Pi}{\partial z}(\zeta, \bar{\zeta}) - \bar{z}_1(\zeta)\frac{\partial\Pi}{\partial\bar{z}}(\zeta, \zeta)\right] -$$

$$- \lambda^3[\cdots] + \ldots = 1$$

de unde, identificînd coeficienţii puterilor lui λ, rezultă

$$(8)\quad \bar{\zeta}z_1(\zeta) + \zeta\bar{z}_1(\zeta) = \Pi(\zeta, \bar{\zeta})$$

$$(9)\quad \bar{\zeta}z_2(\zeta) + \zeta\bar{z}_2(\zeta) = z_1(\zeta)\frac{\partial\Pi}{\partial z}(\zeta, \bar{\zeta}) + \bar{z}_1(\zeta)\frac{\partial\Pi}{\partial\bar{z}}(\zeta, \zeta) - z_1(\zeta)\bar{z}_1(\zeta)$$

$$(10)\quad \bar{\zeta}z_3(\zeta) + \zeta\bar{z}_3(\zeta) = z_2(\zeta)\frac{\partial\Pi}{\partial z}(\zeta, \bar{\zeta}) + \bar{z}_2(\zeta)\frac{\partial\Pi}{\partial\bar{z}}(\zeta, \zeta) + \frac{\bar{z}_1(\zeta)}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2}(\zeta, \bar{\zeta}) +$$

$$+ \frac{z_1(\zeta)\bar{z}_2(\zeta) + \bar{z}_1(\zeta)z_2(\zeta)}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial z\,\partial\bar{z}}(\zeta, \bar{\zeta}) + \frac{\bar{z}_1^2(\zeta)}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial\bar{z}^2}(\zeta, \bar{\zeta}) -$$

$$- \bar{z}_1(\zeta)z_2(\zeta) - z_1(\zeta)\bar{z}_2(\zeta)$$

şi în general

$$(11)\quad \bar{\zeta}z_n(\zeta) + \zeta\bar{z}_n(\zeta) = F[z_{n-1}(\zeta)\cdots z_1(\zeta), \zeta, \bar{z}_{n-1}(\zeta)\ldots\bar{z}_1(\zeta), \bar{\zeta}]$$

F fiind funcţie cunoscută rezultînd din (7).

Şirul de egalităţi (8) — (11) permite, după cum vom vedea, să determinăm prin metoda aproximaţiilor succesive funcţiile $z_1(\zeta)$, $z_2(\zeta)$....

Relaţia (8) este o condiţie la limită de tip Hilbert scrisă pentru funcţia $z_1(\zeta)$; în adevăr, ea mai poate fi scrisă

$$(8')\quad \operatorname{Re}\{\bar{\zeta}z_1(\zeta)\} = \frac{1}{2}\Pi(\zeta, \bar{\zeta}).$$

Utilizînd egalitatea $\bar{\zeta} = \dfrac{1}{\zeta}$, (8′) devine

$$(8'') \qquad \operatorname{Re}\left\{\frac{z_1(\zeta)}{\zeta}\right\} = \frac{1}{2}\,\Pi(\zeta, \bar{\zeta})$$

deoarece $z_1(0) = 0$, (8″) este o problemă la limită de tip Dirichlet scrisă pentru funcţia regulată în interiorul cercului $|\zeta| = 1$, $Z_1(\zeta) = \dfrac{z_1(\zeta)}{\zeta}$. După cum se ştie, soluţia unei astfel de probleme la limită este unic determinată, abstracţie făcînd de o constantă pur imaginară. Fie $Z_1(\zeta) + iC_1$ soluţia acestei probleme la limită; atunci

$$(12) \qquad z_1(\zeta) = \zeta\,[Z_1(\zeta) + iC_1].$$

Funcţia $z_1(\zeta)$, astfel determinată, satisface prima dintre condiţiile (3); cealaltă condiţie se scrie

$$(13) \qquad \operatorname{Im}\left\{\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}\zeta}(0)\right\} + C_1 = 0.$$

Din (13) se poate obţine imediat valoarea constantei C_1. Înlocuind, acum, pe $z_1(\zeta)$ în membrul drept al egalităţii (9), după transformări similare cu cele efectuate asupra membrului stîng al egalităţii (8), rezultă

$$(9') \qquad \operatorname{Re}\left\{\frac{z_2(\zeta)}{\zeta}\right\} = z_1(\zeta)\,\frac{\partial \Pi}{\partial z}(\zeta, \bar{\zeta}) + \bar{z}_1(\zeta)\,\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{z}}(\zeta, \bar{\zeta}) - z_1(\zeta)\, z_1(\zeta)$$

ceea ce reprezintă, dacă ţinem seama că $z_2(0) = 0$, o condiţie la limită de tip Dirichlet pentru funcţia regulată $z_2(\zeta) = \dfrac{z_2(\zeta)}{\zeta}$.

Fie $z_2(\zeta) + iC_2$ soluţia acestei probleme la limită; rezultă atunci că

$$z_2(\zeta) = \zeta\,[z_2(\zeta) + iC_2].$$

Constanta C_2 se determină din condiţia

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}\zeta}(0)\right\} = 0.$$

Procedînd analog putem determina în continuare şi funcţiile $z_3(\zeta)$, $z_4(\zeta)$, ...

Observaţie. Dacă $\Pi(z, \bar{z})$ este funcţie raţională, atunci datele la limită ale problemelor (8″), (9′) fiind de asemenea raţionale, soluţiile lor se obţin imediat prin metoda de rezolvare a problemei lui Dirichlet cu date raţionale, propusă de Caius Iacob [1].

Așa, de exemplu, dacă notăm cu $\Pi_0(\zeta)$ partea principală a funcției $\Pi\left(\zeta, \frac{1}{\zeta}\right)$ referitoare la singularitățile din interiorul cercului, atunci

$$z_1(\zeta) = 2\zeta\overline{\Pi}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) + iC_1\zeta. \tag{14}$$

Înlocuind pe $z_1(\zeta)$ din (14) în membrul drept al egalității (9′) și remarcînd că datele la limită ale acestei probleme a lui Dirichlet sînt de asemenea raționale, obținem pe aceeași cale funcția $z_2(\zeta)$. Acest procedeu aplicat în continuare permite determinarea funcțiilor $z_3(\zeta)$, $z_4(\zeta)$, ...

Exemplu. Drept aplicație ne propunem să determinăm funcția care reprezintă cercul $(\zeta) = 1$ pe interiorul elipsei

$$x^2 + y^2 - \lambda(x^2 - y^2) = 1 \tag{15}$$

ale cărei semiaxe sînt $(1-\lambda)^{-\frac{1}{2}}$ și $(1+\lambda)^{-\frac{1}{2}}$.

Sub forma complexă ecuația (15) se scrie

$$z\bar{z} - \lambda\frac{z^2 + \bar{z}^2}{2} = 1. \tag{15′}$$

Condițiile la limită (8) — (10) se scriu în acest caz

$$\bar{\zeta}z_1(\zeta) + \zeta\bar{z}_1(\zeta) = \frac{\zeta^2 + \bar{\zeta}^2}{2} \tag{16}$$

$$\bar{\zeta}z_2(\zeta) + \zeta\bar{z}_2(\zeta) = \zeta z_1(\zeta) + \zeta\bar{z}_2(\zeta) - z_1(\zeta)\bar{z}_1(\zeta) \tag{17}$$

$$\bar{\zeta}z_3(\zeta) + \zeta\bar{z}_3(\zeta) = \zeta z_2(\zeta) + \bar{\zeta}\bar{z}_2(\zeta) + \frac{z_1(\zeta)}{2} + \tag{18}$$

$$+ \frac{\bar{z}_1(\zeta)}{2} - \bar{z}_1(\zeta)z_2(\zeta) - z_1(\zeta)\bar{z}_2(\zeta).$$

Rezolvînd aceste probleme la limită obținem

$$z_1(\zeta) = \frac{\zeta^3}{2};\ z_2(\zeta) = \frac{1}{2}\left(\zeta^5 - \frac{1}{4}\zeta\right) \tag{19}$$

$$z_3(\zeta) = \frac{5}{8}\left(\zeta^7 - \frac{1}{2}\zeta^3\right)$$

Deci primii patru termeni ai dezvoltării (2′) dau

$$z(\zeta) = \zeta + \frac{\lambda}{2}\zeta^3 + \frac{\lambda^2}{2}\zeta\left(\zeta^4 - \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{8}\lambda^3\zeta^3\left(\zeta^4 - \frac{1}{2}\right)\cdots$$

Dacă $\lambda = \frac{1}{4}$, atunci (15) reprezintă elipsa

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = \frac{4}{15} \tag{20}$$

și (19) devine, dacă reținem pentru coeficienți doar două zecimale,

$$z(\zeta) = 0{,}99\,\zeta + 0{,}12\,\zeta^3 + 0{,}03\,\zeta^5 + 0{,}01\,\zeta^7. \tag{21}$$

Regăsim astfel, prin calcule extrem de simple, rezultatul obținut de L. V. Kantorovici [3] prin metoda sistemelor infinite.

După cum remarcă același autor, curba dată de (21) este foarte apropiată de elipsa (20), diferența maximă se găsește după calcule exacte, a fi mai mică de 0,02.

Primită la redacție la 10 iulie 1967

Universitatea din București.
Facultatea de matematică și mecanică,
Str. Academiei nr. 14

BIBLIOGRAFIE

1. Caius Iacob, *Rezolvarea problemei lui Dirichlet pentru cerc în unele cazuri particulare*. Comunicările Acad. R.P.R., **12**, *5*, 381–385 (1962).
2. Caius Jacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*. Bucarest–Paris,1959, p. 68–71.
3. L. V. Kantorovici, V. I. Krilov, *Metode de aproximație ale analizei superioare*. vol. II, I.S.R.S., 1955, p. 580–587.
4. Stefan Bergman, *The Kernel function and conformal mapping*. American Mathematical Society, 1950, p. 21–24.

METODĂ DE REZOLVARE A UNEI PROBLEME PLANE A ELASTICITĂȚII. DOMENII MULTIPLU CONEXE

DE

PETRIȘOR MAZILU

Se propune o metodă de determinare a funcțiilor de tensiune corespunzătoare unei probleme plane pentru un mediu elastic omogen și izotrop, în cazul unui domeniu multiplu conex și a condițiilor la limită formulate în tensiuni

Rezolvarea unei probleme plane a elasticității se reduce, din punct de vedere matematic, la integrarea, în anumite condiții la limită, a unei ecuații biarmonice. Există, în prezent, numeroase metode care permit determinarea efectivă a soluției. Astfel de metode, aplicabile în special domeniilor simplu conexe, sînt puțin adecvate abordării problemelor la limită în cazul domeniilor multiplu conexe. În aceste cazuri, frontiera domeniului, fiind formată dintr-un număr de curbe, ce pot avea uneori o structură foarte complexă, nu permite întotdeauna aplicarea cu succes a metodelor obișnuite, care cel mai adesea conduc la ecuații integrale scrise tocmai pe aceste curbe frontieră. De asemenea, este dificil de utilizat, în acest caz, metoda reprezentării conforme pe un domeniu canonic, aceasta, întrucît determinarea transformării conforme, însăși, comportă dificultăți greu de depășit și în plus problema, de cele mai multe ori, nu devine mai simplă după această reprezentare.

Metoda pe care o propunem în prezenta lucrare permite să abordăm probleme la limită în tensiuni, în cazul unor domenii multiplu conexe. Calculele ce le comportă rezolvarea unei probleme prin această metodă cuprind următoarele etape :

a) determinarea unui șir de funcții armonice, complet în domeniul respectiv ;

b) ortonormalizarea acestui șir față de un anumit produs scalar ;

c) determinarea unui șir de coeficienți Fourier.

După cum vom vedea, etapa a), care în general necesită cunoașterea unui număr de transformări conforme, decurge foarte simplu în cazul unui domeniu cu anumite regularități geometrice (cum este cazul anumitor structuri întîlnite în tehnică). Etapele *b*) — *c*) presupun calcu-

ST. CERC. MAT., TOM. 20, Nr. 4, P. 525–543, BUCUREȘTI, 1968

larea unor integrale pe domeniul D, respectiv pe frontiera domeniului D. Este interesant să remarcăm că etapa c) suferă simplificări importante, dacă frontierele interioare nu sînt solicitate, deoarece atunci coeficienții Fourier respectivi se obțin prin evaluarea unor integrale luate numai pe curba frontieră exterioară.

Fie, în planul $z = x + iy$, domeniul D avînd ordinul de conexiune $p + 1$ și fiind mărginit de curba $C = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_p$ compusă dintr-un număr finit de arce avînd curbură continuă.

După cum se știe, starea elastică este, în lipsa forțelor de volum, pe deplin determinată de funcțiile analitice $\varphi = \varphi(z)$; $\psi = \psi(z)$ prin intermediul cărora componentele tensorului tensiune și cele ale deplasării se exprimă după cum urmează [1] (accentele desemnează derivate):

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2\,[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(z)]\,[(\bar{\varphi}'(z) + \bar{\varphi}'(z)] \tag{1}$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2\,[z\bar{\varphi}''(z) + \bar{\psi}'(z)] \tag{2}$$

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - z\bar{\varphi}'(z) - \bar{\psi}(z), \tag{3}$$

unde μ este modulul de alunecare, iar $\varkappa = 3 - 4\nu$, ν fiind coeficientul lui Poisson.

Dacă condiția la limită este impusă tensiunilor, deci dacă cunoaștem pe frontieră combinația $\sigma_{n1} + i\sigma_{n2}$, atunci pentru $k = 0, 1, \ldots, p$

$$\varphi(z) + z\bar{\varphi}'(z) + \bar{\psi}(z)\big|_{c_k} = H(s) = H_k, \tag{4}$$

unde $H(s) = i\int_0^s (\sigma_{n1} + i\sigma_{n2})\, ds$, „$s$" fiind abscisa curbilinie măsurată dintr-un punct ales pe C_k, iar H_k constante complexe.

Componentele tensiunii mai pot fi exprimate, de asemenea, prin intermediul funcției de tensiune a lui Airy

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\,;\quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}\,;\quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\,, \tag{5}$$

A fiind funcție biarmonică, deci

$$\Delta\Delta A = 0. \tag{6}$$

Funcția lui Airy este legată de funcțiile analitice φ, ψ prin următoarele relații

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\,[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(z)] \\ \frac{\partial^2 A}{\partial \bar{z}^2} &= \frac{1}{2}\,[z\bar{\varphi}''(z) + \bar{\psi}'(z)], \end{aligned} \tag{7}$$

unde

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right);\quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Prin intermediul funcției A, condițiile la limită se scriu

$$(8)\qquad \left.\frac{\partial A}{\partial x}\right|_{C_k} = f(s) + f_k\,; \quad \left.\frac{\partial A}{\partial y}\right|_{C_k} = g(s) + g_k,$$

unde

$$f(s) = \operatorname{Re}\{H(s)\}\ ; \quad g(s) = \operatorname{Im}\ \{H(s)\}\ ;$$

f_k, g_k fiind constante reale.

Dacă n_1, n_2 sînt parametrii directori ai normalei la curba C, exterioară domeniului D și τ_1, τ_2 parametrii directori ai tangentei la curba$C$, orientată astfel încît unghiul ei cu normala să fie $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$, atunci

$$\left.\frac{\partial A}{\partial s}\right|_{C_k} = \tau_1 f(s) + \tau_2 g(s) + \tau_1 fk + \tau_2 g_k$$

$$\left.\frac{\partial A}{\partial n}\right|_{C_k} = n_1 f(s) + n_2\, g(s) + n_1 f_k + n_2 g_k\,.$$

Dacă integrăm prima dintre aceste egalități în raport cu abscisa curbilinie „s" și notăm

$$(9)\qquad F(s) = \int_0^s [\,\tau_1 f(s) + \tau_2 g(s)]\,\mathrm{d}s\,; \quad G(s) = n_1 f(s) + n_2\, g(s),$$

relațiile de mai sus devin

$$A\,|_{C_k} = F(s) + f_k x + g_k y + h_k$$

$$\left.\frac{\partial A}{\partial n}\right|_{C_k} = G(s) + n_1 f_k + n_2 g_k,$$

h_k fiind constante reale nedeterminate, obținute în urma integrării.

Așadar, determinarea funcției lui Airy necesită integrarea ecuației (6) cu condițiile la limită (9).

Aplicînd formula lui Green funcției A și funcției ω, armonică în D, sîntem conduși la egalitatea

$$(10)\qquad \iint_D w\,.\,\Delta A\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_C \frac{\partial A}{\partial n}\,\omega \mathrm{d}s - \int_C A\,\frac{\partial \omega}{\partial n}\,\mathrm{d}s$$

Remarcăm că în cazul condițiilor la limită (9) membrul drept este cunoscut, oricare ar fi funcția armonică ω dată. Dacă definim un produs scalar potrivit și determinăm un șir de funcții armonice complet în raport cu mulțimea funcțiilor armonice în D, atunci egalitatea (10) permite calcularea coeficienților Fourier corespunzători funcției armonice ΔA.

Pentru domenii simplu conexe o astfel de metodă a fost propusă de Z. H. Rafalson [2] și reluată de G. A. Grimberg [3], cel din urmă aplicînd-o la un domeniu de formă dreptunghiulară.

În cele ce urmează vom examina posibilitatea de a aplica această metodă pentru domenii multiplu conexe, indicînd totodată calea care trebuie urmată pentru a determina constantele f_k, g_k, h_k ce figurează în condițiile la limită (9).

În vederea acestui scop prezentăm în paragrafele următoare cîteva considerații asupra șirurilor complete de funcții armonice într-un domeniu.

1. Considerăm un domeniu multiplu conex mărginit de curbele simple închise, rectificabile $C_0, C_1, \ldots C_p$ (C_0 desemnînd frontiera exterioară); fie D_0 domeniul simplu conex interior curbei C_0, iar D_k domeniul exterior curbei C_k.

Notăm $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_0$ mulțimea funcțiilor armonice uniforme în domeniul D, respectiv D_0 și $\mathcal{A}_k$ mulțimea funcțiilor armonice uniforme în $D_k (k = 1, \ldots, p)$ nule la infinit. Notăm, de asemenea, cu $\mathcal{L}_k$ mulțimea funcțiilor de forma

$$\beta_k = \lambda \operatorname{Re} \{\lg (z - z_k)\} \ ; \quad z_k \in C_{D_k} ; \quad \lambda \in R ; \quad (k = 1,2 \ldots, p),$$

unde C_{D_k} este complementul domeniului D_k și R corpul numerelor reale.

Evident, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_k$, $\mathcal{L}_k$ sînt spații liniare în raport cu operațiile de adunare și înmulțire cu scalari a funcțiilor.

În continuare vom considera în locul unei funcții din $\mathcal{A}_k$ sau $\mathcal{L}_k$, restricția acesteia la domeniul $D \cap D_k$.

Întrucît confuziile sînt excluse, vom nota mulțimea acestor restricții cu același simbol $\mathcal{A}_k (k = 0, 1, \ldots, p)$. $\mathcal{L}_k (k = 1, \ldots, p)$. În aceste condiții putem scrie

$$\mathcal{A}_k \subset \mathcal{A} \text{ pentru } k = 0, 1, \ldots, p \quad \text{și}$$
$$\mathcal{L}_k \subset \mathcal{A} \text{ pentru } k = 1, \ldots, p.$$

Considerăm produsul scalar definit pe $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$:

$$< \sigma, \tau > = \iint_D \sigma(x, y) \tau(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

și norma generată de acest produs scalar

$$\| \sigma \|^2 = \iint_D [\sigma (x,y)]^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Se poate arăta acum că $\mathcal{A}$ este spațiu Hilbert, pentru aceasta fiind suficient să demonstrăm că este spațiu Banach în raport cu norma definită.

Fie $\{\omega_n\}_{n \in N}$, $\omega_n \in \mathcal{A}$, un șir convergent, P un punct din D și Δ_r un cerc de rază r, cu centrul în P; atunci, conform teoremei de medie,

$$\omega_n(P) - \omega_m(P) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\Delta_r} [\omega_n(Q) - \omega_m(Q)] \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y,$$

de unde

$$| \omega_n(P) - \omega_m(P) | \leqslant \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\Delta_r} | \omega_n(Q) - \omega_m(Q) | \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

şi în virtutea inegalităţii lui Schwarz, pentru integrale,

$$\iint_{\Delta_r} |\omega_n(Q) - \omega_m(Q)|\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \sqrt{\pi}\, r \left[\iint_{\Delta_r} |\omega_n(Q)-\omega_m(Q)|^2\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{1/2},$$

şi deci

$$|\omega_n(P) - \omega_m(P)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}\, r} \iint_{\Delta_r} |\omega_n(Q) - \omega_m(Q)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

dar cum

$$\iint_{\Delta_r} |\omega_n(Q) - \omega_m(Q)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint_D |\omega_n(Q)| - \omega_m(Q)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

rezultă

$$|\omega_n(P) - \omega_m(P)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}\, r} \|\omega_n - \omega_m\|$$

ceea ce înseamnă că $\{w_n\}_{n\in N}$ este un şir uniform convergent în interiorul lui D, adică în orice domeniu Δ; $\overline{\Delta} \subset D$. Notăm $\omega_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \omega_n$; în continuare trebuie arătat că $\omega_0 \in \mathcal{A}$. Fie Δ, $\overline{\Delta} \subset D$ un domeniu mărginit de curba Γ şi fie $G(P, Q)$ funcţia lui Green corespunzătoare; atunci [4]

$$\omega_n(P) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \omega_n(Q) \frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_Q}\, \mathrm{d}s_Q.$$

Dar cum $\omega_n \dfrac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q}$ este uniform convergentă pe Γ, rezultă că

$$\omega_0(P) = \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} \int_\Gamma \omega_n(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{n\partial_Q}\, \mathrm{d}s_Q = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \omega_0(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q}\, \mathrm{d}s_Q$$

şi deci

$$\omega_0 = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \omega_0(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q}\, \mathrm{d}s_Q$$

ceea ce înseamnă că ω_0 este funcţie armonică, uniformă în Δ şi, cum acesta este un domeniu arbitrar, cuprins în D, rezultă că $\omega \in \mathcal{A}$.

Numim acoperire liniară a reuniunii $\bigcup\limits_{k=0}^{p} \mathcal{A}_k \cup \bigcup\limits_{k=1}^{p} \mathcal{L}_k$, spaţiul liniar format din elementele de forma

$$\lambda_0\omega_0 + \lambda_1\omega_1 + \ldots + \lambda_p\omega_p + \mu_1\beta_1(\beta_1) + \ldots + \mu_p\beta_p$$

cu $\omega_k \in \mathcal{A}_k$ şi $\beta_k \in \mathcal{L}_k$, λ_k, $\mu_k \in R$; notăm această acoperire liniară: $S_p\left\{\bigcup\limits_{k=0}^{p} \mathcal{A}_k \cup \bigcup\limits_{k=1}^{p} \mathcal{L}_k\right\}$.

Se constată că are loc egalitatea

$$\mathcal{A} = S_p \left\{ \bigcup_{k=0}^{p} \mathcal{A}_k \cup \bigcup_{k=1}^{p} \mathcal{L}_k \right\}.$$

În adevăr, dacă $\omega \in S_p \left\{ \bigcup_{k=0}^{p} \mathcal{A}_k \cup \bigcup_{k=1}^{p} \mathcal{L}_k \right\}$, deoarece $\mathcal{A}_k$, $\mathcal{L}_k$ sînt subspaţii liniare, ale lui $\mathcal{A}$, rezultă $\omega \in \mathcal{A}$. Să presupunem că $\omega \in \mathcal{A}$; fie atunci ω^* conjugata armonică a funcţiei ω. Dacă ω^* este funcţie uniformă în D, iar Δ este un domeniu ales astfel încît $\overline{\Delta} \subset D$ şi Γ este frontiera lui, atunci, notînd $w = \omega + i\,\omega^*$, putem scrie conform formulei integrale a lui Cauchy

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Să notăm cu $\Gamma_k (k = 1, \ldots, \rho)$ curba frontieră a lui Δ ce conţine în interiorul ei pe C_{D_k} şi cu Γ_0 curba frontieră a domeniului Δ, ce lasă în exterior pe C_{D_0}. Cu aceste notaţii putem scrie

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{p} \oint_{\Gamma_k} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

În continuare vom arăta că

$$w_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_0} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

este restricţia la domeniul interior curbei Γ_0 a unei funcţii analitice în D_0 iar

$$w_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_k} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad (k = 1, \ldots, p)$$

este restricţia la domeniul exterior curbei Γ_k a unei funcţii analitice în D_k, nulă la infinit.

Într-adevăr, fie domeniul Δ_0 astfel încît $\overline{\Delta}_0 \subset D_0$. Alegînd atunci pe Δ astfel încît curba simplu închisă Γ_0, frontiera „exterioară'' a domeniului Δ, să conţină în interiorul ei pe Δ_0, se constată uşor că $w_0(z)$ este analitică în Δ_0 şi nu depinde de alegerea curbei Γ_0 (această ultimă afirmaţie este consecinţă a faptului că $\dfrac{w(\zeta)}{\zeta - z}$ este analitică şi uniformă oricare ar fi $z \in \Delta_0$ şi $\zeta \in D - \overline{\Delta}_0$). Domeniul Δ_0 fiind arbitrar, rezultă că $w_0(z)$ este analitică în D_0. Acelaşi raţionament ne convinge că $\omega_k(z)$ sînt analitice în D_k. De aici rezultă imediat că, în ipoteza că ω^* este funcţie uniformă,

$$\omega \in S_p \left\{ \bigcup_{k=0}^{p} \mathcal{A}_k \right\} \subset S_p \left\{ \bigcup_{k=0}^{p} \mathcal{A}_k \cup \bigcup_{k=1}^{p} \mathcal{L}_k \right\}.$$

Presupunînd că ω^* nu este funcție uniformă, dacă $\gamma_k = \int_{C_k} \frac{\partial \omega^*}{\partial s} \mathrm{d}s$ sînt perioadele ei, atunci diferența

$$\omega - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \beta_k$$

va avea conjugata armonică uniformă și deci

$$\omega - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \beta_k \in S_p \left\{ \bigcup_{k=0}^{p} \mathcal{A}_k \right\}$$

de unde rezultă că

$$\omega \in S_p \left\{ \bigcup_{k=0}^{p} \mathcal{A}_k \cup \bigcup_{k=1}^{p} \mathcal{L}_k \right\}.$$

2. Fie ω o funcție armonică și fie ω^* conjugata ei; dacă L este o curbă simplă închisă, rectificabilă, din domeniul de definiție al funcției ω, notăm

$$[\omega]_l = \int_L \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} \mathrm{d}z ; \ [\omega]_L^* + \int_L w \mathrm{d}z,$$

unde w este funcția analitică asociată funcției armonice ω

$$w = \omega + i\,\omega^*.$$

Lema 1. *Există un șir de funcții* $\omega_n^k \in \mathcal{A}_k (k = 0,1,2, \ldots , \mathrm{p})$ $n = 0,1,2,\ldots$ *bază a spațiului liniar* $\mathcal{A}_k$, *astfel încît să fie îndeplinite următoarele condiții* :

a) *dacă* $k = 0$, *atunci*

$[\omega_n^0]_{C_l} = [w_n^0]_{C_l}^* = 0$ *pentru* $n = 1,2 \ldots , \ l = 1, 2, \ldots, \mathrm{p}$

b) *dacă* $k = 1, \ldots, p$, *atunci*

$[\omega_n^k]_{C_l} = 0$ *pentru* $n = 1,2, \ldots ; \ l = 1, 2, \ldots, \mathrm{p}$

$[\omega_n^k]_{C_l}^* = 0$ *pentru* $n = 1,2, \ldots$ *dacă* $l \neq k$;

$\mathrm{Im} \ \{[\omega_n^k]_{C_k}^*\} = 0$ *pentru* $n = 1$;

$\mathrm{Re} \ \{[\omega_n^k]_{C_k}^*\} = 0$ *pentru* $n = 2$;

$[\omega_n^k]_{C_l}^* = 0$ *pentru* $n = 3,4, \ldots$ *și* $l = 1, \ldots, p$.

Demonstrație. a) Fie $\zeta = \zeta_0 (z)$ transformarea conformă a domeniului D_0 pe cercul $|\zeta| < 1$ din planul $\zeta = \xi + i\eta$; șirul

$$\omega_0^0 = 1, \ \omega_1^0 = \mathrm{Im} \ \{ \zeta_0(z)\} ; \ \omega_2^0 = \mathrm{Re} \{ \zeta_0(z)\} \ldots$$

$$\omega_{2m-1}^0 = \mathrm{Im} \ \{[\zeta_0(z)]^m \}; \ \omega_{2m}^0 = \mathrm{Re} \ \{[\zeta_0 (z)]^m \} \ldots$$

este o bază a spațiului $\mathcal{A}_0$. Într-adevăr, fie $\omega \in \mathcal{A}_0$ și fie ω^* conjugata ei armonică; funcția $w(z) = \omega + i\omega^*$ fiind analitică în D_0, rezultă că

$w[z^0(\zeta)]$ este analitică în interiorul cercului $|\zeta| < 1$. (Am notat cu $z^0(\zeta)$ transformarea ce reprezintă cercul $|\zeta| < 1$ pe D_0.)

De aici urmează imediat posibilitatea de a dezvolta funcția $w[z^0(\zeta)]$ în serie Taylor, uniform convergentă în interiorul cercului $|\zeta| = 1$:

$$w(z^0(\zeta)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$$

de unde rezultă

$$\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [\zeta_0(z)]^n$$

și deci ținînd seama de notațiile de mai sus,

$$\omega = Re\,\{w(z)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \omega_n^0,$$

unde α_n sînt constante reale deduse direct din coeficienții a_n.

Fie w_n^0 funcția analitică în D_0 atașată funcției armonice ω_n^0; deoarece D_0 este un domeniu simplu conex, rezultă că

$$\int_{C_l} w_n^0 \mathrm{d}z = \int_{C_l} \frac{\mathrm{d}w^0}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z = 0$$

oricare ar fi $l = 1, \ldots, p$ și deci $[\omega_n^0]_{C_l} = [\omega_n^0]_{C_l} = 0$.

b) $k = 1, \ldots, n$. Fie $\zeta = \zeta_k(z)$ transformarea conformă a domeniului D_k pe exteriorul cercului $|\zeta| = r_k$, r_k fiind un număr real pozitiv determinat astfel încît $\lim\limits_{\zeta \to \infty} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta} = 1$; atunci șirul

$$\omega_1^k = \mathrm{Im}\,\{[\zeta_k(z)]^{-1}\};\ \omega_2^k = \mathrm{Re}\,\{[\zeta_k(z)]^{-1}\}$$

$$\omega_{2m-1}^k = \mathrm{Im}\,\{[\zeta_k(z)]^{-m}\};\ \omega_{2m}^k = \mathrm{Re}\{[\zeta_k(z)]^{-1}\}$$

este o bază a spațiului liniar normat $\mathcal{A}_k$, aceasta putîndu-se verifica pe o cale asemănătoare cu cea urmată la demonstrația subpunctului a).

Pentru funcțiile armonice ω_n^k astfel determinate avem $[\omega_n^k]C_l = 0$, oricare ar fi $l = 1, \ldots, p$ și $n = 1, 2, \ldots$.

Într-adevăr, funcția analitică atașată funcției ω_n^k este, după cum se verifică ușor, $(-i)[\zeta_k(z)]^{-m}$ dacă $n = 2m - 1$ și $[\zeta_k(z)]^{-(n)}$ dacă $n=2m$ și atunci: dacă C_l' este curba care corespunde prin transformarea conformă $\zeta = \zeta_k(z)$ curbei C_l,

$$[\omega_{2m-1}^k]_{C_l} = (-i)\int_{C_l} \frac{\mathrm{d}[\zeta_k(z)]^{-m}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z = (-i)\int_{C_l'} \frac{\mathrm{d}(\zeta^{-m})}{\mathrm{d}\zeta}\,\mathrm{d}\zeta$$

$$[\omega_{2m-1}^k]_{C_l} = \int_{C_l} \frac{\mathrm{d}[\zeta_k(x)]^{-m}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z = \int_{C_l'} \frac{\mathrm{d}(\zeta^{-m})}{\mathrm{d}\zeta}\,\mathrm{d}\zeta$$

de unde rezultă că

$[\omega_n^k]_{C_l} = 0$ oricare ar fi $n = 1, 2, \ldots$ și $l = 1, \ldots, p$.

De asemenea,

$$[\omega_{2m-1}^k]_{C_l}^* = (-i)\int_{C_l} [\,\zeta_k(z)]^{-m}\,\mathrm{d}z = (-\,i)\int_{C_l'} \zeta^{-m}\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\,\mathrm{d}\,\zeta$$

$$[\omega_{2m}^k]_{C_l}^* = \int_{C_l} [\,\zeta_k(z)]^{-m}\,\mathrm{d}z = \int_{C_l'} \zeta^{-m}\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\,\zeta}\,\mathrm{d}\zeta$$

de unde pentru $k \neq l$, $\zeta^{-n}\,\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}$ fiind olomorfă în domeniul interior curbei C_l', rezultă

$$\int_{C_l'} \zeta^{-n}\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\,\mathrm{d}\zeta = 0$$

și deci în acest caz

$$[\omega_n^k]_{C_l} = 0 \text{ oricare ar fi } n = 1,2,\ldots\,;$$

dacă $k = l$, atunci curba C_l' este cercul $|\,\zeta\,| = r_k$ și dacă ținem seama că

$$\zeta^{-m}\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta} = \zeta^{-m}\left[1 + \frac{a_1}{\zeta} + \ldots\right],$$

rezultă că

$$\int_{C_l'} \zeta^{-m}\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\,\mathrm{d}\,\zeta = 0 \quad (m = 2, 3\,\ldots)$$

deci $[\omega_n^k]_{C_k}^* = 0$ pentru $n = 3, 4, \ldots$ și $l = 1, \ldots, p$.

Remarcăm, în plus, că Re $[\omega_1^k]_{C_k}^*$ și Im $[\omega_2^k]_{C_k}^* = 0$ fiind deci îndeplinite toate condițiile subpunctului b).

CONSECINȚE. *Dacă* $\omega_0^k \in \mathcal{L}_k (k = 1, \ldots, \mathrm{p})$, *atunci* $\bigcup\limits_{k=0}^{p} \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \omega_n^k$ *este bază a spațiului liniar normat* $\mathcal{A}$, *verificînd următoarele condiții :*
dacă $k = 0$, atunci $[\omega_n^0]_{C_l} = [\omega_n^0]_{C_l}^* = 0$ pentru $n = 0, 1, \ldots$ și $l = 1, \ldots, p$
dacă $k = 1, \ldots, \mathrm{p}$, atunci $[\omega_0^k]_{C_l} = 0$ pentru $l \neq k$ și $[\omega_n^k]_{C_l} = 0$ pentru $n = 1,2,\ldots\,;$ $l = 1\ldots p$, de asemenea $[\omega_1^k]_{C_l}^* = [\omega_2^k]_{C_l}^* = 0$ pentru $l \neq k$,

$$\mathrm{Re}\,\{[\omega_1^k]_{C_l}^*\} = 0 : \ \mathrm{Im}\,\{[\omega_2^k]_{C_k}^*\} = 0 \text{ și}$$
$$[\omega_n^k]_{C_l}^* = 0 \text{ pentru } n = 3, 4, \ldots\ l = 1, \ldots, \mathrm{p}.$$

Într-adevăr, $\bigcup\limits_{k=0}^{p} \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \omega_n^k$ este baza spațiului Hilbert $\mathcal{A}$; aceasta rezultă imediat în virtutea egalității

$$\mathcal{A} = S_p \left\{ \bigcup_{k=1}^{p} \mathcal{A}_k \cup \bigcup_{k=1}^{p} \mathcal{L}_k \right\}$$

de asemenea, prin alegerea funcțiilor ω_n^k, sîntem asigurați de verificarea condițiilor scrise.

Notăm $\mathcal{A}_i^k$, $i = 0, 1, 2$; $k = 1, \ldots, p$, subspațiile liniare ale lui $\mathcal{A}$ definite după cum urmează

$$\mathcal{A}_0^k = \{\omega \in \mathcal{A}/[\omega]_{C_l} = 0 \quad \text{pentru} \quad l \leqslant k\}$$

$$\mathcal{A}_1^k = \{\omega \in \mathcal{A}/\text{Im } [\omega]_{C_l}^{*} \quad \text{pentru} \quad l \leqslant k\}$$

$$\mathcal{A}_2^k = \{\omega \in \mathcal{A}/ [\omega]_{C_l}^{*} = 0 \quad \text{pentru} \quad l \leqslant k\},$$

atunci $\mathcal{A}_i^k$ sînt subspații liniare închise ale spațiului $\mathcal{A}$. Să dovedim aceasta pentru $\mathcal{A}_0^k$.

Fie $\{\omega_m\}_{m \in N}$; $\omega_m \in \mathcal{A}_0^k$ convergent în normă; fie $\omega = \lim\limits_{m \to \infty} \omega_m$; notăm w_m și w funcțiile analitice atașate funcțiilor armonice ω_m respectiv ω. Întrucît, în cazul funcțiilor armonice (după cum am văzut cînd am demonstrat completitudinea spațiului liniar $\mathcal{A}$), convergența în normă implică convergența uniformă în interiorul domeniului D, iar aceasta la rîndul ei atrage după sine convergența uniformă a șirului de funcții analitice atașate, rezultă $\lim\limits_{m \to \infty} w_m = w$ și în virtutea teoremei lui Weierstrass referitoare la convergența unui șir de funcții analitice

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\mathrm{d}w_m}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$$

deci $\lim\limits_{m \to \infty} [\omega_m]_{C_l} = [\omega]_{C_l} = 0$ de unde rezultă $\omega \in \mathcal{A}_0^k$. Analog se demonstrează că $\mathcal{A}_1^k$, $\mathcal{A}_2^k (k = 1, \ldots, p)$ sînt spații liniare închise.

Subspațiile liniare $\mathcal{A}_i^k$ sînt în următorul raport față de relația de incluziune

$$\mathcal{A} \supset \mathcal{A}_0^1 \supset \ldots \supset \mathcal{A}_0^p \supset \ldots \supset \mathcal{A}_1^p \supset \mathcal{A}_2^0 \supset \ldots \supset \mathcal{A}_2^p.$$

Aceasta se verifică ușor dacă avem în vedere definiția subspațiilor liniare $\mathcal{A}_i^k$ și ținem seama că dacă $[\omega]_{C_l}^{*} = 0$, atunci și $\text{Im } [\omega]_{C_l}^{*} = 0$, iar aceasta din urmă implică $[\omega]_{C_l} = 0$.

Reamintim aici teoremea proiecției într-un spațiu Hilbert [5].

Dacă $\mathcal{X}$ este un spațiu Hilbert iar E este un subspațiu liniar închis al lui $\mathcal{X}$, atunci orice element $x \in \mathcal{X}$ se reprezintă în mod unic sub forma $x = u + v$ cu $u \in E$ și $v \in E^{\perp}$ ($E^{\perp}$ fiind complementul ortogonal al lui E).

Fie $\omega \in \mathcal{A}_i^k \subset \mathcal{A}$; considerăm subspațiul liniar închis $\mathcal{A}_i^{k+1}$ (sau dacă $k = p$, $\mathcal{A}_{i+1}^1$), aplicînd teorema proiecției elementului ω și subspațiului liniar închis $\mathcal{A}_i^{k+1}$ (sau $\mathcal{A}_{i+1}^1$) rezultă $\omega = \sigma + \tau$ cu $\sigma \in \mathcal{A}_i^{k+1}$ și $\tau \in \mathcal{A}_i^{k+1\perp}$ (respectiv dacă $k = p$, $\sigma \in \mathcal{A}_{i+1}^1$ și $\tau \in \mathcal{A}_{i\ 1}^1$).

LEMA 2. $\{\omega_n^0\}_{n=0,1,\ldots} \cup \bigcup\limits_{l=k+1}^{p} \omega_i^l \cup \bigcup\limits_{l=1}^{p} \{\omega_n^l\}_{n=i+1,\,i+2}$ *este bază a spațiului liniar* $\mathcal{A}_i^k$.

Demonstrația. a) $i = 0$. Fie $\omega \in \mathcal{A}_0^k$; atunci, întrucît $\mathcal{A}_i^k \subset \mathcal{A}$, $\omega = \sum\limits_{l=0}^{p} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n^l \omega_n^l$ și deoarece seria este uniform convergentă

$$[\omega]_{C_h} = \sum_{l=0}^{p} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^l [\omega_n^l]_{C_h} = \lambda_0^h [\omega_0^h]_{C_h}$$

de unde, în virtutea faptului că pentru $h \leqslant k$, $[\omega]_{C_h} = 0$ și $[\omega_0^h]_{C_h} \neq 0$, rezultă că $\lambda_0^h = 0$ pentru orice $h \leqslant k$ așadar

$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^0 \omega_n^0 + \sum_{l=k+1}^{p} \lambda_0^l \omega_0^l + \sum_{l=1}^{p} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^l \omega_n^l$$

ceea ce demonstrează afirmația lemei pentru $i = 0$.

b) $i = 1, 2$. Demonstrația urmează o cale asemănătoare cu cea corespunzătoare cazului $i = 0$.

TEOREMĂ. *Există o bază ortonormală* $\{\omega_n\}_{n=1.2,\dots}$ *a spațiului Hilbert* $\mathcal{A}$, *avînd următoarele proprietăți* :

i) *dacă notăm* $\alpha_{kl} = [\omega_l]_{C_k}$; $k, l = 1, \dots, \mathrm{p}$, *atunci det* $|\alpha_{kl}| \neq 0$;

ii) $[\omega_n]_{c_k} = 0$ *pentru* $n > p$ *și* $k = 1, \dots, p$;

iii) *dacă notăm* $\beta_{kl} + i\gamma_{kl} = [\omega_{p+l}]^*_{C_k}$ $k, l = 1, \dots, p$, *atunci* det $|\beta_{kl}| \neq 0$;

iv) *dacă notăm* $i\delta_{kl} = [\omega_{2p+l}]^*_{c_k}$ $k, l = 1, \dots, p$, *atunci* det $|\delta_{kl}| \neq 0$;

v) $[w_n]^*_{C_l} = 0$ *pentru* $n > 3p$; $k = 1, \dots, p$.

Demonstrație. Considerăm subspațiul liniar $\mathcal{A}_2^p$. Prin definiție, dacă $\omega \in \mathcal{A}_2^p$, atunci $[\omega]^*_{C_l} = 0$ pentru $l = 1, \dots p$. Conform lemei 2 șirul

$$\{\omega_n^0\}_{n=0,1,\dots} \cup \bigcup_{k=1}^{p} \{\omega_n^l\}_{n>2}$$

este bază a spațiului liniar $\mathcal{A}_2^p$; notăm cu $\omega_{3p+1}, \omega_{3p+2} \dots$ șirul obținut prin ortonormalizarea bazei de sus. Fie acum funcția $\omega_2^p \in \mathcal{A}_2^{p-1}$ determinată în lema 2. Aplicînd teorema proiecției amintită mai sus, putem scrie $\omega_2^p = \sigma + \tau$; $\sigma \in \mathcal{A}_2^p$ și $\tau \in \mathcal{A}_2^{p\perp}$. Dacă notăm $\omega_{3p} = \dfrac{\tau}{\|\tau\|}$, rezultă $< \omega_{3p}, \omega_{3p+q} > = 0$ pentru $q = 1, 2, \dots$ și $\|\omega_{3p}\| = 1$. De asemenea, dacă ținem seama de egalitatea $[\omega_2^p]^*_{C_l} = [\sigma]^*_{C_l} + [\tau]^*_{C_l}$ și de faptul că $[\sigma]^*_{C_l} = 0$, rezultă imediat $\tau \in \mathcal{A}_2^{p-1}$; deci și $\omega_{3p} \in \mathcal{A}_2^{p-1}$.

Considerînd succesiv funcțiile

$$\omega_2^{p-1} \in \mathcal{A}_2^{p-2} \dots \omega_1^p \in \mathcal{A}_1^{p-1} \dots \omega_0^p \in \mathcal{A}_0^{p-1} \dots \omega_0^1 \in \mathcal{A}$$

și aplicînd același raționament ca mai sus, obținem în cele din urmă șirul ortonormal $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_{3p}, \omega_{3p+1} \dots$ ale cărui elemente sînt determinate astfel încît

$$\omega_{k+1} \in \mathcal{A}_0^k,\ \omega_{p+k+1} \in \mathcal{A}_1^k;\ \omega_{2p+k+1} \in \mathcal{A}_2^k,\quad k = 1, 2, \dots, p.$$

Vom arăta că acesta este un exemplu de bază a spaţiului liniar $\mathcal{A}$, satisfăcînd condiţiile din enunţul teoremei.

Să arătăm că $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{3p}, \omega_{3p+1}, \ldots$ este bază a spaţiului liniar $\mathcal{A}$. Se poate arăta mai întîi că $\omega_{3p}; \omega_{3p+1} \ldots$ este bază a subspaţiului liniar $\mathcal{A}_2^{p-1}$. Pentru aceasta fie $\omega \in \mathcal{A}_2^{p-1}$, după cum am văzut în lema 2

$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^0 \omega_n^0 + \lambda_2^p \omega_2^p + \sum_{l=1}^{p} \sum_{n=3}^{\infty} \lambda_n^l \omega_n^l$$

dar cum $\omega_2^p = \sigma + \tau$ cu $\sigma \in \mathcal{A}_2^p$ şi $\tau \in \mathcal{A}_2^{p-1}$, rezultă, dacă ţinem seama că $\tau = \| \tau \| \omega_{3p}$,

$$\omega = \lambda_2^p \| \tau \| \omega_{3p} + \lambda_2^p \sigma + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^0 \omega_n^0 + \sum_{l=1}^{p} \sum_{n=3}^{\infty} \lambda_n^l \omega_n^l .$$

Dacă avem în vedere că

$$\lambda_2^p \sigma + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^0 \omega_n^0 + \sum_{l=1}^{p} \sum_{n=3}^{\infty} \lambda_n^l \omega_n^l \in \mathcal{A}_2^p$$

şi deci poate fi scris sub forma seriei $\sum\limits_{n=3p+1}^{\infty} \lambda_n \omega_n$ şi dacă notăm în plus $\lambda_{3p} = \lambda_2^p \| \tau \|$ rezultă imediat că $\omega = \sum\limits_{n=3p}^{\infty} \lambda_n \omega_n$. Procedînd, în continuare, analog, putem arăta că

$$\omega_{3n-1}, \omega_{3p}, \omega_{3p+1}, \ldots,$$

este bază a spaţiului liniar $\mathcal{A}_2^{p-3}$;

$$\omega_{3p-2}, \omega_{3p-1}, \omega_{3p}, \omega_{3p+1}, \ldots$$

este bază a spaţiului liniar $\mathcal{A}_2^{p-3}$ ş.a.m.d. şi demonstra în cele din urmă faptul că $\omega_1, \omega_2, \ldots$ este bază a spaţiului liniar $\mathcal{A}$.

Rămîne să arătăm că elementele acestei baze satisfac condiţiile i)-v).

Remarcăm că pentru $n > p$, prin construcţie, $\omega_n \in \mathcal{A}_0^p$ iar pentru $n > 2p$, $\omega_n \in \mathcal{A}_1^p$ şi deci condiţiile ii) şi v) sînt satisfăcute.

Să presupunem, prin absurd, că elementele $\omega_1 \ldots \omega_p$ nu satisfac condiţia i), deci că det $|\alpha_{kl}| = 0$; atunci există $\lambda_k = 1, \ldots, p$ astfel încît $\Sigma \lambda_k \alpha_{kl} = 0$ oricare ar fi $l = 1, \ldots, p$ şi dacă notăm $\omega = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k \omega_k$, rezultă, oricare ar fi $l = 1, \ldots$, p, $[\omega]_{C_l} = 0$ şi deci $\omega \in \mathcal{A}_0^p$. De aici, ţinînd seama de faptul că şirul ω_n este astfel construit, încît, dacă $\omega \in \mathcal{A}_0^p$, atunci, oricare ar fi $k = 1, \ldots, p < \omega, \omega_k > = 0$, urmează imediat că $\lambda_k = 0 (k = 1, \ldots, p)$ ceea ce contrazice presupunerea făcută.

Urmînd un raţionament asemănător, ne convingem de îndeplinirea condiţiilor iii) -iv) ceea ce demonstrează în întregime teorema.

3. Folosind cele prezentate în paragrafele precedente, trecem, în continuare, la integrarea ecuaţiei biarmonice (6) cu condiţiile la limită de forma (9).

Reamintim mai întîi cîteva considerații generale ce se pot face asupra funcțiilor de tensiune în cazul domeniilor multiplu conexe. În ipoteza absenței dislocațiilor, funcțiile analitice φ, ψ ce intervin în relațiile (1)—(3) sînt de forma

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{k=1}^{p} \gamma_k' \lg (z - z_k) + \varphi_0(z) \\ \psi &= \sum_{k=1}^{p} \gamma_k'' \lg (z - z_k) + \psi_0(z)\,. \end{aligned} \tag{11}$$

unde

$$\begin{aligned} z_k \in C_{D_k}\,;\ \gamma_k' &= -\frac{1}{2\pi(\varkappa + 1)} (X_k + iY_k) \\ \gamma_k'' &= \frac{\varkappa}{2\pi(\varkappa + 1)} (X_k - iY_k) \end{aligned} \tag{12}$$

X_k, Y_k fiind componentele rezultantei forțelor ce acționează pe frontiera C_k, iar φ_0 ψ_0 funcții analitice uniforme în D.

Înlocuind (11) și (12) în (14) și notînd

$$H_0(s) = H(s) - \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \lg (z - z_k) + \gamma_k' \frac{z}{\bar{z} - \bar{z}_k} - \sum_{k=1}^{p} \bar{\gamma}_k'' \,\overline{\lg}(z - z_k)$$

obținem

$$\varphi_0(z) + z\bar{\varphi}_0'(z) + \bar{\psi}_0(z)\big|_{C_k} = H_0(s) + H_k\,. \tag{13}$$

Notînd

$$B = \operatorname{Re}\left\{\bar{z} \sum_{k=1}^{p} \gamma_k' \lg (z - z_k) + \sum_{k=1}^{p} \gamma_k'' \lg (z - z_k)\right\}$$

și considerînd funcția $A_0 = A - B$ constatăm că

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_0}{\partial z \partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} [\varphi_0'(z) + \bar{\varphi}_0'(z)] \\ \frac{\partial^2 A_0}{\partial z^2} &= \frac{1}{2} [z (\bar{\psi}_1''(z) + (\bar{\varphi}_0''(z)]. \end{aligned} \tag{14}$$

Remarcăm că, prin modul în care a fost definită, funcția A_0 este biarmonică.

Dacă notăm

$$\begin{aligned} F_0(s) &= F(s) - B|_C \\ G_0(s) &= G(s) - \frac{\partial B}{\partial n}\bigg|_C \end{aligned}$$

unde, ca de obicei, prin $B|_C$ și $\dfrac{\partial B}{\partial n}\bigg|_C$ desemnăm valoarea funcției B, respectiv a derivatei ei normale pe curba C, atunci condițiile la limită (9) se transcriu pentru A_0 după cum urmează

$$
\begin{aligned}
&A_0|_{C_k} = F_0(s) + f_k x + g_k y + h_k \\
&\frac{\partial A_0}{\partial n}\bigg|_{C_k} = G_0(s) + n_1 f_k + n_2 g_k .
\end{aligned} \tag{15}
$$

Urmează deci să determinăm funcția biarmonică A_0 care satisface condițiile la limită (15).

Dacă notăm $\omega = \Delta A_0$ și ținem seama de prima dintre egalitățile (14), trebuie să avem, cu notațiile propuse mai înainte,

$$
[\omega]_{C_k} = [\omega]^*_{C_k} = 0, \; k = 1, \ldots, 3p. \tag{16}
$$

Pentru a asigura satisfacerea acestor $3p$ condiții dispunem de constantele f_k, g_k, h_k pînă acum nedeterminate.

Remarcăm mai întîi că putem considera, fără a restrînge generalitatea problemei, $f_0 = g_0 = h_0 = 0$, deoarece, în caz contrar, realizăm aceasta adăugînd funcției A_0, $-(f_0 x + g_0 y + h_0)$, căreia îi corespunde o stare de tensiune nulă.

Să aplicăm formula lui Green funcției ω și uneia dintre funcțiile șirului $\{\omega_n\}_{n=1,2,\ldots}$ determinat în teorema din paragraful precedent.

Notînd

$$
a_n = \int_C \frac{\partial A_0}{\partial n}\,\omega_n \mathrm{d}s - \int_C A \frac{\partial \omega_n}{\partial n}\,\mathrm{d}s \tag{17}
$$

și reamintindu-ne că $\{\omega_n\}_{n=1,2,\ldots}$ este un șir ortonormal, rezultă că

$$
\omega = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega_n . \tag{18}
$$

Pentru a fi satisfăcute condițiile (16) este necesar și suficient ca pentru $n = 1, \ldots, 3p$, să avem $a_n = 0$.

Suficiența reiese imediat dacă ținem seama că pentru $n > 3p$, $[\omega_n]_{C_k} = [\omega]^*_{C_k} = 0$ oricare ar fi $k = 1, \ldots, p$ precum și de faptul că seria (18) fiind uniform convergentă, putem scrie

$$
[\omega]_{C_k} = \sum_{n=3p+1}^{\infty} a_n [\omega_n]_{C_k} = 0
$$

respectiv

$$
[\omega]^*_{C_k} = \sum_{n=3p+1}^{\infty} a_n [\omega_n]^*_{C_k} = 0
$$

Să presupunem acum, pentru a demonstra necesitatea, că sînt îndeplinite condițiile (16); atunci putem scrie pentru $k = 1$, $[\omega]_{C_1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_n [\omega_n]_{C_1}$ și cum șirul $\{\omega_n\}_{n=1,2,\ldots}$ a fost construit astfel încît $[\omega_1]_{C_1} \neq 0$ și $[\omega_n]_{C_1}$ oricare ar fi $n = 2, 3, \ldots,$ rezultă că $a_1 = 0$. Considerînd apoi $[\omega]_{C_2} = \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_n [\omega_n]_{C_2}$ şi făcînd din nou apel la proprietăţile şirului $\{\omega_n\}_{n=1,2,\dots}$ rezultă $a_2 = 0$; repetînd acelaşi raţionament rezultă în continuare că $a_3 = a_4 = \dots = a_p = 0$.

Printr-un procedeu analog se arată că

$$a_{p+1} = a_{p+2} = \dots = a_{2p} = a_{2p+1} = \dots = a_{3p} = 0.$$

Să notăm ω_n^* conjugata armonică a funcţiei ω_n. Urmează, dacă ţinem seama de egalitatea

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial n} = \frac{\partial \omega_n^*}{\partial s}$$

precum şi de faptul că oricare ar fi $n = 1, 2, \dots, \omega_n$ este uniformă, că

$$\int_{C_k} \frac{\partial \omega_n}{\partial n} \mathrm{d}s = \int_{C_k} \frac{\partial \omega^*}{\mathrm{d}n} \mathrm{d}s = -[\omega_n]_{C_k} \tag{19}$$

(integralele de mai sus şi cele ce vor urma de acum înainte vor fi considerate în sensul de parcurgere care lasă domeniul D la stînga).

Ţinînd seama că

$$\int_{C_k} x \frac{\partial \omega}{\partial n} \mathrm{d}s = \int_{C_k} x \frac{\partial \omega^*}{\partial s} \mathrm{d}s$$

şi integrînd prin părţi în membrul drept, rezultă pentru $n = p + 1, \dots$

$$\int_{C_k} x \frac{\partial \omega_n}{\partial n} \mathrm{d}s = -\int_C \omega_n^* \mathrm{d}s$$

de unde, întrucît

$$n_1 = \frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial y}{\partial s},$$

$$\int_{C_k} \left(n_1 \omega_n - x \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) \mathrm{d}s = \int_{C_k} \omega_n dy + \omega_n^* \mathrm{d}x = -\operatorname{Im}\{[\omega_n]_{C_k}^*\} \tag{20}$$

şi în mod asemănător

$$\int_C \left(n_2 \omega_n - y \frac{\partial \omega_n}{\partial n} \right) \mathrm{d}s = \operatorname{Re}\{[\omega_n]_{C_k}^*\}. \tag{21}$$

În continuare vom determina constantele f_k, g_k, h_k astfel încît să fie îndeplinite condiţiile (16).

După cum am văzut, condiţiile (16) sînt echivalente condiţiilor $a_n = 0$, $n = 1, \dots, 3p$.

Introducînd în (17) pe A_0, $\frac{\partial A_0}{\partial n}$ din (15) rezultă, dacă ţinem seama de (19), (20), (21) precum şi de proprietăţile şirului $\{\omega_n\}_{n=1,2,\dots}$,

$$\int_C \left[G_0(s)\omega_n - F_0(s)\frac{\partial \omega_n}{\partial n}\right] ds + \sum_{k=1}^{p} f_k \int_{C_k}\left[x\,\omega_n - x\frac{\partial \omega_n}{\partial n}\right] ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} g_k \int_{C_k}\left[n_2\omega_n - y\frac{\partial \omega_n}{\partial s}\right] ds + \sum_{k=1}^{p} h_k[\omega_n]_{C_k} = 0 \qquad (n = 1, \dots, p)$$

$$\int_C \left[G_0(s)\omega_n - F_0(s)\frac{\partial \omega_n}{\partial n}\right] ds - \sum_{k=1}^{p} f_k \ \mathrm{Im}\{[\omega_n]^*_{C_k}\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} g_k \,\mathrm{Re}\{[\omega_n]^*_{C_k}\} = 0 \qquad (n = p + 1, \dots, 2\,p)$$

$$\int_C \left[G_0(s)\,\omega_n - F_0(s)\frac{\partial \omega}{\partial n}\right] ds - \sum_{k=1}^{p} f_k \,\mathrm{Im}\{[\omega_n]^*_{C_k} = 0 \quad (n=2p+1, \dots, 3p)$$

ceea ce constituie un sistem de ecuaţii algebrice avînd constantele f_k, g_k, h_k necunoscute.

Cu notaţiile întrebuinţate în teorema din paragraful 2, ultimul grup de ecuaţii se scrie

$$\sum_{k=1}^{p} f_k \delta_{kl} = \int_C \left[G_0(s)\,\omega_{2p+l} - F_0(s)\frac{\partial \omega_{2p+l}}{\partial n}\right] ds \qquad k, l = 1, 2, \dots, \mathrm{p}$$

şi cum teorema de mai sus (punctul iv)) ne asigură de faptul că det $|\,\delta_{kl}\,| \neq 0$, rezultă imediat posibilitatea determinării constantelor f_k, $k = 1, \dots$, p Introducînd aceste constante în cel de-al doilea grup de ecuaţii rezultă, în virtutea punctului iii) al aceleaşi teoreme, posibilitatea determinării constantelor g_k. În sfîrşit, înlocuind în primul grup de ecuaţii constantele f_k, g_k cu valorile lor aflate anterior şi ţinînd seama de punctul ii) al teoremei, rezultă că putem determina în mod unic şi constantele h_k.

Seria (18) avînd, după cum am văzut mai înainte, primii 3 p coeficienţi nuli, se reduce la

$$\omega_0 = \sum_{n=3p+1}^{\infty} a_n \omega_n .$$

Dacă introducem (15) în (17) şi ţinem seama că pentru $k=1, \dots, p$ $[\omega_n]_{C_k} = [\omega]^*_{C_k} = 0$, pentru $k = 1, \dots, p$ rezultă că

$$a_n = \int_C \left[G_0(s)\,\omega_n - F_0(s)\frac{\partial \omega_n}{\partial n}\right] ds$$

şi deci

$$\omega = \sum_{n=3p+1}^{\infty} \int_C \left[G_0(s)\,\omega_n - F_0(s)\frac{\partial \omega_n}{\partial n}\right] ds \cdot \omega_n . \tag{22}$$

Acum determinarea funcției A_0 se reduce la rezolvarea ecuației $\Delta A_0 = \omega_0$, căreia îi asociem prima sau a doua dintre condițiile la limită (15), ceea ce ne conduce la o problemă a lui Dirichlet, respectiv a lui Neumann, pentru ecuația lui Poisson de mai sus.

Este mai indicat să urmăm o cale care permite determinarea funcției analitice φ, ψ într-o manieră mai simplă decît rezolvarea unei probleme la limită de tip Dirichlet sau Neumann.

Prima dintre relațiile (14) este echivalentă cu egalitatea $\omega = 2\, Re\{\varphi_0'\}$, de unde , notînd la fel ca mai înainte w_n, funcția analitică atașată funcției armonice ω_n rezultă

$$\varphi_0' = \frac{1}{2}\sum_{n=3p+1}^{\infty}\int_C\left[G_0(s)\omega_n - F_0(s)\frac{\partial\omega_n}{\partial n}\right]\mathrm{d}s\cdot w_n \tag{23}$$

și de aici printr-o integrare putem determina funcția φ_0.

Considerînd, acum, condiția la limită (13), care este în mod evident echivalentă cu

$$\psi_0\,|_{C_k} = H_0(s) - \overline{\varphi}_0\,|_{C_k} - \bar{z}\varphi_0'\,|_{C_k} + H_k$$

și ținînd seama de formula integrală a lui Cauchy și de faptul că dacă $z \in D$, atunci

$$\int_{C_k}\frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = 0$$

rezultă

$$\psi_0 = \frac{1}{2\pi_i}\int_C\frac{H_0(s) - \overline{\varphi}_0(\zeta) - \bar{\zeta}\varphi_0'(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

ceea ce determină deplin funcția ψ_0.

4. Să presupunem că D este un domeniu nemărginit, exterior curbelor $C_1, \ldots, C_p$.

Se știe că în acest caz funcțiile de tensiune φ, ψ sînt de forma

$$\begin{aligned}\varphi &= \sum_{k=1}^{p}\gamma_k'\lg(z - z_k) + \Gamma z + \varphi_0(z)\\ \psi &= \sum_{k=1}^{p}\gamma_k''\lg(z - z_k) + \Gamma' X_k + \psi_0(z),\end{aligned} \tag{24}$$

unde, ca de obicei, am notat

$$\gamma_k' = -\frac{X_k + iY_k}{2\pi(\varkappa + 1)}\,;\quad \gamma_k'' = \frac{\varkappa(X_k - iY_k)}{2\pi(\chi + 1)}$$

Γ, Γ' fiind constante determinate de starea de tensiune și de rotație la infinit, φ_0, ψ_0 fiind funcții analitice uniforme și nule la infinit. Condiția la limită (4) se transcrie pentru funcțiile φ_0, ψ_0 :

$$\varphi_0 + z\overline{\varphi}_0'(z) + \overline{\psi}_0(z)\,|_{C_k} = H_0(s) + H_k, \tag{25}$$

unde

$$H_0(s) = H(s) - \sum_{k=1}^{p}\left[\gamma_k' \lg(z - z_k) + \gamma_k' \frac{z}{\bar{z} - \bar{z}_k}\right] - \sum_{k=1}^{p} \gamma_k'' \overline{\lg}(z - z_k) - \tag{26}$$

$$- (\Gamma z + \bar{\Gamma}\bar{z} + \bar{\Gamma}'\bar{z}).$$

Dacă notăm

$$B = \operatorname{Re}\left\{\bar{z}[\Sigma \gamma_k' \lg(z - z_k) + \Gamma z] + \sum_{k=1}^{p} \gamma_k'' \lg(z - z_k) + \frac{1}{2}\Gamma' z^2\right\}$$

şi considerăm $A_0 = A - B$, fiind funcţia lui Airy, atunci rezultă imediat

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_0}{\partial z \partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}[\varphi_0'(z) + \bar{\varphi}_0'(z)] \\ \frac{\partial^2 A}{\partial \bar{z}^2} &= \frac{1}{2}[z\bar{\varphi}_0''(z) + \bar{\psi}_0'(z)] \end{aligned} \tag{27}$$

iar condiţiile la limită (9) devin

$$\begin{aligned} A_0|_{C_k} &= F_0(s) + f_k x + g_k y + h_k \\ \left.\frac{\partial A_0}{\partial n}\right|_{C_k} &= G_0(s) + n_1 f_k + n_2 g_k, \end{aligned} \tag{28}$$

unde

$$F_0(s) = F(s) - B|_C$$

$$G_0(s) = G(s) - \left.\frac{\partial B}{\partial n}\right|_C.$$

Notînd $\omega = \Delta A_0$ şi ţinînd seama de faptul că φ_0 este uniformă, din prima egalitate (27) rezultă că $[\omega]_{C_k} = [\omega_0]_{C_k}^* = 0$.

Notăm cu $\mathcal{A}$ mulţimea funcţiilor armonice, uniforme în D şi nule la infinit şi definim pe $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ produsul scalar

$$< \sigma, \tau > = \iint_D \sigma\tau \, dx \, dy \qquad \sigma, \tau \in \mathcal{A},$$

(integralele din membrul drept au sens dată fiind comportarea la infinit a funcţiilor ce aparţin mulţimii $\mathcal{A}$).

Urmînd pas cu pas raţionamentul expus pentru cazul în care D este un domeniu mărginit, putem construi un şir ortonormal de funcţii uniforme armonice, complet în D, astfel încît să fie verificate condiţiile i) — v) ale teoremei din § 3, ceea ce permite determinarea constantelor f_k, g_k, h_k şi a funcţiei

$$\omega = \sum_{n=3p+1}^{\infty} a_n \omega_n$$

ai cărei coeficienți sînt dați de

$$a_n = \sum_{k=1}^{p} \int_{C_k} \left[G_0(s)\omega_n - F_0(s) \frac{\partial \omega_n}{\partial n} \right] \mathrm{d}s.$$

Calculînd, în continuare, funcțiile φ_0' și φ_0, putem determina cu ajutorul condiției la limită (25) funcția ψ_0

$$\psi_0 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{p} \int_{C_k} \frac{H_0(s) - \overline{\varphi}_0(\zeta) - \overline{\zeta}\,\varphi_0'(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta.$$

Concluzii. Rezolvarea problemei la limită (9) prin metoda propusă mai sus, necesită cunoașterea unui șir de funcții armonice, complet în D.

Un astfel de șir, odată determinat, permite, prin calcule, care principial nu comportă dificultăți, să determinăm soluția problemei la limită.

Cum am văzut, în general, pentru determinarea acestui șir, este necesar să reprezentăm conform D_0, $D_k(k = 1, \ldots, p)$ pe interiorul, respectiv exteriorul, unui cerc.

Așadar, ordinul de dificultate al problemei nu este mai mare decît cel al efectuării a $p + 1$ reprezentări conforme .

Desigur, problema suferă simplificări importante dacă D prezintă anumite particularități geometrice. Interesant este cazul în care curbele $C_1, \ldots C_p$ se obțin una din alta printr-o translație (eventual printr-o rototranslație).

În acest caz, determinarea șirului complet de funcții armonice pretinde doar două reprezentări conforme (a domeniului D_0 și cea a unuia dintre domeniile exterioare unei curbe C_k).

Există cazuri particulare în care este mai comod să determinăm șirul de funcții armonice complet, pe o cale diferită de cea care folosește reprezentarea conformă.

Astfel este cazul în care frontiera domeniului D este formată de curbele coordonate $q_1 = \text{const.}$, $q_2 = \text{const.}$ ale unui sistem de coordonate curbilinii.

Drept exemplu remarcăm aici domeniul corespunzător unui sistem de coordonate cartezian (x, y) . În acest caz problema se reduce la a determina un șir de funcții armonice uniforme, complet în interiorul sau exteriorul unui dreptunghi, ceea ce se realizează deosebit de ușor prin metoda separării variabilelor.

Primită la redacție la 10 iulie 1967

Universitatea din București
Facultatea de matematică și mecanică
str. Academiei nr. 14

BIBLIOGRAFIE

1. Х. И. МУСХЕЛИШВИЛИ, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. Изд. наук СССР, Москва, 1954.
2. З. Х. РАФАЛСОН, *К вопросу о решении бигармонического уравнения*. ДАН СССР, **64**, *6* (1949).
3. Г. А. ГРИМБЕРГ, *О решении плоской задачи теории упругости и задачи об изгибе тонкой плиты с закрепленным контуром*. ДАН ССР, **76** (1951).
4. CAIUS JACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides* Bucarest-Paris, 1959.
5. В. И. СМИРНОВ, *Курс высшей математики*. т. V. Госуд. изд. физ—мат., Москва, 1959.

ASUPRA UNUI CRITERIU PENTRU VERIFICAREA IPOTEZEI NULE DIN ANALIZA DISPERSIONALĂ

DE

EUGEN MĂRGĂRITESCU

În această lucrare se dă un test pentru verificarea ipotezei nule, construit cu ajutorul elipsoidului de încredere.

Se studiază, de asemenea cîteva proprietăţi ale funcţiilor care admit estimaţie şi ale estimaţiilor lor cu cea mai mică dispersie, cu aplicaţii în construcţia statisticii $\hat{\psi}' B^{-1} \hat{\psi}$.

§ 1. Fie vectorul observaţiilor $y^{(n \times 1)} = (y_1, \ldots, y_n)'$, ale cărui componente sînt variabile aleatoare şi $\beta^{(p \times 1)} = (\beta_1, \ldots, \beta_p)'$ vectorul constantelor necunoscute.

Dacă $\psi^{(q \times 1)} = C^{(q \times p)} \beta^{(p \times 1)}$ sînt q funcţii care admit estimaţie liniar independente, atunci $\hat{\psi}$ — estimaţia lor prin metoda celor mai mici pătrate — urmează o lege de repartiţie $N(\psi, \sigma^2 B)$, unde $B = \sigma^{-2} \Gamma_{\hat{\psi}}$. De asemenea, în condiţiile

$$\Omega : \begin{cases} \text{are repartiţia } N(X' \beta, \sigma^2 I), \\ \text{rang} \cdot X'^{(n \times p)} = r, \end{cases}$$

probabilitatea ca elipsoidul cu centrul aleator

$$E : (x - \hat{\psi})' B^{-1} (x - \hat{\psi}) \leqslant q s^2 F_{\alpha : q,\, n-r} \tag{1}$$

din spaţiul q-dimensional al funcţiilor ψ să acopere adevăratul punct al parametrilor este egală cu $1 - \alpha$. (s^2 este media pătratelor erorilor, iar $F_{\alpha : q,\, n-r}$ este α -cuantila superioară a repartiţiei F cu q şi $n - r$ grade de libertate.)

Se ştie [1] că ipoteza nulă

$$H : \psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_q = 0$$

ST. CERC. MAT., TOM. 20, Nr. 4. P. 545–549, BUCUREŞTI, 1968

se respinge dacă şi numai dacă elipsoidul de încredere (1) nu conţine punctul $(\psi_1, \ldots, \psi_q) = (0, \ldots, 0)$, ceea ce revine la inegalitatea

$$\hat{\psi}' B^{-1} \hat{\psi} > q s^2 F_{\alpha;\, q,\, n-r}. \tag{2}$$

Posibilitatea de a folosi domeniul critic definit de relaţia (2) în cazul în care funcţiile $\{\psi_1, \ldots, \psi_q\}$ se înlocuiesc prin alte funcţii care admit estimaţie $\{\psi_1^*, \ldots, \psi_{q^*}^*\}$ este rezolvată în lucrarea citată.

În cele ce urmează vom arăta că această problemă este legată în mod natural de un anumit spaţiu liniar de forme liniare şi de transformările liniare nedegenerate ale acestuia în el însuşi, precum şi modul în care se rezolvă problema urmînd această cale.

Fie deci

$$H^* : \psi_1^* = \psi_2^* = \ldots = \psi_{q^*}^* = 0$$

o altă ipoteză nulă, unde mulţimea $\{\psi_1^*, \ldots, \psi_{q^*}^*\}$ este formată din q^* funcţii care admit estimaţie liniar independente.

Considerăm mulţimea funcţiilor care admit estimaţie $\sum_{i=1}^{p} C_i\beta_i = C'\beta$ de parametri $\{\beta_i\}$. Aici $\{c_i\}$ sînt constante cunoscute, iar $\{\beta_i\}$ — valorile necunoscute ale componentelor vectorului β ; vectorul $c = (c_1, \ldots, c_p)'$ îl numim vectorul coeficienţilor funcţiei $c'\beta$.

Este evident că între mulţimea funcţiilor care admit estimaţie $\{c'\beta\}$ şi mulţimea coeficienţilor $\{c\}$ se poate stabili o corespondenţă biunivocă. Pe de altă parte, operaţiilor de adunare a două funcţii care admit estimaţie sau de înmulţire a unei funcţii care admite estimaţie cu un număr le corespund operaţii analoge pentru vectorii coeficienţilor. Prin urmare se poate vorbi despre spaţiul Ψ al funcţiilor care admit estimaţie, generat de o mulţime dată $\psi_i = c_i'\beta$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$ de funcţii care admit estimaţie. Dacă funcţiile $\{\psi_i\}$ sînt liniar independente, adică dacă matricea C din relaţia $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_q)' = C^{(q\times p)}\beta^{(p\times 1)}$ are rangul q, însuşi spaţiul Ψ are dimensiunea q.

Fie acum un operator liniar de matrice $D^{(q\times q)}$ în spaţiul Ψ şi

$$\psi^{*(q^*\times 1)} = D^{(q^*\times q)}\,\psi^{(q\times 1)} \tag{3}$$

imaginea vectorului ψ prin această transformare.

LEMĂ. *În ipoteza că componentele vectorului* $\psi^* = (\psi_1^*, \ldots, \psi_{q^*}^*)'$ *sînt* q^* *funcţii liniar independente, relaţiile* $\psi = 0$, $\psi^* = 0$ *sînt echivalente dacă şi numai dacă* det $D \neq 0$ *(deci* $q^* = q$*)*.

Demonstraţie. Se ştie [2] că mulţimea vectorilor $\{\psi / D\psi = 0\}$ formează un subspaţiu liniar al lui Ψ, de dimensiune q-rang D. Însă din echivalenţa relaţiilor $\psi = 0$, $\psi^* = 0$, rezultă că mulţimea precedentă conţine numai elementul $\psi = (0, \ldots, 0)'$ şi are deci dimensiunea egală cu zero. Aşadar q-rang $D = 0$, adică rang $D = q$. Deoarece componentele vectorului ψ^* sînt liniar independente, rezultă imediat că rang $D = q^*$ şi deci $q^* = q$.

Reciproc, dacă matricea D este nedegenerată, atunci relaţiile $\psi^* = D\psi$, $\psi = D^{-1}\psi^*$ sînt echivalente. De aici rezultă direct şi echivalenţa relaţiilor $\psi = 0$, $\psi^* = 0$.

În condițiile lemei, relația (3) poate fi scrisă sub forma

$$\psi^{*(q\times 1)} = D^{(q\times q)}\,\psi^{(q\times 1)}, \tag{3'}$$

unde rang $D = q$ și $\psi_i^* \in \Psi$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$.

Într-o altă formulare, lema afirmă că *ipoteza nulă H poate fi înlocuită prin altă ipoteză nulă H^* dacă și numai dacă matricea D este nedegenerată.*

Să demonstrăm acum o teoremă care, în particular, se reduce la criteriul (2) de respingere a ipotezei nule cu un prag de semnificație α dat.

TEOREMĂ. *Prin transformarea* (3'), *elipsoidului de încredere E pentru ψ îi corespunde elipsoidul de încredere E^* pentru ψ^* și reciproc.*

Demonstrație. Fie

$$E^* : (x^* - \hat{\psi}^*)' (B^*)^{-1} (x^* - \hat{\psi}^*) \leqslant q s^2 F_{\alpha;\, q,\, n-r}$$

elipsoidul de încredere pentru ψ^*. Ținînd seama de (3') și de egalitățile :

$$\hat{\psi}^* = D\hat{\psi},\ B^* = \sigma^{-2}\,\Gamma_{\hat{\psi}^*} = \sigma^{-2} D\,\Gamma_{\hat{\psi}}\,D' = DBD',$$

membrul stîng al inegalității precedente devine :

$$(Dx - D\hat{\psi})' (DBD')^{-1} (Dx - D\hat{\psi}) =$$

$$= (x - \hat{\psi})' (D' (D')^{-1}) B^{-1} (D^{-1} D)(x - \hat{\psi}) = (x - \hat{\psi})' B^{-1} (x - \hat{\psi}),$$

adică membrul stîng din (1).

Nu este greu de văzut că se poate urma și calea inversă, folosind relația $\psi = D^{-1}\,\psi^*$.

Deoarece membrul drept al relației (1) nu depinde de $\hat{\psi}$, rezultă că $\psi^* \in E^*$ dacă și numai dacă $\psi \in E$.

Cu aceasta teorema este demonstrată.

În particular, ținînd seama că punctul $\psi = (0, \ldots, 0)$ este un element fix al transformării considerate, deducem :

$$P\,(0 \notin E) = P\,(0 \notin E^*) = \alpha$$

sau

$$P\,(\hat{\psi}'\, B^{-1}\,\psi > q s^2 F_{\alpha;\, q,\, n-r}) = P\,(\hat{\psi}^{*\prime}\,(B^*)^{-1}\,\hat{\psi}^* > q s^2 F_{\alpha;\, q,\, n-r}) = \alpha,$$

ceea ce demonstrează afirmația făcută.

§ 2. Teoremele următoare pun în evidență legătura dintre funcțiile liniare care admit estimație, estimațiile lor nedeplasate cu cea mai mică dispersie și ecuațiile normale.

O aplicație imediată a acestora o constituie posibilitatea de a calcula direct statistica $\hat{\psi}'\,B^{-1}\,\hat{\psi}$ care, de obicei, prezintă unele dificultăți legate de determinarea unei baze ortogonale în spațiul generat de coloanele matricei X'.

TEOREMA 1. *Funcţia parametrică* $\psi = \sum_{i=1}^{p} c_i \beta_i = c' \beta$ *admite estimaţie dacă şi numai dacă vectorul c este o combinaţie liniară a coloanelor matricii* XX', *adică* $\psi = u' XX'\beta$.

Demonstraţie. Se ştie că pentru ca funcţia parametrică $\psi = c' \beta$ să admită estimaţie este necesar şi suficient să fie satisfăcută relaţia $c = Xa$, unde a este un vector arbitrar.

Dacă se notează cu V_r spaţiul liniar generat de coloanele matricii X', atunci vectorul a poate fi scris în mod unic sub forma :

$$a = a^* + b,$$

unde $a^* = pr_{V_r}\, a$, iar $b \perp V_r$.

Deoarece vectorul $a^* \in V_r$, acesta poate fi scris ca o combinaţie liniară a coloanelor matricii X' :

$$a^* = X' u.$$

Pe de altă parte, din relaţia $X'\beta = M(y) = \eta \in V_r$ şi cea precedentă rezultă :

$$\psi = (a^{*\prime} + b')\, \eta = a^{*\prime}\, \eta = a^{*\prime} X'\beta = u'XX'\beta.$$

Cu aceasta teorema este demonstrată fiindcă egalitatea $c'\beta = u' XX'\beta$ este satisfăcută identic după β dacă şi numai dacă $c' = u' XX'$, adică $c = XX'u$.

Teorema precedentă permite să se calculeze estimaţia liniară nedeplasată cu cea mai mică dispersie $\hat{\psi}$ a funcţiei ψ, fără să fie necesară rezolvarea sistemului ecuaţiilor normale. Într-adevăr, din ecuaţiile normale $XX'\hat{\beta} = Xy$ rezultă nemijlocit că $u' XX' \hat{\beta} = u' Xy$ şi deci, conform teoremei lui Gauss — Markov :

$$\hat{\psi} = u' Xy.$$

Acest rezultat se poate enunţa sub forma echivalentă :

TEOREMA 2. *Estimaţia* $\hat{\psi}$ *a funcţiei parametrice* $\psi = u' XX'\beta$ *se obţine din aceasta prin înlocuirea mediei* $\eta = X' \beta$ *cu vectorul observaţiilor* y.

Fie acum vectorul $\psi = (\psi_1, \ldots , \psi_q)'$ ale cărui componente sînt funcţii care admit estimaţie liniar independente :

$$\psi_i = u_i' XX' \beta, \qquad (i = 1, 2, \ldots, q).$$

Notînd cu $U = (u_{ij})$ matricea ale cărei linii sînt componentele vectorilor $\{u_i\}$, putem scrie :

$$\psi^{(q \times 1)} = U XX' \beta,$$

de unde, conform teoremei 2 :

$$\hat{\psi} = (\hat{\psi}_1, \ldots, \hat{\psi}_q)' = U X y.$$

Pe de altă parte, matricea de covarianţă a variabilei aleatoare $\hat{\psi}$ este

$$\Gamma_{\hat{\psi}} = UX\, \Gamma_y\, X'U' = \sigma^2\, U X X' U'$$

şi deci

$$\hat{\psi}' B^{-1} \hat{\psi} = y' X' U' (U X X' U')^{-1} U X y$$

sau încă, dacă se face notaţia $UX = V$:

$$\hat{\psi}' B^{-1} \hat{\psi} = (Vy)' (VV')^{-1} (Vy).$$

Primită la redacţie la 20 septembrie 1967

Centrul de statistică matematică al
Academiei Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47. Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. H. Scheffé, *The analysis of variance*. New York, 1959.
2. Г. Е. Шилов, *Введение в теорию линейных пространств*. Moscova, 1956.

ASUPRA UNOR CORECŢII DE COMPRESIBILITATE ÎN DINAMICA GAZELOR [1]

DE

I. L. POPESCU

Cu numerotarea formulelor din lucrarea intitulată ca mai sus, prin introducerea lui (10) în (11) se obţine

$$C_p = \frac{\sqrt{1-(1-C_{p_0})M_\infty^2+\frac{\gamma-1}{2}C_{p_0}M_\infty^4}}{1-\left[(1-C_{p_0})M_\infty^2-\frac{\gamma-1}{2}C_{p_0}M_\infty^4\right]\cos^2\alpha}\,C_{p_0}, \tag{1}$$

care va înlocui formula (12) din lucrarea citată, ce a fost transcrisă cu un semn schimbat la numitor.

Ţinînd seama de formula precedentă, tabelul alcătuit în lucrarea [1] se va înlocui prin următorul:

M_∞	0	0,1	0,2	0,3	0,35	0,4	0,5	0,6	0,7
$-C_p$	0,60	0,60	0,62	0,65	0,666	0,69	0,77	0,91	1,27

de care nu diferă decît cel mult prin cantităţi de ordinul $\frac{1}{10^2}$ în ce priveşte valorile coeficientului de presiune C_p.

Vom menţiona aici că plecînd de la rezultatele cuprinse în lucrarea [2] se pot obţine şi pentru reţelele de profile formulele corespunzătoare celor deduse în lucrarea [1] pentru profilul izolat.

Totodată, semnalăm, că, pentru $\alpha = 0$, formula (1) devine

$$C_p = \frac{C_{p_0}}{\sqrt{1-M_\infty^2+C_{p_0}M_\infty^2\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\right)}}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 20, Nr. 4, P. 551–552, BUCUREŞTI, 1968

care, pentru

$$\left| \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} M_\infty^2 C_{p_0} \right| < 1 ,$$

se scrie

$$C_p = \frac{C_{p_0}}{\sqrt{1 - M_\infty^2} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} C_{p_0} M_\infty^2 + \ldots \right]} . \tag{2}$$

Dacă se iau primii doi termeni din dezvoltarea de la numitorul lui (2), se obţine următoarea formulă, datorită lui Laitone [3],

$$C_p = \frac{C_{p_0}}{\sqrt{1 - M_\infty^2} + \frac{C_{p_0}}{2} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right) \frac{M_\infty^2}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}} ,$$

care conduce la valori ale lui C_p în mai bună concordanţă cu experienţa decît cele date de relaţia corespunzătoare a lui Kármán-Tsien [4], [5]:

$$C_p = \frac{C_{p_0}}{\sqrt{1 - M_\infty^2} + \frac{C_{p_0}}{2} \frac{M_\infty^2}{1 + \sqrt{1 - M_\infty^2}}} ,$$

obţinută prin metoda hodografică a lui Ciaplîghin [6].

BIBLIOGRAFIE

1. I. L. Popescu, *Asupra unor corecţii de compresibilitate în dinamica gazelor.* St. cerc. mat., **19**, *10*, 1443–1447 (1967).
2. I. L. Popescu, *Sur l'écoulement subsonique d'un fluide compressible à travers une grille de profils.* Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. Bucarest, **4** (**52**), *2*, 87 (1960).
3. E. V. Laitone, *New compressibility correction for two-dimensional subsonic flow.* Journ. Aeronaut. Sc., **18**, *5*, 350 (1951).
4. H. S. Tsien, *Two-dimensional subsonic flow of compressible fluids.* Journ. Aeronaut. Sc., **6**, 399 (1939).
5. Th. von Kármán, *Compressibility effects in aerodynamics.* Journ. Aeronaut. Sc., **8**, 337 (1941).
6. С. А. Чиаплыгин, *О газовых струях.* Ученые записки московского унив. Отд. физ.-мат. наук, *21* (1904).

SPAŢII PSEUDOTOPOLOGICE. SCUFUNDAREA DISTRIBUŢIILOR $\mathcal{D}'_n$ ÎN ALGEBRE

DE

ELEMÉR ROSINGER

Continuînd expunerea noţiunii de spaţiu pseudotopologic, introdusă în cap. I, [8], în cap. I al lucrării de faţă se prezintă rezultate generale privind condiţiile de algebrizabilitate a spaţiilor vectoriale pseudotopologice precum şi modul de construire a algebrelor pseudotopologice corespunzătoare.

În cap. II al lucrării, ca aplicaţie, se construieşte o familie de algebre pseudotopologice comutative, cu element unitate, complete şi separate, care prelungesc uniform continuu distribuţiile $\mathcal{D}'_n$.

INTRODUCERE

În cap. I se defineşte noţiunea generală de *pseudotopologie vectorială algebrizabilă.* Dată fiind o extensie algebrică a suportului topologic al pseudotopologiei vectoriale (definiţia 2, § 1, cap. I) algebrizabilitatea pseudotopologiei vectoriale înseamnă existenţa unei pseudotopologii algebrice astfel încît pseudotopologia vectorială poate fi identificată algebric şi topologic cu un subspaţiu al pseudotopologiei algebrice.

Se enunţă criterii generale necesare şi suficiente de algebrizabilitate (teorema (A), § 2, cap. I).

În cazul cînd pseudotopologia vectorială este completă, aceste criterii sînt completate cu construcţia efectivă a pseudotopologiei algebrice care realizează algebrizabilitatea (teorema (A.C.), § 3, cap. I). Această construcţie prezintă o formă deosebit de simplă ca de altfel şi criteriul necesar şi suficient de algebrizabilitate, în cazul algebrelor comutative cu element unitate (corolarele 1 şi 2, § 4, cap. I).

De menţionat faptul că definiţia generală dată noţiunii de *proces topologic* (definiţia 1 şi observaţia 1, § 1, cap. I, (8)) permite efectuarea tuturor construcţiilor menţionate utilizînd exclusiv un aparat algebric, nefiind necesar apelul la caracterul „dirijat" al proceselor topologice, caracter realizat în cazul diferitelor tipuri de procese topologice concrete (date prin şiruri, şiruri generalizate, filtre etc.).

ST. CERC. MAT., TOM. 20, Nr. 4, P. 553–582, BUCUREŞTI, 1968

În cap. II se aplică rezultatele obținute în cap. I privind algebrizabilitatea pseudotopologiilor vectoriale în cazul spațiului distribuțiilor $\mathcal{D}'_n$ înzestrat cu pseudotopologia vectorială completă și separată $\overline{\mathcal{T}}_0$ a convergenței slabe (deci și tari) a șirurilor obișnuite de distribuții (§ 3, cap. II).

Printr-o anume *regularizare* a reprezentării distribuțiilor din $\mathcal{D}'_n$ ca clase de șiruri de funcții indefinit derivabile (§ 4, cap. II) se obține o familie $(\overline{E}_\Omega \mid \Omega \in \mathcal{A})$ de algebre comutative, cu element unitate, conținînd fiecare spațiul $\mathcal{D}'_n$.

Pentru o anumită submulțime nevidă $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ se construiesc:

1. o familie $(\overline{\mathcal{T}}_{10\Omega} \mid \Omega \in \mathcal{A}_0)$ de pseudotopologii vectoriale complete, separate, algebrizabile pe $\mathcal{D}'_n$ (definiția 12, pct. 3, § 5, cap. II);

2. o familie $(\overline{\mathcal{T}}_\Omega \mid \Omega \in \mathcal{A}_0)$ de algebre pseudotopologice complete și separate, respectiv pe algebrele comutative cu element unitate $\overline{E}_\Omega$ cu $\Omega \in \mathcal{A}_0$ (definiția 9, pct. 1, § 5, cap. II) cu proprietățile:

1°. pentru $\Omega \in \mathcal{A}_0$, spațiul $\mathcal{D}'_n$ cu pseudotopologia vectorială $\overline{\mathcal{T}}_{10\Omega}$ poate fi identificat cu un subspațiu al algebrei $\overline{E}_\Omega$ înzestrat cu pseudotopologia algebrică $\overline{\mathcal{T}}_\Omega$; deci $\overline{\mathcal{T}}_\Omega$ realizează algebrizabilitatea lui $\overline{\mathcal{T}}_{10\Omega}$;

2°. pentru $\Omega \in \mathcal{A}_0$ pseudotopologia $\overline{\mathcal{T}}_0$ pe $\mathcal{D}'_n$ este mai puțin fină decît pseudotopologia $\overline{\mathcal{T}}_{10\Omega}$.

În teoremele $(\Omega.\mathcal{C}h.\mathcal{C})$, 3, 4 și 5 de la pct. 3, § 5, cap. II, se explicitează în termenii șirurilor duble de funcții indefinit derivabile, mulțimile șirurilor Cauchy respectiv convergente spre 0 în pseudotopologiile $\overline{\mathcal{T}}_{10\Omega}$ pe $\mathcal{D}'_n$, cu $\Omega \in \mathcal{A}_0$.

CAPITOLUL I

§ 1. EXTENSIA ALGEBRICĂ A UNUI SUPORT TOPOLOGIC VECTORIAL

DEFINIȚIA 1. Numim *suport topologic*[1]) orice structură (E, E', T) unde:

1.1) E, E' sînt mulțimi nevide;

1.2) $T : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E')$ ca

1.2.1) $(\forall)\ \emptyset \neq A \subseteq B \subseteq E$:

$$\emptyset \neq T(A) \subseteq T(B);$$

1.2.2) $T(E) = E'$.

Numim *suport topologic vectorial peste corpul K* orice suport topologic (E, E', T) pentru care:

1.V.1) E, E' sînt spații vectoriale peste corpul K;

1.V.2) $(\forall)\ x, y \in E,\ \alpha, \beta \in K$:

$$\alpha T(\{x\}) + \beta T(\{y\}) \subseteq T(\{\alpha x + \beta y\}).$$

---

[1]) a se vedea [8], cap. I, definiția 1.

Numim *suport topologic algebric peste corpul K* orice suport topologic (E, E', T) pentru care :

1.A.1) E, E' sînt algebre peste corpul K ;

1.A.2) (E, E', T) este suport vectorial topologic peste corpul K ;

1.A.3) $(\forall)$ $x, y \in E$:

$$T(\{x\}) \cdot T(\{y\}) \subseteq T(\{x . y\}).$$

Numim *suport topologic algebric comutativ peste corpul K* orice suport topologic algebric peste corpul K, (E, E', T) pentru care :

1.A.c) E, E' sînt algebre comutative peste corpul K.

Numim *suport topologic algebric cu unitate peste corpul K* orice suport topologic algebric peste corpul K, (E, E', T), pentru care :

1.A.U.1) E, E' sînt algebre cu unitate peste corpul K ;

1.A.U.2) $e' \in T(\{e\})$, unde e, e' sînt elementele unitate în E respectiv E'.

DEFINIŢIA 2. Fie (E, E', T) un suport topologic ; numim *extensie a suportului topologic* (E, E', T)[2] orice structură $((\overline{E}, \overline{E}', \overline{T}), \theta, \theta')$, unde :

2.1) $(\overline{E}, \overline{E}', \overline{T})$ este un suport topologic ;

2.2) $\theta : E \to \overline{E}$, $\theta' : E' \to \overline{E}'$ biunivoce şi

2.2.1) $(\forall)\, \emptyset \neq A \subseteq E$:

$$\theta'(T(A)) \subseteq \overline{T}(\theta(A)).$$

Dacă (E, E', T) este un suport topologic vectorial peste corpul K, numim *extensie vectorială a suportului* (E, E', T) orice extensie $((\overline{E}, \overline{E}', \overline{T}), \theta, \theta')$ a suportului (E, E', T) pentru care :

2.V.1) $(\overline{E}, \overline{E}', \overline{T})$ este un suport topologic vectorial peste corpul K ;

2.V.2) θ, θ' sînt liniare.

În acest caz spunem că $((\overline{E}, \overline{E}', \overline{T}), \theta, \theta')$ este o *extensie algebrică a suportului* (E, E', T) numai dacă :

2.A) $(\overline{E}, \overline{E}', \overline{T})$ este un suport topologic algebric peste corpul K.

§ 2. PSEUDOTOPOLOGII VECTORIALE ALGEBRIZABILE

DEFINIŢIA 3. Fie (E, E', T) un suport topologic vectorial peste corpul K şi $\mathcal{T} = (E, E', T, \Pi)$ o pseudotopologie vectorială, fie $\Theta = ((\overline{E}, \overline{E}', \overline{T}), \theta, \theta')$ o extensie algebrică a suportului (E, E', T). Spunem că *pseudotopologia vectorială $\mathcal{T}$ este Θ algebrizabilă* numai dacă :

$(\exists)\, \overline{\mathcal{T}} = (\overline{E}, \overline{E}', \overline{T}, \overline{\Pi})$ pseudotopologie algebrică peste corpul K ; $(\forall)$ $x', y' \in \mathcal{C}h(\mathcal{T})$:

$$\Pi(x', y') = 1 \Leftrightarrow \overline{\Pi}(\theta'(x'), \theta'(y')) = 1.$$

Observaţia 1. Semnificaţia faptului că $\mathcal{T}$ este Θ algebrizabilă este următoarea :

1.1) $\theta : E \to \overline{E}$ realizează un izomorfism vectorial al lui E pe un subspaţiu vectorial al lui $\overline{E}$;

---

[2] A se vedea [8], cap. I, definiţia 7.

1.2) $\theta' : E' \to \overline{E}'$ realizează un „homeomorfism'' între pseudotopologia „imagine'' a lui $\mathcal{T}$ prin θ pe $\theta(E)$ şi pseudotopologia „ indusă'' pe $\theta(E)$ de pseudotopologia algebrică $\overline{\mathcal{T}}$.

Observaţia 2. În condiţiile de la definiţia 3 :

$$(\exists)\,\overline{\mathcal{T}} = (\overline{E}, \overline{E}', \overline{T}, \overline{\Pi}) \in \mathrm{PTA}(\overline{E}, \overline{E}', \overline{T})\text{[3]} :$$

$$(\forall)\, x', y' \in \mathcal{C}h(\mathcal{T}) :$$

$$\Pi(x'\ y') = 1 \Rightarrow \overline{\Pi}(\theta'(x'), \theta'(y')) = 1$$

deoarece pseudotopologia cea mai puţin fină pe $(\overline{E}, \overline{E}', \overline{T})$ verifică această condiţie.

Deci are sens

Notaţia 1. În condiţiile de la definiţia 3 notăm :

$$\mathfrak{S}(\mathcal{T}, \Theta) = \left\{ \overline{\mathcal{T}}(\overline{E}, \overline{E}', \overline{T}, \overline{\Pi}) \in \mathrm{PTA}(\overline{E}, \overline{E}', \overline{T}) \;\middle|\; \begin{array}{r} (\forall)\, x', y' \in \mathcal{C}h(\mathcal{T}) : \\ \Pi(x', y') = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{\Pi}(\theta', (x'), \theta'(y')) = 1 \end{array} \right\}$$

$$\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{T}, \Theta) = \sup \mathfrak{S}(\mathcal{T}, \Theta);$$

$$\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{T}, \Theta) = (\overline{E}, \overline{E}', \overline{T}, \overline{\Pi}(\mathcal{T}, \Theta)).$$

PROPOZIŢIA 1. *În condiţiile de la definiţia 3*

1.1) $\mathfrak{S}(\mathcal{T}, \Theta) \neq \emptyset$;

1.2) $(\forall)\, \overline{\mathcal{T}} \in \mathrm{PTA}(\overline{E}, \overline{E}', \overline{T})$:

$$\left(\begin{array}{c} (\exists)\, \overline{\mathcal{T}}' \in \mathfrak{S}(\mathcal{T}, \Theta) : \\ \overline{\mathcal{T}} \leqslant \overline{\mathcal{T}}' \end{array} \right) \Rightarrow \overline{\mathcal{T}} \in \mathfrak{S}(\mathcal{T}, \Theta);$$

1.3) $\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{T}, \Theta) \in \mathfrak{S}(\mathcal{T}, \Theta)$;

1.4) $\mathfrak{S}(\mathcal{T}, \Theta) = \{\overline{\mathcal{T}} \in \mathrm{PTA}(\overline{E}, \overline{E}', \overline{T}) \mid \overline{\mathcal{T}} \leqslant \overline{\mathcal{T}}(\mathcal{T}, \Theta)\}$.

Demonstraţie. 1.1) rezultă din observaţia 2.

1.2) este imediată. 1.4) rezultă din 1.2) şi 1.3).

1.3) rezultă din [8], cap. I, teoremele 1 şi 6.

Un criteriu de algebrizabilitate este dat de :

TEOREMA (A). *În condiţiile de la definiţia 3,* $\mathcal{T}$ *este* Θ *algebrizabilă numai dacă se verifică condiţia*

(A) $(\forall)\, x', y' \in \mathcal{C}h(\mathcal{T})$:

$$\overline{\Pi}(\mathcal{T}, \Theta)(\theta'(x'), \theta'(y')) = 1 \Rightarrow \Pi(x', y') = 1.$$

---

[3] A se vedea [8], cap. I, definiţia 15.

Demonstrație. Dacă se verifică condiția (A), atunci, conform cu 1.2 de la propoziția 1, $\mathcal{T}$ este Θ algebrizabilă. Reciproc, fie $\mathcal{T}$ Θ algebrizabilă; atunci

$$(\exists)\,\overline{\mathcal{T}} = (\overline{E}, \overline{E}', \overline{T}, \overline{\Pi}) \in \mathrm{PTA}(\overline{E}, \overline{E}', \overline{T}):$$

$$(\forall)\; x', y' \in \mathcal{C}h(\mathcal{T}):$$

$$\Pi(x', y') = 1 \Leftrightarrow \overline{\Pi}(\theta'(x'), \theta'(y')) = 1$$

dar atunci $\overline{\mathcal{T}} \in \mathscr{S}(\mathcal{T}, \Theta)$ deci $\overline{\mathcal{T}} \leqslant \overline{\mathcal{T}}(\mathcal{T}, \Theta)$ de unde $(\forall), \bar{x}', \bar{y}' \in \mathcal{C}h(\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{T}, \Theta))$:

$$\overline{\Pi}(\mathcal{T}, \Theta)(\bar{x}', \bar{y}') = 1 \Rightarrow \overline{\Pi}(\bar{x}', \bar{y}') = 1$$

deci rezultă condiția (A).

Observația 3. Din teorema (A) rezultă că în condițiile de la definiția 3 există $\overline{\mathcal{T}} \in \mathrm{PTA}(\overline{E}, \overline{E}', \overline{T})$ care verifică condiția de algebrizabilitate numai dacă $\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{T}, \Theta)$ verifică această condiție.

Deci Θ algebrizabilitatea lui $\mathcal{T}$ este legată exclusiv de $\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{T}, \Theta)$.

§ 3. PSEUDOTOPOLOGII VECTORIALE COMPLETE, ALGEBRIZABILE

În condițiile de la definiția 3, dacă $\mathcal{T}$ este o pseudotopologie vectorială *completă*, atunci se poate obține sub formă explicită pseudotopologia algebrică $\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{T}, \Theta) = (\overline{E}, \overline{E}', \overline{T}, \overline{\Pi}(\mathcal{T}, \Theta))$ iar criteriul (A) de Θ algebrizabilitate a lui $\mathcal{T}$, obținut la teorema (A), capătă o formă utilă în aplicații.

Scufundarea continuă a distribuțiilor $\mathcal{D}'_n$ în algebre pseudotopologice, efectuată în cap. II, se încadrează în acest caz.

DEFINIȚIA 4. În condițiile de la definiția 3 notăm cu $\bar{\mathcal{J}}(\mathcal{T}, \Theta)$ subspațiul vectorial în $\overline{E}'$ generat de submulțimea

$$\overline{T}(\{\bar{0}\}) \cup \theta'(\mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0)) \cup (\overline{E}'_{\overline{T}} \cdot \theta'(\mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0))) \cup$$

$$\cup\, (\theta'(\mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0)) \cdot \overline{E}'_{\overline{T}}) \cup (\overline{E}'_{\overline{T}} \cdot \theta'(\mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0)) \cdot \overline{E}'_{\overline{T}})^{4)}$$

și

$$\bar{\mathcal{A}}(\mathcal{T}, \Theta) = \overline{E}'_{\overline{T}} + \bar{\mathcal{J}}(\mathcal{T}, \Theta).$$

Definim $\overline{\Pi}_c(\mathcal{T}, \Theta) : \overline{E}' \times \overline{E}' \to \{0,1\}$ ca

$$\overline{\Pi}_c(\mathcal{T}, \Theta)(\bar{x}', \bar{y}') = 1 \Leftrightarrow [\bar{x}', \bar{y}' \in \bar{\mathcal{A}}(\mathcal{T}, \Theta),\; \bar{x}' - \bar{y}' \in \bar{\mathcal{J}}(\mathcal{T}, \Theta)].$$

Notăm

$$\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T}, \Theta) = (\overline{E}, \overline{E}', \overline{T}, \overline{\Pi}_c(\mathcal{T}, \Theta)).$$

---

[4] Se notează $\overline{E}'_{\overline{T}} = \bigcup_{\bar{x} \in \overline{E}} \overline{T}(\{\bar{x}\})$.

TEOREMA 1. *În condițiile de la definiția 3*:

1.1) $\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T},\Theta)\in \mathrm{PTAC}(\overline{E},\overline{E}',\overline{T})$

1.2) $\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{T},\Theta)\leqslant\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T},\Theta)$

1.3) dacă $\mathcal{T}$ este completă, atunci

$$\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{T},\Theta)=\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T},\Theta).$$

Demonstrație. 1.1) rezultă din [8], cap. I, exemplul 9.

1.2) Fie $\overline{\mathcal{T}}=(\overline{E},\overline{E}',\overline{T},\overline{\Pi})\in\mathscr{T}(\mathcal{T},\Theta)$;

atunci

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}},\bar{0}) & \subseteq & \mathcal{C}h(\overline{\mathcal{T}})\\ \rotatebox{90}{$\subseteq$} & & \rotatebox{90}{$\subseteq$}\\ \theta'(\mathcal{C}n(\mathcal{T},0)) & \subseteq & \theta'(\mathcal{C}h(\mathcal{T}))\end{array}$$

de unde rezultă incluziunile

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}},\bar{0}) & \subseteq & \mathcal{C}h(\overline{\mathcal{T}})\\ \rotatebox{90}{$\subseteq$} & & \rotatebox{90}{$\subseteq$}\\ \bar{\mathcal{J}}(\mathcal{T},\Theta) & \subseteq & \bar{\mathcal{A}}(\mathcal{T},\Theta)\end{array}$$

deci 1.2).

1.3) Conform cu 1.2) este suficient să demonstrăm inegalitatea

$$\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T},\Theta)\leqslant\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{T},\Theta).$$

Pentru această inegalitate este suficient să se demonstreze că $\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T},\Theta)\in\mathscr{T}(\mathcal{T},\Theta)$, adică îndeplinirea condiției

$$(\forall)\, x',\, y'\in\mathcal{C}h(\mathcal{T}):$$

$$\Pi(x',y')=1\Rightarrow\overline{\Pi}_c(\mathcal{T},\Theta)(\theta'(x'),\theta'(y'))=1.$$

Fie $x',\, y'\in\mathcal{C}h(\mathcal{T})$ astfel ca $\Pi(x',y')=1$; atunci

$$(\exists)\, x,\, y\in E,\ x_0'\in T(\{x\}),\ y_0'\in T(\{y\}),\ v',\, w'\in\mathcal{C}n(\mathcal{T},0):$$

$$x'=x_0'+v',\ y'=y_0'+w';$$

deoarece $\mathcal{T}$ este completă și $x',\, y'\in\mathcal{C}h(\mathcal{T})$; deci

$$\theta'(x')=\theta'(x_0')+\theta'(v'),\ \theta'(y')=\theta'(y_0')+\theta'(w')$$

dar

$$\theta'(x_0')\in\theta'(T(\{x\}))\subseteq\overline{T}(\{\theta(x)\})\subseteq\overline{E}_T',$$

$$\theta'(y_0')\in\theta'(T(\{y\}))\subseteq\overline{T}(\{\theta(y)\})\subseteq\overline{E}_T'$$

iar

$$\theta'(v'),\ \theta'(w')\in\theta'(\mathcal{C}n(\mathcal{T},0))\subseteq\bar{\mathcal{J}}(\mathcal{T},\Theta)$$

deci

$$\theta'(x'),\,\theta'(y')\in\overline{E}_T'+\bar{\mathcal{J}}(\mathcal{T},\Theta)\subseteq\bar{\mathcal{A}}(\mathcal{T},\Theta).$$

Dat fiind că $\Pi(x', y') = 1$, rezultă că $x' - y' \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0)$ deci $\theta'(x') - \theta'(y') = \theta'(x' - y') \in \theta'(\mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0)) \subseteq \bar{\mathcal{J}}(\mathcal{T}, \Theta)$ deci în definitiv $\overline{\Pi}_c(\mathcal{T}, \Theta)(\theta'(x'), \theta'(y')) = 1$.

Observația 4. Conform cu 1.3) de la teorema 1 în cazul cînd $\mathcal{T}$ este completă, rezultă o exprimare explicită pentru pseudotopologia $\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{T}, \Theta)$, exprimare cu un caracter simplu, în special în cazul cînd Θ este o extensie comutativă, cu unitate.

Criteriul fundamental de algebrizabilitate pentru pseudotopologiile vectoriale complete, utilizat în cap. II, este dat de:

TEOREMA (A.C). *În condițiile de la definiția 3, dacă $\mathcal{T}$ este* completă *atunci este Θ algebrizabilă numai dacă se verifică una din următoarele condiții echivalente:*

A.C.1) $(\forall)\ x', y' \in \mathcal{C}h(\mathcal{T})$:

$$\overline{\Pi}_c(\mathcal{T}, \Theta)(\theta'(x'), (\theta'(y')) = 1 \Rightarrow \Pi(x', y') = 1.$$

A.C.2) $\mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T}, \Theta), \bar{0}) \cap \theta'(\mathcal{C}h(\mathcal{T})) \subseteq \theta'(\mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0))$

A.C. 3) $(\forall)\ x'_0 \in E'_T$:

$$\left(\begin{aligned} &(\exists)\, \bar{x}'_0 \in \overline{T}(\{\bar{0}\}),\ \bar{x}'_{0i_1}, \bar{x}''_{0i_2}, \bar{x}'''_{0i_3}, \bar{x}^{IV}_{0i_3} \in \overline{E}'_T, \\ &\quad v', v'_{i_1}, v''_{i_2}, v'''_{i_3} \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0): \\ &\quad \theta'(x'_0) = \bar{x}'_0 + \theta'(v') + \sum_{i_1} \bar{x}'_{0i_1}\theta'(v'_{i_1}) + \\ &+ \sum_{i_2} \theta'(v''_{i_2})\bar{x}''_{0i_2} + \sum_{i_3} \bar{x}'''_{0i_3}\theta'(v'''_{i_3})\bar{x}^{IV}_{0i_3} \end{aligned}\right) \Rightarrow x'_0 \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0).$$

Dacă $\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T}, \Theta)$ este separată, atunci $\mathcal{T}$ este separată și Θ algebrizabilă.

Demonstrație. A.C.1)$\Rightarrow$A.C.2). Fie $\bar{x}' \in \mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T}, \Theta), \bar{0}) \cap \theta'(\mathcal{C}h(\mathcal{T}))$; atunci $(\exists)\ x' \in \mathcal{C}h(\mathcal{T})$:

$$\bar{x}' = \theta'(x')$$

dar

$$(\exists)\ x'_0 \in E'_T,\ v' \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0):$$

$$x' = x'_0 + v'$$

căci $\mathcal{T}$ este completă, deci $\bar{x}' = \theta'(x'_0) + \theta'(v')$, $\theta'(x'_0) = \bar{x}' - \theta'(v') \in \mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T}, \Theta), \bar{0}) - \theta'(\mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0))$, dar $\theta'(\mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0)) \subseteq \mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T}, \Theta), \bar{0})$ conform cu 1.3) de la teorema 1; deci $\theta'(x'_0) \in \mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T}, \Theta), \bar{0})$ adică $\overline{\Pi}_c(\mathcal{T}, \Theta)(\theta', x'_0), \theta'(0)) = 1$ deci $\Pi(x'_0, 0) = 1$ conform cu A.C.1).

De aici rezultă $x'_0 \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0)$ deci $x' = x'_0 + v' \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0)$ de unde $\bar{x}' = \theta'(x') \in \theta'(\mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0))$.

A.C.2) $\Rightarrow$ A.C.1). Fie $x', y' \in \mathcal{C}h(\mathcal{T})$ ca

$$\overline{\Pi}_c(\mathcal{T}, \Theta)(\theta'(x'), \theta'(y')) = 1;$$

atunci $\theta'(x')-\theta'(y')\in \mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T},\Theta),\bar{0})$ dar $\theta'(x')-\theta'(y')=\theta'(x'-y')\in \in\theta'(\mathcal{C}h(\mathcal{T}))$ deci $\theta'(x')-\theta'(y')\in\theta'(\mathcal{C}n(\mathcal{T},0))$ conform cu A.C. 2); deci $(\exists)\, v'\in\mathcal{C}n(\mathcal{T},0)$:

$$\theta'(x')-\theta'(y')=\theta'(v')$$

de unde rezultă

$$x'-y'=v'$$

căci θ' este biunivocă.

Deci $x'-y'\in\mathcal{C}n(\mathcal{T},0)$ adică $\Pi(x',y')=1$.

A.C.2) $\Rightarrow$ A.C.3). Evident, $\theta'(x_0')\in\overline{\mathcal{J}}(\mathcal{T},\Theta)$ dar $\theta'(x_0')\in\theta'(\mathcal{C}h(\mathcal{T}))$ căci $x_0'\in E_T'\subseteq\mathcal{C}h(\mathcal{T})$ deci $\theta'(x_0')\in\theta'(\mathcal{C}h(\mathcal{T},0))$ conform cu A.C 2) de unde $x_0'\in\mathcal{C}n(\mathcal{T},0)$ căci θ' este biunivocă.

A.C. 3) $\Rightarrow$ A.C.2) Fie $\overline{x}'\in\mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T},\Theta),\bar{0})\cap\theta'(\mathcal{C}h(\mathcal{T}))$; atunci $\overline{x}'\in\overline{\mathcal{J}}(\mathcal{T},\Theta)$, deci $(\exists)\,\overline{x}_0'\in\overline{T}(\{\bar{0}\}),\overline{x}_{0i_1}',\overline{x}_{0i_2}'',\overline{x}_{0i_3}'''\,\overline{x}_{0i_3}'^{\mathrm{V}}\in(\overline{E}')_{\overline{T}}$,

$$v',v_{i_1}',v_{i_2}'',v_{i_3}'''\in\mathcal{C}n(\mathcal{T},0):$$

$$\overline{x}'=\overline{x}_0'+\theta'(v')+\sum_{i_1}\overline{x}_{0i_1}'\theta'(v_{i_1}')+\sum_{i_2}\theta'(v_{i_2}'')\overline{x}_{0i_2}''+$$

$$+\sum_{i_3}\overline{x}_{0i_3}'''\theta'(v_{i_3}''')\overline{x}_{0i_3}'^{\mathrm{V}}$$

dar $(\exists)$ $x'\in\mathcal{C}h(\mathcal{T})$:

$$\overline{x}'=\theta'(x') \text{ căci } \overline{x}'\in\theta'(\mathcal{C}h(\mathcal{T}))$$

și $(\exists)$ $x_0'\in E_T'$, $w'\in\mathcal{C}h(\mathcal{T},0)$:

$$x'=x_0'+w'$$

căci $\mathcal{T}$ este completă; deci $\overline{x}'=\theta'(x')=\theta'(x_0')+\theta'(w')$ deci $\theta(x_0')= =\overline{x}_0'+\theta'(v'-w')+\sum\limits_{i_1}+\sum\limits_{i_2}+\sum\limits_{i_3}$; cum însă $x_0'\in E_T'$, $v'-w'\in\mathcal{C}n(\mathcal{T},0)$, rezultă conform cu A.C.3) că

$$x_0'\in\mathcal{C}n(\mathcal{T},0).$$

Rezultă astfel că

$$x'=x_0'+w'\in\mathcal{C}n(\mathcal{T},0)+\mathcal{C}n(\mathcal{T},0)\subseteq\mathcal{C}n(\mathcal{T},0),$$

deci în definitiv

$$\overline{x}'=\theta'(x')\in\theta'(\mathcal{C}n(\mathcal{T},0)).$$

Conform teoremei (A) și pct. 1.3) de la teorema 1, condiția A.C.1) este echivalentă cu Θ algebrizabilitatea lui $\mathcal{T}$.

Demonstrăm acum partea a doua a teoremei (A.C).

Fie $\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T},\Theta)$ separată, atunci se verifică condiția A.C.2). În adevăr, fie $\overline{x}'\in\mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T},\Theta),\bar{0})\cap\theta'(\mathcal{C}h(\mathcal{T}))$; atunci $(\exists)\, x_0'\in E_T'$, $v'\in\mathcal{C}n(\mathcal{T},0)$:

$$\overline{x}'=\theta'(x_0')+\theta'(v')$$

dat fiind că $\overline{x}' \in \theta'(\mathcal{C}h(\mathcal{T}))$ şi $\mathcal{T}$ este completă ; dar $\theta'(x_0') = \overline{x}' - \theta'(v') \in$ $\in (\mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T}, \Theta), \bar{0}) - \theta'(\mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0)) \subseteq \mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T}, \Theta), \bar{0})$ şi $(\exists)\, x \in E$:

$$x_0' \in T(\{x\}) \text{ căci } x_0' \in E_T',$$

deci $\theta'(x_0') \in \theta'(T(\{x\})) \subseteq \overline{T}(\{\theta(x)\})$ adică $\theta'(x_0') \in \mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T}, \Theta), \bar{0}) \cap$ $\cap\, \overline{T}(\{\theta(x)\})$; or $\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T}, \Theta)$ fiind separată, rezultă $\theta(x) = \bar{0}$ deci $x = 0$ căci θ este biunivocă : deci în definitiv $x_0' \in T(\{0\}) \subseteq \mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0)$ de unde $\overline{x}' = \theta'(x_0') + \theta'(v') = \theta'(x_0' + v') \in \theta'(\mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0))$.

Verificîndu-se condiţia A.C. 2), rezultă că $\mathcal{T}$ este Θ algebrizabilă.

Demonstrăm că $\mathcal{T}$ este separată. Fie $x \in E$ astfel încît $(\exists)\, x_0' \in$ $\in T(\{x\})$:

$$x_0' \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0);$$

fie $\overline{x}_0' = \theta'(x_0')$; atunci $\overline{x}_0' \in \overline{T}(\{\theta(x)\})$ căci $\theta'(x_0') \in \theta'(T(\{x\})) \subseteq \overline{T}(\{\theta(x)\})$ şi $\overline{x}_0' \in \theta'(\mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0)) \subseteq \mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T}, \Theta), \bar{0})$ deci $\overline{x}_0' \in \mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T}, \Theta), \bar{0}) \cap$ $\cap\, \overline{T}(\{\theta(x)\})$ de unde rezultă că $\theta(x) = \bar{0}$ căci $\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T}, \Theta)$ a fost presupusă separată.

Dar atunci $x = 0$ căci Θ este biunivocă.

COROLARUL (A.C.). *În condiţiile teoremei* (A.C) *dacă există*

$$\overline{\mathcal{T}} = (\overline{E}, \overline{E}', \overline{T}, \overline{\Pi}) \in \mathrm{PTAH}(\overline{E}, \overline{E}'\, \overline{T})$$

ca

$$(\forall)\, x', y' \in \mathcal{C}h(\mathcal{T}):$$

$$\Pi(x', y') = 1 \Rightarrow \overline{\Pi}(\theta'(x'), \theta'(y')) = 1,$$

atunci $\mathcal{T}$ *este* Θ *algebrizabilă.*

Demonstraţie. Din ipoteză rezultă că $\overline{\mathcal{T}} \in \mathfrak{S}(\mathcal{T}, \Theta)$ deci $\overline{\mathcal{T}} \leqslant \overline{\mathcal{T}}(\mathcal{T}, \Theta)$ dar $\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{T}, \Theta) = \overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T}, \Theta)$ conform teoremei 1; deci $\overline{\mathcal{T}} \leqslant \overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T}, \Theta)$.

Deoarece $\overline{\mathcal{T}}$ este separată, rezultă că şi $\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T}, \Theta)$ este separată ([8], cap. I, propoziţia 5) dar atunci conform teoremei (A.C) $\mathcal{T}$ este Θ algebrizabilă.

§ 4. CAZURI PARTICULARE

LEMA 1. *În condiţiile definiţiei 3, dacă* $(\overline{E}, \overline{E}', \overline{T})$ *este un suport topologic algebric* comutativ *atunci* $\overline{\mathcal{J}}(\mathcal{T}, \Theta)$ *este generat de*

$$\overline{T}(\{\bar{0}\}) \cup \theta'(\mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0)) \cup (((\overline{E}')_{\overline{T}}) .\ \theta'(\mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0))).$$

Dacă $(\overline{E}, \overline{E}', \overline{T})$ *este un suport topologic algebric* comutativ, cu unitate, *atunci* $\overline{\mathcal{J}}(\mathcal{T}, \Theta)$ *este generat de*

$$\overline{T}(\{\bar{0}\}) \cup (((\overline{E}')_{\overline{T}}) \cdot \theta'(\mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0))).$$

Demonstrația este imediată dacă se ține seama de definiția 4.

COROLARUL 1. *În condițiile teoremei* (A.C) *dacă* $(\overline{E}, \overline{E}', \overline{T})$ *este un suport topologic algebric* comutativ, *atunci* $\mathcal{T}$ *este* Θ *algebrizabilă numai dacă*

$$(\forall)\, x_0' \in E_T' :$$

$$\text{A.C.C)} \quad \begin{pmatrix} (\exists)\, \overline{x}_0' \in \overline{T}(\{\overline{0}\}),\ \overline{x}_{0i}' \in (\overline{E}')_{\overline{T}},\ v',\ v_i' \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0) : \\ \theta'(x_0') = \overline{x}_0' + \theta'(v') + \sum\limits_i \overline{x}_{0i}'\, \theta'(v_i') \end{pmatrix} \Rightarrow x_0' \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0).$$

Dacă $(\overline{E}, \overline{E}', \overline{T})$ *este un suport topologic algebric* comutativ, cu unitate, *atunci* $\mathcal{T}$ *este* Θ *algebrizabilă numai dacă*

$$(\forall)\, x_0' \in E_T' :$$

$$\text{A.C.C.U)} \quad \begin{pmatrix} (\exists)\, \overline{x}_0' \in \overline{T}(\{\overline{0}\}),\ \overline{x}_{0i}' \in (\overline{E}')_{\overline{T}},\ v_i' \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0) : \\ \theta'(x_0') = \overline{x}_0' + \sum\limits_i \overline{x}_{0i}'\, \theta'(v_i') \end{pmatrix} \Rightarrow x_0' \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0).$$

Demonstrația rezultă din teorema (A.C) și lema 1.

DEFINIȚIA 5. În condițiile definiției 2 spunem că extensia $\Theta = ((\overline{E}', \overline{E}', \overline{T}), \theta, \theta')$ a suportului topologic (E, E', T) este o *extensie strictă* numai dacă

$$(\forall)\, x \in E :$$

$$\theta'(T(\{x\})) = \overline{T}(\{\theta(x)\}).$$

Spunem că Θ este o *extensie pe* numai dacă θ, θ' sînt aplicații pe

LEMA 2. *În condițiile definiției 5 dacă*

$$(\forall)\, \overline{x} \in \overline{E} :$$

$$\overline{T}(\{\overline{x}\}) \text{ *are un singur element*},$$

atunci Θ *este o extensie strictă.*

Demonstrație. Fie $x \in E$; atunci $\theta'(T(\{x\})) \subseteq \overline{T}(\{\theta(x)\})$ dar $\theta'(T(\{x\})) \neq \emptyset$ căci $T(\{x\}) \neq \emptyset$ deci $\theta'(T(\{x\})) = \overline{T}(\{\theta(x)\})$ căci $\theta(x) \in \overline{E}$ deci $\overline{T}(\{\theta(x)\})$ are un singur element.

LEMA 3. *În condițiile definiției 3 dacă* Θ *este o extensie strictă, atunci* $\mathcal{J}(\mathcal{T}, \Theta)$ *este generat de*

$$\theta'(\mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0)) \cup (\overline{E}_{\overline{T}}' \cdot \theta'(\mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0))) \cup (\theta'(\mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0)) \cdot \overline{E}_{\overline{T}}') \cup (E_T' \cdot \theta'(\mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0)) \cdot \overline{E}_{\overline{T}}').$$

Demonstrație. Evident

$$\overline{T}(\{\overline{0}\}) = \overline{T}(\{\theta(0)\}) = \theta'(T(\{0\})) \subseteq \theta'(\mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0)).$$

COROLARUL 2. *În condiţiile teoremei* (A.C) *dacă* Θ *este o extensie strictă, atunci :*

2.1) $\mathcal{T}$ *este* Θ *algebrizabilă numai dacă*

$$(\forall)\ \overline{x}'_0 \in E'_T :$$

$$\text{A.C.S)}\quad \left(\begin{array}{l} (\exists)\,\overline{x}'_{0i_1}, \overline{x}''_{0i_2}, \overline{x}'''_{0i_3}, \overline{x}'^{\text{V}}_{0i_3} \in \overline{E}'_T, \\ \quad v', v'_{i_1}, v''_{i_2}, v'''_{i_3} \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0) : \\ \quad \theta'(x'_0) = \theta'(v') + \sum_{i_2} \overline{x}'_{0i_1}\theta'(v'_{i_1}) + \\ + \sum_{i_2} \theta'(v''_{i_2})\overline{x}''_{0i_2} + \sum_{i_3} \overline{x}'''_{0i_3}\theta'(v'''_{i_3})\overline{x}'^{\text{V}}_{0i_4} \end{array}\right) \Rightarrow x'_0 \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0).$$

2.2) *Dacă* Θ *este în plus o extensie pe , atunci* $\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T}, \Theta)$ *este separată numai dacă* $\mathcal{T}$ *este separată şi* Θ *algebrizabilă.*

Demonstraţie. 2.1) rezultă din teorema (A.C) şi lema 3.

2.2) Fie $\mathcal{T}$ separată şi Θ algebrizabilă, fie $\overline{x} \in \overline{E}$, $\overline{x}'_0 \in \overline{T}(\{\overline{x}\}) \cap \cap \mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T}, \Theta), \overline{0})$; atunci $(\exists)\ x \in E$:

$$\overline{x} = \theta(x) \text{ căci } \Theta \text{ este o extensie pe;}$$

deci $\overline{T}(\{\overline{x}\}) = \theta'(T(\{x\}))$ căci Θ este o extensie strictă.

Rezultă că $\overline{x}'_0 \in \theta'(T(\{x\}) \subseteq \theta'(\mathcal{C}h(\mathcal{T}))$ deci $\overline{x}'_0 \in \mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T}, \Theta), \overline{0}) \cap \cap\ \theta'(\mathcal{C}h(\mathcal{T}))$; cum $\mathcal{T}$ este Θ algebrizabilă, conform teoremei (A.C), rezultă că

$$\overline{x}'_0 \in \theta'(\mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0))$$

deci $(\exists)\ v' \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0)$:

$$x'_0 = \theta'(v')$$

dar atunci $v' \in T(\{x\})$ căci $\overline{x}'_0 \in \theta'(T(\{x\}))$ iar θ' este biunivocă; deci $T(\{x\}) \cap \mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0) \neq \emptyset$ de unde $x = 0$ căci $\mathcal{T}$ este separată.

Deci $\overline{x} = \theta(x) = \overline{0}$, adică, în definitiv, $\overline{\mathcal{T}}_c(\mathcal{T}, \Theta)$ este separată.

Reciproca rezultă din teorema (A.C).

CAPITOLUL II

§ 1. ALGEBRA PSEUDOTOPOLOGICĂ $\mathcal{E}_n$

Fie $n \in N$, $n \geqslant 1$ fixat; notăm;

1.1) $E = \mathcal{E}_n$ (mulţimea funcţiilor $f : R^n \to R^1$ indefinit derivabile);

1.2) $E' = N \to E$;

definim

1.3) $T : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E')$ ca $T(A) = N \to A$; atunci (E, E', T) este un suport topologic algebric, comutativ, cu unitate peste corpul R^1 şi

$$(\forall)\ \varphi \in E :$$

$$T(\{\varphi\}) = \{u(\varphi)\}\,^{5)}$$

---

[5] Fie X o mulţime nevidă, $x \in X$; definim $u(x) : N \to X$ ca $(u(x))(h) = x$; rezultă că $u : X \to (N \to X)$.

DEFINIȚIA 1. Notăm

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ s \in E' \;\middle|\; \begin{array}{l} (\forall)\, \varphi \in \mathcal{D}_n : \\ \quad \lim\limits_{\substack{h \in N \\ h \to \infty}} \int_{R^n} (s(h))(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x \text{ există, finită} \end{array} \right\}$$

Pentru $s \in \mathcal{S}_0$ definim $< s, \cdot > : \mathcal{D}_n \to R^1$ ca

$$< s, \varphi > \lim_{\substack{h \in N \\ h \to \infty}} \int_{R^n} (s(h))(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x.$$

Notăm $\mathcal{V}_0 = \{ s \in \mathcal{S}_0 \mid < s, \cdot > = 0 \}$.

PROPOZIȚIA 1. 1.1) $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{S}_0$ *sînt subspații vectoriale în* E'.
1.2). Au loc relațiile

$$\begin{array}{ccccl} \mathcal{V}_0 & \subseteq & \mathcal{S}_0 & \subseteq & E',\ E'_T \cap \mathcal{V}_0 = T(\{0\}) = \{u(0)\} \\ \rotatebox{90}{$\subseteq$} & & \rotatebox{90}{$\subseteq$} & & \\ T(\{0\}) & \subseteq & E'_T & & E'_T \cdot \mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_0,\ E'_T \cdot \mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}_0. \end{array}$$

1.3) Aplicația $\mathcal{S}_0 \ni s \to < s, \cdot > \in \mathcal{D}'_n$ este o aplicație liniară, pe, cu nucleul $\mathcal{V}_0$.

Demonstrație. 1.1) și 1.2) sînt imediate.

1.3) Fie $s \in \mathcal{S}_0$, $h \in N$. Notăm aplicația

$$\mathcal{D}_n \ni \varphi \to \int_{R^n} (s(h))(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x \in R^1$$

cu $< s(h), \cdot >$; evident $< s(h), \cdot > \in \mathcal{D}'_n$ și $< s(h), \cdot >$ converge slab cînd $h \to \infty$, către $< s, \cdot >$; deci $< s, \cdot > \in \mathcal{D}'_n$.

Faptul că $\mathcal{S}_0 \ni s \to < s, \cdot > \in \mathcal{D}'_n$ este o aplicație pe, rezultă din [2].

DEFINIȚIA 2. Definim $\Pi_0 : E' \times E' \to \{0,1\}$ ca

$$\Pi_0(s, t) = 1 \Leftrightarrow (s, t \in S_0, \quad s - t \in \mathcal{V}_0).$$

Notăm $\mathcal{T}_0 = (E, E', T, \Pi_0)$.

TEOREMA 1. $\mathcal{T}_0$ *este o pseudotopologie algebrică separată pe* $E = \mathcal{E}_n$.

Demonstrația rezultă din 1.1) și 1.2) de la propoziția 1 și [8] cap. I, exemplul 9.

Observația 1. Pseudotopologia $\mathcal{T}_0$ pe $E = \mathcal{E}_n$ descrie convergența slabă în $\mathcal{D}'_n$ (deci și tare, căci $\mathcal{D}_n$ este tonelat) a șirurilor obișnuite de funcții indefinit derivabile, considerînd aceste funcții ca distribuții, pe baza incluziunii $\mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{D}'_n$.

Observația 2. Pseudotopologia $\mathcal{T}_0$ nu este completă deoarece

$$\mathcal{C}h(\mathcal{T}_0) = \mathcal{S}_0$$

$$\mathcal{C}n(\mathcal{T}_0, 0) = \mathcal{V}_0$$

$$\mathcal{C}n(\mathcal{T}_0, \varphi) = u(\varphi) + \mathcal{V}_0 \text{ cu } \varphi \in E;$$

or $\mathcal{E}_n \subsetneqq \mathcal{D}'_n$ deci $\bigcup\limits_{\varphi\in E} \mathcal{C}n(\mathcal{T}_0, \varphi) \subsetneqq \mathcal{C}h(\mathcal{T}_0)$; deci afirmația rezultă din [8], cap. I, exemplul 9.

Observația 3. Definim $\Pi_{01} : E' \times E' \to \{0, 1\}$ ca

$$\Pi_{01}(s, t) = 1 \Leftrightarrow [s, t \in \bigcup_{\varphi\in E} \mathcal{C}n(\mathcal{T}_0, \varphi),\ s - t \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}_0, 0)];$$

Notăm $\mathcal{T}_{01} = (E, E', T, \Pi_{01})$; atunci $\mathcal{T}_{01}$ este o pseudotopologie algebrică separată și completă pe $E = \mathcal{E}_n$, și $\mathcal{T}_0 \leqslant \mathcal{T}_{01}$.

În [8] s-a construit o familie de extensii stricte algebrice, comutative, cu unitate pentru suportul (E, E', T) încît $\mathcal{T}_{01}$ este algebrizabilă în raport cu fiecare dintre aceste extensii.

§ 2. O PSEUDOTOPOLOGIE VECTORIALĂ COMPLETĂ PE $\mathcal{S}_0$

Notăm

2.1) $\tilde{E}_0 = \mathcal{S}_0$

2.2) $\tilde{E}'_0 = N \to \tilde{E}_0$;

definim

2.3) $\widetilde{T}_0 : \mathcal{P}(\tilde{E}_0) \to \mathcal{P}(\tilde{E}'_0)$ ca $\widetilde{T}_0(\tilde{A}) = N \to \tilde{A}$; atunci $(\tilde{E}_0, \tilde{E}'_0, \widetilde{T}_0)$ este un suport topologic vectorial peste corpul R^1 și $(\forall)\, s \in \tilde{E}_0 = \mathcal{S}_0$:

$$\widetilde{T}_0(\{s\}) = \{u(s)\},$$

unde $u(s) : N \to \mathcal{S}_0$ ca $(u(s))(h) = s$ cu $h \in N$; definim

2.4) $\widetilde{\theta} : E \to \tilde{E}_0$, $\widetilde{\theta}' : E' \to \tilde{E}'_0$ ca

$$\widetilde{\theta}(\varphi) = u(\varphi),\ \widetilde{\theta}'(s) = \widetilde{\theta} \circ s \text{ cu } \varphi \in E,\ s \in E';$$

notăm

2.5) $\widetilde{\Theta} = ((\tilde{E}_0, \tilde{E}'_0, \widetilde{T}_0), \widetilde{\theta}, \widetilde{\theta}')$.

LEMA 1. *$\widetilde{\Theta}$ este o extensie vectorială strictă a suportului topologic algebric, comutativ, cu unitate (E, E', T).*

Demonstrația este imediată.

DEFINIȚIA 3. Notăm

$$\widetilde{\mathcal{S}}_0 = \left\{ \widetilde{s} \in \tilde{E}'_0 \;\middle|\; \begin{array}{l} (\forall)\, \varphi \in \mathcal{D}_n : \\ \lim\limits_{\substack{h\in N \\ h\to\infty}} < \widetilde{s}(h), \varphi > \text{ există, finită} \end{array} \right\}.$$

Pentru $\widetilde{s} \in \widetilde{\mathcal{S}}_0$ definim $< \widetilde{s}, \cdot > : \mathcal{D}_n \to R^1$ ca

$$< \widetilde{s}, \varphi > = \lim_{\substack{h\in N \\ h\to\infty}} < \widetilde{s}(h), \varphi > .$$

Notăm $\widetilde{\mathcal{D}}_0 = \{ \widetilde{s} \in \widetilde{\mathcal{S}}_0 \mid < \widetilde{s}, \cdot > = 0 \}$.

PROPOZIȚIA 2.2.1) $\tilde{\mathcal{V}}_0$, $\tilde{\mathcal{S}}_0$ *sînt subspații vectoriale în* $\tilde{E}'_0$.

2.2) $(\forall)\ s \in \mathcal{S}_0$:

2.2.1) $u \circ s$[6], $u(s) \in \tilde{\mathcal{S}}_0$

2.2.2) $< u \circ s, \cdot > \; = \; < u(s), \cdot > \; = \; < s, \cdot >$.

2.2.3) $s \in \mathcal{V}_0 \Leftrightarrow u \circ s \in \tilde{\mathcal{V}}_0 \Leftrightarrow u(s) \in \tilde{\mathcal{V}}_0$.

2.3) Au loc relațiile

$$\tilde{\mathcal{V}}_0 \subsetneqq \tilde{\mathcal{S}}_0 \subsetneqq \tilde{E}'_0, \quad \tilde{\mathcal{S}}_0 = (\tilde{E}'_0)_{\tilde{T}_0} + \tilde{\mathcal{V}}_0$$

$$\tilde{T}_0(\mathcal{V}_0) \subseteq (\tilde{E}'_0)_{\tilde{T}_0} \quad (\tilde{E}'_0)_{\tilde{T}_0} \cap \tilde{\mathcal{V}}_0 = \tilde{T}_0(\mathcal{V}_0).$$

2.4) Aplicația $\tilde{\mathcal{S}}_0 \ni \tilde{s} \to < \tilde{s}, \cdot > \in \mathcal{D}'_n$ este o aplicație liniară, pe, cu nucleul $\tilde{V}_0$.

Demonstrație. 2.1) și 2.2) sînt imediate.

2.3) Demonstrăm relația

$$\tilde{\mathcal{S}}_0 = (\tilde{E}'_0)_{\tilde{T}_0} + \tilde{\mathcal{V}}_0 .$$

Incluziunea $\supseteq$ este evidentă. Reciproc, fie $\bar{s} \in \tilde{\mathcal{S}}_0$; atunci, conform cu 2.4), $< \tilde{s}, \cdot > \in \mathcal{D}'_n$, deci conform cu 1.3) de la propoziția 1 :

$$(\exists)\ s \in \mathcal{S}_0 :$$

$$< \tilde{s}, \cdot > \; = \; < s, \cdot >$$

dar atunci $< \tilde{s}, \cdot > \; = \; < u(s), \cdot >$ (conform cu 2.2.2) deci $\tilde{s} - u(s) \in \tilde{\mathcal{V}}_0$ dar evident $u(s) \in (\tilde{E}'_0)_{\tilde{T}_0}$.

2.4) Rezultă din 2.2) și din 1.3) din propoziția 1.

DEFINIȚIA 4. Definim $\tilde{\Pi}_0 : \tilde{E}'_0 \times \tilde{E}'_0 \to \{0, 1\}$ ca

$$\tilde{\Pi}_0(\tilde{s}, \tilde{t}) = 1 \Leftrightarrow [\, \tilde{s}, \tilde{t} \in \tilde{\mathcal{S}}_0,\ \tilde{s} - \tilde{t} \in \tilde{\mathcal{V}}_0 \,].$$

Notăm $\tilde{\mathcal{T}}_0 = (\tilde{E}_0, \tilde{E}'_0, \tilde{T}_0, \tilde{\Pi}_0)$.

TEOREMA $(\widetilde{\mathrm{C.V}})$. $\tilde{\mathcal{T}}_0$ *este o pseudotopologie vectorială completă pe* $\tilde{E}_0 = \mathcal{S}_0$.

$(\tilde{\mathcal{T}}_0, \tilde{\theta}, \tilde{\theta}')$ *este un completat al pseudotopologiei* $\mathcal{T}_0$.

Pentru $s, t \in \mathcal{C}h(\mathcal{T}_0)$ *avem*

$$\Pi_0(s, t) = 1 \Leftrightarrow \tilde{\Pi}_0(\tilde{\theta}'(s), \tilde{\theta}'(t)) = 1.$$

Demonstrație. Conform cu 2.1) și 2.3) din propoziția 2 și [8], exemplul 8, cap. I, rezultă că

$$\tilde{\mathcal{T}}_0 \in \mathrm{PTVC}\,(\tilde{E}_0, \tilde{E}'_0, \tilde{T}_0).$$

---

[6] Aici se consideră $u : E \to (N \to E)$, deci $u \circ s : N \to (N \to E)$ și $(u \circ s)(h) = u(s(h))$ cu $h \in N$.

Conform cu 2.3) din propoziția 2 rezultă că

$$(\forall)\ s,\ t \in \mathcal{C}h\,(\mathcal{T}_\theta):$$

$$\Pi_0\,(s,\ t) = 1 \Leftrightarrow \widetilde{\Pi}_0\,(\widetilde{\theta}'(s),\ \widetilde{\theta}'(t)) = 1.$$

Pentru a demonstra că $(\widetilde{\mathcal{T}}_0,\ \widetilde{\theta},\ \widetilde{\theta}')$ este un completat al pseudotopologiei $\mathcal{T}_0$, verificăm îndeplinirea condițiilor de la definiția 1, cap. I, [8].

Condiția 7.1) se verifică deoarece $\widetilde{\mathcal{T}}_0$ este completă.

Condiția 7.2) se verifică deoarece $\widetilde{\Theta}$ este o extensie a suportului $(E,\ E',\ T)$, conform lemei 1.

Condiția 7.3) se verifică conform dublei implicații demonstrată mai sus.

Condiția 7.4) se verifică dat fiind că dacă $\widetilde{s} \in \mathcal{C}h\,(\widetilde{\mathcal{T}}_0) = \widetilde{\mathcal{S}}_0$, atunci $< \widetilde{s}, \cdot > \in \mathcal{D}'_n$ deci conform cu 1.3) din propoziția 1,

$$(\exists)\ s \in \mathcal{S}_0 = \mathcal{C}h\,(\mathcal{T}_0):$$

$$< \widetilde{s}, \cdot > = < s, \cdot >$$

însă $\widetilde{\theta}'(s) = u \circ s$, deci $< \widetilde{s}, \cdot > = < u \circ s, \cdot > = < \widetilde{\theta}'(s), \cdot >$ de unde $\widetilde{\Pi}_0\,(\widetilde{s}, \widetilde{\theta}'(s)) = 1$.

Observația 4. Pseudotopologia vectorială completă $\widetilde{\mathcal{T}}_0$ descrie convergența slabă (deci și tare) a șirurilor obișnuite de distribuții, considerînd distribuțiile ca șiruri obișnuite slab (tare) convergente în $\mathcal{D}'_n$ de funcții indefinit derivabile.

§ 3. SPAȚIUL VECTORIAL PSEUDOTOPOLOGIC $\mathcal{D}'_n$

Notăm

3.1) $\overline{E}_0 = \mathcal{S}_0/\mathcal{V}_0$

3.2) $\overline{E}'_0 = N \to \overline{E}_0$;

definim

3.3.) $\overline{T}_0 : \mathcal{P}(\overline{E}_0) \to \mathcal{P}(\overline{E}'_0)$ ca $\overline{T}_0\,(\overline{A}) = N \to \overline{A}$;

atunci $(\overline{E}_0, \overline{E}'_0, \overline{T}_0)$ este un suport topologic vectorial peste corpul R^1 și

$$(\forall)\ \overline{\varphi} \in \overline{E}_0 :$$

$$\overline{T}_0(\{\overline{\varphi}\}) = \{u(\overline{\varphi})\};$$

definim

3.4) $\overline{\theta} : \tilde{E}_0 \to \overline{E}_0,\ \overline{\theta}' : \tilde{E}'_0 \to \overline{E}'_0$ ca

$$\overline{\theta}(s) = s + \mathcal{V}_0,\ \overline{\theta}'(\widetilde{s}) = \overline{\theta} \circ \widetilde{s} \text{ cu } s \in \tilde{E}_0 = \mathcal{S}_0,\ \widetilde{s} \in \tilde{E}'_0;$$

notăm

3.5) $\overline{\Theta} = ((\overline{E}_0,\ \overline{E}'_0\ \overline{T}_0),\ \overline{\theta},\ \overline{\theta}')$;

definim

3.6) $\theta : E \to \overline{E}_0,\ \theta' : E' \to \overline{E}'_0$ ca

$$\theta = \overline{\theta} \circ \widetilde{\theta},\ \theta' = \overline{\theta}' \circ \widetilde{\theta}';$$

notăm

3.7) $\Theta = ((\bar{E}_0, \bar{E}'_0, \bar{T}_0), \theta, \theta')$.

Rezultă imediat următoarele două leme :

LEMA 2. $\bar{\Theta}$ *este o semiextensie*[7] *vectorială strictă, pe, a suportului topologic vectorial* $(\tilde{\bar{E}}_0, \tilde{\bar{E}}'_0, \tilde{T}_0)$.

LEMA 3. Θ *este o extensie vectorială strictă a suportului topologic algebric, comutativ, cu unitate* (E, E', T).

DEFINIȚIA 5. Definim $\bar{\mathcal{S}}_0 = \bar{\theta}'(\tilde{\mathcal{S}}_0)$, $\bar{\mathcal{V}}_0 = \bar{\theta}'(\tilde{\mathcal{V}}_0)$; pentru $\bar{\varphi} \in \bar{E}_0$, $\bar{s} \in \bar{E}'_0$ definim $< \bar{\varphi}, \cdot >$, $< \bar{s}, \cdot > \in \mathcal{D}'_n$ ca $< \bar{\varphi}, \varphi > = < s, \varphi >$ dacă $\bar{\varphi} = \bar{\theta}(s)$, $s \in \mathcal{S}_0$, $\varphi \in \mathcal{D}_n$, $< \bar{s}, \varphi > = < \tilde{s}, \varphi >$ dacă $\bar{s} = \bar{\theta}'(\tilde{s})$, $\tilde{s} \in \tilde{\mathcal{S}}_0$, $\varphi \in \mathcal{D}_n$; evident aceste definiții au sens căci : fie $s, t \in \mathcal{S}_0$ ca $\bar{\theta}(s) = \bar{\theta}(t)$ atunci $s - t \in \mathcal{V}_0$ deci $< s, \cdot > = < t, \cdot >$; fie $\tilde{s}, \tilde{t} \in \tilde{\mathcal{S}}_0$ ca $\bar{\theta}'(\tilde{s}) = \bar{\theta}'(\tilde{t})$ atunci $(\forall)\ h \in N$:

$$\bar{\theta}(\tilde{s}(h)) = \bar{\theta}(\tilde{t}(h))$$

deci $(\forall)\ h \in N$:

$$\tilde{s}(h) - \tilde{t}(h) \in \mathcal{V}_0$$

deci $< \tilde{s}, \cdot > = < \tilde{t}, \cdot >$.

PROPOZIȚIA 3. 3.1) $\bar{\mathcal{V}}_0$ și $\bar{\mathcal{S}}_0$ sînt subspații vectoriale în $\bar{E}'_0$.

3.2) Au loc relațiile

$$\bar{\mathcal{V}}_0 \underset{\cup|}{\subseteq} \bar{\mathcal{S}}_0 \underset{\cup|}{\subseteq} \bar{E}'_0, \qquad \bar{\mathcal{S}}_0 = (\bar{E}'_0)_{\bar{T}_0} + \bar{\mathcal{V}}_0$$

$$\bar{T}_0(\{\bar{0}\}) \subseteq (\bar{E}'_0)_{\bar{T}_0} \qquad (\bar{E}'_0)_{\bar{T}_0} \cap \bar{\mathcal{V}}_0 = \bar{T}_0(\{\bar{0}\}).$$

3.3) Aplicația $\bar{E}_0 \ni \bar{\varphi} \to < \bar{\varphi}, \cdot > \in \mathcal{D}'_n$ este un izomorfism vectorial.

3.4) Aplicația $\bar{\mathcal{S}}_0 \ni \bar{s} \to < \bar{s}, \cdot > \in \mathcal{D}'_n$ este liniară, pe, cu nucleul $\bar{\mathcal{V}}_0$.

Demonstrație. 3.1.) Este imediată.

3.2) Demonstrăm relația

$$\bar{\mathcal{S}}_0 = (\bar{E}'_0)_{\bar{T}_0} + \bar{\mathcal{V}}_0.$$

Incluziunea $\supseteq$ este evidentă. Reciproc, fie $\bar{s} \in \bar{\mathcal{S}}_0$; atunci $(\exists)\ \tilde{s} \in \tilde{\mathcal{S}}_0$:

$$\bar{s} = \bar{\theta}'(\tilde{s})$$

dar $(\exists)\ s \in \mathcal{S}_0$:

$< \tilde{s}, \cdot > = < s, \cdot >$ conform 2.4) din propoziția 2 și 1.3) de la propoziția 1 ; atunci $\bar{s} - u(\bar{\theta}(s)) \in \bar{\mathcal{V}}_0$ deci $\bar{s} \in (\bar{E}'_0)_{\bar{T}_0} + \bar{\mathcal{V}}_0$.

---

[7] Prin semiextensie înțelegem noțiunea dată de definiția 2 din § 1, cap. I, dacă nu se cere ca aplicațiile θ, θ' să fie biunivoce.

În relația

$$(\overline{E}'_0)_{\overline{T}_0} \cap \overline{\mathcal{V}}_0 = \overline{T}_0(\{\overline{0}\})$$

incluziunea $\supseteq$ este imediată. Reciproc, fie $\overline{s} \in (\overline{E}'_0)_{\overline{T}_0} \cap \overline{\mathcal{V}}_0$; atunci $(\exists)\ s \in \mathcal{S}_0$:

$$\overline{s} = u(\overline{\theta}(s)) \text{ deoarece } \overline{s} \in (\overline{E}'_0)_{\overline{T}_0}$$

dar $\overline{s} \in \overline{\mathcal{V}}_0 \Rightarrow s \in \mathcal{V}_0 \Rightarrow \overline{s} = u(\overline{0}) \in \overline{T}_0(\{\overline{0}\})$.

3.3) Rezultă din 1.3) din propoziția 1.

3.4) Rezultă din 2.4) din propoziția 2.

DEFINIȚIA 6. Definim $\overline{\Pi}_0 : \overline{E}'_0 \times \overline{E}'_0 \to \{0,1\}$ ca

$$\overline{\Pi}_0(\overline{s}, \overline{t}) = 1 \Leftrightarrow (\overline{s}, \overline{t}, \in \overline{\mathcal{S}}_0,\ \overline{s} - \overline{t} \in \overline{\mathcal{V}}_0).$$

Notăm $\overline{\mathcal{T}}_0 = (\overline{E}_0, \overline{E}'_0, \overline{T}_0, \overline{\Pi}_0)$.

TEOREMA (C. H. V.). *$\overline{\mathcal{T}}_0$ este o pseudotopologie vectorială completă și separată pe $\overline{E}_0 = \mathcal{S}_0/\mathcal{V}_0$. $(\overline{\mathcal{T}}_0, \overline{\theta}, \overline{\theta}')$ este un completat și separat al pseudotopologiei $\widetilde{\mathcal{T}}_0$. Pentru orice $\widetilde{s}, \widetilde{t} \in \mathcal{C}h(\widetilde{\mathcal{T}}_0)$ avem*

$$\widetilde{\Pi}_0(\widetilde{s}, \widetilde{t}) = 1 \Leftrightarrow \overline{\Pi}_0(\overline{\theta}'(\widetilde{s}), \theta'(\widetilde{t})) = 1.$$

Demonstrație. Conform cu 3.1) și 3.2) din propoziția 3 și [8], cap. I, exemplul 8, $\overline{\mathcal{T}}_0$ este o pseudotopologie vectorială completă și separată pe $\overline{E}_0 = \mathcal{S}_0/\mathcal{V}_0$.

Fie $\widetilde{s}, \widetilde{t} \in \mathcal{C}h(\widetilde{\mathcal{T}}_0)$; dacă $\widetilde{\Pi}_0(\widetilde{s}, \widetilde{t}) = 1$, atunci $\widetilde{s}, \widetilde{t} \in \widetilde{\mathcal{S}}_0$, $\widetilde{s} - \widetilde{t} \in \widetilde{\mathcal{V}}_0$, deci $\overline{\theta}'(\widetilde{s}), \overline{\theta}'(\widetilde{t}) \in \overline{\mathcal{S}}_0$, $\overline{\theta}'(\widetilde{s}) - \overline{\theta}'(\widetilde{t}) = \overline{\theta}'(\widetilde{s} - \widetilde{t}) \in \overline{\mathcal{V}}_0$, deci $\overline{\Pi}_0(\overline{\theta}'(\widetilde{s}), \overline{\theta}'(\widetilde{t})) = 1$; reciproc, dacă $\overline{\Pi}_0(\overline{\theta}'(\widetilde{s}), \overline{\theta}'(\widetilde{t})) = 1$, atunci $\overline{\theta}'(\widetilde{s}), \overline{\theta}'(\widetilde{t}) \in \overline{\mathcal{S}}_0$, $\overline{\theta}'(\widetilde{s} - \widetilde{t}) = \overline{\theta}'(\widetilde{s}) - \overline{\theta}'(\widetilde{t}) \in \overline{\mathcal{V}}_0$ deci $(\exists)\ \widetilde{v} \in \mathcal{V}_0$:

$$\overline{\theta}'(\widetilde{s} - \widetilde{t}) = \overline{\theta}'(\widetilde{v})$$

deci $(\forall)\ h \in N$:

$$\widetilde{s}(h) - \widetilde{t}(h) - \widetilde{v}(h) \in \mathcal{V}_0,$$

rezultă că

$$< \widetilde{s} - \widetilde{t} - \widetilde{v}, \cdot > = 0,$$

or $< \widetilde{v}, \cdot > = 0$ căci $\widetilde{v} \in \widetilde{\mathcal{V}}_0$ deci $< \widetilde{s}, \cdot > = < \widetilde{t}, \cdot >$ adică $\widetilde{\Pi}_0(\widetilde{s}, \widetilde{t}) = 1$.

Utilizînd lema 2, se verifică cu ușurință, în mod asemănător celui de la demonstrația teoremei (C.V), faptul că $(\overline{\mathcal{T}}_0, \overline{\theta}, \theta')$ este un completat și separat al pseudotopologiei $\widetilde{\mathcal{T}}_0$ (a se vedea [8], cap. I, definițiile 7 și 9).

Rezultă în același mod și

TEOREMA (C.V). *$(\overline{\mathcal{T}}_0, \theta, \theta')$ este un completat al pseudotopologiei $\mathcal{T}_0$. Pentru orice $s, t \in \mathcal{C}h(\mathcal{T}_0)$ avem*

$$\Pi_0(s, t) = 1 \Leftrightarrow \overline{\Pi}_0(\theta'(s), \theta'(t)) = 1.$$

Observația 5. Cu toate că $\overline{\mathcal{T}}_0$ este separată, $(\overline{\mathcal{T}}_0, \theta, \theta')$ nu este un separat al pseudotopologiei $\mathcal{T}_0$ deoarece aplicațiile $\theta : E \to \overline{E}_0$, $\theta' : E' \to \overline{E}'_0$ nu sînt aplicații pe.

Observația 6. Pseudotopologia $\overline{\mathcal{T}}_0$ descrie convergența slabă (deci și tare) a șirurilor obișnuite de distribuții, considerînd distribuțiile ca clase de șiruri obișnuite de funcții indefinit derivabile, slab (tare) convergente în $\mathcal{D}'_n$.

§ 4. EXTENSII ALGEBRICE COMUTATIVE, CU UNITATE A SUPORTULUI TOPOLOGIC VECTORIAL $(\overline{E}_0, \overline{E}'_0, \overline{T}_0)$

DEFINIȚIA 7. Notăm cu $\mathfrak{A}$ mulțimea elementelor de forma $(\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{J}, \mathcal{A})$, unde:

7.1) $\mathcal{V}$, $\mathcal{S}$ sînt subspații vectoriale în $E' = N \to E = N \to \mathcal{E}_n$, $\mathcal{A}$ este subalgebră în E', $\mathcal{J}$ este ideal în $\mathcal{A}$;

7.2) Au loc incluziunile

$$\begin{array}{lll} \mathcal{J} & \subseteq \mathcal{A} & \subseteq E' \\ \cup\!\shortmid & \cup\!\shortmid & \\ \mathcal{V} & \subseteq \mathcal{S} & \supseteq E'_T \\ \cap\!\shortmid & \cap\!\shortmid & \\ \mathcal{V}_0 & \subseteq \mathcal{S}_0 . & \end{array}$$

7.3) $\mathcal{J} \cap \mathcal{S} = \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{S} = \mathcal{V}$.

7.4) $\mathcal{V}_0 + \mathcal{S} = \mathcal{S}_0$.

Notăm cu $\mathfrak{A}_0$ mulțimea acelor $(\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{J}, \mathcal{A}) \in \mathfrak{A}$ pentru care $\mathcal{J} = \{u(0)\}$; evident în acest caz și $\mathcal{V} = \{u(0)\}$.

TEOREMA 2. *Au loc relațiile*

$$\varnothing \neq \mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}.$$

Demonstrație. Fie $\mathcal{S}_1$ un subspațiu vectorial în $\mathcal{S}_0$, complementar cu subspațiul vectorial $\mathcal{V}_0 + E'_T$; fie $\mathcal{S} = E'_T + \mathcal{S}_1$, $\mathcal{V} = \mathcal{J} = \{u(0)\}$, $\mathcal{A}$ subalgebra generată în E' de $\mathcal{S}$.

Atunci $(\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{J}, \mathcal{A}) \in \mathfrak{A}_0$. În adevăr, condițiile 7.1), 7.2) și 7.4) se verifică imediat.

Condiția 7.3) se verifică de asemenea căci

$$\mathcal{J} \cap \mathcal{S} = \{(u(0)\} \cap \mathcal{S} = \{u(0)\} = \mathcal{V}$$

iar $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{S} = \{(u(0)\} \subseteq \mathcal{V}$ dat fiind că fie $v \in \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{S}$ atunci $(\exists)\ \varphi \in E$, $s_1 \in \mathcal{S}_1$:

$$v = u(\varphi) + s_1$$

deci $s_1 = v + u(-\varphi)$ deci $s_1 \in \mathcal{S}_1 \cap (\mathcal{V}_0 + E'_T)$ de unde, conform cu alegerea lui $\mathcal{S}_1$, rezultă $s_1 = u(0)$ deci $v = u(\varphi)$; dar $v \in \mathcal{V}_0$ deci $\varphi = 0$ căci $\mathcal{T}_0$ este separată; deci în definitiv $v = u(0)$.

DEFINIȚIA 8. Pentru $\Omega = (\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{J}, \mathcal{A}) \in \mathfrak{A}$ definim

8.1) $\overline{E}_\Omega = \mathcal{A}/\mathcal{J}$.

8.2) $\overline{E}'_\Omega = N \to \overline{E}_\Omega$.

8.3) $\overline{T}_\Omega : \mathcal{P}(\overline{E}_\Omega) \to \mathcal{P}(\overline{E}'_\Omega)$ ca $\overline{T}_\Omega(\overline{A}) = N \to \overline{A}$.

8.4) $\theta_\Omega : \overline{E}_0 \to \overline{E}_\Omega$ ca

$$\theta_\Omega(s + \mathcal{V}_0) = t + \mathcal{J} \text{ unde } s \in \mathcal{S}_0,\ t \in \mathcal{S},\ s \in t + \mathcal{V}_0.$$

8.5) $\theta'_\Omega : \overline{E}'_0 \to \overline{E}'_\Omega$ ca

$$\theta'_\Omega(\overline{s}) = \theta_\Omega \circ \overline{s}.$$

Notăm

$$\Theta_\Omega = ((\overline{E}_\Omega, \overline{E}'_\Omega, \overline{T}_\Omega), \theta_\Omega, \theta'_\Omega).$$

TEOREMA (E.A). Fie $\Omega \in \mathcal{A}$; atunci Θ_Ω este o extensie strictă, algebrică, comutativă, cu unitate a suportului topologic vectorial $(\overline{E}_0, \overline{E}'_0, \overline{T}_0)$. Pentru orice φ, $\psi \in E = \mathcal{E}_n$ are loc relaţia

$$\theta_\Omega(\theta(\varphi \cdot \psi)) = \theta_\Omega(\theta(\varphi)) \cdot \theta_\Omega(\theta(\psi)).$$

Demonstraţia rezultă din verificarea directă a condiţiilor de la definiţiile 2 şi 5 din cap. I, ţinînd seama totodată de lema 2 din cap. I.

Observaţia (*R.D*). Conform cu 3.3) din propoziţia 3, § 3, distribuţiile sînt identificate cu clase de şiruri de funcţii indefinit derivabile:

$$\overline{E}_0 = \mathcal{S}_0/\mathcal{V}_0 \ni \overline{\varphi} = s + \mathcal{V}_0 \to \langle s, \cdot \rangle \in \mathcal{D}'_n.$$

Produsul distribuţiilor *nu se poate defini* însă prin formula

$$((s + \mathcal{V}_0), (t + \mathcal{V}_0)) \to (s \cdot t + \mathcal{V}_0) \text{ cu } s,\ t \in \mathcal{S}_0,$$

chiar dacă $s . t \in \mathcal{S}_0$ deoarece

$$(\mathcal{V}_0 \cdot \mathcal{V}_0) \cap \mathcal{S}_0 \not\subseteq \mathcal{V}_0$$ [8]).

Fie acum $\Omega = (\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{J}, \mathcal{A}) \in \mathcal{A}$; atunci formula

$$\overline{E}_0 \times \overline{E}_0 \ni ((s + \mathcal{V}_0), (t + \mathcal{V}_0)) \to (v \cdot w + \mathcal{J}) \in \overline{E}_\Omega$$

cu s, $t \in \mathcal{S}_0$, v, $w \in \mathcal{S}$, $s - v$, $t - w \in \mathcal{V}_0$, defineşte un produs pentru distribuţii, deoarece

$$\mathcal{V}_0 + \mathcal{S} = \mathcal{S}_0,\ (\mathcal{V} \cdot \mathcal{V}) \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{J} \cap \mathcal{S} = \mathcal{V}.$$

Deci perechea $(\mathcal{V}, \mathcal{S})$ are semnificaţia unei *regularizări a reprezentării distribuţiilor prin clase de şiruri de funcţii indefinit derivabile.*

§ 5. SCUFUNDAREA CONTINUĂ A DISTRIBUŢIILOR ÎN ALGEBRE PSEUDOTOPOLOGICE COMPLETE, SEPARATE, COMUTATIVE, CU ELEMENT UNITATE

1. O FAMILIE DE PSEUDOTOPOLOGII ALGEBRICE, COMPLETE ŞI SEPARATE

Notaţie. Se notează

$$\widetilde{\mathcal{V}}_1 = \left\{ \widetilde{v} \in \widetilde{E}'_0 \;\middle|\; \begin{array}{l} (\forall)\, k \in N,\ \varphi \in \mathcal{D}_n : \\ \lim\limits_{\substack{h \in N \\ h \to \infty}} \langle (\widetilde{v}, (h))(k), \varphi \rangle = 0 \end{array} \right\}.$$

---

[8]) A se vedea observaţia (*) din § 3, cap. II, [8].

Evident $\widetilde{\mathcal{V}}_1$ este subspaţiu vectorial în $\tilde{E}'_0 = N \to \tilde{E}_0 = N \to \mathcal{S}_0$. Fie $\Omega = (\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{A}) \in \mathfrak{A}$; notăm

$$\overline{\mathcal{V}}_\Omega = \theta'_\Omega\,(\overline{\theta}'\,((N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{V}}_1))\,.$$

Evident $\overline{\mathcal{V}}_\Omega$ este subspaţiu vectorial în $\overline{E}'_\Omega$.

Lema 4. *Fie* $\Omega = (\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{A}) \in \mathfrak{A}$, $s \in \mathcal{S}$; *definim* $\tilde{v} \in \tilde{E}'_0$ *ca* $\tilde{v}(h) = s/(h+1)$ *cu* $h \in N$; *atunci*

$$\tilde{v} \in (N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{V}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{V}}_0\,.$$

Demonstraţia rezultă printr-un calcul direct.

Definiţia 9. Fie $\Omega \in \mathfrak{A}$; notăm cu $\mathcal{J}_\Omega$ subspaţiul vectorial generat în $\overline{E}'_\Omega$ de $((\overline{E}'_\Omega)_{\overline{T}_\Omega}) \cdot \overline{\mathcal{V}}_\Omega$; notăm

$$\overline{\mathcal{A}}_\Omega = ((\overline{E}'_\Omega)_{\overline{T}_\Omega}) + \overline{\mathcal{I}}_\Omega\,.$$

Evident $\overline{\mathcal{V}}_\Omega \subseteq \overline{\mathcal{J}}_\Omega$ dat fiind că algebra $\overline{E}_\Omega$ are element unitate.

Definim $\overline{\Pi}_\Omega : \overline{E}'_\Omega \times \overline{E}'_\Omega \to \{0, 1\}$ ca

$$\overline{\Pi}_\Omega(\bar{s}, \bar{t}) = 1 \Leftrightarrow [\bar{s}, \bar{t} \in \overline{\mathcal{A}}_\Omega,\ \bar{s} - \bar{t} \in \overline{\mathcal{I}}_\Omega]\,.$$

Notăm $\overline{\mathcal{T}}_\Omega = (\overline{E}_\Omega, \overline{E}'_\Omega, \overline{\mathcal{T}}_\Omega, \overline{\Pi}_\Omega)$.

Teorema $(\Omega \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{C} \cdot \mathrm{H})$. *Fie* $\Omega \in \mathfrak{A}$; *atunci* $\overline{\mathcal{T}}_\Omega$ *este o pseudotopologie algebrică, completă pe* $\overline{E}_\Omega$.

Dacă $\Omega \in \mathfrak{A}_0$, *atunci* $\overline{\mathcal{T}}_\Omega$ *este separată.*

Demonstraţie. Conform exemplului 9, cap. I, [8], rezultă, printr-o verificare imediată, faptul că $\overline{\mathcal{T}}_\Omega \in \mathrm{PTAC}\,(\overline{E}_\Omega, \overline{E}'_\Omega, \overline{T}_\Omega)$.

Fie $\Omega = (\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{A}) \in \mathfrak{A}_0$; demonstrăm că $\overline{\mathcal{T}}_\Omega$ este separată.

Fie $\overline{\varphi} \in \overline{E}_\Omega$; atunci $(\exists)\, s \in \mathcal{A}$:

$$\overline{\varphi} = s\,.$$

Presupunem că $u(\overline{\varphi}) \in \mathcal{C}n\,(\overline{\mathcal{T}}_\Omega, \bar{o})$; atunci $s \in \overline{\mathcal{I}}_\Omega$, deci $(\exists)\ l \in N$, $s_0, \ldots, s_e \in \mathcal{A}$, $\tilde{v}_0, \ldots, \tilde{v}_e \in (N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{V}}_1$:

$$u(s) = \sum_{\substack{i \in N \\ i \leqslant l}} u(s_i) \cdot \tilde{v}_i$$

conform lemei 5 de mai jos; deci $(\forall)\, k \in N$, $\varphi \in \mathcal{D}_n$:

$$h \in N \Rightarrow \,<s(k), \varphi>\, = \sum_{\substack{i \in N \\ i \leqslant l}} <(\tilde{v}_i, (h))(k), s_i(k)\,\varphi>$$

dar $s_i(k)\,\varphi \in \mathcal{D}_n$ cu $i \in N$, $i \leqslant l$, $k \in N$, deoarece

$$s_i \in \mathcal{A} \subseteq E' = N \to \mathcal{E}_n,\ \varphi \in \mathcal{D}_n\,,$$

deci, dat fiind că $\widetilde{v}_0, \ldots, \widetilde{v}_e \in \widetilde{\mathcal{V}}_1$, rezultă că

$$< s(k), \varphi > = \lim_{\substack{h \in N \\ h \to \infty}} \sum_{\substack{i \in N \\ i \leqslant l}} < (\widetilde{v}_i(h))(k), s_i(k)\varphi > =$$

$$= \sum_{\substack{i \in N \\ i \leqslant l}} \lim_{\substack{h \in N \\ h \to \infty}} < (\widetilde{v}_i(h))(k), s_i(k)\varphi > = 0 .$$

Deci $s(k) = 0$ cu $k \in N$, de unde $s = u(0)$, adică $\bar{\varphi} = \bar{0} \in \overline{\mathrm{E}}_\Omega$.

LEMA 5. *Fie* $\Omega = (\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{J}, \mathcal{A}) \in \mathfrak{A}_0$; *atunci*

5.1) $\mathcal{V} = \mathcal{J} = \{u(0)\}$.

5.2) $\overline{\mathrm{E}}_\Omega = \mathcal{A}$, $\overline{\mathrm{E}}'_\Omega = N \to \mathcal{A}$.

5.3) $(\forall)\ \widetilde{s} \in (N \to \mathcal{S}) \subseteq \widetilde{E}'_0 = N \to \mathcal{S}_0$:

$$\theta'_\Omega = (\bar{\theta}'(\widetilde{s})) = \widetilde{s} .$$

5.4) $(\forall)\ \bar{v} \in \overline{\mathrm{E}}'_\Omega$:

$$\bar{v} \in \overline{\mathcal{J}}_\Omega \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (\exists)\, l \in N, s_0 \ldots, s_l \in \mathcal{A}, \widetilde{v}_0, \ldots, \widetilde{v}_l \in (N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{V}}_1 : \\ \bar{v} = \sum\limits_{\substack{i \in N \\ i \leqslant l}} u(s_i) \cdot \widetilde{v}_i \end{array} \right)$$

Demonstrație. 5.1), 5.2) și 5.3) rezultă imediat.

5.4) rezultă din 5.1), 5.2) și 5.3).

2. O FAMILIE DE PSEUDOTOPOLOGII VECTORIALE COMPLETE, SEPARATE ȘI ALGEBRIZABILE PE $\mathcal{D}'_n$

DEFINIȚIA 10. Fie $\Omega \in \mathfrak{A}$; definim

$$\overline{\mathcal{V}}_{0\Omega} = \{\bar{v} \in \overline{E}'_0 \mid \theta'_\Omega(\bar{v}) \in \overline{\mathcal{J}}_\Omega\} = (\theta'_\Omega)^{-1}(\overline{\mathcal{J}}_\Omega)$$

$$\overline{\mathcal{S}}_{0\Omega} = ((\overline{E}'_\Omega)_{\overline{T}_0} + \overline{\mathcal{V}}_{0\Omega} .$$

Evident $\bar{\theta}'((N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{V}}_1) \subseteq \overline{\mathcal{V}}_{0\Omega}$ deoarece $\overline{\mathcal{V}}_\Omega \subseteq \overline{\mathcal{J}}_\Omega$.

Notație. Se notează

$$\widetilde{\mathcal{S}}_{01} = \left\{ \widetilde{s} \in \widetilde{\mathcal{S}}_0 \;\middle|\; \begin{array}{l} (\forall)\ \varphi \in \mathcal{D}_n : \\ \lim\limits_{\substack{k \in N \\ k \to \infty}} \lim\limits_{\substack{h \in N \\ h \to \infty}} < (\widetilde{s}(h))(k), \varphi > = < \widetilde{s}, \varphi > \end{array} \right\} .$$

Evident, $\widetilde{\mathcal{S}}_{01}$ este un subspațiu vectorial în $\widetilde{\mathcal{S}}_0$ și $\widetilde{\mathcal{V}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{V}}_0 \subseteq \widetilde{\mathcal{S}}_{01}$, $\widetilde{\mathcal{V}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{S}}_{01} \subseteq \widetilde{\mathcal{V}}_0$, deci $\widetilde{\mathcal{V}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{V}}_0 = \widetilde{\mathcal{V}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{S}}_{01} \subseteq \widetilde{\mathcal{V}}_0 \cap \widetilde{\mathcal{S}}_{01}$.

Dacă $s \in \mathcal{S}_0$, atunci $u \circ s$, $u(s) \in \widetilde{\mathcal{S}}_{01}$ deci

$$\widetilde{\mathcal{S}}_{01} \ni \widetilde{s} \to < \widetilde{s}, \cdot > \in \mathcal{D}'_n$$

este o aplicație liniară, pe.

PROPOZIȚIA 4. *Fie* $\Omega \in \mathfrak{A}$; *atunci*

4.1) $\overline{\mathcal{V}}_{0\Omega}$, $\overline{\mathcal{S}}_{0\Omega}$ *sînt subspații vectoriale în* $\overline{\mathbf{E}}'_0 = N \to \overline{\mathbf{E}}_0$.

4.2) *Au loc relațiile*

$$\begin{array}{ll} \overline{\mathcal{V}}_{0\Omega} \subseteq \overline{\mathcal{S}}_{0\Omega} \subseteq \overline{\mathbf{E}}'_0, & \overline{\mathcal{S}}_{0\Omega} = (\overline{\mathbf{E}}'_0)_{\overline{T}_0} + \overline{\mathcal{V}}_{0\Omega} \\ \quad\rotatebox{90}{$\subseteq$} \qquad\;\; \rotatebox{90}{$\subseteq$} & \\ \overline{T}_0(\{\overline{0}\}) \subseteq (\overline{\mathbf{E}}'_0)_{\overline{T}_0} & \overline{\mathcal{V}}_{\Omega} \subseteq \theta'_{\Omega}(\overline{\mathcal{V}}_{0\Omega}) = \overline{\mathcal{J}}_{\Omega}. \end{array}$$

Dacă $\Omega = (\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{J}, \mathcal{A}) \in \mathfrak{A}_0$, atunci:

4.3) $\overline{\mathcal{V}}_{0\Omega} = \overline{\theta}'((N \to \mathcal{S}) \cap \tilde{\mathcal{V}}_1)$.

4.4) $((\overline{\mathbf{E}}'_0)_{\overline{T}_0}) \cap \overline{\mathcal{V}}_{0\Omega} = \overline{T}_0(\{\overline{0}\})$.

4.5) $\overline{\mathcal{V}}_{0\Omega} \cap \overline{\mathcal{V}}_0 = \overline{\theta}'((N \to \mathcal{S}) \cap \tilde{\mathcal{V}}_1 \cap \tilde{\mathcal{V}}_0)$.

4.6) $\overline{\mathcal{V}}_{0\Omega} \cap \overline{\theta}'((N \to \mathcal{S}) \cap \tilde{\mathcal{S}}_{01}) \subseteq \overline{\mathcal{V}}_0$.

4.7) $\overline{\mathcal{S}}_{0\Omega} \cap \overline{\theta}'((N \to \mathcal{S}) \cap \overline{\mathcal{S}}_{01}) = ((\overline{\mathbf{E}}'_0)_{\overline{T}_0}) + (\overline{\mathcal{V}}_{0\Omega} \cap \overline{\mathcal{V}}_0)$.

Demonstrație. 4.1) și 4.2) sînt imediate.

4.3) Incluziunea $\supseteq$ rezultă din 4.2). Reciproc, fie $\overline{v} \in \overline{\mathcal{V}}_{0\Omega}$; atunci $(\exists)\, \tilde{v} \in \tilde{\mathbf{E}}'_0$:

$$\overline{v} = \overline{\theta}'(\tilde{v})$$

căci $\overline{\mathcal{V}}_{0\Omega} \subseteq \overline{\mathbf{E}}'_0$ și $\overline{\theta}' : \tilde{\mathbf{E}}'_0 \to \overline{\mathbf{E}}'_0$ este o aplicație pe; evident, se poate alege $\tilde{v} \in N \to \mathcal{S}$ căci $\mathcal{V}_0 + \mathcal{S} = \mathcal{S}_0$, dar atunci $\theta'_{\Omega}(\overline{v}) = \tilde{v}$ conform cu 5.3) din lema 5.

Dat fiind că $\overline{v} \in \overline{\mathcal{V}}_{0\Omega}$, rezultă $\theta'_{\Omega}(\overline{v}) \in \overline{\mathcal{J}}_{\Omega}$ deci conform cu 5.4) din lema 5,

$$(\exists)\, l \in N,\ s_0, \ldots, s_l \in \mathcal{A},\ \tilde{v}_0, \ldots, \tilde{v}_l \in (N \to \mathcal{S}) \cap \overline{\mathcal{V}}_1:$$

$$\tilde{v} = \sum_{\substack{i \in N \\ i \leqslant l}} u(s_i) \cdot \tilde{v};$$

fie acum $k \in N$, $\varphi \in \mathcal{D}_n$; atunci $(\forall)\, h \in N$:

$$<(\tilde{v}(h))(k), \varphi> = \sum_{\substack{i \in N \\ i \leqslant l}} <(\tilde{v}_i(h))(k), s_i(k)\varphi>$$

deci

$$\lim_{\substack{h \in N \\ h \to \infty}} <(\tilde{v}(h))(k), \varphi> = \lim_{\substack{h \in N \\ h \to \infty}} \sum_{\substack{i \in N \\ i \leqslant l}} <(\tilde{v}_i(h))(k), s_i(k)\varphi> =$$

$$= \sum_{\substack{i \in N \\ i \leqslant l}} \lim_{\substack{h \in N \\ h \to \infty}} <(\tilde{v}_i(h))(k), s_i(k)\varphi> = 0$$

permutarea operațiilor lim, $\sum$ fiind permisă dat fiind că

$$\tilde{v}_i \in \tilde{\mathcal{V}}_1,\ s_i(k)\varphi \in \mathcal{D}_n.$$

Deci $\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}_1$, adică în definitiv

$$\tilde{v} \in (N \to \mathcal{S}) \cap \tilde{\mathcal{V}}_1.$$

4.4) Incluziunea $\supseteq$ este evidentă. Reciproc, fie $\overline{v} \in ((\overline{E}'_0)_{\overline{T}_0}) \cap \overline{\mathcal{V}}_{0\Omega}$; atunci $(\exists)\, s \in \mathcal{S}$:

$$\overline{v} = u(s + \mathcal{V}_0) \quad \text{căci} \quad \overline{v} \in (\overline{E}'_0)_{\overline{T}_0}$$

iar $\theta'_\Omega(\overline{v}) \in \overline{\mathcal{J}}_\Omega$ căci $\overline{v} \in \overline{\mathcal{V}}_{0\Omega}$; dar $\theta'_\Omega(\overline{v}) = u(\theta_\Omega(s + \mathcal{V}_0))$ căci $\overline{v} = u(s + \mathcal{V}_0)$ iar $\theta_\Omega(s + \mathcal{V}_0) = s$ căci $s \in \mathcal{S}$, deci $u(s) = \theta'_\Omega(\overline{v}) \in ((\overline{E}'_\Omega)_{\overline{T}_\Omega}) \cap \overline{\mathcal{J}}_\Omega$ deci $s = u(0)$ căci $\overline{\mathcal{T}}_\Omega$ este separată conform teoremei $(\Omega.A.C.H)$.

Rezultă că $\overline{v} = u(\overline{0}) \in \overline{T}_0(\{\overline{0}\})$.

4.5) Demonstrăm incluziunea $\subseteq$. Fie $\overline{v} \in \overline{\mathcal{V}}_{0\Omega} \cap \overline{v}_0$; atunci $\theta'_\Omega(\overline{v}) \Cup \overline{\mathcal{J}}_\Omega$ deoarece $\overline{v} \in \overline{\mathcal{V}}_{0\Omega}$ și $(\exists)\, \widetilde{v} \in \widetilde{\mathcal{V}}_0$:

$$\overline{v} = \overline{\theta}'(\widetilde{v}) \text{ dat fiind că } \overline{v} \in \overline{\mathcal{V}}_0;$$

evident, se poate alege $\widetilde{v}$; $N \to \mathcal{S}$ căci $\mathcal{V}_0 + \mathcal{S} = \mathcal{S}_0$; în acest caz conform cu 5.3) din lema 5

$$\theta'_\Omega(\overline{v}) = \theta'_\Omega(\overline{\theta}'(\widetilde{v})) = \widetilde{v}.$$

Conform cu 4.3) $(\exists)\, \widetilde{w} \in (N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{V}}_1$:

$$\overline{v} = \overline{\theta}'(\widetilde{w})$$

dar atunci conform cu 5.3) din lema 5

$$\theta'_\Omega(\overline{v}) = \widetilde{w}$$

deci $\widetilde{w} = \theta'_\Omega(\overline{v}) = \widetilde{v}$.

Rezultă că $\widetilde{v} \in \widetilde{\mathcal{V}}_1$, deci în definitiv

$$\widetilde{v} \in (N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{V}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{V}}_0$$

adică $\overline{v} = \overline{\theta}'(\widetilde{v}) \in \overline{\theta}'((N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{V}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{V}}_0)$.

Reciproc, fie $\widetilde{v} \in (N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{V}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{V}}_0$, $\overline{v} = \overline{\theta}'(\widetilde{v})$; atunci $\overline{v} \in \overline{\theta}'((N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{V}}_1 \cap \overline{\theta}'(\widetilde{\mathcal{V}}_0) \subseteq \overline{\mathcal{V}}_{0\Omega} \cap \overline{\mathcal{V}}_0$.

4.6) Fie $\overline{v} \in \overline{\mathcal{V}}_{0\Omega} \cap \overline{\theta}'((N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{S}}_{01})$; atunci conform cu 4.3)

$$(\exists)\, \widetilde{v} \in (N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{V}}_1:$$

$$\overline{v} = \overline{\theta}'(\widetilde{v}) \text{ căci } \overline{v} \in \widetilde{\mathcal{V}}_{0\Omega}$$

și $(\exists)\, \widetilde{w} \in (N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{S}}_{01}$:

$$\overline{v} = \overline{\theta}'(w)$$

căci $\overline{v} \in \overline{\theta}'((N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{S}}_{01})$; dar conform cu 5.3) din lema 5

$$\widetilde{v} = \overline{\theta}'_\Omega(\overline{v}) = \widetilde{w}$$

deci $\widetilde{v} = \widetilde{w} \in \widetilde{\mathcal{V}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{S}}_{01} \subseteq \widetilde{\mathcal{V}}_0$
deci, în definitiv, $\overline{v} = \overline{\theta}'(\widetilde{v}) \in \overline{\theta}'(\widetilde{\mathcal{V}}_0) = \widetilde{\mathcal{V}}_0$.

4.7) Demonstrăm incluziunea $\supseteq$.

Fie $\bar{\varphi} \in \bar{\bar{E}}_0$, $\bar{v} \in \overline{\mathcal{V}}_{0\Omega} \cap \overline{\mathcal{V}}_0$; atunci $(\exists)\, s \in \mathcal{S}, \tilde{v} \in (N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{V}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{V}}_0$:

$$\bar{\varphi} = s + \mathcal{V}_0,\ \bar{v} = \bar{\theta}'(\tilde{v});$$

dar atunci $\tilde{v} \in (N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{S}}_{01}$ căci $\widetilde{\mathcal{V}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{V}}_0 \subseteq \widetilde{\mathcal{S}}_{01}$
deci $u(\bar{\varphi}) + \bar{v} = \bar{\theta}'(u(s) + \tilde{v}) \in \bar{\theta}'((N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{S}}_{01})$;
or, $u(\bar{\varphi}) + \bar{v} \in \bar{\mathcal{S}}_{0\Omega}$, evident.

Reciproc, fie $\bar{s} \in \bar{\mathcal{S}}_{0\Omega} \cap \bar{\theta}'((N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{S}}_{01})$; atunci $(\exists)\, s \in \mathcal{S}$, $\tilde{v} \in (N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{V}}_1$:

$$\bar{s} = u(s + \mathcal{V}_0) + \bar{\theta}'(\tilde{v})$$

dar $\bar{s} \in \bar{\theta}'((N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{S}}_{01})$ deci $(\exists)\, \tilde{s} \in (N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{S}}_{01}$:

$$\bar{s} = \bar{\theta}'(\tilde{s});$$

atunci însă $\bar{\theta}'(\tilde{v}) = \bar{\theta}'(\tilde{s}) - u(s + \mathcal{V}_0) = \bar{\theta}'(\tilde{s}) - \bar{\theta}'(u(s)) =$

$$= \bar{\theta}'(\tilde{s} - u(s))$$

dar $\tilde{s} - u(s) \in (N \dashrightarrow \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{S}}_{01}$ deci conform cu 5.3) din lema 5

$$\tilde{v} = \theta'_\Omega(\bar{\theta}'(\tilde{v})) = \theta'_\Omega(\bar{\theta}'(\tilde{s} - u(s))) = \tilde{s} - u(s)$$

deci $\tilde{v} = \tilde{s} - u(s) \in (N \dashrightarrow \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{V}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{S}}_{01} = (N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{V}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{V}}_0$

de unde rezultă conform cu 4.5)

$$\bar{\theta}'(\tilde{v}) \in \bar{\theta}'((N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{V}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{V}}_0) = \overline{\mathcal{V}}_{0\Omega} \cap \overline{\mathcal{V}}_0.$$

Deci definitiv

$$\bar{s} = u(s + \mathcal{V}_0) + \bar{\theta}'(\tilde{v}) \in ((\bar{E}'_0)_{\bar{T}_0}) + (\widetilde{\mathcal{V}}_{0\Omega} \cap \widetilde{\mathcal{V}}_0).$$

DEFINIȚIA 11. Fie $\Omega \in \mathcal{A}$, definim

$$\overline{\Pi}_{0\Omega} : \bar{\mathrm{E}}'_0 \times \bar{\mathrm{E}}'_0 \to \{0,1\}$$

ca $\overline{\Pi}_{0\Omega}(\bar{\mathrm{s}}, \bar{\mathrm{t}}) = 1 \Leftrightarrow [\bar{\mathrm{s}}, \bar{\mathrm{t}} \in \bar{\mathcal{S}}_{0\Omega}, \bar{\mathrm{s}} - \bar{\mathrm{t}} \in \overline{\mathcal{V}}_{0\Omega}]$.
Notăm $\overline{\mathcal{T}}_{0\Omega} = (\bar{\mathrm{E}}_0, \bar{\mathrm{E}}'_0, \bar{\mathrm{T}}_0, \overline{\Pi}_{0\Omega})$.
PROPOZIȚIA 5. *Fie* $\Omega \in \mathcal{A}$ *atunci*

$$\overline{\mathcal{T}}_\Omega \in \mathfrak{T}(\overline{\mathcal{T}}_{0\Omega}, \Theta_\Omega).$$

Demonstrație. Confom teoremei (Ω.A.C.H), $\overline{\mathcal{T}}_\Omega \in \mathrm{PTA}(\bar{E}_\Omega, \bar{E}'_\Omega, \bar{T}_\Omega)$. Fie $\bar{\mathrm{s}}, \bar{t} \in \mathcal{C}h(\overline{\mathcal{T}}_{0\Omega})$ ca $\overline{\Pi}_{0\Omega}(\bar{\mathrm{s}}, \bar{\mathrm{t}}) = 1$; atunci $\bar{\mathrm{s}}, \bar{t} \in \mathcal{S}_{0\Omega}, \bar{s} - \bar{t} \in \widetilde{\mathcal{V}}_{0\Omega}$ deci $\theta'_\Omega(\bar{\mathrm{s}}), \theta'_\Omega(\bar{t}) \in \theta'_\Omega(\bar{\mathcal{S}}_{0\Omega}) \subseteq \theta'_\Omega((\bar{E}'_\Omega)_{\bar{T}0}) + \theta'_\Omega(\overline{\mathcal{V}}_{0\Omega}) \subseteq ((\bar{E}'_\Omega)_{\bar{T}\Omega}) + \bar{\mathcal{J}}_\Omega \subseteq \subseteq \overline{\mathcal{A}}_\Omega \subseteq \mathcal{C}h(\overline{\mathcal{T}}_\Omega)$ iar $\theta'_\Omega(\bar{\mathrm{s}}) - \bar{\theta}'_\Omega(\bar{t}) = \theta'_\Omega(\bar{\mathrm{s}} - \bar{t}) \in \theta'_\Omega(\overline{\mathcal{V}}_{0\Omega}) \subseteq \bar{\mathcal{J}}_\Omega \subseteq \subseteq \mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_\Omega, \bar{0})$ deci $\overline{\Pi}_\Omega(\theta'_\Omega(\bar{s}), \theta'_\Omega(\bar{t})) = 1$.

Ţinînd seama de notaţia 1 de la § 2, cap. I, rezultă că $\overline{\mathcal{T}}_\Omega \in \in \mathfrak{T}(\overline{\mathcal{T}}_{0\Omega}, \Theta_\Omega)$.

Rezultatul principal, privind scufundarea continuă a distribuțiilor în algebre comutative, cu element unitate, este dat de :

TEOREMA ($\mathcal{A}$). *Fie $\Omega \in \mathcal{A}$; atunci $\overline{\mathcal{T}}_{0\Omega}$ este o pseudotopologie vectorială completă pe $\overline{E}_0$.*

Dacă $\Omega \in \mathcal{A}_0$, atunci $\overline{\mathcal{T}}_{0\Omega}$ este separată și Θ_Ω algebrizabilă; au loc relațiile

$$\overline{\mathcal{T}}_\Omega = \overline{\mathcal{T}}\,(\overline{\mathcal{T}}_{0\Omega}, \Theta_\Omega) = \overline{\mathcal{T}}_c\,(\overline{\mathcal{T}}_{0\Omega}, \Theta_\Omega).$$

Demonstrație. Conform cu 4.1) și 4.2) din propoziția 4 și exemplul 8, cap. I, [8], rezultă că $\overline{\mathcal{T}}_{0\Omega} \in \mathrm{PTV\ C}\,(\overline{E}_0, \overline{E}'_0, \overline{T}_0)$.

Dacă $\Omega \in \mathcal{A}_0$, atunci conform teoremei (Ω.A.C.H) rezultă că $\overline{\mathcal{T}}_\Omega$ este separată, deci conform propoziției 5 de mai sus și corolarului (A.C) de la § 3, cap. I, rezultă că $\overline{\mathcal{T}}_{0\Omega}$ este Θ_Ω algebrizabilă.

Deoarece

$$\theta'_\Omega\,(\mathcal{C}n\,(\overline{\mathcal{T}}_{0\Omega})) = \theta'_\Omega\,(\overline{\mathcal{V}}_{0\Omega}) = \bar{\mathcal{J}}_\Omega = \mathcal{C}n\,(\dot{\overline{\mathcal{T}}}_\Omega)$$

rezultă, conform teoremei 1 și definiției 4 de la § 3, cap. I, relațiile cerute.

Observația ($\mathcal{A}$). Din teorema ($\mathcal{A}$) rezultă că familia de pseudotopologii vectoriale complete, separate pe $\overline{E}_0$ [9])

$$(\overline{\mathcal{T}}_{0\Omega} \mid \Omega \in \mathcal{A}_0)$$

se poate scufunda continuu în pseudotopologii algebrice complete, separate, comutative, cu element unitate. Această scufundare se realizează după cum urmează : fie $\Omega = (\{u\,(0)\}, \mathcal{S}, \{u\,(0)\}, \mathcal{A}) \in \mathcal{A}_0$; atunci

1)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}'_n = \overline{\mathrm{E}}_0 \arrow[r, "\theta_\Omega"] & \overline{\mathrm{E}}_\Omega = \mathcal{A} \\
\mathcal{P}\,(\overline{\mathrm{E}}_0) \arrow[d, "\overline{T}_0"'] & \mathcal{P}\,(\overline{\mathrm{E}}_\Omega) \arrow[d, "\overline{\mathrm{T}}_\Omega"] \\
\mathcal{P}\,(\overline{\mathrm{E}}'_0) & \mathcal{D}\,(\overline{\mathrm{E}}'_\Omega) \\
N \to \mathcal{D}'_n = \overline{\mathrm{E}}'_0 \arrow[r, "\theta'_\Omega"'] & \overline{\mathrm{E}}'_\Omega = N \to \mathcal{A}
\end{tikzcd}$$

2) $\overline{\mathcal{T}}_{0\Omega} = (\overline{\mathrm{E}}_0, \underline{\mathrm{E}}'_0, \overline{T}_0, \overline{\Pi}_{0\Omega})$ este o pseudotopologie vectorială completă, separată pe $\overline{\mathrm{E}}_0 = \mathcal{D}'_n$

$$\mathcal{C}h\,(\overline{\mathcal{T}}_{0\Omega}) = \bar{\mathcal{S}}_{0\Omega} = ((\overline{\mathrm{E}}'_0)_{\overline{\mathrm{T}}0}) + \overline{\mathcal{V}}_{0\Omega}$$

$$\mathcal{C}n\,(\overline{\mathcal{T}}_{0\Omega}, \bar{0}) = \overline{\mathcal{V}}_{0\Omega} = \bar{\theta}'\,((N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{V}}_1).$$

3) $\overline{\mathcal{T}}_\Omega = (\overline{E}_\Omega, \overline{E}'_\Omega, \overline{T}_\Omega, \overline{\Pi}_\Omega)$ este o pseudotopologie algebrică completă, separată pe algebra comutativă, cu element unitate $\overline{\mathrm{E}}_\Omega = \mathcal{A}$ iar

$$\begin{aligned}\mathcal{C}h\,(\overline{\mathcal{T}}_\Omega) = \bar{\mathcal{S}}_\Omega &= ((\overline{\mathrm{E}}'_\Omega)_{\overline{\mathrm{T}}\Omega}) + \overline{\mathcal{V}}_\Omega = ((\overline{\mathrm{E}}'_\Omega)_{\overline{\mathrm{T}}\Omega}) + \theta'_\Omega\,(\overline{\mathcal{V}}_{0\Omega}) = \\ &= ((\overline{\mathrm{E}}'_\Omega)_{\overline{\mathrm{T}}\Omega}) + ((N \to \mathcal{S}) \cap \overline{\mathcal{V}}_1)\end{aligned}$$

$$\mathcal{C}n\,(\overline{\mathcal{T}}_\Omega, \bar{0}) = \overline{\mathcal{V}}_\Omega = \theta'_\Omega\,(\overline{\mathcal{V}}_{0\Omega}) = (N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{V}}_1$$

---

[9] Conform celor de la § 3, $\overline{\mathrm{E}}_0$ se poate identifica cu spațiul distribuțiilor $\mathcal{D}'_n$

4) $(\forall)\,\bar{s}, \bar{t} \in \mathcal{C}h\,(\overline{\mathcal{T}}_{0\Omega})$:

$$\overline{\Pi}_{0\Omega}\,(\bar{s}, \bar{t}) = 1 \Leftrightarrow \overline{\Pi}_{\Omega}\,(\theta'_{\Omega}\,(\bar{s}), \theta'_{\Omega}\,(\bar{t})) = 1.$$

În continuare vom indica legătura care există între pseudotopologiile $\overline{\mathcal{T}}_{0\Omega}$ pe $\overline{E}_0$, cu $\Omega \in \mathcal{A}_0$, pe de o parte și pseudotopologia $\overline{\mathcal{T}}_0$ pe $\overline{E}_0$, care conform observației 6 de la §3, descrie convergența slabă (deci și tare) a șirurilor obişnuite de distribuții, considerînd distribuțiile ca clase de şiruri obişnuite de funcții indefinit derivabile, slab (tare) convergente în $\mathcal{D}'_n$.

3. RELAŢIA DINTRE PSEUDOTOPOLOGIILE $\overline{\mathcal{T}}_0$ și $(\overline{\mathcal{T}}_{0\Omega} \mid \Omega \in \mathcal{A}_0)$ PE $\overline{E}_0 = \mathcal{D}'_n$

DEFINIȚIA 12. Fie $\Omega \in \mathcal{A}$; definim $\overline{\Pi}_{01\Omega} :\ \overline{E}'_0 \times \overline{E}'_0 \rightarrow \{0,1\}$ ca

$$\overline{\Pi}_{01\Omega}\,(\bar{s}, \bar{t}) = 1 \Leftrightarrow (\bar{s}, \bar{t} \in ((\overline{E}'_0)_{\overline{T}0}) + (\overline{\mathcal{V}}_{0\Omega} \cap \overline{\mathcal{V}}_0), \bar{s} - \bar{t} \in \overline{\mathcal{V}}_{0\Omega} \cap \overline{\mathcal{V}}_0].$$

Notăm $\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega} = (\overline{E}_0, \overline{E}'_0, \overline{T}_0, \overline{\Pi}_{01\Omega})$.

TEOREMA (A.D). *Fie* $\Omega \in \mathcal{A}$; *atunci* :

A.D.1) $\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}$ *este o pseudotopologie vectorială completă, separată pe* $\overline{E}_0 = \mathcal{D}'_n$.

A.D.2) *Au loc inegalitățile*

$$\begin{matrix}\overline{\mathcal{T}}_0\\ \overline{\mathcal{T}}_{0\Omega}\end{matrix} \leqslant \sup\{\overline{\mathcal{T}}_0, \overline{\mathcal{T}}_{0\Omega}\} \leqslant \overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}.$$

A.D.3) $\overline{\mathcal{T}}_{\Omega} \in \mathcal{S}\,(\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}, \Theta_{\Omega})$.

Dacă $\Omega \in \mathcal{A}_0$, *atunci*

A.D. 5) $\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}$ *este* Θ_{Ω} *algebrizabilă.*

Demonstrație. Conform exemplului 8, cap. I, [8], rezultă că

$$\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega} \in \mathrm{PTVC}\,(\overline{E}_0, \overline{E}'_0, \overline{T}_0).$$

Deci rezultă imediat A.D.2). Dar $\overline{\mathcal{T}}_0$ este separată conform teoremei (C.H.V) de la §3, deci $\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}$ este separată căci $\overline{\mathcal{T}}_0 \leqslant \overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}$ și are loc propoziția 5 de la § 5, cap. I, [8]. Deci rezultă A.D.1).

A.D.3) Rezultă din propoziția 5 și din inegalitatea

$$\overline{\mathcal{T}}_{0\Omega} \leqslant \overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}.$$

A.D. 4) Dacă $\Omega \in \mathcal{A}_0$, atunci conform teoremei (Ω.A.C.H), $\overline{\mathcal{T}}_{\Omega}$ este separată, deci din A.D.3) și corolarul (A.C) de la § 3, cap. I, rezultă că $\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}$ este Θ_{Ω} algebrizabilă.

COROLARUL (A.D). Fie $\Omega \in \mathcal{A}$; atunci

$$\overline{\mathcal{T}}\,(\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}, \Theta_{\Omega}) = \overline{\mathcal{T}}_c(\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}, \Theta_{\Omega}).$$

Demonstrația rezultă din A.D.1) de la teorema (A.D) și din teorema 1 și definiția 4 de la §3, cap. I.

Acest corolar justifică următoarea:

Notație. Fie $\Omega \in \mathcal{A}$; notăm

$$\overline{\mathcal{T}}_{1\Omega} = \overline{\mathcal{T}}\,(\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}, \Theta_\Omega) = \overline{\mathcal{T}}_c\,(\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}, \Theta_\Omega).$$

***Observația** (**A.D**)*. A.D.1) În varianta tare, problema scufundării continui a distribuțiilor $\mathcal{D}'_n$ în algebre revine la construirea unei extensii algebrice comutative, cu element unitate Θ $((\overline{E}, \overline{E}', \overline{T}), \theta, \theta')$ a suportului topologic vectorial $(\overline{E}_0, \overline{E}'_0, \overline{T}_0)$ încît $\overline{\mathcal{T}}_0$ să fie Θ algebrizabilă[10]).

A.D.2) Teorema (A.D) rezolvă problema scufundării continui a distribuțiilor $\mathcal{D}'_n$ în algebre, într-o variantă slăbită, în sensul că se construiește:

a) o familie $(\Theta_\Omega \mid \Omega \in \mathcal{A}_0)$ de extensii algebrice stricte, comutative, cu element unitate a suportului topologic vectorial

$$(\overline{E}_0, \overline{E}'_0, \overline{T}_0);$$

b) o familie $(\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega} \mid \Omega \in \mathcal{A}_0)$ de pseudotopologii algebrice complete și separate pe $\overline{E}_0 = \mathcal{D}'_n$;
încît pentru orice $\Omega \in \mathcal{A}_0$

c) $\overline{\mathcal{T}}_0 \leqslant \overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}$,

d) $\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}$ este Θ_Ω algebrizabilă.

A.D. 3) Legătura dintre pseudotopologiile $\overline{\mathcal{T}}_0$, $\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}$ pe $\overline{E}_\Omega$ și $\overline{\mathcal{T}}_{1\Omega}$ pe $\overline{E}_\Omega$ este dată de relațiile următoare:

$$(\forall)\, \overline{s}, \overline{t} \in \mathcal{C}h\,(\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}) = ((\overline{E}'_0)_{\overline{T}0}) + \overline{\theta}'\,((N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{V}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{V}}_0):$$

$$\begin{aligned} &\overline{\Pi}_{01\Omega}\,(\overline{s}, \overline{t}) = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{\Pi}_{1\Omega}\,(\theta'_\Omega\,(\overline{s}), \theta'_\Omega\,(\overline{t})) = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \overline{\Pi}_0\,(\overline{s}, \overline{t}) = 1. \end{aligned}$$

În cele ce urmează vom explicita mai îndeaproape natura șirurilor Cauchy și convergente în pseudotopologiile $\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}$ pe $\overline{E}_0 = \mathcal{D}'_n$ cu $\Omega \in \mathcal{A}_0$.

TEOREMA (Ω. $\mathcal{C}h$. $\mathcal{C}n$). *Fie* $\Omega = (\{u\,(\circ)\}, \mathcal{S}, \{u\,(\circ)\}\, \mathcal{A}) \in \mathcal{A}_0$; *atunci*:

1) $\mathcal{C}n\,(\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}, \overline{0}) = \overline{\theta}'\,((N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{V}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{V}}_0)$ deci

$$(\forall)\, \overline{v} \in \overline{E}'_0 = N \to \mathcal{D}'_n:$$

$$\overline{v} \in \mathcal{C}n\,(\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}, \overline{0}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\exists)\widetilde{v} \in N \to \mathcal{S}: \\ \qquad 1.1)\ (\forall)\, k \in N,\ \varphi \in \mathcal{D}_n: \\ \qquad\qquad \lim\limits_{\substack{h \in N \\ h \to \infty}} \displaystyle\int_{R^n} (\widetilde{v}\,(h))\,(k)\, \varphi\, \mathrm{d}x = 0 \\ \qquad 1.2)\ (\forall)\ \varphi \in \mathcal{D}_n: \\ \qquad\qquad \lim\limits_{\substack{h \in N \\ h \to \infty}}\ \lim\limits_{\substack{k \in N \\ k \to \infty}} \displaystyle\int_{R^n} (\widetilde{v}\,(h))\,(k)\, \varphi\, \mathrm{d}x = 0 \\ \qquad 1.3)\ (\forall)\, h \in N; \\ \qquad\qquad \overline{v}\,(h) = \widetilde{v}\,(h) + \mathcal{V}_0 \end{array}\right]$$

---

[10]) Relativ la $\overline{\mathcal{T}}_0$, a se vedea observația 6 de la § 3.

2) $\mathcal{C}h(\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}) = \bigcup_{\bar{\varphi} \in \bar{E}_0} \mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}, \bar{\varphi})$

3) $(\forall)\ \bar{\varphi} \in \bar{E}_0$:

$$\mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}, \bar{\varphi}) = u(\bar{\varphi}) + \mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}, \bar{0}).$$

Demonstrația rezultă din A.D.1) de la teorema (A.D), 4.5) de la propoziția 4 și definiția 12.

Observația 7. Din lema 4 rezultă că

$$\{u(\bar{0})\} = \overline{T}_0(\{\bar{0}\}) \subsetneqq \mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}, \bar{0})$$

deci pseudotopologia $\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}$ nu se reduce la cea mai fină pseudotopologie pe $\bar{E}_0$.

Următoarele teoreme vor furniza indicații suplimentare asupra mulțimii de șiruri de funcții indefinit derivabile

$$(N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{V}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{V}}_0$$

deci implicit asupra mulțimii $\mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_{01}, \bar{0})$ a șirurilor convergente spre $\bar{0}$ în pseudotopologia $\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}$ pe $\bar{E}_0 = \mathcal{D}'_n$.

TEOREMA 3. *Fie* $A \subseteq E = \mathcal{E}_n$, *fie* $(\lambda_{hl} \mid h, l \in N)$ *o familie de numere reale încît*:

3.1) *Imaginea lui* A *în* $\mathcal{D}'_n$ *prin aplicația*

$$A \ni \varphi \to \langle \varphi, \cdot \rangle \in \mathcal{D}'_n$$

este slab mărginită;

3.2) $(\forall)\ h \in N$:

$\Lambda_h = \{l \in N \mid \lambda_{hl} \neq 0\}$ *este finită*;

3.3) $\lim\limits_{\substack{h \in N \\ h \to \infty}} \sum\limits_{l \in N} |\lambda_{hl}| = 0.$

Pentru $\tilde{s} : N \to ((N \to A) \cap \mathcal{S}_0)$ *definim* $\tilde{v} \in \tilde{E}'_0 = N \to \tilde{E}_0 = N \to \mathcal{S}_0$ *ca* $(\forall)\ h \in N$:

$$\tilde{v}(h) = \sum_{l \in N} \lambda_{hl}\, \tilde{s}(l);$$

atunci $\tilde{v} \in \widetilde{\mathcal{V}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{V}}_0$.

Demonstrație Fie $h, k \in N$, $\varphi \in \mathcal{D}_n$; atunci

$$< (\tilde{v}(h))(k), \varphi > = \sum_{l \in N} \lambda_{hl} < (\tilde{s}(l))(k), \varphi > \text{ dar } (\tilde{s}(l))(k) \in A$$

deci $(\forall)\ \varphi \in \mathcal{D}_n$:

$(\exists)\ C_\varphi > 0$:

$(\forall)\ l, k \in N$:

$$| < (\tilde{s}(l))(k), \varphi > | \leqslant C_\varphi$$

deci $(\forall)\ k \in N,\ \varphi \in \mathcal{D}_n$:

$$\lim_{\substack{h\in N\\ h\to\infty}} |<(\widetilde{v}(h))(k), \varphi>| \leqslant C_\varphi \lim_{\substack{h\in N\\ h\to\infty}} \sum_{l\in N} |\lambda_{hl}| = 0$$

de unde rezultă că $\widetilde{v} \in \widetilde{\mathcal{V}}_1$.

Din prima relaţie de sus rezultă de asemenea că $(\forall)\ h \in N,\ \varphi \in \mathcal{D}_n$:

$$|<\widetilde{v}(h), \varphi>| = \lim_{\substack{k\in N\\ k\to\infty}} |<(\widetilde{v}(h))(k), \varphi>| \leqslant C_\varphi \sum_{l\in N} |\lambda_{hl}|$$

deci $(\forall)\ \varphi \in \mathcal{D}_n$:

$$\lim_{\substack{h\in N\\ h\to\infty}} |<\widetilde{v}(h), \varphi>| = 0$$

de unde rezultă că $\widetilde{v} \in \widetilde{\mathcal{V}}_0$

TEOREMA 4. *În condiţiile teoremei 3,* fie $\Omega = (\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{J}, \mathcal{A}) \in \mathfrak{A}$; ***dacă*** $\widetilde{s} : N \to ((N \to A) \cap \mathcal{S})$, *atunci*

$$\widetilde{v} \in (N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{V}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{V}}_0.$$

Demonstraţie. Deoarece $\widetilde{s} : N \to ((N \to A) \cap \mathcal{S})$, rezultă că

$(\forall)\ l \in N$:

$$\widetilde{s}(l) \in (N \to A) \cap \mathcal{S}$$

deci $(\forall)\ h \in N$:

$$\widetilde{v}(h) = \sum_{l\in N} \lambda_{hl}\, \widetilde{s}(l) \in \mathcal{S}$$

deci $\widetilde{v} \in N \to \mathcal{S}$; or, conform teoremei 3, $\widetilde{v} \in \widetilde{\mathcal{V}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{V}}_0$.

Se observă că lema 4 rezultă din teorema 4 în cazul cînd

$$\widetilde{s}(\bar{0}) = s$$

$$\lambda_{hl} = \begin{cases} 1/(h+1) & \text{dacă } l = 0 \\ 0 & \text{dacă } l \geqslant 1. \end{cases}$$

TEOREMA 5. *Fie* $\Omega = (\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{J}, \mathcal{A}) \in \mathfrak{A}$, $v \in \mathcal{V}_0$, $\varphi \in E = \mathcal{E}_n$; *atunci*

5.1) $u \circ v \in (N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{V}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{V}}_0$

$$\bar{\theta}'(u \circ v) = \bar{\theta} \circ u \circ v \in \mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}, \bar{0})$$

5.2) $u \circ (u(\varphi) + v) - u(u(\varphi)) \in (N \to \mathcal{S}) \cap \widetilde{\mathcal{V}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{V}}_0$

$$\bar{\theta}'(u \circ (u(\varphi) + v)) = \bar{\theta} \circ u \circ (u(\varphi) + v) =$$
$$= u(\bar{\theta}(u(\varphi))) + \bar{\theta} \circ u \circ v \in \mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega}, \bar{\theta}(u(\varphi))).$$

Demonstraţie. 5.1) Fie $\widetilde{v} = u \circ v$; atunci $(\forall)\ h \in N$:

$$\widetilde{v}(h) = u(v(h)) \in E'_T \subseteq \mathcal{S}$$

deci $\widetilde{v} \in N \to \mathcal{S}$; dar $\widetilde{v} \in \widetilde{\mathcal{V}}_0$ căci $v \in \mathcal{V}_0$ conform (2.2.3) din propoziţia 2 din § 2; fie $k \in N$, $\varphi \in \mathcal{D}_n$; atunci $(\forall)\ h \in N$:

$$<(\widetilde{v}(h))(k), \varphi> = <(u(v(h)))(k), \varphi> = <v(h), \varphi>$$

deci

$$\lim_{\substack{h\in N\\ h\to\infty}} < (\tilde{v}(h))\,(k),\ \varphi > \ = \lim_{\substack{h\in N\\ h\to\infty}} < v(h),\ \varphi > \ = \ < v,\ \varphi > \ = 0$$

de unde rezultă că $\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}_1$.

5.2) Evident,

$$u \circ (u(\varphi) + v) - u(u(\varphi)) = u \circ v$$

deci (5.2) rezultă din (5.1).

Observația (✳). Considerăm pe $\bar{E}_0$ pseudotopologia vectorială completă, separată $\overline{\mathcal{T}}_{01}$ încît

$$\begin{aligned} \mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_{01}, \bar{0}) &= \bar{\theta}'(\{u \circ v \mid v \in \mathcal{V}_0 = \mathcal{C}n(\mathcal{T}_0, \bar{0})\}) \\ \mathcal{C}h(\overline{\mathcal{T}}_{01}) &= ((\bar{E}_0')_{\bar{T}_0}) + \mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_{01}, \bar{0})^{11}); \end{aligned}$$

atunci din teorema (A.D) și teorema 5 rezultă

$$\frac{\overline{\mathcal{T}}_0}{\overline{\mathcal{T}}_{0\Omega}} \leqslant \sup\{\overline{\mathcal{T}}_0, \overline{\mathcal{T}}_{0\Omega}\} \leqslant \overline{\mathcal{T}}_{01\Omega} \leqslant \overline{\mathcal{T}}_{01}.$$

Din teorema (A.D), cap. II, § 6, [8], rezultă că pentru orice $\Omega \in \mathcal{A}_0$, pseudotopologia $\overline{\mathcal{T}}_{01}$ este Θ_Ω algebrizabilă.

Acest fapt rezultă și din pct. A.D 5) din teorema (A.D) din prezentul paragraf, dacă se ține seama de relația $\overline{\mathcal{T}}_{01\Omega} \leqslant \overline{\mathcal{T}}_{01}$ stabilită mai sus.

Primită la redacție la 24 aprilie 1967

I.S.P.E.
B-dul Republicii nr. 29, București

BIBLIOGRAFIE

1. I. Korevaar, *Distributions defined by fundamental sequences*. Ind. Math., **17** (1955).
2. T. Iamanaka, *Une extension de la théorie des distributions de M. I. Korevaar*. Comment. Math. Univ. Sancti Pauli, 1957.
3. G. Marinescu, *Spații vectoriale topologice și pseudotopologice*. Ed. Acad. R.P.R., București, 1959.
4. G. Marinescu, *Espaces vectoriels pseudotopologiques et théorie des distributions*, Berlin, 1963.
5. M. Nicolescu, *Analiză matematică*, vol. III, București, 1958.
6. E. Rosinger, *Definirea spațiului distribuțiilor D_n' prin completarea unui spațiu de funcții continue*. Com. Acad. R.P.R., *6*, 641–650 (1962).
7. E. Rosinger, *Structuri pseudotopologice (III)*. St. cerc. mat., **17**, *7*, 1133–1143 (1965).
8. E. Rosinger, *Scufundarea distribuțiilor D'_n în algebre pseudotopologice*. St. cerc. mat., **18**, *5*, 687–729 (1966).

---

[11] Conform exemplului 8, cap. I, [8], rezultă în adevăr că

$$\overline{\mathcal{T}}_{01} \in \mathrm{PTVCH}\,(\bar{E}_0, \bar{E}_0', \bar{T}_0).$$

ASUPRA LANŢURILOR CU LEGĂTURI COMPLETE NEOMOGENE

DE

GEORGE THEILER

Exemplu de lanţ cu legături complete neomogen a cărui ergodicitate se recunoaşte direct şi care conţine drept caz particular un lanţ neomogen staţionar.

1. În [3] s-a scos în evidenţă printre altele faptul că pentru elaborarea teoriei generale a sistemelor cu legături complete ergodice nu este necesar să se presupună existenţa vreunui procedeu operaţional de deducere a probabilităţilor de tranziţie succesive şi a valorilor succesive ale lui $\varphi(\cdot)$.

Mai mult, întrucît valorile succesive ale lui $\varphi(\cdot)$ sînt de fapt funcţii numerice $\varphi_n(c, x_1 \dots x_n)$, $n = 1, 2, \dots$, s-a arătat că e suficient să se considere astfel de funcţii supuse numai unor condiţii de integrabilitate şi nu celei prea restrictive de mărginire uniformă.

Desigur că folosindu-se procedeul operaţional este de justificat că se poate obţine clasa cea mai generală de probabilităţi de tranziţie şi de funcţii $\varphi_n(c, x_1 \dots x_n)$ uniform mărginite şi integrabile. Reamintim că procedeul utilizat aduce pînă la urmă problema la cazul omogen [2].

Problema ergodicităţii este tratată cu procedeul operaţional în ipoteza că condiţia (W) este satisfăcută şi o anumită serie legată de probabilităţile de tranziţie este convergentă [1], [2].

Or aceste condiţii sînt foarte greu de verificat în genere şi ar fi fost preferabil să se găsească alte condiţii mai simple pe clase mai restrînse dar mai uşor de verificat.

Ca punct de plecare am găsit de aceea util să dau o teoremă de tip Cauchy care în esenţă nu cere mult mai mult decît condiţiile de mai sus [3].

În cele ce urmează mă voi opri asupra unei particularităţi pe care studiul direct al ergodicităţii proceselor cu legături complete neomogene îl scoate în relief.

În paragraful 4 al capitolului I din [1] se subliniază caracterul nestaţionar al lanţurilor omogene simple, iar în [2] se arată cum pentru clasa

ST. CERC. MAT., TOM. 20, Nr. 4, P. 583–586, Bucureşti, 1968

de procese considerate, cazul neomogen se aduce printr-o amplificare de spații la cazul omogen, ceea ce duce la concluzia că și lanțurile neomogene sînt nestaționare.

Astfel fiind am socotit util să dau un exemplu care conține ca un caz particular un lanț staționar neomogen.

Exemplul dovedește că modul de abordare a ergodicității în esență cu ajutorul ecuațiilor funcționale ca pînă acum face să se treacă peste clase de procese ergodice care merită atenție și pentru care ergodicitatea poate fi recunoscută mult mai simplu, expresiile limită apărînd explicit.

2. Să considerăm un lanț dublu Markov cu un număr finit de stări construit de evenimente de forma (i, x) cu $i \in I$, $x \in J$ definit astfel:

a) probabilitățile inițiale:

$$p(i, x) = p(i)\, q_i(x);$$

b) probabilitățile de tranziție:

$$p([i_1, x_1);\ (i_2, x_2)] = \overline{p}(i_1, i_2)\, q_{i_2}(x) \quad i_1, i_2 \in I;\ x_1, x_2 \in J,$$

unde $p(i)$, $\overline{p}(i_1, i_2)$ reprezintă probabilitățile inițiale și de tranziție ale unui lanț Markov simplu și omogen, iar $q_i(x)$, pentru orice $i \in I$ fixat, reprezintă probabilitățile corespunzătoare unei distribuții multidimensionale, distribuțiile pentru diferitele valori ale lui i fiind independente.

Vom considera acum următoarele două distribuții derivate din cea de mai sus:

1) Facem ca în evenimentele (i, x), x să ia toate valorile posibile. Atunci:

$$\sum_{x \in J} p(i, x) = p(i) \sum_{x \in J} p_i(x) = p(i)$$

$$\sum_{x_1, x_2 \in J} p[(i_1, x_1);\ (i_2, x_2)] = \overline{p}(i_1, i_2) \sum_{x_2 \in J} q_{i_2}(x_2) = \overline{p}(i_1, i_2).$$

Mai departe se vede cu ușurință că distribuția marginală este un lanț Markov ergodic simplu și omogen.

Notăm cu $p^{\infty}(i)$ probabilitățile inițiale ale lanțului Markov staționar corespunzător.

Desigur

$$\sum_{i_1 \in I} p^{\infty}(i_1)\, \overline{p}(i_1, i_2) = p^{\infty}(i_2).$$

2) Vom face acum ca în evenimentele (i, x), i să ia toate valorile posibile. Distribuția marginală corespunzătoare nu mai poate fi definită așa de simplu ca în cazul precedent. O vom defini cu ajutorul unor probabilități inițiale și a unor probabilități de tranziție.

a) Probabilitățile inițiale vor fi:

$$\sum_{i \in I} p(i, x) = \sum_{i \in I} p(i)\, q_i(x) = q(x).$$

Desigur: $\sum_{x \in J} q(x) = 1$, deci acestea reprezintă într-adevăr probabilități inițiale.

b) Probabilităţile de tranziţie vor fi definite astfel:

$$q(x_n \mid x_1 \dots x_{n-1}) =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n \in I} p(i_1)\, q_{i_1}(x_1)\, \overline{p}(i_1, i_2)\, q_{i_2}(x_2) \dots \overline{p}(i_{n-2}, i_{n-1})\, q_{i_{n-1}}(x_{n-1})\, \overline{p}(i_{n-1}, i_n)\, q_{i_n}(x_n)}{\sum\limits_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1} \in I} p(i_1)\, q_{i_1}(x_1)\, \overline{p}(i_1, i_2)\, q_{i_2}(x_2) \dots \overline{p}(i_{n-2}, i_{n-1})\, q_{i_{n-1}}(x_{n-1})}.$$

Evident,

$$\sum_{x_n \in J} q(x_n \mid x_1 \dots x_{n-1}) = 1.$$

Această distribuţie derivată corespunzătoare caracteristicei x reprezintă un lanţ cu legături complete neomogen.

Să dovedim că lanţul este ergodic.

Pentru aceasta să observăm că notînd:

$$\overline{p} = \{p(i_1)\}_{i_1 \in I}, \quad y_1, y_2, \dots, y_r \in J,$$

$$P^{(n)}_{\overline{p}, x_1 \dots x_k}(y_1, y_2, \dots, y_k) =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i_1, \dots, i_k \in I} p(i_1)\, q_{i_1}(x_1)\, \overline{p}(i_1, i_2)\, q_{i_2}(x_2) \dots \overline{p}(i_{k-1}, i_k)\, q_k(x_k) \sum\limits_{i_{k+1}, \dots, i_{k+n-1} \in I}}{\sum\limits_{i_1, \dots, i_k \in I} p(i_1)\, q_{i_1}(x_1)\, \overline{p}(i_1, i_2)\, q_{i_2}(x_2) \dots \overline{p}(i_{k-1}, i_k)\, q_k(x_k)}$$

$$\frac{\overline{p}(i_k, i_{k+1})\, \overline{p}(i_{k+1}, i_{k+2}) \dots \overline{p}(i_{k+n-2}, i_{k+n-1}) \sum\limits_{i_{k+n} \dots i_{k+n-r-1}} \overline{p}(i_{k+n-1}, i_{k+n})\, q_{i_{k+n}}(y_1) \dots \overline{p}(i_{k+n+r-1}, i_{k+n+r})\, q_{i_{k+n+r}}(y_r)}{\sum\limits_{i_1 \dots i_k} p(i_1)\, q_{i_1}(x_1)\, \overline{p}(i_1, i_2)\, q_{i_2}(x_2) \dots \overline{p}(i_{k-1}, i_k)\, q_k(x_k)}.$$

Dar lanţul Markov simplu fiind ergodic:

$$\sum_{i_{k+1}, \dots, i_{k+n-1} \in I} \overline{p}(i_k, i_{k+1})\, \overline{p}(i_{k+1}, i_{k+2}) \dots \overline{p}(i_{k+n-1}, i_{k+n}) = p^{\infty}(i_{k+n}) + \varepsilon(i_k, i_{k+n})$$

cu

$$|\varepsilon(i_k, i_{k+n})| < \varepsilon \text{ şi } \varepsilon > 0 \text{ arbitrar, pentru } n > N(\varepsilon) \text{ cu } (N\varepsilon),$$

număr finit determinat.

Înlocuind, se vede imediat (modificînd uşor notaţiile) că:

$$|P^{(n)}_{\overline{p}, x_1 \dots x_k}(y_1 \dots y_r) - \sum_{i_1 \dots i_r \in I} p^{\infty}(i_1)\, q_{i_1}(y)\, \overline{p}(i_1, i_2)\, q_2(y_2) \dots \overline{p}(i_{r-1}, i_r)\, q_{i_r}(y_r)| < \varepsilon$$

pentru $n > N(\varepsilon)$, ceea ce stabileşte ergodicitatea uniformă conform definiţiei acesteia în [3] şi ceea ce prezintă interes expresia explicită a limitei.

În particular dacă luăm drept probabilităţi iniţiale:

$\overline{p}^{\infty} = \{p^{\infty}(i_1)\}_{i \in I}$ se vede imediat că $P^{(n)}(y_1 \dots y_n)$ nu depinde de n, deci lanţul este staţionar şi cum $\lim\limits_{n \to \infty} P^{(n)}_{x_1, \dots, x_k}(y_1 \dots y_r)$ nu depinde de $x_1 \dots x_k$) lanţul este ergodic.

Iată deci un exemplu de lanţ cu legături complete staţionar ergodic, acestuia corespunzîndu-i pe baza procedeului din [2] un lanţ omogen staţionar.

Desigur ar fi interesant să se studieze cît mai complet cazul general al sistemelor cu legături complete staţionare ergodice.

Primită la redacţie la 26 octombrie 1967

Centrul de statistică matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. M. Иосифеску, *Случайные системы с полными связями с произвольным множеством состояний*. Rev. Math. Pures et Appl. 611–645 (1963).
2. — *Systèmes aléatoires non homogènes à liaisons complètes à un ensemble quelconque d'états*. Bull. Soc. Math. Roumanie, **1**, 13–19 (1965).
3. G. Theiler, *Uniformly ergodic stochastic processes with discrete parameters*. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **2**, 191–223 (1967).

ASUPRA LANȚURILOR ERGODICE DE ORDIN INFINIT

DE

GEORGE THEILER

Se dau condiții suficiente de ergodicitate care în cazul $n_0 > 1$ nu implică ergodicitatea uniformă.

În cele ce urmează reluăm problema lanțurilor ergodice de ordin infinit cu un număr finit de stări, de tip Fortet, considerată de Suppes și Lamperti în [1].

Întrucît în lucrarea acestor autori condițiile de ergodicitate sînt incomplete și chiar condițiile suplimentare date în urma contraexemplului prezentat de Marius Iosifescu pot fi îmbunătățite, reluăm problema cu atît mai mult cu cît demonstrația dată în [1], în măsura în care e valabilă, e doar schițată și aceasta pentru un caz particular.

Considerăm un lanț de ordin infinit cu probabilitățile de trecere $p_i(x)$, unde x este vectorul reprezentînd trecutul, iar $i \in I$, I fiind mulțimea stărilor posibile.

Prin $(x + x')$ notăm un vector construit din succesiunea vectorilor x și x', x urmînd lui x'.

Notăm cu $p_U(x)$ probabilitatea realizării stărilor viitoare reprezentate prin vectorul U, știind că în trecut s-au realizat stările exprimate prin vectorul x, iar prin $p^k_{U(x)}(x)$ probabilitatea ca stările u să se realizeze nu imediat după stările x, ci după k „pași".

Tot așa notăm cu $p_i^{(n)}(x)$ probabilitatea ca starea i să se realizeze nu imediat după stările x, ci după n pași.

Obiectul acestei lucrări este de a dovedi că pentru lanțul considerat există $\lim\limits_{n\to\infty} p_i^{(n)}(x)$ și aceasta este independentă de x, dacă sînt îndeplinite următoarele trei condiții :

1° Oricare ar fi x', x'', $\varepsilon > 0$ și numărul întreg $p > 0$, există un număr întreg $N'(p, \varepsilon)$ astfel ca pentru $n < N'(p, \varepsilon)$ probabilitatea ca două șiruri de probe de volum n consecutive lui x' și x'' să aibă cel puțin pe o porțiune comună de volum p aceleași stări să fie mai mare cu $(1 - \varepsilon)$

ST. CERC. MAT., TOM. 20, Nr. 4, P. 587–597, BUCUREȘTI, 1968

2° Există un număr întreg n_0, un $j_0 \in I$ şi un $\delta > 0$ astfel ca

$$p_{j_0}^{(n_0)}(x) > \delta$$

pentru orice x.

3° $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m < \infty$, unde $\varepsilon_m = \sup_{i,\, x',\, x'',\, x} |p_i(x + x') - p_i(x + x'')|$, $i \in I$ iar x conţine starea j_0 de cel puţin m ori.

Condiţia 1° este necesară numai pentru $n_0 > 1$. Pentru $n_0 = 1$ ea este o consecinţă a condiţiei 2° după cum se va vedea mai departe.

Condiţia 1° este îndeplinită în cazul cînd este satisfăcută condiţia (W) considerată de Marius Iosifescu, deci ea nu cere mai mult decît aceasta şi are un caracter mai intuitiv.

Vom mai nota :

$$\varepsilon_m^{(k)} = \sup_{i,\, x',\, x'',\, x} |p_i^{(k)}(x + x') - p_i^{(k)}(x + x'')|$$

desigur :

$$\varepsilon_m^{(1)} = \varepsilon_m .$$

Înainte de a trece la demonstraţia teoremei voi începe cu cîteva considerente preliminare.

a) Relaţia :

$$p_i^{(n)}(x) = \sum_{j\in I} p_j(x)\, p_i^{(n-1)}(j + x),$$

duce mai departe la :

$$p_i^{(n)}(x) = \sum_{j\in I} p_j(x) \sum_{k\in I} p_k(j + x)\, p_i^{(n-2)}(k + j + x) =$$

$$\sum_{U\in I^2} p_u(x)\, p_i^{(n-2)}(U + x)\,; \quad \sum_{U\in I^2} p_U(x) = 1.$$

Prin inducţie rezultă imediat :

$$p_i^{(n)}(x) = \sum_{U\in I^{n_0}} p_U(x)\, p_i^{(n-n_0)}(U + x) \therefore \sum_{U\in I^{n_0}} p_U(x) = 1.$$

Desigur :

$$\sum_{U\in j_0\times I^{n_0-1}} p_U(x) = p_{j_0}^{(n_0)}(x) \quad \therefore \sum_{U\in[I-j_0]\times I^{n_0-1}} p_U(x) = 1 - p_{j_0}^{(n_0)}(x).$$

b) Întrucît $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m < \infty$, rezultă $\varepsilon_m \to 0$ cînd $m \to \infty$. Totodată se vede imediat că $\varepsilon_{m+1} \leqslant \varepsilon_m$, căci dacă x conţine pe j_0 cel puţin de m ori, el conţine j_0 sau cel puţin de $(m + 1)$ ori sau exact de m ori, deci conţine toate evenimentele pe baza cărora se calculează ε_{m+1} şi în plus altele.

Tot aşa se vede că, în general, $\varepsilon_m^{(k)} \geqslant \varepsilon_{m+1}^{(k)}$.

c) Pornind de la relaţia :

$$a_1 a_2 \ldots a_n - b_1 b_2 \ldots b_n = a_2 a_3 \ldots a_n (a_1 - b_1) + b_1 a_3 \ldots a_n (a_2 - b_2) +$$

$$+ \ldots + b_1 b_2 \ldots b_{n-1} (a_n - b_n)$$

rezultă că atunci cînd $0 \leqslant a_i,\ b_j \leqslant 1 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$,

$$|a_1 a_2 \ldots a_n - b_1 b_2 \ldots b_n| < |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n|.$$

De aici urmează imediat :

$$|p_U(x + x') - p_U(x + x'')| < n_0\, \varepsilon_m$$

dacă x conţine pe j_0 cel puţin de m ori.

Pentru a demonstra teorema vom începe cu două leme, corespondentele acelora ale lui Suppes şi Lamperti din [1].

Lema 1. $\varepsilon_m^{(k)}$ *tinde uniform către* 0 *în raport cu* k *atunci cînd* $m \to \infty$.

Demonstraţie. Pornim de la :

$$|p_i^{(k)}(x + x') - p_i^{(k)}(x + x'')| = |\sum_{U \in I^{n_0}} [p_U(x + x')\, p_i^{(k-n_0)}(U + x + x') -$$

$$- p_U(x + x'')\, p_i^{(k-n_0)}(U + x + x'')]| \leqslant \sum_{U \in I^{n_0}} p_U(x + x')\, |p_i^{(k-n_0)}(U + x + x') -$$

$$- p_i^{(k-n_0)}(U + x + x'')| + \sum_{U \in I^{n_0}} |p_U(x + x'') - p_U(x + x'')\, p_i^{(k-n_0)}(U + x + x'').$$

Inegalitatea de mai sus implică :

$$\varepsilon_m^{(k)} \leqslant \sup [\sum_{U \in j_0 \times I^{n_0 - 1}} p_U(x + x')\, |p_i^{(k-n_0)}(U + x + x') - p_i^{(k-n_0)}(U + x + x'')| +$$

$$+ \sum_{U \in [I - j_0] \times I^{n_0 - 1}} p_U(x + x')\, |p_i^{(k-n_0)}(U + x + x') - p_i^{(k-n_0)}(U + x + x'')| +$$

$$+ \sum_{U \in I^{n_0}} |p_U(x + x') - p_U(x + x'')|].$$

În primul termen din membrul al doilea $(U + x + x')$ şi $(U + x + x'')$ conţin starea j_0 de cel puţin $(m + 1)$ ori. Expresia din modul este mai mică decît $\varepsilon_{m+1}^{(k-n_0)}$ iar $\sum_{U \in j_0 \times I^{n_0 - 1}} p_U(x + x') = p_{j_0}^{(n_0)}(x + x')$.

Prin urmare acest termen e mai mic decît :

$$\varepsilon_{m+1}^{(h-n_0)}\, p_{j_0}^{(n_0)}(x + x').$$

Al doilea termen din membrul drept e mai mic decît :

$$\sum_{U \in [I - j_0] \times I^{n_0 - 1}} p_U(x + x')\, \varepsilon_m^{(k-n_0)} = \varepsilon_m^{(k-n_0)}\, [1 - p_{j_0}^{(n_0)}(x + x')].$$

Modulul din a treia sumă din membrul drept e mai mic conform lui c) ca $n_0 \varepsilon_m$.

Sub semnul $\sum$ se află evident N^{n_0} termeni astfel că a treia sumă este mai mică ca $n_0\, N^{n_0}\, \varepsilon_m$ (N fiind numărul stărilor I]

Prin urmare :

$$\varepsilon_m^{(k)} < \sup [\varepsilon_{m+1}^{(k-n_0)}\, p_{j_0}^{(n_0)}(x + x') + \varepsilon_m^{(k-n_0)}\, [1 - p_{j_0}^{(n_0)}(x + x')] + n_0\, N^{n_0}\, \varepsilon_m]$$

$$\varepsilon_m^{(k)} < \varepsilon_m^{(k-n_0)} + n_0\, N^{n_0}\, \varepsilon_m - \inf p_{j_0}^{(n_0)}(x + x')\, [\varepsilon_m^{(k-n_0)} - \varepsilon_{m+1}^{(k-n_0)}]$$

$$\varepsilon_m^{(k)} < \varepsilon_m^{(k-n_0)} + n_0\, N^{n_0}\, \varepsilon_m - \delta\, [\varepsilon_m^{(k-n_0)} - \varepsilon_{m+1}^{(k-n_0)}]$$

$$\varepsilon_m^{(k)} < (1 - \delta)\, \varepsilon_m^{(k-n_0)} + \delta\, \varepsilon_{m+1}^{(k-n_0)} + n_0\, N^{n_0}\, \varepsilon_m.$$

Pentru a putea folosi această relație, este necesar să aflăm în prealabil majoranta pentru $\varepsilon_m^{(2)}, \ldots, \varepsilon_m^{(n_0)}$.

Pornesc în acest scop de la relația :

$$|p_i^{(s)}(x+x')-p_i^{(s)}(x+x'')| \leqslant \sum_j p_j(x+x')|\underbrace{p_i^{(s-1)}(j+x+x')-p_i^{(s-1)}(j+x+x'')}_{<\varepsilon_m^{(s-1)}}|+$$

$$+\sum_j \underbrace{|p_j(x+x')-p_j(x+x'')|}_{<\varepsilon_m} \underbrace{p_i^{(s-1)}(j+x+x')}_{\leqslant 1}$$

din care rezultă imediat :

$$\varepsilon_m^{(s)} < \varepsilon_m^{(s-1)} + N\varepsilon_m$$

[desigur am presupus că x conține pe j_0 cel puțin de m ori].

Făcînd $s = 2, 3, \ldots, r$ și adunînd inegalitățile respective se obține :

$$\varepsilon_m^{(r)} < [1 + (r-1)N]\varepsilon_m .$$

Prin urmare $\varepsilon_m^{(2)}, \ldots, \varepsilon_m^{(n_0)}$ sînt toate majorate de :

$$\underbrace{[1 + (n_0 - 1)N]}_{A}\varepsilon_m$$

deci de $A\varepsilon_m$ cu A fix.

Revenind la relația :

$$\varepsilon_m^{(k)} < (1-\delta)\,\varepsilon_m^{(k-n_0)} + \delta\,\varepsilon_{m+1}^{(k-n_0)} + \underbrace{n_0 N^{n_0}}_{B}\varepsilon_m$$

și făcînd $k = n_0 + 1, \quad n_0 + 2, \quad \ldots, \quad 2n_0$ rezultă pentru aceste valori ale lui k :

$$\varepsilon_m^{(k)} < (1-\delta)\,A\varepsilon_m + \delta A\,\varepsilon_{m+1} + B\varepsilon_m .$$

Pentru $k = 2n_0 + 1$ rezultă :

$$\varepsilon_m^{(2n_0+1)} < (1-\delta)\,\varepsilon_m^{(n_0+1)} + \delta\,\varepsilon_{m+1}^{(n_0+1)}\, B\varepsilon_m .$$

Ținînd seama de relațiile de mai sus deducem :

$$\varepsilon_m^{(2n_0+1)} < (1-\delta)\,[(1-\delta)\,A\varepsilon_m + \delta A\,\varepsilon_{m+1} + B\varepsilon_m] + \delta\,[(1-\delta)\,A\varepsilon_{m+1} +$$

$$+ \delta A\,\varepsilon_{m+2} + B\varepsilon_{m+1}] + B\varepsilon_m$$

$$\varepsilon_m^{(2n_0+1)} < A\,[(1-\delta)^2\,\varepsilon_m + 2\delta\,(1-\delta)\,\varepsilon_{m+1} + \delta^2\varepsilon_{m+2}] +$$

$$+ B\,[(1-\delta)\,\varepsilon_m + \delta\,\varepsilon_{m+1}] + B\varepsilon_m .$$

Pentru $k = 2\,n_0 + 2 \ldots 3\,n_0$ se obține aceeași margine superioară. Mai departe, pentru $k = 3n_0 + 1 \ldots 4n_0$ se obține :

$$\varepsilon_m^{(3n_0+i)} < (1-\delta)\,[A\,(1-\delta)^2\varepsilon_m + 2\delta\,(1-\delta)\,\varepsilon_{m+1} + \delta^2\varepsilon_{m+2}] +$$

$$+ \delta\,[A(1-\delta)^2\varepsilon_{m+1} + 2\delta\,(1-\delta)\,\varepsilon_{m+2} + \delta^2\varepsilon_{m+3}] + B\varepsilon_m .$$

$$\varepsilon_m^{(3n_0+i)} < A\,[(1-\delta)^3\varepsilon_m + C_3^1\,(1-\delta)^2\varepsilon_{m+1} + C_3^2\,(1-\delta)\,\delta^2\varepsilon_{m+2} +$$

$$+ C_3^3\delta^2\varepsilon_{m+3}] + B\,[(1-\delta)^2\varepsilon_m + C_2^1\,(1-\delta)\,\delta\,\varepsilon_{m+1}\, C_2^2\,\delta^2\varepsilon_{m+2}] +$$

$$+ B\,[(1-\delta)\,\varepsilon_m + \delta\,\varepsilon_{m+1}] + B\varepsilon_m .$$

Prin inducţie se vede imediat că pentru $i = 1, 2, \dots, s$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_m^{(n_0 s+i)} &< A\,[(1-\delta)^{s-1}\varepsilon_m + C_s^1(1-\delta)^{s-1}\delta\varepsilon_{m+1} + \dots + C_s^s\delta^s\varepsilon_{m+s}] + \\ &+ B\,[(1-\delta)^{s-1}\varepsilon_m + C_{s-1}^1(1-\delta)^{s-2}\varepsilon_{m+1} + \dots + C_{s-1}^{s-1}\delta^{s-1}\varepsilon_{m+s-1}] + \\ &\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\quad B\,[(1-\delta)\,\varepsilon_m + C_1^1\,\delta\,\varepsilon_{m+1}] + \\ &\quad B\,[(1-\delta)^0\,\varepsilon_m].\end{aligned}$$

Prin urmare:

$$\begin{aligned}\varepsilon_m^{(n_0 s+i)} &< A\sum_{U=0}^{s} C_s^u\delta^u(1-\delta)^{s-u}\varepsilon_{m+u} + B\Bigg[\varepsilon_m\sum_{j=0}^{s-1}(1-\delta)^j + \\ &+ \varepsilon_{m+1}\delta\sum_{j=0}^{s-2} C_{j+1}^1(1-\delta)^j + \dots + \varepsilon_{m+u}\delta^u\sum_{j=0}^{s-u+1} C_{j+u}^u(1-\delta)^j + \\ &+ \dots + C_{s-1}^{s-1}\,\delta^{s-1}\varepsilon_{m+j-1}\Bigg].\end{aligned}$$

Desigur inegalitatea se întăreşte dacă în ceea ce priveşte coeficientul lui B în loc de sume finite vom lua sume infinite iar în coeficientul lui A în loc de ε_{m+u} vom lua ε_u $(u = 1, 2 \dots)$.

Coeficientul lui A va fi majorat astfel de $\varepsilon_m \sum\limits_{u=0}^{s} \delta^u(1-\delta)^{s-u} = \varepsilon_m$ astfel că:

$$\varepsilon_m^{(k)} < A\,\varepsilon_m + B\sum_{u=0}^{s-1} A_u\delta^u\varepsilon_{m+u}$$

unde am notat cu A_u suma seriei corespunzătoare coeficientului lui $\varepsilon_{m+u}\delta^u$ de mai înainte.

Or:

$$\begin{aligned}A_{u+1} - A_u &= \sum_{j=0}^{\infty} C_{j+u+1}^{u+1}(1-\delta)^j - \sum_{j=0}^{\infty} C_{j+u}^{u}(1-\delta)^j = \sum_{j=1}^{\infty} C_{j+u}^{u+1}(1-\delta)^j = \\ &= (1-\delta)\sum_{j'=0}^{\infty} C_{j'+u+1}^{u+1}(1-\delta)^{j'} = (1-\delta)\,A_{u+1}\end{aligned}$$

De aici se vede că $A_{u+1} = \dfrac{1}{\delta}A_u$ şi cum $A_0 = \sum\limits_{j=0}^{\infty}(1-\delta)^j = \dfrac{1}{\delta}$ urmează că $A_u = \dfrac{1}{\delta^{u+1}}$.

Aşadar:

$$\varepsilon_m^{(n_0\,+i)} < A\,\varepsilon_m + \frac{B}{\delta}\sum_{u=0}^{s-1}\varepsilon_{m+u}.$$

Seria cu termenul general ε_m fiind convergentă, conform condiției 3° urmează că $\sum\limits_{u=0}^{s-1} \varepsilon_{m+u}$ tinde uniform către 0 în raport cu s atunci cînd $m \to \infty$ și deci același lucru are loc și pentru $\varepsilon_m^{(n_0 s+i)}$ deci și pentru $\varepsilon_m^{(k)}$ în raport cu k.

Lema este complet demonstrată, găsindu-se totodată și o margine superioară uniformă în raport cu k, pentru $\varepsilon_m^{(k)}$ și anume :

$$\varepsilon_m^{(k)} < [1 + (n_0 - 1) N]\, \varepsilon_m + \frac{n_0 N^{n_0}}{\delta} \sum_{u=0}^{\infty} \varepsilon_{m+u}.$$

LEMA 2. *Oricare ar fi* x', x'', $i \in I$ și $\varepsilon > 0$ *există un întreg* $N(\varepsilon)$ *astfel ca pentru* $n > N(\varepsilon)$:

$$|p_i^{(n)}(x') - p_i^{(n)}(x'')| < \varepsilon.$$

Demonstrație. Observăm că :

$$\begin{aligned} p_i^{(n)}(x') - p_i^{(n)}(x'') = & \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1} \in I^{n_0-1};\; j_1, j_2, \ldots, j_n \in I^{n_0}} p_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i}(x')\, p_{i_1 j_2 \ldots j_n}(x'') - \\ & - \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n \in I^{n_0};\; j_1, j_2, \ldots, j_{n-1} \in I^{n_0-1}} p_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x')\, p_{j_1 j_2 \ldots j_{n-1} i}(x'') = \\ & = \sum p_{i_1}(x')\, p_{j_1}(x'')\, p_{i_2}(i_1 + x')\, p_{j_2}(j_1 + x'') \ldots \\ & p_{i_k}(i_{k-1} + \ldots i_1 + x')\, p_{j_k}(j_{k-1} + \ldots + j_1 + x'') \ldots \\ & p_i(i_{n-1} + \ldots + i_1 + x')\, p_{j_n}(j_{n-1} + \ldots + j_1 + x'') - \\ & - \sum p_{i_1}(x')\, p_{j_1}(x'')\, p_{i_2}(i_1 + x')\, p_{j_2}(j_1 + x'') \ldots \\ & p_{i_k}(i_{k-1} + \ldots + i_1 + x')\, p_{j_k}(j_{k-1} + \ldots + j_1 + x'') \ldots \\ & p_{i_n}(i_{n-1} + \ldots + i_1 + x')\, p_i(j_{n-1} + \ldots + j_1 + x''). \end{aligned}$$

Termenii corespunzători din cele două sume vor fi împărțite în două grupe pentru care sumele vor fi desemnate prin $\sum_1^{(i)}$ și $\sum_2^{(i)}$ $(i = 1,2)$.

Fiind dat un întreg p oarecare $(p < n)$, în $\sum_1^i$ vor intra numai acei termeni pentru care va exista un $k \geqslant p$ $(k < n)$ astfel ca $i_{k-p+1} = j_{k-p+1} \ldots i_k = j_k$ dar $i_{k-p} \neq j_{k-p}$ și înainte de rangul $(k - p + 1)$ să nu existe grupuri de indici consecutivi egali de lungime cel puțin p.

Cu alte cuvinte, aici k este rangul cel mai mic pentru care egalitatea de indici de tipul de mai sus poate avea loc. Valoarea maximă a lui k o vom lua $(n - 1)$.

Dar atunci :

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_1^{(1)} - \sum_1^{(2)} = \sum p_{i_j \ldots i_k}(x')\, p_{j_1 \ldots j_k}(x'')\, [p_i^{(n-k)}(i_k + \ldots + i_1 + x') - \\ - p_i^{(n-k)}(j_k + \ldots + j_1 + x'')]. \end{aligned}$$

Să observăm că

$$\sum p_{i_1 \ldots i_k}(x')\, p_{j_1 \ldots j_k}(x'') = \sum_{i_{k+1}, \ldots, i_n \in I^{n-k};\; j_{k+1}, \ldots, j_n \in I^{n-k}} p_{i_1 \ldots i_k i_{k+1} \ldots i_n}(x')\, p_{j_1 \ldots j_k j_{k+1} \ldots j_n}(x'')$$

reprezintă probabilitatea ca în n probe consecutive lui x' şi x'' să existe aceleaşi stări cel puţin pe o porţiune comună de volum p.

Desigur :

$$|\Sigma_1^{(1)} - \Sigma_1^{(2)}| < \sum p_{i_1 \dots i_k}(x') p_{j_1 \dots j_k}(x'') | p_i^{(n-k)}(i_k + \dots + i_1 + x') -$$
$$- p_i^{(n-k)}(j_k + \dots + j_1 + x'')| .$$

Vom împărţi acum toate drumurile de tipul de mai sus în două categorii după cum urmează :

Luăm $p = n_0 p_1$ şi vom împărţi mai departe cele p stări comune în subgrupe de cîte n_0 stări consecutive, deci în p_1 subgrupe şi ne vom fixa atenţia asupra stării cu care se termină fiecare subgrupă.

Împărţim toate drumurile de tipul considerat în două categorii.

1) Acelea care posedă proprietatea că între cel p_1 subgrupe există cel puţin m care se termină cu starea j_0.

2) Acelea care nu posedă proprietatea 1).

Rezultă atunci

$$|\Sigma_1^{(1)} - \Sigma_1^{(2)}| < \left[A \varepsilon_m + \frac{B}{\delta} \sum_{n=m}^{\infty} \varepsilon_n\right] + \sum{}' p_{i_1 \dots i_k}(x') p_{j_1 \dots j_k}(x''),$$

unde în Σ' intră numai acele sume în care ultimii $n_0 p_1$ indici din cei doi factori sînt respectiv egali între ei, iar dintre indicii cu care se termină fiecare din cele p_1 subgrupe de cîte n_0 indici sînt cel mult $(m - 1)$ indici egali cu j_0.

Cum prin ipoteză pentru orice x :

$$p_{j_0}^{(n_0)}(x) > \delta$$

urmează că :

$$\sum_{J \in [I-j]} p_j^{(n_0)}(x) < 1 - \delta$$

sau, scris dezvoltat,

$$\sum_{l_1, l_2, \dots, l_{n_0-1} \in I^{n_0-1};\ j \in [I-j_0]} p_{l_1 \dots l_{n_0-1} j}(x) < 1 - \delta .$$

Să fixăm acum pe $j_1, j_2, \dots, j_k$; atunci şi $i_{k-p+1} \dots i_k$ vor fi fixaţi. Dacă împărţim pe aceşti ultimi în subgrupe de cîte n_0 stări consecutive, ştim că dintre cele p_1 subgrupe, cel mult $(m - 1)$ se vor termina cu j_0.

Cu stările de mai sus fixe, avem în Σ' o contribuţie :

$$p_{j_1 j_2 \dots j_k}(x'') \sum p_{i_1 i_2 \dots i_{k-p}}(x') p_{i_{k-p+1} \dots i_{k-p+n_0}}(i_{k-p} + \dots + i_1 + x')$$
$$p_{i_{k-p+n_0+1} \dots i_{k-p+2n_0}}(i_{k-n_0+p} + \dots + i_1 + x') \dots p_{i_{k-p+(p_1-1)n_0+1} \dots i_k}(\dots) .$$

Or, sumele corespunzătoare factorilor de sub semnul Σ pot fi majorate cu 1 dacă ultimul indice este j_0 şi cu $(1 - \delta)$ dacă ultimul indice este diferit de j_0 şi sumarea se face şi pentru toate valorile acestuia.

Cum în total sînt cel mult $(m-1)$ indici j_0, rezultă că expresia de mai sus va fi majorată de:

$$p_{j_1 j_2 \ldots j_k}(x'')\,(1-\delta)^{p_1-(m-1)} \sum p_{i_1 i_2 \ldots i_{k-p}}(x') < (1-\delta)^{p_1-(m-1)}\, p_{j_1 j_2 \ldots j_k}(x'').$$

Pentru toate grupările de indici $j_1 \ldots j_k$ majoranta va fi:

$$(1-\delta)^{p_1-(m-1)} \sum p_{j_1 j_2 \ldots j_k}(x'') < (1-\delta)^{p_1-(m-1)} \sum p_{j_1 \ldots j_n}(x'') \leqslant (1-\delta)^{p_1-(m-1)}.$$

Prin urmare:

$$\left|\Sigma_1^{(1)} - \Sigma_1^{(2)}\right| < \left[A\,\varepsilon_m + \frac{B}{\delta}\sum_{u=m}^{\infty} \varepsilon_u\right] + (1-\delta)^{\left[\frac{p}{n_0}\right]-(m-1)}.$$

Desigur putem fixa un m astfel ca:

$$A\,\varepsilon_m + \frac{B}{\delta}\sum_{u=m}^{\infty} \varepsilon_u < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{cu } \varepsilon > 0 \text{ arbitrar.}$$

O dată fixat m putem alege un p astfel ca:

$$(1-\delta)^{\left[\frac{p}{n_0}\right]-(m-1)} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

În fine odată fixat p, se poate alege un $N'\left[p, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ conform condiției 1° astfel ca pentru $n > N'\left[p, \frac{\varepsilon}{3}\right)$:

$$\left|\Sigma_2^{1} - \Sigma_2^{2}\right| < \max\left[\Sigma_2^{(1)};\ \Sigma_2^{(2)}\right] < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Prin urmare notînd $N'\left[p, \frac{\varepsilon}{3}\right] = N(\varepsilon)$, căci p depinde de ε:

$$\left|p_i^{(n)}(x') - p_i^{(n)}(x'')\right| < \left|\Sigma_1^{(1)} - \Sigma_1^{(2)}\right| + \left|\Sigma_2^{(1)} - \Sigma_2^{(2)}\right| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

pentru $n > N(\varepsilon)$

Lema e complet demonstrată.

TEOREMĂ. *Dacă condițiile* 1°, 2°, 3° *sînt satisfăcute,* $\lim\limits_{n\to\infty} p_i^{(n)}(x)$ *există pentru orice* x *și este o constantă* P_i.

Demonstrație. Pornim de la relația:

$$p_i^{(n+n')}(x) - p_i^{(n)}(x) =$$

$$= \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_{n'} \in I^{n'}} p_{j_1 j_2 \ldots j_{n'}}(x)\,\left[p_i^{(n)}(j_{n'} + j_{n'-1} + \ldots + j_1 + x) - p_i^{(n)}(x)\right].$$

Ținîndu-se seama de lema 2 se vede imediat că:

$$\left|p_i^{(n+n')}(x) - p_i^{(n)}(x)\right| < \varepsilon \text{ pentru } n > N(\varepsilon).$$

Conform teoremei lui Cauchy de la șiruri numerice rezultă că există

$$\lim_{n\to\infty} p_i^{(n)}(x) = p_i(x)$$

și că :

$$|p_i^{(n)}(x) - p_i(x)| < \varepsilon \text{ pentru } n > N(\varepsilon)$$

La fel

$$|p_i^{(n)}(x') - p_i(x')| < \varepsilon \text{ pentru } n > N(\varepsilon)$$

iar pe baza lemei 2, $|p_i^{(n)}(x) - p_i^{(n)}(x')| < \varepsilon$ pentru $n > N(\varepsilon)$ Cum :

$$|p_i(x)-p_i(x')| \leqslant |p_i(x)-p_i^{(n)}(x)| + |p_i^{(n)}(x)-p_i^{(n)}(x')| + |p_i^{(n)}(x')-p_i(x')| < \varepsilon$$

x și x' fiind oarecari iar ε arbitrar, rezultă

$$p_i(x) = p_i$$

și teorema e demonstrată.

Extinderea teoremei de ergodicitate. Condițiile 1°, 2°, 3°, asigură ergodicitatea nu numai pentru o stare, ci și pentru un număr determinat oarecare de stări.

Pentru aceasta e suficient a se observa că :

$$p_{i_1 i_2 \ldots i_s}(x) = p_{i_1}(x) p_{i_2}(i_1 + x) \ldots p_{i_s}(i_{s-1} + \ldots + i_1 + x).$$

iar

$$|p_{i_1 i_2 \ldots i_s}(x + x') - p_{i_1 i_2 \ldots i_s}(x + x'') < |p_{i_1}(x + x') - p_i(x + x'')| + \ldots +$$

$$|p_{i_s}(i_{s-1} + \ldots + i_1 + x + x') - p_{i_s}(i_{s-1} + \ldots + i_1 + x + x'')|$$

astfel că în condiția 3° a teoremei în loc de ε_m este de luat $s\ \varepsilon_m$ ceea ce nu schimbă structura demonstrației.

Cazul $n_0 = 1$. În acest caz condiția 2° atrage condiția 1° după cum se constată cu ușurință printr-un raționament ca cel de la lema 2 (se arată că există un $N(p_1, \varepsilon)$ astfel ca pentru $n > N(p_1, \varepsilon)$ probabilitatea ca două șiruri de probe de volum n consecutive lui x' și x'' să aibe cel puțin o porțiune comună de volum p numai cu starea j_0 este mai mare ca $(1 - \varepsilon)$.

Asupra condițiilor modificate ale lui Suppes și Lamperti. Vom arăta că acestea sînt prea restrictive, existînd altele mai largi care să implice condițiile 1° și 2° ale teoremei.

Să presupunem că lanțul este ergodic pentru orice număr finit de stări, ergodicitatea fiind uniformă în raport cu x dar nu cu numărul stărilor.

Cum : $\sum_{j=1}^{N} p_j(x) = 1$, făcînd $n \to \infty$, urmează că :

$$\sum_{j=1}^{N} p_j = 1.$$

Există deci cel puțin un indice j_1, astfel ca :

$$p_{j_1} \geqslant \frac{1}{N}.$$

Lanțul fiind uniform ergodic, rezultă că :

$$p_{j_1}^{(n)}(x) > \frac{1}{2N} \text{ pentru orice } n \geqslant n_1 \text{ și orice } x.$$

Observînd acum că :

$$\sum_{j=1}^{N} p_{j+j}^{(n)}(x) = p_{j_1}^{(n)}(x) > \frac{1}{2N} \text{ pentru } n \geqslant n_1$$

și trecînd la limită, ceea ce conform ipotezei e permis, rezultă :

$$\sum_{j=1}^{N} p_{j_1 j} \geqslant \frac{1}{2N}.$$

Există cel puțin un indice $j = j_2$ astfel ca :

$$p_{j_1 j_2} \geqslant \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2N^2}$$

și deci

$$p_{j_1 j_2}^{(n)}(x) > \frac{1}{(2N)^2} \text{ pentru orice } x \text{ și } n \geqslant n_2 \geqslant n_1.$$

Procedînd mai departe în acest fel se vede că oricare ar fi k

$$p_{j_1 j_2 \ldots jk}^{(n)} > \frac{1}{(2N)^k} \text{ pentru orice } x \text{ și } n \geqslant n_k \geqslant n_{k-1} \geqslant \ldots$$

Prin urmare dacă lanțul este ergodic în sensul considerat, există un șir de indici $j_1, j_2, \ldots, j_k \ldots$ $[j_n \in I\,; n = 1, 2 \ldots]$ și un șir de numere n_k $[k = 1, 2, \ldots]$ cu $n_k \geqslant n_{k-1}$ astfel ca :

$$p_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{(n_k)}(x) > \frac{1}{(2N)^k},\ k = 1, 2, \ldots$$

Aceste condiții le conțin pe acelea ale lui Suppes și Lamperti, ele implicînd desigur condițiile 1° și 2° ale teoremei [condiția 2° se verifică luînd $k = p$ în relațiile de condiție de mai sus și procedînd ca în cazul demonstrației lemei 2 cu $n_0 = 1$]

Evident, dacă $n_1 = 1$, toate condițiile de mai sus devin consecințe ale lui $p_{j_1}(x) > \frac{1}{2N}$.

În lucrarea de față am preferat să folosesc condițiile 1° și 2° dat fiind caracterul lor intuitiv.

Prmită la redacție la 26 octombrie 1967

Centrul de statistică matematică
al Academiei Republicii Socialiste România
str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. J. Lamperti, P. Suppes, *Chains of infinite orders and their applications to learning theory*. Pacif. J. Math. 1959, **9**, 739–754 (1959).

PROBLEME DE GEOMETRIE INTEGRALĂ ALE REȚETELOR DINTR-UN SPAȚIU RIEMANNIAN V_2 CU CURBURA CONSTANTĂ

DE

RODICA TRANDAFIR

În această lucrare se demonstrează o formulă generală referitoare la rețelele dintr-un spațiu riemannian cu două dimensiuni cu curbura constantă. Cu ajutorul acestei formule se deduc diverse teoreme relative la aceste rețele. În sfîrșit, se rezolvă anumite probleme de acoperiri în spațiile riemanniene V_2 cu curbura constantă.

Primele probldme de geometrie integrală ale rețelelor dintr-un plan euclidian au fost rezolvate de L. A. Santaló [3]. Ulterior [5], el a demonstrat o formulă generală pentru aceste rețele, formulă din care se pot deduce mult mai simplu rezultatele lui anterioare. Anumite rezultate ale lui Santaló au fost extinse de către S. Oshio pentru rețelele dintr-un spațiu euclidian E_3, [1] și dintr-un spațiu euclidian E_n, [2]. Într-o lucrare anterioară [7] am stabilit o formulă integrală generală pentru rețelele dintr-un spațiu E_3, formulă din care se deduc imediat rezultatele lui Oshio, dînd de asemenea și o serie de rezultate noi pentru aceste rețele.

În această lucrare vom stabili o formulă generală pentru rețelele dintr-un spațiu reimannian V_2 cu curbura constantă, formulă din care vom deduce o serie de rezultate referitoare la aceste rețele și vom rezolva anumite probleme de acoperire în spațiile V_2 cu curbura constantă.

Fie V_2 un spațiu riemannian cu două dimensiuni cu curbura constantă k, a cărui metrică, scrisă sub forma geodezică, este

$$ds^2 = d\rho^2 + \frac{1}{k} \sin^2 \sqrt{k}\rho \; d\theta^2, \tag{1}$$

unde ρ și θ sînt coordonatele geodezice în spațiul V_2.

Să considerăm în acest spațiu o figură K, care poate fi un domeniu, un sistem de domenii, un sistem de curbe sau un sistem de puncte (punctul

ST. CERC. MAT., TOM. 20, Nr. 4, P. 599–603, BUCUREȘTI, 1968

este considerat în acest caz ca un cerc cu raza nulă). Mulţimea tuturor figurilor congruente cu K (obţinute din aceasta prin mişcări ale spaţiului) este măsurabilă avînd ca măsură, măsura cinematică în spaţiul V_2. Dacă notăm cu P un punct legat rigid de figura K şi cu G o geodezică ce trece prin P, atunci măsura elementară cinematică are expresia [5] 1)

$$\mathrm{d}K = [\mathrm{d}P\,\mathrm{d}V], \tag{2}$$

unde V este unghiul dintre raza vectoare ce trece prin P şi geodezica G, simbolul [ ] reprezentînd produsul exterior.

Definiţie. Numim reţea de domenii fundamentale într-un spaţiu riemannian V_2 cu curbura constantă, un şir de domenii $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ care satisfac condiţiile :

1) Fiecare punct al spaţiului aparţine unui singur domeniu α_i.

2) Fiecare domeniu α_i poate fi suprapus peste α_0 printr-o mişcare T_i a spaţiului, care suprapune fiecare domeniu α_h peste un domeniu α_k, deci printr-o mişcare a spaţiului care lasă invariantă reţeaua.

Numim domeniul α_0 celulă fundamentală a reţelei iar un domeniu oarecare α_i, celulă.

Fie K_0 o figură fixă conţinută în celula fundamentală α_0 şi K o figură mobilă.

Să considerăm integrala

$$J = \int\limits_{K\cap K_0\neq\emptyset} f(K_0\cap K)\,\mathrm{d}K, \tag{3}$$

unde f este o funcţie integrabilă de figura $K_0\cap K$ (nulă dacă $K_0\cap K=\emptyset$).

Putem scrie

$$J = \sum_i \int_{\alpha_i} f(K_0\cap K)\,\mathrm{d}K.$$

Să aplicăm acum spaţiului o mişcare T_i pentru care $T_i\,\alpha_i = \alpha_0$. Prin această mişcare figura K se transformă în figura congruentă $K^* = T_i K$.

Ţinînd seama de invarianţa măsurii cinematice elementare, avem $\mathrm{d}K^* = \mathrm{d}K$; atunci

$$J = \sum_i \int_{\alpha_0} f(K_0\cap T_i^{-1}K^*)\,\mathrm{d}K^* = \sum_i \int_{\alpha_0} f(K_0\cap T_i^{-1}K)\,\mathrm{d}K.$$

Avînd în vedere că figura $K_0\cap T_i^{-1}K$ este congruentă cu $T_i\,K_i\cap K$ rezultă

$$J = \int_{\alpha_0} \Big[\sum_i f(T_i\,K_0\cap K)\Big]\,\mathrm{d}K.$$

De aici şi din (3) deducem formula

$$\int\limits_{K_0\cap K\neq\emptyset} f(K_0\cap K)\,\mathrm{d}K = \int_{\alpha_0} \Big[\sum_i f(T_i\,K_0\cap K)\Big]\,\mathrm{d}K. \tag{4}$$

---

1) Pag. 55.

Să presupunem acum că figura K_0 este un domeniu de arie S_0, a cărui frontieră δK_0 are lungimea L_0, iar figura K este un domeniu de arie S, a cărui frontieră δK are lungimea L. În acest caz avem formula lui Santaló [4][2]:

$$(5)\qquad \int\limits_{K\cap K_0\neq\emptyset} \chi(K_0\cap K)\,\mathrm{d}K = 2\pi\,[S_0\chi(K) + S\chi(K_0)] + L_0L - kS_0S,$$

unde $\chi(K)$ este caracteristica lui Euler-Poincaré a domeniului K.

Luînd acum în formula (4) $f(K_0\cap K) = \chi(K_0\cap K)$ și ținînd seama de (5), obținem

$$(6)\qquad \int_{\alpha_0} \chi_{01}\,\mathrm{d}K = 2\pi\,[S_0\chi(K) + S\chi(K_0)] + L_0L - kS_0S,$$

unde χ_{01} este caracteristica lui Euler—Poincaré a intersecției lui K cu toate figurile T_iK, adică cu rețeaua generată de reproducerea lui K_0 în fiecare celulă α_i, integrala fiind extinsă la $P\in\alpha_0$, $0\leqslant V\leqslant 2\pi$.

Pe de altă parte, notînd cu s_0 aria celulei fundamentale α_0 și ținînd seama de (2) avem

$$(7)\qquad \int_{\alpha_0}\mathrm{d}K = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}V\int\limits_{P\in\alpha_0}\mathrm{d}P = 2\pi s_0$$

De aici și din (6) rezultă valoarea medie

$$M[\chi_{01}] = \frac{S_0\chi(K) + S\chi(K_0)}{s_0} + \frac{L_0L - kS_0S}{2\pi s_0}.$$

Dacă domeniile K_0 și K sînt multiplu conexe și notăm cu $\nu(K_0\cap K)$ numărul de domenii simplu conexe din care este compusă intersecția $K_0\cap K$, avem formula [6][3])

$$(8)\qquad \int\limits_{K_0\cap K\neq\emptyset} \nu(K_0\cap K)\,\mathrm{d}K = 2\pi\,(S_0 + S) + L_0L - kS_0S.$$

Luînd în (4) $f(K_0\cap K) = \nu(K_0\cap K)$ și ținînd seama de (8) deducem

$$(9)\qquad \int_{\alpha_0}\nu_{01}\,\mathrm{d}K = 2\pi\,(S_0 + S) + L_0L - kS_0S,$$

unde ν_{01}, este numărul de domenii simplu conexe din care este formată intersecția dintre K și toate figurile $T_i\,K_0$, adică rețeaua generată de reproducerea lui K_0 în fiecare celulă α_i.

---

[2]) Pag. 65.
[3]) Pag. 216.

Dacă presupunem că $K_0 = \alpha_0 \cap \partial\alpha_0$ și notăm cu η numărul de regiuni în care este împărțit K de rețea, formula (9) devine

$$\int_{\alpha_0} \eta \, \mathrm{d}K = 2\pi (s_0 + S) + l_0 L - k s_0 S, \tag{10}$$

unde l_0 este lungimea frontierei $\partial\alpha_0$.

De aici și din (7) rezultă că valoarea medie a numărului de regiuni în care este împărțit domeniul simplu conex de către rețea este

$$M[\eta] = 1 + \frac{S}{s_0} - \frac{kS}{2\pi} + \frac{l_0 L}{2\pi s_0}.$$

Avem deci teorema :

Orice domeniu K de arie S mărginit de o singură curbă de lungime L situat pe un spațiu riemannian V_2 cu curbura constantă k, poate fi acoperit cu $N \leqslant M[\eta]$ celule ale unei rețele, a cărei celulă fundamentală are aria s_0 și a cărei frontieră are lungimea l_0.

Să presupunem acum că figurile K_0 și K sînt curbe de lungime L_0 respectiv L, și să notăm cu n numărul de puncte de intersecții ale unei poziții a curbei K cu K_0. Atunci avem formula lui Poincaré

$$\int_{K_0 \cap K \neq \emptyset} n \, \mathrm{d}K = 4\, L_0 L. \tag{11}$$

Luînd în (4) $f(K_0 \cap K) = n(K_0 \cap K)$ și ținînd seama de (11), obținem

$$\int_{\alpha_0} n_{01} \, \mathrm{d}K = 4\, L_0 L, \tag{12}$$

unde n_{01} este numărul de puncte de intersecție ale curbei K cu rețeaua generată de reproducerea lui K_0 în fiecare celulă α_i.

De aici și din (7) deducem valoarea medie

$$M[n_{01}] = \frac{2\, L_0 L}{\pi s_0}.$$

Avem deci teorema :

Fiind dată o curbă mobilă K de lungime L și o curbă K_0 de lungime L_0 situată în interiorul celulei fundamentale de arie s_0 a unei rețele dintr-un spațiu riemannian cu curbura constantă, este totdeauna posibil să găsim o poziție a lui K care să aibă cel puțin $\left[\frac{2\, L_0 L}{\pi s_0}\right]$ puncte de intersecție cu K_0.

Primită la redacție la 20 septembrie 1967

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”
București
Str. Polizu nr. 1

BIBLIOGRAFIE

1. Oshio, S., *On mean values and geometrical probabilities in E_3*. Sci. Rep. Kanazawa Univ., 3, 35–43 (1955).
2. — *On mean values and geometrical probabilities in E_n*. Sci. Rep. Kanazawa Univ., **3**, 199–207, (1955).
3. Santaló, L. A., *Sobre valores medias y probabilidades geometricas*. Abh. Math. Sem. Maus. Univ. Hamburg, **13**, 283 29 – 4 (1940).
4. — *Geometria integral en espacios de curvatura constante*. Rep. Argentina Publ. Comision Nac. Energia Atomica, Ser., Mat., **1** (1952).
5. — *Introduction to integral geometry*. Act. Sci. et Ind., nr. 1198, Hermann, Paris (1953).
6. Stoka M., *Geometria Integrală*. Ed. Academiei, Bucureşti, 1967.
7. Trandafir, R., *Problems of integral geometry of lattices in a Euclidian space E_3*. Boll. U.M.I., 2, (1967).

TEOREME DE EXISTENŢĂ A FUNCŢIILOR IMPLICITE

DE

IONEL ŢEVY

În această lucrare, o continuare a lucrării anterioare [6], se obţin o serie de rezultate privind extremele funcţiilor reale şi funcţiile implicite.

Fie E şi F două spaţii Hausdorff, compacte şi cu baze numărabile şi M un spaţiu metric; topologiile acestor spaţii sînt astfel încît orice punct este o mulţime închisă şi numai mulţime închisă, iar sferele închise coincid cu închiderea sferelor respective. Cu aceste precizări vom aminti cîteva rezultate din [6].

Teorema 0.1. *Fie* (K_n) *un şir de compacte din* E. *Şirul* (K_n) *este convergent către mulţimea* K, *în sensul din* [7], *dacă şi numai dacă*:

1° *oricare ar fi şirul convergent* (y_n), *cu* $y_n \in K_n$, *limita sa* $y_0 \in K$;

2° *oricare ar fi* $y_0 \in K$, *există un şir* (y_n), *cu* $y_n \in K_n$, *convergent către* y_0.

Lema 0.1. *Condiţia 2° a teoremei anterioare este echivalentă cu*:

2'° *Oricare ar fi vecinătatea* U *a lui* y_0, *există un* N *astfel încît pentru orice* $n > N$, $K_n \cap U \neq \emptyset$.

Lema 0.2. *Un punct* $x \in E$ *aparţine mulţimii* K *dacă şi numai dacă satisface condiţia 2° a teoremei anterioare.*

De aici rezultă că mulţimea K este şi ea compactă.

Fie o funcţie $f: E \to \mathcal{P}(F)$.

Definiţia 0.1. *Funcţia* f *se zice slab continuă în punctul* $x_0 \in E$ *dacă*:

1° există o vecinătate V, a lui x_0, astfel încît pentru orice $x \in V$, $f(x)$ să fie compactă în F;

2° pentru orice şir (x_n) de puncte din V, cu $x_n \to x_0$, există o mulţime rară H, astfel încît $f(x_n) \to f(x_0) - H$, în sensul teoremei 0.1.

Fie o aplicaţie $f: E \to M$.

Definiţia 0.2. Aplicaţia f se zice neconstantă în distanţă relativ la $x_0 \in E$ dacă pentru orice deschisă nevidă $G \subseteq E$, mulţimea valorilor pentru $d(f(x), f(x_0))$, cînd x parcurge pe G, are mai mult de un element.

Teorema 0.2. *Funcţia* f *este neconstantă în distanţă relativ la* x_0 *dacă şi numai dacă pentru orice constantă* $k \geqslant 0$, *mulţimea punctelor* $x \in E$ *pentru care* $d(f(x), f(x_0)) = k$ *este o frontieră.*

ST. CERC. MAT., TOM. 20, Nr. 4, P. 605 – 611, BUCUREŞTI, 1968

Pentru funcțiile reale, continue, definite pe spații conexe, definiția 0.2 revine la faptul că în orice deschisă G funcția ia cel puțin două valori distincte și rezultă apoi că, în acest caz, neconstanța în distanță relativ la un punct atrage aceeași proprietate relativ la orice punct din mulțimea de definiție. De aceea în cazul acestor funcții vom spune numai funcție reală, continuă, neconstantă.

TEOREMA 0.3. *Dacă funcția $f: E \to M$ este continuă și neconstantă în distanță relativ la orice punct din E, atunci aplicația multiformă f^{-1} este slab continuă pe $f(E)$.*

Din cele de mai sus vom deduce unele proprietăți ale extremelor funcțiilor reale și ale funcțiilor implicite.

§ 1. Vom desemna prin E un spațiu topologic cu proprietățile din paragraful precedent care, în plus, este normal, conex și pentru orice punct x și orice vecinătate a sa V există o subvecinătate V', conexă, și prin $f: E \to R$ o aplicație continuă, neconstantă.

Notăm cu $S(y)$ mulțimea șirurilor, de numere reale, convergente către y și cu $H(y_n, y)$ mulțimea rară corespunzătoare șirului $(y_n) \in S(y)$, prin proprietatea de continuitate slabă a aplicației f^{-1}. Cu acestea putem enunța

PROPOZIȚIA 1.1. *Fie un punct $y_0 \in \operatorname{Int} f(E)$ și fie (y_n^1), $(y_n^2) \in S(y_0)$. Dacă $y_n^1 < y_0$, $y_n^2 < y_0$ $(y_n^1 > y_0,\ y_n^2 > y_0)$, atunci $H(y_n^1, y_0) = H(y_n^2, y_0)$.*

Demonstrație. Fie $x_0 \in f^{-1}(y_0)$, cu $x_0 \in H(y_n^1, y_0)$. Atunci, în baza lemelor 0.1 și 0.2, există o vecinătate V a lui x_0 pe care o vom presupune conexă, astfel încît pentru orice N există un $n > N$ astfel încît $f^{-1}(y_n^1) \cap \cap V = \emptyset$.

Să presupunem că $x_0 \notin H(y_n^2, y_0)$. Atunci, din aceleași leme, rezultă că există un N astfel încît pentru orice $n \geqslant N$, $f^{-1}(y_n^2) \cap V \neq \emptyset$. Dar atunci, deoarece f are proprietatea lui Darboux în vecinătatea conexă V, rezultă că $[y_N^2, y_0] \subseteq f(V)$. Deoarece $y_n^1 \to y_0$, $y_n^1 < y_0$, rezultă că pentru $n > N_1$, $y_n^1 \in [y_N^2, y_0]$ și prin urmare $f^{-1}(y_n^1) \cap V \neq \emptyset$ pentru orice $n > N_1$, ceea ce contrazice ipoteza că $x_0 \in H(y_n^1, y_0)$. Deci $x_0 \in H(y_n^2, y_0)$, adică $H(y_n^1, y_0) \subseteq H(y_n^2, y_0)$. În același mod se demonstrează și incluziunea contrară, propoziția fiind astfel demonstrată.

Din enunțul și demonstrația propoziției 1.1 rezultă următoarele corolare :

COROLARUL 1.1. *Pentru toate șirurile monotone de același tip din $S(y_0)$ mulțimile rare H coincid. Pentru cel puțin un tip de șiruri monotone, $H(y_n, y_0) \neq \emptyset$.*

COROLARUL 1.2. *Dacă $x_0 \in H(y_n, y_0)$, șirul (y_n) fiind crescător (descrescător), atunci există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît pentru orice $x \in V$, $f(x) \geqslant f(x_0) = y_0$ $(f(x) \leqslant y_0)$.*

În concluzie, pentru funcțiile reale mulțimile H își pierd propriu-zis dependența de fiecare șir și devin mulțimi ce caracterizează comportarea valorilor funcției în vecinătatea unui punct ; de aceea vom nota mulțimile H numai prin $H(y)$. Acest fapt este redat mai bine de :

TEOREMA 1.1. *Un punct $x_0 \in E$, care nu este extremum absolut, este punct de extremum pentru f dacă și numai dacă $x_0 \in H(f(x_0))$.*

Demonstrație. În adevăr, să presupunem, pentru a face o alegere, că x_0 este un punct de minim. Atunci există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît pentru orice $x \in V$, $f(x) \geqslant f(x_0)$. Deoarece $f(x_0) \in \operatorname{Int} f(E)$, există un șir $y_n \to f(x_0)$, $y_n < f(x_0)$, astfel încît $f^{-1}(y_n) \cap V = \emptyset$ și deci, în baza celor precedente, $x_0 \in H(f(x_0))$.

Reciproc, dacă $x_0 \in H(f(x_0))$, există un șir $y_n \to f(x_0)$, pe care îl vom presupune crescător, astfel încît $x_0 \in H(y_n, f(x_0))$. Atunci din corolarul 1.2 rezultă că x_0 este un punct de minim, și deci teorema e demonstrată.

Pentru cele ce vor urma vom demonstra mai întîi două propoziții preliminare, a doua fiind o generalizare a unei leme din [3].

Lema 1.1. *Fie K un spațiu compact și $F : K \to I$ o aplicație continuă a lui K într-o parte a dreptei numerice. Dacă mulțimea $D \subseteq I$ este densă în I atunci $\overline{F(F^{-1}(D))} = I$.*

Demonstrație. Fie $y_0 \in I$ și un șir de numere pozitive $\varepsilon_n \to 0$. Șirul de mulțimi închise, nevide $\mathcal{V}(y_0, \varepsilon_n)$[1] este un șir monoton descendent. De asemenea șirul $\overline{F^{-1}(D)} \cap \mathcal{V}(y_0, \varepsilon_n)$ este un șir descendent de închise nevide. Rezultă că $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}(y_0, \varepsilon_n) \supseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left(\overline{F^{-1}(D)} \cap \mathcal{V}(y_0, \varepsilon_n)\right) \neq \emptyset$. Însă $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}(y_0, \varepsilon_n) = F^{-1}(y_0)$ și deci există în $\overline{F^{-1}(D)}$ cel puțin un punct x pentru care $F(x) = y_0$. Cum y_0 a fost ales arbitrar în I, lema este demonstrată.

Propoziția 1.2. *Dacă K este un spațiu normal, compact, în care are loc teorema de acoperire a lui Lindelöff, atunci mulțimea valorilor luate în punctele de extremum de o funcție $F : K \to R$, continuă, este cel mult numărabilă.*

Demonstrație. Pentru a face o alegere ne vom referi la punctele de maximum și la funcții neconstante, ceea ce evident nu restrînge generalitatea.

Dacă mulțimea valorilor în punctele de maximum este nenumărabilă, există o submulțime a sa D, densă într-un anumit interval.

Fie a un astfel de punct, adică $F(a) \in D$. Fiecărei mulțimi $F^{-1}(F(a))$ să-i atașăm o mulțime deschisă în care $F(x) \leqslant F(a)$, astfel încît să existe cel puțin o astfel de deschisă disjunctă de mulțimea atașată maximului absolut. Aceasta este posibil deoarece K este un spațiu normal. Să notăm aceste mulțimi cu G_a. Familia $\{G_a\}$ constituie o acoperire deschisă a mulțimii $\overline{F^{-1}(D)}$, din care se poate extrage o subacoperire numărabilă. Din faptul că $F^{-1}(F(a))$ este rară și din lema 1.1 rezultă că vor exista punctele a și a', $a \neq a'$, astfel încît

$$F(a) \neq F(a'), \; F^{-1}(F(a)) \cap G_{a'} \neq \emptyset \tag{1}$$

și

$$F^{-1}(F(a')) \cap G_a \neq \emptyset \tag{2}$$

Din (1) rezultă că $F(a) \leqslant F(a')$, iar din (2) $F(a) \geqslant F(a')$ ceea ce contrazice una din proprietățile punctelor a și a'. Deci mulțimea valorilor luate de F în punctele de maximum este cel mult numărabilă.

---

[1] Amintim că $\mathcal{V}(y_0, \varepsilon_n) = \{y \in K / \,|F(y) - y_0| \leqslant \varepsilon_n\}$.

Procedînd analog pentru punctele de minimum, propoziţia este demonstrată.

Din aceste rezultate şi din teorema 1.1 rezultă

TEOREMA 1.2. *Fie funcţia $f: E \to R$ continuă şi neconstantă. Mulţimea punctelor de extremum ale funcţiei f este o mulţime de prima categorie în sensul lui Baire.*

Mai mult decît atît, demonstraţia propoziţiei 1.2 ne asigură că mulţimea valorilor lui f în punctele de extremum este o mulţime rară.

În cazul în care funcţia f este constantă pe o anumită deschisă, teorema 1.2 nu mai este adevărată căci mulţimea deschisă respectivă face parte din mulţimea punctelor de extremum.

§ 2. Să considerăm două spaţii topologice X şi Y avînd proprietăţile spaţiului E, de la § 1, şi o funcţie continuă $F: X \times Y \to R$.

LEMA 2.1. *Funcţia F este neconstantă pe $X \times Y$ dacă şi numai dacă este neconstantă ca funcţie de una din variabile.*

Demonstraţie. Dacă F ar fi constantă pe o deschisă G în ambele variabile, atunci F ar fi constantă pe G, ceea ce contrazice ipoteza.

Suficienţa condiţiei este evidentă.

LEMA 2.2. *Fie funcţia $f: E \to R$, de la § 1. Graficul funcţiei f este o mulţime rară în $E \times R$.*

Demonstraţie. Fie funcţia $F: E \times R \to R$ definită prin $F(x, y) = f(x) - y$. Este evident că F este continuă şi, datorită lemei 2.1, neconstantă pe $E \times R$. Atunci graficul funcţiei f, $\mathcal{G} = \{(x, y) / F(x, y) = 0\}$ va fi o mulţime rară în $E \times R$.

Cu aceste pregătiri vom da teoreme de existenţă a funcţiilor implicite.

TEOREMA 2.1. *Fie funcţia $F: X \times Y \to R$. Dacă:*

1° *există un punct (x_0, y_0) pentru care $F(x_0, y_0) = 0$,*

2° *F este continuă pe $X \times Y$,*

există o vecinătate U, a lui x_0, şi o vecinătate conexă V_0 a lui y_0, astfel încît pentru orice $x \in U$, fixat,

3° *funcţia $F(x, y)$ este neconstantă în V_0,*

4° *pentru funcţia $F(x, y): Y \to R$, $V_0 \cap H(0) = \emptyset$, atunci există o vecinătate U_0, a lui x_0, şi o aplicaţie $f: U_0 \to \mathcal{P}_R(V_0)$, unde $\mathcal{P}_R(V_0)$ este mulţimea părţilor rare ale lui V_0, continuă în sensul lui Florin Vasilescu, avînd proprietăţile:*

a) *pentru orice $y \in f(x)$, $F(x, y) = 0$,*

b) $y_0 \in f(x_0)$.

Demonstraţie. Vom urma îndeaproape demonstraţia unei propoziţii din [4][2].

Datorită condiţiilor 1°, 3° şi 4° rezultă că există în V_0 punctele α şi β cu proprietatea că $F(x_0, \alpha) < 0$ şi $F(x_0, \beta) > 0$.

Din condiţia 2° va rezulta atunci că există vecinătăţile U_1 şi U_2, ale lui x_0, astfel încît pentru orice $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ să avem respectiv $F(x_1, \alpha) < 0$, $F(x_2, \beta) > 0$. Să notăm $U_0 = U \cap U_1 \cap U_2$; U_0 va fi de asemenea o vecinătate a lui x_0.

---

[2] Propoziţia 1, pag. 642.

Pentru orice $x \in U_0$ avem $F(x, \alpha) < 0$, $F(x, \beta) > 0$ şi deoarece $F(x, y)$ are proprietatea lui Darboux pe mulţimea conexă V_0, rezultă că avem $F^{-1}(x, 0) \neq \emptyset$; însă această mulţime este rară în V_0. Dacă notăm mulţimea $F^{-1}(x, 0)$ cu $f(x)$, obţinem aplicaţia $f : U_0 \to \mathcal{P}_R(V_0)$, avînd evident proprietăţile a) şi b).

Pentru a demonstra continuitatea aplicaţiei f să observăm că orice punct (x, y) cu $y \in f(x)$ îndeplineşte condiţiile 1°—4° ale teoremei, iar aplicaţia pe care o determină coincide cu f pentru punctele $x \in U_0$.

Deoarece, prin modul cum s-au definit, mulţimile $f(x)$ sînt compacte în topologia relativă a lui V_0, rămîne de demonstrat că este îndeplinită condiţia a doua din teorema lui Vasilescu.

Fie un şir $x_n \to x$, x_n, $x \in U_0$, şi mulţimile corespunzătoare $f(x_n)$, $f(x)$. Vom arăta că pentru orice punct $y \in f(x)$ şi orice vecinătate a sa V, $V \cap f(x_n) \neq \emptyset$, pentru $n > N$.

Într-adevăr, pentru punctul x şi vecinătatea sa V, există o vecinătate $V' \subseteq V$ îndeplinind condiţiile teoremei. Atunci pentru orice x dintr-o vecinătate U a lui x se obţine aplicaţia f_U care coincide cu f pe $U \cap U_0$. Deoarece $x_n \to x$, există un N astfel încît pentru $n > N$, $x_n \in U \cap U_0$ şi atunci $f(x_n) \cap V' = f_U(x_n) \cap V' \neq \emptyset$.

Datorită unicităţii aplicaţiei f, nu pot exista în V_0 puncte $y' \notin f(x)$ care să aibă proprietăţile lui y şi deci $f(x_n) \to f(x)$, adică aplicaţia f este continuă în sensul lui Fl. Vasilescu.

Exemple. Fie $X = \left\{ \varphi_t : Y \to R / \varphi_t(x, y) = 36\ (x - t)^2 + 36\ (y - t)^2 - 1,\ t \in \left[\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right] \right\}$ şi $Y = \{(x, y) \in R^2 / x \in [0,1],\ y \in [0, 1]\}$ cu topologia indusă de topologia obişnuită din R^2. Considerăm $F[\varphi, (x, y)] = \varphi(x, y)$.

Evident, în jurul punctului $\left[\varphi_{\frac{1}{2}}, \left(\frac{6 + \sqrt{2}}{12}, \frac{6 + \sqrt{2}}{12}\right)\right]$ sînt îndeplinite condiţiile teoremei, deci aplicaţia f va exista. Prin această aplicaţie fiecărei funcţii φ îi corespunde cercul de intersecţie al paraboloidului ce îl reprezintă cu pătratul unitate din R^2.

Nu va exista nici o aplicaţie f pentru care să existe φ astfel încît $a = \left(\frac{3 - 2\sqrt{2}}{24}, \frac{3 - 2\sqrt{2}}{24}\right) \in f(\varphi)$ deoarece pentru orice φ, $F(\varphi, a) \neq 0$ şi deci nu este îndeplinită condiţia 1°.

De asemenea dacă $X = \{\varphi_t : Y \to R / \varphi_t(x, y) = (x - t)^2 + (y - t)^2\}$ aplicaţia f nu va exista deoarece nu este îndeplinită condiţia 4°.

Nici în cazul $X = \{\varphi_t : Y \to R / \varphi_t(x, y) = \mathrm{t}\}$ aplicaţia f nu există deoarece nu este îndeplinită condiţia 3°.

Din teorema 2.1 vom deduce o teoremă de existenţă pentru sisteme de funcţii implicite. Pentru aceasta vom demonstra cîteva propoziţii preliminare.

PROPOZIŢIA 2.1. *Fie funcţia* $f : X \to [m, M]$. *Pentru orice* $c \in (m, M)$ *mulţimea* $f^{-1}(c)$ *disconectează pe* X.

Demonstrație : Fie $A = \{x \in X / f(x) < c\} \neq \varnothing$ și $B = \{x \in X / f(x) > c\} \neq \varnothing$. Evident, $A \cup B = X - f^{-1}(c)$ și $\overline{A} \subseteq A \cup f^{-1}(c)$, $\overline{B} \subseteq B \cup f^{-1}(c)$ și de asemenea este evident că $A \cap B = \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$, deci $f^{-1}(c)$ disconectează pe X.

PROPOZIȚIA 2.2. *Fie funcția* $f : X \to [m, M]$, $c \in (m, M)$ *și* $K = f^{-1}(c)$. *Dacă există o deschisă conexă* U *astfel încît* $K \cap U$ *să fie nicăieri disconectantă în* U, *atunci* $(K \cap U) \subseteq H(c)$.

Demonstrație. Dacă $(K \cap U) \notin H(c)$, atunci în orice vecinătate a unui punct $x \in (K \cap U)$ vom avea $f(x') < c$ și $f(x'') > c$ și atunci din propoziția 2.1 rezultă că U este disconectată de $K \cap U$ ceea ce contrazice ipoteza.

PROPOZIȚIA 2.3. *Fie o funcție continuă* $F : R^n \to R$, *pentru care restricția la orice dreaptă este neconstantă. Dacă pentru orice punct* $x \in R^n$ *există o dreaptă* D, *care îl conține, astfel încît* $x \notin H(F_D(x))$, *unde* F_D *este restricția funcției* F *la drepta* D, *atunci mulțimea* $F^{-1}(0)$, *cu topologia indusă, este o varietate topologică* $(n - 1)$*-dimensională.*

Demonstrație. Deoarece $F^{-1}(0)$ separă pe R^n, rezultă, dintr-o teoremă din [1], că $\dim F^{-1}(0) = n - 1$. Rămîn de construit homeomorfismele cerute de definiția varietății topologice.

Dacă aplicăm teorema 2.1, în punctele în care este posibil, considerînd $R^n = R^{n-1} \times R$, obținem în R mulțimi rare, deci de dimensiune 0, adică puncte ce pot fi separate dacă pentru punctul $x \in R^{n-1}$, fixat, $H(0) = \varnothing$, pentru $F(x, y)$, $y \in R$, și atunci homeomorfismele vor fi proiecțiile pe R^{n-1} după direcția axei x_1 ale punctelor corespunzătoare din $F^{-1}(0)$.

Tereoma 2.1 nu funcționează în punctele în care nu este îndeplinită condiția 4°. Din teorema 1.2 rezultă că mulțimea acestor puncte formează un spațiu topologic A_1 cu $\dim A_1 \leqslant n - 2$. Procedînd analog cu A_1 și axa x_2 obținem spațiul topologic A_2 cu $\dim A_2 \leqslant n - 3$.

Punctele pentru care nu se pot construi homeomorfisme cu metoda de mai sus vor constitui o mulțime A_n cu $\dim A_n \leqslant 0$, deci o mulțime cel mult numărabilă (eventual vidă).

Cum construirea homeomorfismelor de mai sus depinde de poziția axelor rezultă că prin automorfisme convenabile ale lui R^n se pot construi homeomorfismele și în jurul punctelor din A_n.

COROLARUL 2.1. *Fie* V *o varietate topologică n-dimensională și* $F : V \to R$ *o funcție continuă, astfel încît* $0 \in \operatorname{Int} F(V)$ *și restricția lui* F *la orice drum ce are un singur punct comun cu* $F^{-1}(0)$ *este neconstantă. Dacă pentru orice punct* $x \in F^{-1}(0)$ *există un drum* D, *de mai sus, astfel încît* $x \notin H(F_D(x))$, *atunci* $F^{-1}(0)$, *cu topologia imdusă, este o varietate* $(n - 1)$*-dimensională.*

Cu acestea putem enunța :

TEOREMA 2.2. *Fie* V *o varietate topologică* n *— dimensională și* n *funcții* $F_i : X \times V \to R$ *îndeplinind condițiile teoremei 2.1 și corolarului 2.1 în vecinătățile* U *și* V_0 *ale punctelor* x_0, *respectiv* y_0. *Dacă* :

5° *pentru orice vecinătate* W *a lui* 0, *pentru orice* $z \in W$ *și pentru orice* $x \in U$, *fixat,* $H(z) \cap V_0 = \varnothing$, *atunci există o vecinătate* U_0 *a lui* x_0 *și o funcție continuă* $\bar{f} : U_0 \to V_0$ *astfel încît* :

a) $F_i(x, \bar{f}(x)) = 0$ *pentru orice* $i = 1, \ldots, n$.

b) $\bar{f}(x_0) = y_0$.

Demonstraţie. Vom demonstra teorema prin inducţie relativă la dim V.

Fie dim $V = 1$. Aplicaţia f din teorema 2.1 asociază fiecărui $x \in U_0$ o mulţime rară, deci de dimensiune 0, din V_0. Această mulţime este constituită dintr-un singur punct datorită condiţiei 5°. Deci obţinem aplicaţia $\bar{f} : U_0 \rightarrow V_0$ care este evident continuă.

Presupunem teorema adevărată pentru dim $V = n-1$.

Fie acum dim $V = n$. Prin teorema 2.1, aplicată funcţiei F_1, obţinem aplicaţia $f : U_0 \rightarrow \mathcal{P}_R (V_0)$ şi datorită condiţiei 5° pentru orice $x \in U_0$, $f(x)$ este conexă. De asemenea, datorită corolarului 2.1, $f(x)$ este o varietate $(n - 1)$-dimensională şi din ipoteza inducţiei rezultă că există o aplicaţie continuă $\bar{f}_1 : U_0 \rightarrow V_0 \cap f(x)$. Atunci vom avea $\bar{f}(x) = f(x) \cap \bar{f}_1(x)$. Aplicaţia astfel construită are evident proprietăţile a) şi b) şi este continuă datorită aplicaţiilor independente şi continue f şi $\bar{f}_1$. Cu aceasta teorema este demonstrată.

Dacă $V = R^n$, atunci scriind $f_i(x) = \mathrm{pr}_i\, \bar{f}(x)$ obţinem n funcţii reale şi ca o consecinţă se poate deduce prima parte a teoremei 2, pag. 649 din [4].

Pentru noţiunile şi rezultatele de teoria dimensiunii se pot consulta, de exemplu, [1] şi [2], iar pentru cele de funcţii reale şi topologie generală [5].

Universitatea din Bucureşti,
Facultatea de matematică şi mecanică,
str. Academiei nr. 14

BIBLIOGRAFIE

1. A. Deleanu, *Teoria dimensiunii*, în *Topologie, categorii, suprafeţe riemanniene*. Ed. Academiei, Bucureşti, 1966.
2. M. Jurchescu, *Teoria locală a funcţiilor de mai multe variabile complexe*, în *Probleme moderne de teoria funcţiilor*. Ed. Academiei, Bucureşti, 1965.
3. A. C. Кронрод, *О функции двух переменных*. Успехи мат. наук, 5, *1/35/* (1950).
4. M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, *Manual de analiză matematică*, vol. I, Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1963.
5. M. Nicolescu, *Funcţii reale şi elemente de analiză funcţională*. Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1962.
6. I. Ţevy, *O generalizare a noţiunii de continuitate în sensul lui Fl. Vasilescu*. St. cerc. mat., **19**, *6* (1967).
7. Fl. Vasilescu, *Essai sur les fonctions multiformes de variables réelles*. Paris, Gauthier-Villars, 1925.

[illegible] la suite, relatif à [illegible]

[illegible] est non- [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

METODA APROXIMATIVĂ I. IMAI—E. LAMLA—C. IACOB APLICATĂ LA STUDIUL MIȘCĂRII COMPRESIBILE SUBSONICE ÎN JURUL UNOR PROFILE

DE

GEORGETA I. VOICULESCU PLEȘI

În lucrarea de față se studiază cu metoda I. Imai—E. Lamla—C. Iacob : a) mișcarea fără circulație a unui fluid compresibil în jurul cilindrului circular, luîndu-se în considerație și aproximația în M_0^4 a potențialului complex al mișcării ; b) mișcarea cu circulație a unui fluid compresibil în jurul cilindrului circular ; c) mișcarea fără circulație în jurul cilindrului eliptic ; d) mișcarea cu circulație în jurul cilindrului eliptic.

Cu metoda I. Imai—E. Lamla—C. Iacob se poate studia mișcarea fluidelor compresibile în jurul unor profile. Această metodă este o metodă aproximativă directă, deoarece se păstrează ca variabile coordonatele x și y din planul mișcării, numit și plan fizic.

§ 1. PRINCIPIUL METODEI

Mișcarea unui fluid compresibil este descrisă matematic de sistemul :

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} u &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \end{aligned}$$

unde u și v sînt componentele vitezei pe axele de coordonate, φ funcția de curent, ψ potențialul vitezelor, ρ densitatea fluidului, iar ρ_0 valoarea densității în punctul în care viteza fluidului se anulează.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, Nr. 4, P. 613—631, BUCUREȘTI, 1968

Ecuaţia fundamentală a metodei, dedusă prin cîteva calcule simple din acest sistem, se scrie sub forma :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = h \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}, \tag{1.2}$$

în care $f(z, \bar{z}) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ reprezintă potenţialul complex al mişcării compresibile, potenţial ce trebuie determinat, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, iar

$$h = \frac{1 - \rho/\rho_0}{1 + \rho/\rho_0}. \tag{1.3}$$

Mărimea vitezei fluidului este dată de expresia

$$V^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right) = (u + iv)(u - iv). \tag{1.4}$$

Pentru rezolvarea ecuaţiei cu derivate parţiale (1.2) se foloseşte o metodă de aproximaţii succesive, care constă în următoarele : se dezvoltă ρ/ρ_0 după puterile lui $M_0^2 = \frac{V_\infty^2}{C_0^2}$, M_0 fiind numărul lui Ciaplîghin (V_∞ reprezintă viteza fluidului la mari distanţe, iar c_0 viteza sunetului în punctul în care viteza fluidului se anulează), obţinîndu-se imediat şi dezvoltarea lui h după aceleaşi puteri

$$h = \frac{1}{2}\left(\frac{V^2}{2V_\infty^2} M_0^2 + \frac{\gamma - 1}{8} \frac{V^4}{V_\infty^4} M_0^4 + \frac{4\gamma^2 - 8\gamma + 3}{96}\right) \frac{V^6}{V_\infty^6} M_0^6 + \ldots \tag{1.5}$$

γ fiind constanta adiabatică (γ aer = I, 405).

Se pune apoi

$$\begin{aligned} \bar{f} &= f_0 + f_1 M_0^2 + f_2 M_0^4 + \ldots \\ \bar{f} &= f_0 + \bar{f}_1 M_0^2 + \bar{f}_2 M_0^4 + \ldots \end{aligned} \tag{1.6}$$

unde $f, f_0, f_1, f_2, \ldots$ sînt funcţii de z şi $\bar{z}$, iar $\bar{f}, \bar{f}_0, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots$ conjugatele lor. Dezvoltările (1.5) şi (1.6) se introduc în ecuaţia (1.2) şi se egalează coeficienţii aceloraşi puteri ale lui M_0^2 din cei doi membri ai ecuaţiei. Se obţine un şir de relaţii care ne permit determinarea lui $f_0, f_1, f_2, \ldots$, deci a potenţialului complex $f(z, \bar{z})$. Prima relaţie din şir arată că f_0 este o funcţie monogenă de z, $f_0 = f_0(z)$ şi de aceea se ia ca fiind potenţialul complex al mişcării incompresibile în jurul aceluiaşi profil. Aproximaţia în M_0^2 a potenţialului complex are următoarea expresie :

$$f_1(z, \bar{z}) = \varphi_1 + i\psi_1 = \frac{1}{4V_\infty^2} \frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z} \overline{\int \left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z} + \frac{1}{4} g(z), \tag{1.7}$$

$g(z)$ fiind o funcţie analitică de z ce urmează a fi determinată din condiţiile la limită.

Dacă mişcarea incompresibilă este presupusă fără circulaţie, $g(z)$ este uniformă şi cu pol la infinit. Impunînd condiţia ca pe profil $\psi_1 = 0$, $g(z)$ se va determina prin rezolvarea unei probleme Dirichlet exterioară.

Dacă mişcarea incompresibilă este considerată ciclică, atunci funcţia $g(z)$ trebuie luată multiformă pentru ca funcţia de curent $\psi_1(x, y)$ să rămînă uniformă. Se ajunge tot la rezolvarea unei probleme Dirichlet pentru domeniul exterior profilului.

Aproximaţiile următoare ale potenţialului complex, $f_2, f_3, \ldots$ implică de asemenea determinarea unor funcţii analitice de z, din condiţiile la limită. Avînd în vedere aceste aproximaţii, expresia vitezei complexe va fi :

$$u - iv = \frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial z}\right) M_0^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z} + \frac{\partial \bar{f}_2}{\partial z}\right) M_0^4 + \ldots \tag{1.8}$$

§ 2. CONDIŢII LA LIMITĂ

Fie de studiat mişcarea fluidului compresibil în jurul unui profil mărginit de curba C, viteza la mari distanţe fiind $\vec{V}_\infty$, paralelă cu axa OX. Potenţialul complex al mişcării $f = \varphi + i\psi$ trebuie să satisfacă condiţiile :

$$\psi = 0 \text{ pe } C, \quad (u - iv)_\infty = V_\infty. \tag{2.1}$$

Potenţialul complex al mişcării incompresibile în jurul aceluiaşi obstacol îndeplineşte condiţiile :

$$f_0(z) = \varphi_0 + i\psi_0, \quad \psi_0 = 0 \text{ pe } C, \quad \left(\frac{\partial f_0}{\partial z}\right)_\infty = V_\infty \tag{2.2}$$

Pentru determinarea aproximaţiilor următoare se impun condiţiile :

$$\begin{gathered} \operatorname{Im}\{f_1\}_C = \psi_1 = 0, \ \operatorname{Im}\{f_2\}_C = \psi_2 = 0, \ldots \\ (u - iv)_\infty = V_\infty. \end{gathered} \tag{2.3}$$

§ 3. MIŞCAREA ÎN JURUL CILINDRULUI CIRCULAR, FĂRĂ CIRCULAŢIE. APROXIMAŢIA ÎN M_0^4

Metoda I. Imai—E. Lamla—C. Iacob a fost aplicată la studiul mişcării fără circulaţie în jurul obstacolului circular [1] [1]), calculîndu-se doar aproximaţia în M_0^2.

Potenţialul complex al mişcării incompresibile în jurul cercului de rază R fiind

$$f_0(z) = V_\infty\left(z + \frac{R^2}{z}\right), \tag{3.1}$$

---

[1]) Pag. 665.

aproximaţia în M_0^2 are expresia:

$$(3.2)\qquad f_1(z,\bar{z})=\frac{V_\infty}{4}\left[\left(1-\frac{R^2}{z^2}\right)\left(\bar{z}+\frac{2R^2}{\bar{z}}-\frac{R^4}{3\bar{z}^4}\right)-z+\frac{R^2}{3}\left(\frac{7}{z}+\frac{2R^2}{z^3}\right)\right].$$

Mărimea vitezei fluidului pe profil este

$$(3.3)\qquad V=2V_\infty\,|\sin\theta|\left[1+\frac{M_0^2}{2}\left(\frac{1}{6}-\cos 2\theta\right)\right],\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

iar viteza maximă se obţine pentru $\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$, θ fiind unghiul făcut de raza vectoare cu axa OX:

$$(3.4)\qquad V_{\max}=2V_\infty\left(1+\frac{7}{12}M_0^2\right).$$

În cele ce urmează vom calcula aproximaţia $f_2(z,\bar{z})$ în M_0^4 a potenţialului complex al mişcării fluide în jurul cilindrului circular cu $R=1$, determinînd şi distribuţia vitezelor pe profil.

Aproximaţia în M_0^4 este dată de formula:

$$(3.5)\qquad \begin{aligned} f_2(z,\bar{z})=\frac{1}{16V_\infty^4}&\left[\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2f_0}{\mathrm{d}z^2}\left(\overline{\int\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z}\right)^2+\right.\\ &+(1+\gamma)\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2\overline{\int\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^3\mathrm{d}z}+\left.\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\overline{\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2}\int\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z\right]+\\ &+\frac{1}{16V_\infty^2}\left[\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z}\overline{\int\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z}+2\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\overline{\int\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z}\right]+\frac{1}{16}h(z),\end{aligned}$$

unde $h(z)$ este o funcţie monogenă de z pe care o vom determina din condiţiile la limită, iar $g(z)$ funcţia din (1.7) determinată pentru obstacolul circular. Punînd condiţia $(u-iv)_\infty=V_\infty$ şi ţinînd seama în relaţia (1.8) de faptul că

$$(3.6)\qquad \left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)_\infty=V_\infty\ \text{şi}\ \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z}\right)_\infty=-V_\infty,$$

relaţii ce s-au obţinut la determinarea aproximaţiei în M_0^2, se obţine comportarea funcţiei $h(z)$ în vecinătatea punctului de la infinit:

$$(3.7)\qquad h(z)=(1-\gamma)V_\infty z+a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots$$

Deci funcţia $h(z)$ are punctul de la infinit ca pol de ordinul întîi. Dacă punem

$$(3.8)\qquad h_1(z)=h(z)+(\gamma-1)f_0(z),$$

funcţia $h_1(z)$ va fi olomorfă în tot domeniul exterior profilului. Observînd în relaţia (3.8) că

$$(3.9)\qquad \operatorname{Im}\{h_1(z)\}_C=\operatorname{Im}\{h(z)\}_C$$

şi impunînd condiţia pe contur

$$\mathrm{Im}\,\{f_2(z, \bar{z})\}_C = 0, \tag{3.10}$$

funcţia $h_1(z)$ va satisface următoarea condiţie la limită, dedusă din (3.5) :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,\{h_1(z)\}_C = -\,\mathrm{Im}\Bigg\{&\frac{1}{2V_\infty^4}\,\frac{\mathrm{d}^2 f_0}{\mathrm{d}z^2}\left(\overline{\int\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z}\right)^2 + \\ &+\frac{1+\gamma}{V_\infty^4}\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2\overline{\int\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^3\mathrm{d}z}+\frac{1}{V_\infty^4}\,\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\overline{\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)}^2\int\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z + \\ &+\frac{1}{V_\infty^2}\,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z}\overline{\int\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z}+\frac{2}{V_\infty^2}\,\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\overline{\int\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z}\,\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z}\Bigg\}_C\end{aligned} \tag{3.11}$$

Ţinînd seama de expresia funcţiei $f_0(z)$ din (3.1) şi de expresia lui $g(z)$ obţinută în calculul aproximaţiei în M_0^2

$$g(z) = -\,V_\infty\left[z + \frac{1}{3}\left(\frac{7}{z} + \frac{2}{z^3}\right)\right] + \text{const. reală}, \tag{3.12}$$

precum şi de faptul că pe cercul unitate sînt satisfăcute relaţiile

$$\bar{z} = 1/z \ \text{ şi } \ z = \mathrm{e}^{i\theta} \tag{3.13}$$

relaţia (3.11) se mai scrie :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,\{h_1(z)\}_C = V_\infty\,\mathrm{Im}\Bigg\{&-\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{9}z^6+\frac{4}{3}z^4+\frac{10}{3}z^2+4\right)- \\ &-(1+\gamma)\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{5}z^5-z^3+3z\right)- \\ &-\left(1-\frac{1}{z^2}\right)(1-z^2)^2\left(z+\frac{2}{z}-\frac{1}{3z^3}\right)+ \\ &+\left(1+\frac{7}{3z^2}+\frac{2}{z^4}\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3}z^3+2z\right)-2\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\times \\ &\times\left(-\frac{1}{z}-\frac{2}{5}z^5-\frac{1}{9}z^3+\frac{4}{3}z\right)\Bigg\}_C = \mu(\theta).\end{aligned} \tag{3.14}$$

1° Astfel, determinarea funcţiei $h_1(z)$ revine la rezolvarea unei probleme Dirichlet exterioare. Pentru rezolvare se pot folosi două metode : 1° Aplicarea formulei Schwarz-Villat [1]2)

$$h_1(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[-\,i\mu(0)]\,\frac{\mathrm{e}^{i\theta}+z}{\mathrm{e}^{i\theta}-z}\,\mathrm{d}\theta + i\beta_0. \tag{3.15}$$

---

2) Pag. 27.

2° Aplicînd proprietatea că două funcţii olomorfe care au părţile imaginare egale pe contur, diferă printr-o constantă reală în tot domeniul de definiţie.

În cazul de faţă, se caută să se obţină în membrul drept al relaţiei (3.14) o funcţie olomorfă, păstrîndu-se egalitatea părţilor imaginare. În acest scop, se observă că la mari distanţe, funcţia din membrul drept are următoarea dezvoltare :

$$V_\infty\left(-\frac{2+\gamma}{5}z^5+\frac{62+63\gamma}{45}z^3-\right.$$
$$\left.-\frac{11+26\gamma}{5}z+b_0+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z_2}+\ldots\right) \tag{3.16}$$

adică funcţia are infinitul ca pol de ordinul cinci. Pentru a se obţine o funcţie olomorfă, care la mari distanţe să fie de forma

$$c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\ldots$$

se adaugă membrului drept expresia

$$\frac{2+\gamma}{5}z^5-\frac{62+63\gamma}{45}z^3+\frac{11+26\gamma}{5}z,$$

precum şi valoarea pe cerc a conjugatei acestei expresii, adică

$$\frac{2+\gamma}{5}\frac{1}{z^5}-\frac{62+63\gamma}{45}\frac{1}{z^3}+\frac{11+26\gamma}{5}\frac{1}{z}.$$

Efectuînd aceste calcule şi aplicînd proprietatea 2°, se obţine funcţia $h_1(z)$, iar relaţia (3.8) ne permite determinarea lui $h(z)$. În final expresia aproximaţiei în M_0^4 a potenţialului complex al mişcării se scrie :

$$f_2(z,\bar z)=\frac{V_\infty}{16}\left[\frac{1}{z^3}\left(\bar z^2+\frac{1}{9\bar z^6}-\frac{4}{3\bar z^4}+\frac{10}{3\bar z^2}+4\right)+\right.$$
$$+(1+\gamma)\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^2\left(\bar z+\frac{1}{5\bar z^5}-\frac{1}{\bar z^3}+\frac{3}{\bar z}\right)+$$
$$+\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\left(1-\frac{1}{\bar z^2}\right)\left(z+\frac{2}{z}-\frac{1}{3z^3}\right)- \tag{3.17}$$
$$-\left(1+\frac{7}{3z^2}+\frac{2}{z^4}\right)\left(\bar z+\frac{2}{\bar z}-\frac{1}{3\bar z^3}\right)+$$
$$+2\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\left(-\bar z+\frac{4}{3\bar z}-\frac{1}{9\bar z^3}-\frac{2}{5\bar z^5}\right)+$$
$$\left.+(1-\gamma)z+\frac{143+153\gamma}{15}\frac{1}{z}+\frac{43-108\gamma}{45}\frac{1}{z^3}+\frac{1-12\gamma}{15}\frac{1}{z^5}\right].$$

Distribuţia de viteze pe profil are forma

$$V = |u - iv|_C = 2V_\infty \left\{ \sin\theta + \left(\frac{1}{3}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\,\theta \right) M_0^2 + \right. \tag{3.18}$$
$$\left. + \left[(\gamma+2)\sin 5\theta - \frac{63\gamma+62}{15}\sin 3\theta + \frac{21\gamma+16}{5}\sin\theta \right] \frac{M_0^4}{16} \right\}$$

iar viteza maximă se obţine pentru $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$:

$$\frac{V_{\max}}{V_\infty} = 2 + \frac{7}{6} M_0^2 + \left[\frac{141}{120}(\gamma - 1) + \frac{281}{120} \right] M_0^4. \tag{3.19}$$

Dacă înlocuim numărul lui Ciaplîghin în funcţie de numărul Mach la infinit M_∞:

$$M_0 = M_\infty \left(1 - \frac{\gamma - 1}{4} M_\infty^2 \right), \tag{3.20}$$

relaţia (3.19) ia forma:

$$\frac{V_{\max}}{V_\infty} = 2 + \frac{7}{6} M_\infty^2 + \left[\frac{281}{120} + \frac{71}{120}(\gamma - 1) \right] M_\infty^4. \tag{3.21}$$

Aceste rezultate sînt identice cu cele obţinute de I. Imai [2], [3] prin aplicarea unei alte metode directe, metoda lui Janzen–Rayleigh. Rezultă că numărul Mach critic M_∞^* cînd se consideră şi termenii în M_∞^4 este acelaşi cu cel dat de I. Imai (citat 2n [1][3])

$$M_\infty^* = 0{,}4090$$

§ 4. MIŞCAREA CU CIRCULAŢIE ÎN JURUL OBSTACOLULUI CIRCULAR. APROXIMAŢIA ÎN M_0^2

Mişcarea cu circulaţie în jurul obstacolului circular a fost studiată de H. Lamb [4] şi E. Pistolesi [5], care au folosit metoda directă a lui Janzen şi Rayleigh de care am mai amintit, precum şi de S. Tomotika şi H. Umemoto [6], care au întrebuinţat o variantă a aceleiaşi metode.

În cele ce urmează s-au folosit consideraţiile făcute de C. Iacob [7] în legătură cu extinderea metodei I. Imai – E. Lamla – C. Iacob la mişcările fluide cu circulaţie.

Fie în planul $z = x + iy$ o mişcare fluidă compresibilă în jurul unui profil circular de rază unitate, cu viteza V_∞ la mari distanţe paralelă cu axa OX şi de circulaţie k_0, reală. Potenţialul complex al mişcării incompresibile în jurul obstacolului va avea expresia:

$$f_0(z) = V_\infty \left(z + \frac{1}{z} + \alpha \ln z \right), \tag{4.1}$$

---

[3] Pag. 660.

unde

$$\alpha = \frac{k_0}{2\pi i\, V_\infty}, \quad \bar{\alpha} = -\alpha. \tag{4.2}$$

Potențialul complex al mișcării compresibile are forma :

$$f(z, \bar{z}) = f_0(z) + f_1(z, \bar{z})\, M_0^2 + \dots \tag{4.3}$$

Corecția de compresibilitate $f_1(z, \bar{z})$ este dată de expresia

$$f_1(z, \bar{z}) = \frac{1}{4V_\infty^2}\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\overline{\int\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z} + \frac{1}{4} g(z), \tag{4.4}$$

cu $g(z)$ funcție analitică de z, nedeterminată.

Alegerea funcției $g(z)$ uniforme nu mai este posibilă, deoarece funcția de curent $\psi(x, y)$ n-ar mai fi uniformă. Într-adevăr, în acest caz, comportamentul lui $f_0(z)$ la mari distanțe este dat de

$$f_0(z) = V_\infty z + \alpha V_\infty \ln z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \tag{4.5}$$

iar al vitezei complexe

$$\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z} = V_\infty\left(1 + \frac{\alpha}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \frac{b_3}{z^3} + \dots\right). \tag{4.6}$$

Deci, dacă descriem un contur închis în jurul obstacolului în sens direct, găsim :

$$\oint\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z = 2\alpha V_\infty^2. \tag{4.7}$$

Rezultă de aici că în expresia lui $f_1(z, \bar{z})$ dată de (4.4), primul termen din paranteză revine la valoarea inițială mărită cu

$$-\frac{1}{4V_\infty^2}\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z} 2V_\infty^2 \alpha = -\frac{\alpha}{2}\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}. \tag{4.8}$$

Pentru ca $\psi(x, y)$ să fie uniformă, vom alege pentru $g(z)$ o funcție multiformă cu singularitate logaritmică la infinit, sub forma :

$$g(z) = -2\alpha\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\ln z + h(z), \tag{4.9}$$

unde $h(z)$ este o funcție olomorfă în fiecare punct, cu excepția punctului de la infinit.

Expresia lui $f_1(z, \bar{z})$ va fi acum :

$$f_1(z, \bar{z}) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{V_\infty^2}\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\overline{\int\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z} - 2\alpha\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\ln z + h(z)\right]. \tag{4.10}$$

Comportarea funcţiei $h(z)$ la mari distanţe se obţine punînd condiţia ca viteza la mari distanţe să fie V_∞:

$$(4.11)\qquad (u-iv)_\infty = \left\{\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z} + \left[\frac{1}{V_\infty^2}\frac{\mathrm{d}^2 f_0}{\mathrm{d}z^2}\overline{\int\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{4V_\infty^2}\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z}\right]\frac{M_0^2}{4}\right\}_\infty = V_\infty.$$

Rezultă

$$(4.12)\qquad h(z) = -V_\infty z - \alpha_1 V_\infty \ln z + h_0 + \frac{h_1}{z} + \frac{h_2}{z^2} + \ldots$$

cu

$$(4.13)\qquad \alpha_1 = \frac{k_1}{2\pi i V_\infty},\quad k_1 \text{ real},\quad \bar{\alpha}_1 = -\alpha_1.$$

Se introduce acum o funcţie olomorfă în tot domeniul exterior profilului, prin relaţia

$$(4.14)\qquad h_1(z) = h(z) + f_0'(z),$$

$f_0'(z)$ fiind potenţialul complex al mişcării incompresibile în jurul aceluiaşi obstacol, de circulaţie k_1:

$$(4.15)\qquad f_0'(z) = V_\infty\left(z + \frac{1}{z} + \alpha_1 \ln z\right).$$

Condiţia pe contur $\operatorname{Im}\{f_1(z,\bar{z})\}_C = 0$ ne conduce la rezolvarea unei probleme Dirichlet exterioare pentru determinarea funcţiei olomorfe $h_1(z)$:

$$(4.16)\qquad \operatorname{Im}\{h_1(z)\}_C = -\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{V_\infty^2}\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\overline{\int\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z} - 2\alpha\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\ln z\right\}_C \cdot$$

Rezolvarea se poate face tot cu cele două metode specificate la § 3. O dată $h_1(z)$ determinat, din relaţia (4.14) se determină $h(z)$ care se introduce în (4.10).

Expresia finală a aproximaţiei în M_0^2 a potenţialului complex este

$$f_1(z,\bar{z}) = \frac{V_\infty}{4}\left[\left(1 - \frac{1}{z^2} + \frac{\alpha}{z}\right)\left(\bar{z} + \frac{2-\alpha^2}{\bar{z}} - \frac{\alpha}{\bar{z}^2} - \frac{1}{3\bar{z}^3} - 2\alpha \ln z\bar{z}\right) - \right.$$

$$(4.17)\qquad \left. - z - 3\alpha + \alpha^3 - \left(3\alpha^2 - \frac{7}{3}\right)\frac{1}{z} + \frac{\alpha}{3z^2} + \frac{2}{3z^3} - \alpha_1 \ln z\right]\cdot$$

Viteza fluidului se obţine cu formula:

$$(4.18)\qquad V = |u - iv| = \left|\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial z}\right)M_0^2\right|,$$

iar viteza pe obstacol are forma

$$(4.19)\qquad \frac{V}{V_\infty} = 2\sin\theta - \frac{k_0}{2\pi V_\infty}\left[\frac{2k_0}{3\pi V_\infty}\cos 2\theta - \frac{\sin 3\theta}{2} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{2}{3} + \frac{k_0^2}{4\pi^2 V_\infty^2}\right)\sin\theta + \frac{k_1}{8\pi V_\infty^2}\right] M_0^2.$$

Rezultatul acesta coincide cu cel dat de S. Tomotika şi H. Umemoto [**6**] în cazul în care $k_1 = 0$, precum şi cu cel obţinut prin aplicarea metodei lui Janzen şi Rayleigh.

§ 5. MIŞCAREA FĂRĂ CIRCULAŢIE ÎN JURUL CILINDRULUI ELIPTIC. APROXIMAŢIA ÎN M_∞^2

Considerăm obstacolul eliptic de semiaxe a şi b ($a > b$) situat în planul $z = x + iy$. Presupunem că mişcarea în jurul obstacolului are viteza la infinit paralelă cu axa OX şi mărimea V_∞. Vom determina potenţialul complex al mişcării în jurul obstacolului, folosind metoda reprezentării conforme.

Fie

$$(5.1)\qquad z = \frac{a+b}{2}\left(\zeta + \frac{k^2}{\zeta}\right),\quad k^2 = \frac{a-b}{a+b} < 1$$

reprezentarea conformă a domeniului exterior elipsei pe exteriorul cercului cu centrul în origine şi de rază unitate, aflat în planul $\zeta = \xi + i\eta$. Prin această transformare, la o mişcare fluidă în jurul elipsei, animată la infinit de viteza V_∞, va corespunde o mişcare fluidă în jurul cercului, care va avea viteza la infinit tot paralelă cu $O\xi$ şi mărimea $V'_\infty = \frac{a+b}{2} V_\infty$, deoarece

$$(5.2)\qquad V_\infty = V'_\infty \frac{d\zeta}{dz}.$$

Potenţialul complex al mişcării în jurul cercului va fi

$$(5.3)\qquad f_0(\zeta) = \frac{a+b}{2} V_\infty\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right).$$

Prin intermediul lui (5.1), $f_0(\zeta)$ va deveni o funcţie de z, $F_0(z) = f_0(\zeta(z))$, care defineşte potenţialul complex al mişcării incompresibile în jurul elipsei. În regim compresibil, potenţialul complex va fi de forma :

$$(5.4)\qquad F(z, \bar{z}) = f(\zeta(z)) = F_0(z) + F_1(z, \bar{z}) M_0^2 + \ldots$$

Ne propunem să studiem corecţia de compresibilitate $F_1(z, \bar{z})$.

Metoda I. Imai –E. Lamla –C. Iacob dă următoarea expresie pentru $F_1(z, \bar{z})$:

$$F_1(z, \bar{z}) = \frac{1}{4V_\infty^2} \frac{\mathrm{d}F_0}{\mathrm{d}z} \overline{\int \left(\frac{\mathrm{d}F_0}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z} + \frac{1}{4} l(z), \tag{5.5}$$

cu $l(z)$ funcție analitică ce trebuie determinată.

Prin transformarea (5.1), această formulă devine :

$$f_1(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{4V_\infty^2} \frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}\zeta} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z} \overline{\int \left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}\zeta}\right)^2 \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z} \mathrm{d}\zeta} + \frac{1}{4} p(\zeta) \tag{5.6}$$

sau

$$f_1(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{a+b}{8} V_\infty \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - k^2} \left[\bar{\zeta} + \frac{1}{k^2 \bar{\zeta}} + \frac{(k^2-1)^2}{2k^3} \ln \frac{\bar{\zeta} - k}{\bar{\zeta} + k}\right] + \frac{1}{4} p(\zeta). \tag{5.7}$$

Urmează să determinăm funcția analitică $p(\zeta)$.

Vom stabili mai întîi comportamentul ei la mari distanțe.

Viteza complexă

$$u - iv = \frac{\mathrm{d}F_0}{\mathrm{d}z} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial z}\right) M_0^2, \tag{5.8}$$

devine prin transformarea (5.1) :

$$u - iv = \left[\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}\zeta} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial \zeta}\right) M_0^2\right] \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}. \tag{5.9}$$

Punînd condiția $(u - iv)_\infty = V_\infty$, la mari distanțe $p(\zeta)$ va avea dezvoltarea :

$$p(\zeta) = -\frac{a+b}{2} V_\infty \zeta + a_0 + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \ldots \tag{5.10}$$

adică va avea un pol la infinit. Funcția

$$p_1(\zeta) = p(\zeta) + f_0(\zeta) \tag{5.11}$$

va fi olomorfă în tot domeniul exterior cercului și în plus

$$\operatorname{Im} \{p_1(\zeta)\}_C = \operatorname{Im} \{p(\zeta)\}_C. \tag{5.12}$$

Impunînd condiția ca pe contur $\operatorname{Im} f_1(\zeta, \bar{\zeta}) = 0$, relația (5.7) ne conduce la rezolvarea unei probleme Dirichlet exterioare pentru determinarea funcției $p_1(\zeta)$:

$$\operatorname{Im} \{p_1(\zeta)\}_C = -\operatorname{Im} \left\{\frac{a+b}{2} V_\infty \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - k^2} \left[\bar{\zeta} + \right.\right. \tag{5.13}$$

$$\left.\left. + \frac{1}{k^2 \bar{\zeta}} + \frac{(k^2-1)^2}{2k^3} \ln \frac{\bar{\zeta} - k}{\zeta + k}\right]\right\}_C.$$

La rezolvarea acestei probleme vom folosi metoda 2° de la § 3.

Observînd că pe cerc $\zeta\bar{\zeta} = 1$ şi că $\operatorname{Im} E(\zeta) = -\operatorname{Im} \overline{E(\zeta)}$, relaţia (5.13) se mai scrie :

$$\operatorname{Im}\{p_1(\zeta)\}_C = -\operatorname{Im}\left\{\frac{a+b}{2} V_\infty \frac{\zeta^2-1}{\zeta^2-k^2}\left(\frac{1}{\zeta}+\frac{\zeta}{k^2}\right)\right\}_C +$$

$$+\operatorname{Im}\left\{\frac{a+b}{2} V_\infty \frac{(k^2-1)^2}{2k^3}\,\frac{1-\zeta^2}{1-k^2\zeta^2}\ln\frac{\zeta-k}{\zeta+k}\right\}_C = \tag{5.14}$$

$$= -\operatorname{Im}\{H(\zeta)\}_C + \operatorname{Im}\{N(\zeta)\}_C.$$

Funcţia $H(\zeta)$ este olomorfă în domeniul exterior cercului, cu excepţia punctului de la infinit unde are dezvoltarea :

$$H(\zeta) = \frac{\zeta}{k^2} + h_0 + \frac{h_1}{\zeta} + \frac{h_2}{\zeta^2} + \ldots \tag{5.15}$$

Vom considera funcţia

$$M(\zeta) = \left\{H(\zeta) - \frac{\zeta}{k^2} - \frac{\bar{\zeta}}{k^2}\right\}_C = \left\{H(\zeta) - \frac{\zeta}{k^2} - \frac{1}{k^2\zeta}\right\}. \tag{5.16}$$

Ea va fi olomorfă în tot domeniul considerat şi îndeplineşte condiţia :

$$\operatorname{Im}\{M(\zeta)\}_C = \operatorname{Im}\{H(\zeta)\}_C. \tag{5.17}$$

Funcţia $N(\zeta)$ este regulată la infinit, dar are poluri simple în punctele $\zeta = \frac{1}{k}$, $\zeta = -\frac{1}{k}$ din domeniu, deci nu este olomorfă. Dacă considerăm funcţia

$$L(\zeta) = \{N(\zeta) - P_1(\zeta) - \overline{P_1(\zeta)} - Q_1(\zeta) - \overline{Q_1(\zeta)}\}_C, \tag{5.18}$$

unde $P_1(\zeta)$ şi $Q_1(\zeta)$ sînt părţile principale ale funcţiei $N(\zeta)$ relative la polurile $\zeta = \frac{1}{k}$, respectiv $\zeta = -\frac{1}{k}$, aceasta va fi olomorfă în exteriorul cercului şi va respecta condiţia

$$\operatorname{Im}\{L(\zeta)\}_C = \operatorname{Im}\{N(\zeta)\}_C. \tag{5.19}$$

Cu aceste consideraţii, relaţia (5.14) devine

$$\operatorname{Im}\{p_1(\zeta)\}_C = \operatorname{Im}\{-M(\zeta) + L(\zeta)\}_C \tag{5.20}$$

funcţia $L(\zeta) - M(\zeta)$ fiind olomorfă în domeniul exterior. Aplicînd proprietatea 2°, § 3, obţinem :

$$p_1(\zeta) = L(\zeta) - M(\zeta) + \text{const. reală} \tag{5.21}$$

iar relația (5.11) ne permite să determinăm funcția $p(\zeta)$ ce trebuie înlocuită (în 5.6) Forma finală a funcției $f_1(\zeta, \bar{\zeta})$ este:

$$\begin{aligned} f_1(\zeta,\bar{\zeta}) = \frac{a+b}{8} V_\infty \Bigg\{ \frac{\zeta^2-1}{\zeta^2-k^2} \Bigg[\bar{\zeta} + \frac{1}{k^2\bar{\zeta}} - \frac{1}{\zeta} - \frac{\zeta}{k^2} + \\ + \frac{(k^2-1)^2}{2k^3} \ln \frac{\bar{\zeta}-k}{\bar{\zeta}+k} \Bigg] + \frac{(k^2-1)^2}{2k^3} \Bigg[\frac{1-\zeta^2}{1-k^2\zeta^2} \ln \frac{\zeta-k}{\zeta+k} + \\ + \frac{k^2-1}{k} \left(\frac{\zeta}{k^2\zeta^2-1} + \frac{\zeta}{k^2-\zeta^2} \right) \ln \frac{1-k^2}{1+k^2} \Bigg] - \frac{k^2-1}{k^2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Corecția de compresibilitate $F_1(z, \bar{z})$ se obține din (5.22), înlocuind $\zeta = \zeta(z)$ și $\bar{\zeta} = \zeta(\bar{z})$ din (5.1).

Dacă în expresia (5.22) se face k să tindă la zero, se obține corecția de compresibilitate corespunzătoare, a mișcării în jurul cercului unitate.

Viteza complexă a mișcării în jurul obstacolului eliptic este dată de relația (5.9), iar mărimea vitezei pe obstacol are forma

$$V = |u - iv|_E = \left\{ \left| \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z} \right| \left| \frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}\zeta} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial \zeta} \right) M_0^2 \right| \right\}_{\zeta = e^{i\theta}} \tag{5.23}$$

sau

$$\begin{aligned} \frac{V}{V_\infty} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \Bigg\{ 2\sin\theta + M_0^2 \Bigg[\left(\frac{1-k^2}{2k^2} - \frac{(1-k^2)^2}{k^2\lambda} \right) \sin\theta + \\ + \frac{(1-k^2)^4(1+k^2)}{4k^3\lambda^2} \sin 2\theta \ln \frac{1+2k\cos\theta+k^2}{1-2k\cos\theta+k^2} + \frac{(1-k^2)^3}{2k^3\lambda^2} (2k^2 - \\ - (k^4+1)\cos 2\theta) \operatorname{tg}^{-1} \frac{2k\sin\theta}{1-k^2} + \frac{(1-k^2)^4}{4k^4\lambda^2} (k^2 \sin 3\theta + (k^4 + \\ + 3k^2 + 1)\sin\theta) \ln \frac{1-k^2}{1+k^2} \Bigg] \Bigg\}, \end{aligned} \tag{5.24}$$

unde

$$\lambda = 1 - 2k^2 \cos 2\theta + k^4. \tag{5.25}$$

Expresia (5.24) este identică cu rezultatul obținut de S. Tomotika și K. Tamada [8] cu metoda Janzen-Rayleigh, precum și cu cel dat de I. Imai și T. Aihara [9] cu o metodă echivalentă cu metoda Janzen-Rayleigh.

Viteza maximă de elipsă se realizează pentru $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{V_{\max}}{V_\infty} = \frac{2}{1+k^2} \Bigg\{ 1 + M_0^2 \Bigg[\frac{(1-k^2)(k^4+4k^2-1)}{4k^2(1+k^2)^2} + \\ + \frac{(1-k^2)^3}{4k^3(1+k^2)^2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2k}{1-k^2} + \frac{(1-k^2)^4}{8k^4(1+k^2)^2} \ln \frac{1-k^2}{1+k^2} \Bigg] \Bigg\} \end{aligned} \tag{5.26}$$

sau, avînd în vedere că $\chi = b/a$, $k^2 = \frac{1-\chi}{1+\chi}$ şi $M_0 = M_\infty\left(1 - \frac{\gamma-1}{4}M_0^2\right)$,

$$\frac{V_{\max}}{V_\infty} = (1+\chi)\left[1 + M_\infty^2\, P(\chi)\right], \tag{5.27}$$

unde

$$P(\chi) = \frac{\chi(1-\chi-\chi^2)}{2(1-\chi)} + \frac{\chi^3(1+\chi)^{1/2}}{2(1-\chi)^{3/2}}\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{\frac{1}{\chi^2}-1} + \frac{\chi^4}{2(1-\chi)^2}\ln\chi. \tag{5.28}$$

Expresia vitezei maxime din (5.27) coincide cu cea obţinută de I. Filimon [10] pentru obstacolul riguros eliptic, cu metoda lui S. A. Ciaplîghin.

Să determinăm numerele Mach critice şi valorile rapoartelor $\frac{V_{\max}}{V_\infty}$ corespunzătoare la diverse valori ale raportului $\chi\,(0 < \chi \leqslant 1)$.

Se ştie că viteza locală a sunetului este dată de formula

$$C^2 = C_\infty^2 - \frac{\gamma-1}{2}(V^2 - V_\infty^2), \tag{5.29}$$

unde C_∞ este valoarea vitezei sunetului la mari distanţe. Această relaţie se mai scrie:

$$C^2 = C_\infty^2 - \frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\left(\frac{V^2}{V_\infty^2} - 1\right) \tag{5.30}$$

Numărul Mach critic se obţine scriind că în punctul de viteză maximă pe obstacol, viteza este egală cu viteza locală a sunetului:

$$V_{\max}^2 = C_\infty^2\left[1 - \frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\left(\frac{V_{\max}^2}{V_\infty^2} - 1\right)\right] \tag{5.31}$$

sau

$$\frac{V_{\max}^2}{V_\infty^2} = \frac{1}{M_\infty^{*2}}\left[1 - \frac{\gamma-1}{2}M_\infty^{*2}\left(\frac{V_{\max}^2}{V_\infty^2} - 1\right)\right]. \tag{5.32}$$

Eliminarea lui $\frac{V_{\max}}{V_\infty}$ între relaţiile (5.32) şi (5.27) în care s-a făcut $M_\infty = M_\infty^*$, conduce la rezolvarea unei ecuaţii de gradul trei în M_∞^{*2} ecuaţie care are o singură rădăcină reală cuprindă între 0 şi 1.

I. Filimon [10] determină din această ecuaţie valorile numărului Mach critic pentru diferite valori ale parametrului χ ($\chi = 0{,}1$; $0{,}2$; ... ... $0{,}9$; $1{,}0$). Rezultatele obţinute sînt valabile şi pentru numerele Mach critice calculate cu metoda prezentă, deoarece expresiile vitezelor maxime pe elipsă obţinute cu cele două metode sînt aceleaşi.

Comparînd aceste rezultate cu cele date de M. Poricel [11], care a studiat mişcarea în jurul obstacolului cvasieliptic şi riguros eliptic cu metoda hodografică aproximativă a lui C. Iacob, se constată că ele sînt cuprinse între valorile obţinute de M. Poricel pentru cilindrul cvasieliptic şi cel riguros eliptic.

Tabelul nr. 1 ilustrează aceste afirmații, conținînd și valorile lui M^*_∞ în cazul obstacolului cvasieliptic studiat de I. Filimon.

Tabelul nr. 1

M^*_∞

χ	M. Poricel (met. hod. C. Iacob)		I. Filimon (met. Ciaplinghin)		Met. Imai-Lamla-Iacob
	Obstacol cvasieliptic	Obstacol riguros eliptic	Obstacol cvasieliptic	Obstacol riguros eliptic	
0,1	0,8546	0,8596	0,8555	0,8572	0,8572
0,2	0,7580	0,7640	0,7555	0,7591	0,7591
0,3	0,6835	0,6943	0,6800	0,6846	0,6846
0,4	0,6250	0,6392	0,6200	0,6261	0,6261
0,5	0,5739	0,5891	0,5701	0,5777	0,5777
0,6	0,5331	0,5508	0,5286	0,5373	0,5373
0,7	0,4969	0,5163	0,4935	0,5016	0,5016
0,8	0,4662	0,4860	0,4613	0,4712	0,4712
0,9	0,4412	0,4550	0,4388	0,4485	0,4485
1,0	0,4151	0,4151	0,411	0,4208	0,4208

Valorile raportului $\frac{V_{\max}}{V_\infty}$ corespunzătoare numerelor Mach critice obținute se determină cu formula:

$$\frac{V_{\max}}{V_\infty} = (1+\chi)[1 + M^{*2}_\infty P(\chi)]. \tag{5.33}$$

În tabelul nr. 2 se poate face comparația între aceste valori și cele obținute de M. Poricel pentru diferite valori ale excentricității χ.

Tabelul nr. 2

$V_{\max}/V_\infty$

χ	M. Poricel (met. hod. C. Iacob)		Metoda I. Imai-E. Lamla C. Iacob
	Obstacolul cvasieliptic	Obstacolul riguros eliptic	
0,1	1,1372	1,1347	1,1404
0,2	1,2685	1,2583	1,2698
0,3	1,3963	1,3747	1,3938
0,4	1,5222	1,5043	1,5160
0,5	1,6452	1,6251	1,6333
0,6	1,7681	1,7299	1,7492
0,7	1,8893	1,8513	1,8647
0,8	2,0102	1,9814	1,9795
0,9	2,1303	2,0509	2,0957
1,0	2,2498	2,2498	2,2067

Pentru $\chi = 1$, valorile lui M^*_∞ şi $\frac{V_{\max}}{V_\infty}$ obţinute cu metoda I. Imai – E. Lamla – C. Iacob concordă destul de bine cu cele aflate de I. Imai (citat de [1][4]) prin metoda aproximativă directă Janzen-Rayleigh, după cum se vede în tabelul nr. 3.

Tabelul nr. 3

	I. Imai (met. Janzen-Rayleigh)	Metoda Imai-Lamla-Iacob
M^*_∞	0,4206	0,4208
$\frac{V_{\max}}{V_\infty}$	2,2064	2,2067

§ 6. MIŞCAREA CU CIRCULAŢIE ÎN JURUL CILINDRULUI ELIPTIC. APROXIMAŢIA ÎN M_0^2

Procedeul este asemănător cu cel folosit la studiul mişcării fără circulaţie în jurul aceluiaşi obstacol. Folosim şi aici metoda reprezentării conforme.

Fie funcţia

$$z = \frac{a+b}{2}\left(\zeta + \frac{k^2}{\zeta}\right), \quad k^2 = \frac{a-b}{a+b} < 1 \tag{6.1}$$

care reprezintă conform exteriorul elipsei de semiaxe a şi $b (a > b)$ pe exteriorul cercului unitate din planul ζ. Potenţialul complex al mişcării fluide în jurul cercului va fi:

$$f_0(\zeta) = \frac{a+b}{2} V_\infty\left(\zeta + \frac{1}{\zeta} + \alpha \ln \zeta\right), \tag{6.2}$$

cu

$$\alpha = \frac{2}{a+b}\,\frac{k_0}{2\pi i V_\infty}, \quad \bar{\alpha} = -\alpha, \tag{6.3}$$

unde k_0 este o constantă reală care reprezintă valoarea circulaţiei în jurul cercului. Potenţialul complex al mişcării incompresibile în jurul elipsei va fi

$$F_0(\zeta) = f_0(\zeta(z)) \tag{6.4}$$

cu $\zeta = \zeta(z)$ din (6.1). Potenţialul complex al mişcării compresibile se poate scrie sub forma:

$$F(z, \bar{z}) = F_0(z) + F_1(z, \bar{z}) M_0^2 + \ldots \tag{6.5}$$

---

[4] Pag. 660.

Corecţia de compresibilitate $F_1(z, \bar{z})$ este dată de metoda I. Imai – E. Lamla – C. Iacob prin formula :

$$F_1(z, \bar{z}) = \frac{1}{4V_\infty^2} \frac{\mathrm{d}F_0}{\mathrm{d}z} \int \overline{\left(\frac{\mathrm{d}F_0}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z} + \frac{1}{4} g'(z), \tag{6.6}$$

care se poate scrie, folosind transformarea (6.1), astfel :

$$f_1(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{4V_\infty^2} \frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}\zeta} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z} \int \overline{\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}\zeta}\right)^2 \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z} \mathrm{d}\zeta} + \frac{1}{4} g(\zeta), \tag{6.7}$$

unde $g(\zeta)$ este o funcţie analitică ce se determină din condiţiile la limită. Înlocuind pe $f_0(\zeta)$ cu valoarea din (6.2) se obţine pentru $f_1(\zeta, \bar{\zeta})$ expresia :

$$\begin{aligned} f_1(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{a+b}{8} V_\infty \frac{\zeta^2 + \alpha\zeta - 1}{\zeta^2 - k^2} \Big[\bar{\zeta} + \frac{1}{k^2 \zeta} - 2\alpha \ln \bar{\zeta} - \\ - \frac{\alpha (k^2 - 1)}{k^2} \ln\left(1 - \frac{k^2}{\bar{\zeta}^2}\right) + \frac{(k^2-1)^2}{2k^3} \ln \frac{\bar{\zeta} - k}{\bar{\zeta} + k} \Big] + \frac{1}{4} g(\zeta) \cdot \end{aligned} \tag{6.8}$$

Dar funcţia de curent a unei mişcări fluide trebuie să fie uniformă, de aceea vom alege pentru funcţia $g(\zeta)$ o expresie care distruge multiformitatea funcţiei de curent [7] :

$$\frac{1}{4} g(\zeta) = -\frac{a+b}{8} V_\infty \frac{\zeta^2 + \alpha\zeta - 1}{\zeta^2 - k^2} 2\alpha \ln \zeta + \frac{1}{4} h(\zeta), \tag{6.9}$$

cu $h(\zeta)$ uniformă, olomorfă în orice punct situat la distanţă finită. Comportarea funcţiei $h(\zeta)$ la mari distanţe se determină ca şi în cazul mişcării fără circulaţie, din condiţia

$$(u - iv)_\infty = V_\infty. \tag{6.10}$$

Se constată că la mari distanţe funcţia $h(\zeta)$ are dezvoltarea :

$$h(\zeta) = -\frac{a+b}{2} V_\infty \zeta + \alpha_1 \ln \zeta + a_0 + \frac{a_1}{\zeta} + \ldots \tag{6.11}$$

cu

$$\alpha_1 = -\frac{2}{a+b} \frac{k_1}{2\pi i V_\infty}, \quad \bar{\alpha}_1 = -\alpha_1, k_1 \text{ real.} \tag{6.12}$$

Funcţia

$$h_1(\zeta) = h(\zeta) + f_0'(\zeta), \tag{6.13}$$

unde

$$f_0'(\zeta) = \frac{a+b}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} + \alpha_1 \ln \zeta\right), \tag{6.14}$$

va fi olomorfă în tot domeniul exterior cercului, $f_0'(\zeta)$ reprezentînd potenţialul complex al unei mişcări incompresibile în jurul aceluiaşi cerc, de circulaţie k_1. Observînd că

$$\operatorname{Im}\{h_1(\zeta)\}_C = \operatorname{Im}\{h(\zeta)\}_C \tag{6.15}$$

şi impunînd condiţia ca pe C să avem $\operatorname{Im} f_1(\zeta, \bar\zeta) = 0$, se ajunge, pentru determinarea funcţiei $h_1(\zeta)$, la o problemă Dirichlet exterioară. Ca şi în cazul mişcării studiate la § 5, se încearcă să se obţină în membrul drept o funcţie olomorfă, distrugîndu-se singularităţile la mari distanţe şi la distanţă finită, păstrîndu-se egalitatea părţilor imaginare pe contur. Folosind din nou proprietatea 2°, § 3 se obţine $h_1(\zeta)$, apoi $h(\zeta)$ din (6.13) care se introduce în (6.9), apoi în (6.8). Ultimul rezultat este:

$$
\begin{aligned}
(6.16)\quad f_1(\zeta,\bar\zeta) = {} & \frac{a+b}{8} V_\infty \biggl\{ \frac{\zeta^2+\alpha\zeta-1}{\zeta^2-k^2} \biggl[\bar\zeta + \frac{1}{k^2\bar\zeta} - \frac{1}{\zeta} - \frac{\zeta}{k^2} - 2\alpha \ln \zeta\,\bar\zeta - \\
& - \frac{\alpha(k^2-1)}{k^2} \ln \biggl(1 - \frac{k^2}{\zeta^2} + \frac{(k^2-1)^2+\alpha^2k^2}{2k^3} \ln \frac{\bar\zeta-k}{\bar\zeta+k} \biggr] - \\
& - \frac{\zeta^2+\alpha\zeta-1}{1-k^2\zeta^2} \biggl[\alpha \frac{k^2-1}{k^2} \ln \biggl(1 - \frac{k^2}{\zeta^2} \biggr) + \frac{\alpha^2k^2+(k^2-1)^2}{2k^3} \ln \frac{\zeta-k}{\zeta+k} \biggr] + \\
& + \frac{k^2-\alpha k-1}{2k^2} \biggl(\frac{1}{k\zeta-1} + \frac{\zeta}{k+\zeta} \biggr) \biggl[\alpha \frac{k^2-1}{k^2} \ln(1-k^4) + \\
& + \frac{\alpha^2k^2+(k^2-1)^2}{2k^3} \ln \frac{1-k^2}{1+k^2} \biggr] - \frac{k^2+\alpha k-1}{2k^2} \biggl(\frac{1}{k\zeta+1} + \\
& + \frac{\zeta}{k-\zeta} \biggr) \biggl[\alpha \frac{k^2-1}{k^2} \ln(1-k^4) - \frac{\alpha^2k^2+(k^2-1)^2}{2k^3} \ln \frac{1-k^2}{1+k^2} \biggr] - \\
& - \frac{k^2-1}{k^2} \biggl(\zeta + \frac{1}{\zeta} \biggr) - \alpha_1 \ln \zeta \biggr\}.
\end{aligned}
$$

Corecţia de compresibilitate $F_1(z, \bar z)$ se obţine din această expresie, înlocuind $\zeta = \zeta(z)$, $\bar\zeta = \zeta(\bar z)$ din (6.1).

Dacă în rezultatul obţinut se fac următoarele particularizări:

1) $\alpha = 0$, $\alpha_1 = 0$ se obţine corecţia de compresibilitate pentru cazul mişcării fără circulaţie în jurul elipsei;

2) $k \to 0$ se obţine corecţia de compresibilitate pentru cazul mişcării în jurul cercului, cu circulaţie;

3) $\alpha = \alpha_1 = 0$, $k \to 0$ se obţine corecţia de compresibilitate pentru mişcarea fără circulaţie în jurul cercului.

Mărimea vitezei pe obstacolul eliptic are următoarea expresie:

$$
\begin{aligned}
(6.17)\quad \frac{V}{V_\infty} = {} & \frac{2\sin\theta+\tau}{\sqrt{\lambda}} + \frac{M_0^2}{\sqrt{\lambda}} \biggl\{ \frac{1-k^2}{2\lambda^2} \biggl(\tau \frac{k^2-1}{k^2} \ln \sqrt{\lambda} + \\
& + \frac{(k^2-1)^2-\tau^2k^2}{2k^3} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2k\sin\theta}{1-k^2} \biggr) \cdot (\tau k^2 \sin 3\theta - 2(1+k^4)\cos 2\theta + \\
& + \tau(k^4+3k^2+1)\sin\theta + 4k^2) + \frac{1+k^2}{2\lambda^2} \biggl(\tau \frac{k^2-1}{k^2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{k^2 \sin 2\theta}{1-k^2\cos 2\theta} + \\
& + \frac{(k^2-1)^2-\tau^2k^2}{4k^3} \ln \frac{1+2k\cos\theta+k^2}{1-2k\cos\theta+k^2} \biggr) . (\tau k^2 \cos 3\theta + 2(k^2-1)^2 \sin 2\theta +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\tau(k^4-3k^2+1)\cos\theta)+\frac{(k^2-1)^2}{2k^2\lambda^2}(k^2\sin 3\theta+(k^4+3k^2+\\
&+1)\sin\theta)\left(\tau^2\ln(1-k^4)+\frac{(k^2-1)^2-\tau^2k^2}{2k^2}\ln\frac{1-k^2}{1+k^2}\right)+\\
&+\frac{\tau}{\lambda^2}(2k^2-(1+k^4)\cos 2\theta)\left(\frac{(k^2-1)^2}{k^2}\ln(1-k^4)-\right.\\
&\left.-\frac{(k^2-1)^2-\tau^2k^2}{2k^2}\ln\frac{1-k^2}{1+k^2}\right)+\frac{1}{2k^2\lambda}[2k^2\tau(k^2-1)\cos 2\theta+\\
&+2(2k^2+2k^2\tau^2-k^4-k^2\tau^2-1)\sin\theta+\tau(k^2\tau^2+4k^2-3k^4-1)]-\\
&\left.-\frac{k^2-1}{2k^2}\sin\theta-\frac{\tau_1}{4}\right\},
\end{aligned}
$$

unde

$$
\begin{aligned}
&\lambda=1-2k^2\cos 2\theta+k^4\\
&\alpha=i\tau,\quad \alpha_1=i\tau_1,\quad \tau,\tau_1\,\text{reale.}
\end{aligned}
\tag{6.18}
$$

§ 7. CONCLUZII

Menţionăm că metoda I. Imai–E. Lamla–C. Iacob a fost aplicată la cazul general al profilelor ce se obţin ca imagini ale unui cerc printr-o reprezentare conformă cu derivată raţională, de către C. Iacob [12] şi [13]. Cu aceeaşi metodă, C. Iacob [14] a studiat mişcarea în jurul profilelor Jukovski simetrice, iar A. Georgescu [15] a cercetat profilele von Mises cele mai generale.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Iacob, *Introducere matematică în mecanica fluidelor*, Ed. Academiei R.P.R., Bucureşti, 1956.
2. I. Imai, Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan, **20**, 636 (1938).
3. I. Imai, Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan, **23**, 180 (1941).
4. H. Lamb, Reports and Memoranda, **1156** (1928).
5. E. Pistolesi, Actele congresului Volta, Roma, 1935, p. 296.
6. S. Tomotika, H. Umemoto, Report aeronautical Research Institute Toky, **205**, 120 (1941).
7. C. Iacob, Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe matematice şi fizice, **6**, *221* (1954).
8. S. Tomotika, K. Tamada, Report aeronautical Research Institute Tokyo, **201**, 481 (1940).
9. I. Imai, T. Aihara, Report aeronautical Research Institute Tokyo, **194** (1940).
10. I. Filimon, St. cerc. mat., *8*, 467 (1957).
11. M. Poricel, St. cerc. mat., *8*, 1305 (1965).
12. C. Iacob, *Introduction mathématique à la Mécanique des Fluides*, Bucarest–Paris, 1959.
13. C. Iacob, Archivum Mehaniki, **16**, *2*, 273 (1964).
14. C. Iacob, Comunicările Acad. R.P.R., *2*, 901.
15. A. Georgescu, St. cerc. mat., **18**, *2*, 301 (1966).

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor din text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

1968 MAI 18

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.

GABIRIA ANDREIAN-CAZACU, A. DELEANU, M. JURCHESCU, **Topologie, Categorii. Suprafeţe riemanniene**, 1967, 394 p., 21,50 lei.

ROMULUS CRISTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.

I. CUCULESCU, **Procese Markov şi funcţii excesive**, 1968, 356 p., 19 lei.

N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.

ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, **Metode matematice în hidrogazodinamica subterană**, 1966, 582 p., 31 lei.

AL. GHIKA, **Analiza funcţională**, 1967, 594 p., 31 lei.

S. GUIAŞU şi R. THEODORESCU, **Teoria matematică a informaţiei**, 1966, 256 p., 10 lei.

M. IOSIFESCU şi P. TĂUTU, **Procese stohastice şi aplicaţii în biologie şi medicină**, 1968, 345 p., 22 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, 1966, 669 p., 38 lei.

I. SINGER, **Cea mai bună aproximare în spaţii vectoriale prin elemente din subspaţii vectoriale**, 1967, 386 p., 23 lei.

M. I. STOKA, **Geometria integrală**, 1967, 239 p., 9,75 lei.

S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 4, P. 455–632, BUCUREŞTI, 1968

I. P. „Informaţia" – c. 5082

43831 **Lei 12.–**

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

5

TOMUL 20

1968

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR
1883

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAȘ — secretar de redacție.

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.

La revue „STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE" paraît 10 fois par an. Le prix d'un abonnement annuel est de $ 10 —; F. F. 49.—; D. M. 40.
Toute commande de l'étranger sera adressée a CARTIMEX, Boite postale 134—135, Roumanie, ou à ses répresentants à l'étranger. En Roumanie, vous pourrez vous abonner par les bureaux de poste ou chez votre facteur.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție al revistei pe adresa: Str. Mihai Eminescu nr. 47, București.

TOM. 20, Nr. 5
1968

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

SUMAR

Pag.

C. APOSTOL, Teorie spectrală şi calcul funcţional 635

VIRGIL EMIL CĂZĂNESCU, Despre categoria cvasimaşinilor . . 669

CONSTANTIN V. CRĂCIUN, Δ-Dominare şi dominare condiţionată în gramatica algebrică 683

EUGENIA OPRESCU, Conexiuni invariante pe un spaţiu Riemann V_3 cu metrica nedefinită 697

IULIAN POPOVICI, Asupra scufundării naturale a unei clase de spaţii lenticulare 723

MARCEL N. ROŞCULEŢ, Cercetări asupra invarianţilor integrali 731

ION D. TEODORESCU, Asupra spaţiilor A_2 cu conexiune afină 751

IOAN TOMESCU, Asupra problemei sintezei automatelor secvenţiale de tipul Mealy 763

CORNELIU ZIDĂROIU, Asupra problemei expansiunii optimale a unei întreprinderi 771

ST. CERC. MAT., TOM. 20 NR. 5, P. 633–786, BUCUREŞTI, 1968

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

TEORIE SPECTRALĂ ŞI CALCUL FUNCŢIONAL

DE

C. APOSTOL

Lucrarea de faţă are la bază o parte din expunerile ţinute de autor în cadrul seminarului 1966–1967 al sectorului de teorie spectrală de la Institutul de matematică.

În cursul redactării am urmat linia lucrării de sinteză [12]. În plus sînt conţinute rezultatele obţinute de autor în [1], [2], [3] şi [4].

INTRODUCERE

Scopul prezentei lucrări este de a introduce pe cititor în studiul generalizărilor calculului funcţional ulterioare lucrării [13].

Lucrarea este împărţită în patru capitole.

În Cap. I se studiază operatorii cu proprietatea prelungirii analitice unice, se introduce noţiunea de spaţiu maximal spectral ([16]), precum şi relaţia de echivalenţă ,,$\overset{a}{\approx}$'' ([9]).

În Cap. II se studiază operatorii decompozabili în sensul [16]. Aceştia apar ca cea mai largă generalizare a operatorilor spectrali în sensul [13].

În Cap. III se studiază homomorfismele spectrale (în [12] acestea apar sub numele de funcţii $\mathfrak{A}$-spectrale).

Din existenţa unui homomorfism de la o algebră de funcţii (fără a fi înzestrată cu o topologie) la algebra operatorilor pe un spaţiu Banach se deduc proprietăţi spectrale pentru operatorii din imaginea homomorfismului.

În Cap. IV se introduc operatorii scalari generalizaţi în sensul [15], concept ce constituie o primă generalizare a operatorilor spectrali de tip scalar.

Operatorii scalari generalizaţi admit un calcul funcţonal prin intermediul distribuţiilor vectoriale multiplicative (distribuţii spectrale).

În [12] (Cap. V) apar şi alte modele de calcul funcţional pe care noi nu le-am inclus.

ST. CERC. MAT., TOM. 20. NR. 5, P. 635–638. BUCUREŞTI, 1968

De asemenea nu prezentăm rezultatele privitoare la operatorii spectrali generalizaţi, noţiune ce apare pentru prima dată în [6] pentru spaţii Banach şi în [20] pentru spaţii local convexe şi nici operatorii de înmulţire (Cap. VI, [12]).

La sfîrşitul lucrării dăm o scurtă listă de probleme deschise.

I. PRELIMINARII

§ 1. NOTAŢII ŞI CONVENŢII

În decursul expunerilor ce urmează vom folosi următoarele notaţii :

X — un spaţiu Banach standard, $X \neq \{0\}$.
$\mathcal{L}(X)$ — algebra operatorilor liniari şi mărginiţi în X.
I — unitatea în $\mathcal{L}(X)$.
$\Lambda, (N)$ — mulţimea numerelor complexe, (naturale).
$\mathcal{B}$ — algebra Booleană a mulţimilor Boreliene din Λ.

Vom conveni să înţelegem prin subspaţiu în X o varietate liniară închisă şi prin operator în X un element din $\mathcal{L}(X)$.

Fie $\mathcal{M}$ o mulţime iar $\mathcal{N}$ o parte a sa. Vom nota cu $\mathcal{N}'$ complementara lui $\mathcal{N}$ în $\mathcal{M}$, şi dacă $\mathcal{M}$ este spaţiu topologic, $\overline{\mathcal{N}}$ va fi închiderea lui $\mathcal{N}$ în $\mathcal{M}$.

Fie $T \in \mathcal{L}(X)$. Vom nota cu $\mathcal{F}(T)$ mulţimea funcţiilor complexe de o variabilă complexă f definite şi olomorfe pe G_f, unde G_f este un domeniu (= mulţime deschisă) ce depinde de f, $G_f \supset \sigma(T)$ şi orice componentă conexă a lui G_f intersectează $\sigma(T)$ (VII. 3, [14]).

Pentru un operator $T \in \mathcal{L}(X)$ dacă $f \in \mathcal{F}(T)$, operatorul $f(T)$ se defineşte cu ajutorul integralei Cauchy ca în VII. 3, [14].

Pe parcurs vom mai introduce notaţii ce vor fi utilizate ulterior fără precizări dacă nu va fi neapărată nevoie. Semnul „$\sim$" va marca sfîrşitul demonstraţiilor.

§ 2. OPERATORI CU PROPRIETATEA PRELUNGIRII ANALITICE UNICE

Fie X un spaţiu Banach şi $T \in \mathcal{L}(X)$.

2.1. Definiţie. *Operatorul T are proprietatea prelungirii unice dacă oricare ar fi domeniul G, ecuaţia* $(\lambda - T)\, g(\lambda) \equiv 0$ *are ca soluţie olomorfă definită în G cu valori în X numai* $g = 0$.

Mulţimea operatorilor din $\mathcal{L}(X)$ care au proprietatea prelungirii analitice unice va fi notată cu $\mathcal{P}(X)$.

Dacă $T \in \mathcal{P}(X)$, atunci pentru orice $x \in X$ vom pune

$$\rho_T(x) = \{\lambda : \lambda \in \Lambda,\ (\exists)\, x_\lambda : \mathcal{V}_\lambda \to X,\ (\mu - T)\, x_\lambda(\mu) \equiv x\}$$

în care $\mathcal{V}_\lambda$ este o vecinătate deschisă a lui λ şi x_λ este olomorfă în $\mathcal{V}_\lambda$.

Mulţimea $\rho_T(x)$ va fi numită mulţimea rezolvată a lui x în raport cu T, iar complementara sa, $\sigma_T(x)$, va fi spectrul lui x în raport cu T. Se vede imediat că $\rho_T(x)$ (resp. $\sigma_T(x)$) este o mulţime deschisă (resp. închisă).

Fie $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho_T(x)$ şi $x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}$ funcţiile definite mai sus în $\mathcal{V}_{\lambda_1}, \mathcal{V}_{\lambda_2}$. Dacă $\mathcal{V}_{\lambda_1} \cap \mathcal{V}_{\lambda_2} \neq \emptyset$, atunci $(\mu - T)(x_{\lambda_1}(\mu) - x_{\lambda_2}(\mu)) \equiv 0$, $\mu \in \mathcal{V}_{\lambda_1} \cap \mathcal{V}_{\lambda_2}$ şi cum $T \in \mathcal{P}(X)$, obţinem $x_{\lambda_1}(\mu) \equiv x_{\lambda_2}(\mu)$, $\mu \in \mathcal{V}_{\lambda_1} \cap \mathcal{V}_{\lambda_2}$.

Cum $\mathcal{V}_\lambda \subset \rho_T(x)$ pentru orice $\lambda \in \rho_T(x)$ şi $\rho_T(x) = \bigcup_{\lambda \in \rho_T(x)} \mathcal{V}_\lambda$, putem defini funcţia olomorfă $x_T : \rho_T(x) \to X$ prin ecuaţia $x_T(\mu) = x_\lambda(\mu)$, $\mu \in \mathcal{V}_\lambda$. Funcţia x_T va fi numită rezolvanta lui x în raport cu T. Avem $(\mu - T)\, x_T(\mu) \equiv x$ şi $\rho_T(x)$ este domeniul de existenţă maxim al soluţiei acestei ecuaţii ([9], [12], [16]).

Pentru un $T \in \mathcal{P}(X)$ şi o mulţime $\sigma \in \mathcal{B}$ vom nota

$$X_T(\sigma) = \{\, x : x \in X,\ \sigma_T(x) \subset \sigma \}.$$

2.2. PROPOZIŢIE. *Fie* $T \in \mathcal{P}(X)$, $x, y \in X$, $\alpha(\neq 0) \in \Lambda$, $A \in \mathcal{L}(X)$, $AT = TA$. *Avem* :

(i) $\sigma_T(x) = \emptyset \rightleftarrows x = 0$, $\sigma_T(\alpha x) = \sigma_T(x) \subset \sigma(T)$.

(ii) $(\sigma_T(x) \setminus \sigma_T(y)) \cup (\sigma_T(y) \setminus \sigma_T(x)) \subset \sigma_T(x+y) \subset \sigma_T(x) \cup \sigma_T(y)$.

(iii) $\sigma_T(x) = \sigma_T(x_T(\mu))$, $\mu \in \rho_T(x)$. *Dacă* $\lambda \in \rho_T(x)$ *şi* $(x_T(\mu))_T(\lambda) = x_T(\mu, \lambda)$, *atunci* $x_T(\mu, \lambda) = x_T(\lambda, \mu)$ *şi* $x_T(\lambda) - x_T(\mu) = (\mu - \lambda)\, x_T(\lambda, \mu)$.

(iv) $\sigma_T(Ax) \subset \sigma_T(x)$.

Demonstraţie. (i) Dacă $\sigma_T(x) = \emptyset$, atunci x_T este olomorfă în tot planul complex şi cum $\lim_{\lambda \to \infty} x_T(\lambda) = \lim_{\lambda \to \infty} R(\lambda; T)\, x = 0$, avem $x_T = 0$ (T. Liouville) deci $(\lambda - T)\, x_T(\lambda) = x = 0$. Implicaţia inversă este evidentă. Cum $\alpha \neq 0$, putem scrie $(\lambda - T)\, \alpha\, x_T(\lambda) = \alpha x$ deci $\rho_T(\alpha x) \subset \rho_T(x)$ şi de asemenea $\rho_T(x) = \rho_T\left(\frac{1}{\alpha}\, \alpha x\right) \subset \rho_T(\alpha x)$. Evident, $\sigma_T(x) \subset \sigma(T)$.

(ii) Avem $(\lambda - T)\,(x_T(\lambda) + y_T(\lambda)) = x + y$, $\lambda \in \rho_T(x) \cap \rho_T(y)$, deci $\sigma_T(x+y) \subset \sigma_T(x) \cup \sigma_T(y)$. Din incluziunea $\sigma_T(x) \subset \sigma_T(x+y) \cup \sigma_T(-y) = \sigma_T(x+y) \cup \sigma_T(y)$ deducem $\sigma_T(x) \setminus \sigma_T(y) \subset \sigma_T(x+y)$ şi prin simetrie $\sigma_T(y) \setminus \sigma_T(x) \subset \sigma_T(x+y)$.

(iii) Dacă $\lambda \in \rho_T(x_T(\mu))$ avem $(\lambda - T)(\mu - T)(x_T(\mu))_T(\lambda) = (\mu - T)(\lambda - T)(x_T(\mu))_T(\lambda) = (\mu - T)\, x_T(\mu) = x$ deci $\rho_T(x_T(\mu)) \subset \rho_T(x)$.

Fie acum $\lambda_1, \lambda_2 \in (\rho_T(x)$. Avem $(\lambda_1 - T)\, x_T(\lambda_1) - (\lambda_2 - T)\, x_T(\lambda_2) = 0$, deci $(\lambda_1 - T)(x_T(\lambda_T) - x_T(\lambda_2)) = (\lambda_2 - \lambda_1)\, x_T(\lambda_2)$. Dacă $\lambda \in \rho_T(x)$, $\lambda \neq \mu$, obţinem $(\lambda - T)\, \frac{x_T(\lambda) - x_T(\mu)}{\lambda - \mu} = -\, x_T(\mu)$ şi dacă punem

$$g(\lambda) = \begin{cases} -\dfrac{x_T(\lambda) - x_T(\mu)}{\lambda - \mu} & \lambda \neq \mu \\[2ex] -\dfrac{\mathrm{d}\, x_T(\mu)}{\mathrm{d}\mu} & \lambda = \mu \end{cases}$$

g este analitică în $\rho_T(x)$ şi $(\lambda - T)\, g(\lambda) = x_T(\mu)$. Deci $\rho_T(x) \subset \rho_T(x_T(\mu))$ şi $g(\lambda) = (x_T(\mu))_T(\lambda) = x_T(\mu, \lambda)$. Cum $x_T(\mu, \lambda) = \frac{x_T(\lambda) - x_T(\mu)}{\lambda - \mu} = x_T(\lambda, \mu)$ pentru $\lambda \neq \mu$, (iii) este complet demonstrat.

(iv) Dacă $\lambda \in \rho_T(x)$ avem $(\lambda - T)\, A x_T(\lambda) = Ax$. $\sim$

2.3. COROLAR. *Fie* $T \in \mathcal{P}(X)$ *şi* $\sigma \in \mathcal{B}$. *Atunci* $X_T(\sigma) = X_T(\sigma \cap \sigma(T))$ *este o varietate liniară în* X, *ultrainvariantă pentru* T.

Dacă $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{B}$, $\sigma_1 \subset \sigma_2$, *atunci* $X_T(\sigma_1) \subset X_T(\sigma_2)$.

2.4. PROPOZIŢIE. *Fie* X_1, X_2, X, *spaţii Banach şi* $X = X_1 \oplus X_2$, $T_1 \in \mathcal{L}(X_1)$, $T_2 \in \mathcal{L}(X_2)$, $T = T_1 \oplus T_2$. *Atunci* :

$$T \in \mathcal{P}(X) \rightleftarrows T_1 \in \mathcal{P}(X_1),\ T_2 \in \mathcal{P}(X_2).$$

Demonstrație. Dacă $T \in \mathcal{P}(X)$, fie $g_j : G_j \to X_j, j = 1, 2$, g_j olomorfă și astfel încît $(\lambda - T_j)\, g_j(\lambda) \equiv 0$. Rezultă $(\lambda - T)\, g_j(\lambda) \equiv 0$, $\lambda \in G_j$ și cum $T \in \mathcal{P}(X)$, obținem $g_j = 0$ deci $T_j \in \mathcal{P}(X_j)$. Invers, dacă $T_j \in \mathcal{P}(X_j)$ și P_j este proiecția canonică a lui X pe X_j, fie $g : G \to X$, $(\lambda - T)\, g(\lambda) \equiv 0$. Rezultă $(\lambda - T_j)\, P_j\, g(\lambda) \equiv 0$ deci $g = 0$ și $T \in \mathcal{P}(X)$. $\sim$

Din demonstrația de mai sus rezultă următorul:

2.5. COROLAR. *În ipotezele propoziției* 2.4 *dacă* $x_j \in X_j$, $\sigma \in \mathcal{B}$, *atunci avem*:

$$\sigma_T(x_1 + x_2) = \sigma_{T_1}(x_1) \cup \sigma_{T_2}(x_2)$$

$$X_T(\sigma) = X_{1T_1}(\sigma) \oplus X_{2T_2}(\sigma) .$$

2.6. TEOREMĂ. *Fie* $T \in \mathcal{L}(X)$ *și* $f \in \mathcal{F}(T)$. *Dacă* f *este neconstantă în orice componentă conexă a domeniului de definiție, atunci avem*

$$T \in \mathcal{P}(X) \rightleftarrows f(T) \in \mathcal{P}(X) .$$

Demonstrație. Să presupunem $T \in \mathcal{P}(X)$ și fie G o mulțime deschisă și $g : G \to X$ olomorfă astfel încît $(\lambda - f(T))\, g(\lambda) \equiv 0$. Deoarece pentru $\lambda \notin \sigma(f(T))$, $\lambda \in G$, avem $g(\lambda) = 0$, căci $\lambda - f(T)$ este operator inversabil, în acest caz, fie $\lambda_0 \in \sigma(f(T)) \cap G$. Dacă $g(\lambda_0) \neq 0$, atunci există $r > 0$ astfel încît $g(\lambda) \neq 0$, $|\lambda - \lambda_0| < r$.

Din teorema de transformare a spectrului operatorilor (VII.3.11, [14]) avem $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$, deci $f(\sigma(T)) \supset \{\lambda : |\lambda - \lambda_0| < r\}$. Pentru că $\sigma(T)$ este o mulțime compactă, mulțimea $\{\mu : \mu \in \sigma(T), f'(\mu) = 0\}$ este finită, deci fără a micșora generalitatea putem presupune că imaginea sa prin f nu intersectează $\{\lambda : |\lambda - \lambda_0| \leqslant r\}$.

Tot pentru că $\sigma(T)$ este compactă, dacă r este suficient de mic deducem că există un număr finit de funcții olomorfe $\varphi_j : \{\lambda : |\lambda - \lambda_0| < r\} \to \Lambda$, $j = 1, \ldots, n$, cu proprietățile

(i) $f(\varphi_j(\lambda)) = \lambda$, $\varphi_j(\{\lambda : |\lambda - \lambda_0| < r\}) \cap \sigma(T) \neq \emptyset$

(ii) $\lambda - f(\mu) = (\varphi_1(\lambda) - \mu) \ldots (\varphi_n(\lambda) - \mu)\, h(\lambda, \mu)$, $|\lambda - \lambda_0| < r$, $\mu \in \sigma(T)$, $h(\lambda, \mu) \neq 0$.

Rezultă:

$$(\varphi_1(\lambda) - T) \ldots (\varphi_n(\lambda) - T)\, g(\lambda) \equiv 0$$

și cum $T \in \mathcal{P}(X)$, obținem $g(\lambda) \equiv 0$, $\lambda \in \{\lambda : |\lambda - \lambda_0| < r\}$, deci $g(\lambda_0) = 0$, ceea ce este absurd. Concluzia este că avem $g = 0$ deci $f(T) \in \mathcal{P}(X)$.

Reciproc, dacă $f(T) \in \mathcal{P}(X)$ și $(\lambda - T)\, g(\lambda) \equiv 0$, $\lambda \in G$, avem și $(f(\lambda) - f(T))\, g(\lambda) \equiv 0$, $\lambda \in G \cap G_f$, unde G_f este domeniul de definiție a lui f, deci $g = 0$. $\sim$

2.7 TEOREMĂ 1) (de transformare a spectrului pentru elemente). *Fie* $T \in \mathcal{P}(X)$ *și* $f \in \mathcal{F}(T)$. *Atunci pentru orice* $x \in X$ *avem*:

$$\sigma_{f(T)}(x) = f(\sigma_T(x)) .$$

Demonstrație. Fie $\lambda_0 \in \rho_{f(T)}(x) \cap f(\sigma_T(x)) \neq \emptyset$. În acest caz există $\mu_0 \in \sigma_T(x)$ astfel încît $f(\mu_0) = \lambda_0$. Fie $\mathcal{V}_{\mu_0}$ o vecinătate deschisă a lui μ_0 astfel încît $f(\mathcal{V}_{\mu_0}) \subset \rho_{f(T)}(x)$.

---

1) Această formulare este inspirată de VII.3.11, [14]. În [12] ea apare sub forma corolarului ce urmează, cu care este echivalentă.

Din egalitatea $(\lambda - f(T))\, x_{f(T)}(\lambda) \equiv x$, $\lambda \in \rho_{f(T)}(x)$, rezultă $(f(\mu) - f(T))\, x_{f(T)}(f(\mu)) = x$, $\mu \in \mathcal{V}_{\mu_0}$, deci $(\mu - T)\, h(\mu, T)\, x_{f(T)}(f(\mu)) = x$ cu $h(\mu, z) = \dfrac{f(\mu) - f(z)}{\mu - z}$, $\mu \neq z$, ceea ce este absurd. Rezultă $f(\sigma_T(x)) \cap \rho_{f(T)}(x) = \emptyset$; astfel avem $f(\sigma_T(x)) \subset \sigma_{f(T)}(x)$.

Dacă $\lambda \in \sigma_{f(T)}(x) \setminus f(\sigma_T(x)) \neq \emptyset$, atunci $\lambda_0 - f(\mu) \neq 0$, $\mu \in \sigma_T(x)$. Alegînd un contur închis, convenabil, Γ care să mărginească domeniul G astfel încît $\sigma_T(x) \subset G$, $f(G \cup \Gamma) \cap \{\lambda_0\} = \emptyset$, să punem $y(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{x_T(\mu)}{\lambda - f(\mu)}\, d\mu$, pentru λ într-o vecinătate deschisă $\mathcal{V}_{\lambda_0}$ a lui λ_0, $\mathcal{V}_{\lambda_0} \cap f(G \cup \Gamma) = \emptyset$.

Dacă $\Gamma \subset \{z : |z| < r\}$, $|T| < r$, obţinem

$$(\lambda - f(T)\, y(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} (\lambda - f(z))\, R(z, T)\, dz \,\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{x_T(\mu)}{\lambda - f(\mu)}\, d\mu =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} (\lambda - f(z))\, dz \,\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{R(z; T)\, x_T(\mu)}{\lambda - f(\mu)}\, d\mu .$$

Deoarece avem $R(z, T)\, x_T(\mu) = x_T(\mu, z)$, folosind 2.2. (iii) găsim :

$$(\lambda - f(T))\, y(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} (\lambda - f(z))\, dz \,\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{x_T(z) - x_T(\mu)}{(\mu - z)(\lambda - f(\mu))}\, d\mu =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} (\lambda - f(z))\, dz \,\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{-\, x_T(\mu)}{(\mu - z)(\lambda - f(\mu))}\, d\mu =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{-\, x_T(\mu)}{\lambda - f(\mu)}\, d\mu \,\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{\lambda - f(z)}{\mu - z}\, dz =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma x_T(\mu)\, d\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\mu|=r} R(\mu; T)\, x\, d\mu = x .$$

Rezultă $\lambda_0 \in \rho_{f(T)}(x)$ ceea ce este absurd, deci

$$\sigma_{f(T)}(x) \setminus f(\sigma_T(x)) = \emptyset \quad \text{şi} \quad \sigma_{f(T)}(x) \subset f(\sigma_T(x)). \sim$$

Observăm că dacă $\sigma \in \mathcal{B}$ şi sîntem în ipotezele teoremei precedente, dacă $x \in X_{f(T)}(\sigma)$, atunci $f(\sigma_T(x)) \subset \sigma$, deci $x \in X_T(f^{-1}(\sigma))$ şi reciproc. Obţinem astfel următorul :

2.8. COROLAR. *În ipotezele teoremei* 2.7, *pentru orice* $\sigma \in \mathcal{B}$ *avem*

$$X_{f(T)}(\sigma) = X_T(f^{-1}(\sigma)) .$$

2.9. PROPOZIŢIE. *Fie* $T \in \mathcal{P}(X)$. *Avem* :

$$\sigma(T) = \bigcup_{x \in X} \sigma_T(x) \qquad (3.1,\ [4]).$$

Demonstraţie. Incluziunea neevidentă este $\sigma(T) \subset \bigcup\limits_{x \in X} \sigma_T(x)$. Dar dacă $\emptyset \neq \sigma(T) \setminus \bigcup\limits_{x \in X} \sigma_T(x) \ni \lambda_0$, atunci aplicaţia $x \to (\lambda_0 - T)\, x$ este surjectivă (căci pentru orice $y \in X$ avem $(\lambda_0 - T)\, y_T(\lambda_0) = y$) şi de asemenea injectivă (căci dacă $x \neq 0$, $(\lambda_0 - T)\, x = 0$, atunci $\lambda_0 \in \sigma_T(x)$). Dar aceasta este imposibil căci $\lambda_0 \in \sigma(T)$. ~

§ 3. OPERATORI CVASINILPOTENT ECHIVALENŢI

Fie X un spaţiu Banach. Pentru $T_j \in \mathcal{L}(X)$, $j = 1, 2$, vom pune

$$(T_1, T_2)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} T_1^{n-k} T_2^k, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

3.1. DEFINIŢIE. *Vom spune că operatorii* T_1, T_2 *sînt cvasinilpotent echivalenţi dacă*

$$\lim_{n \to \infty} |(T_1, T_2)^n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} |(T_2, T_1)^n|^{\frac{1}{n}} = 0 .$$

În acest caz vom scrie $T_1 \overset{q}{\approx} T_2$ ([9]).

3.2. PROPOZIŢIE. *Dacă* $T_j \in \mathcal{L}(X)$, $j = 1, 2, 3$, $T_3 T_j = T_j T_3$, $j = 1, 2$, *atunci pentru orice* $n = 0, 1, \ldots$ *avem*

$$|(T_1, T_2)^n| \leqslant (|T_1| + |T_2|)^n$$

$$(T_1 - T_3, T_2 - T_3)^n = (T_1, T_2)^n.$$

Demonstraţie. Inegalitatea este evidentă.

Egalitatea o demonstrăm prin inducţie folosind identitatea banală

$$(T_1, T_2)^{n+1} = T_1 (T_1, T_2)^n - (T_1, T_2)^n T_2 .$$

Într-adevăr, dacă $n = 0$ egalitatea devine $I = I$.

Să presupunem că este verificată pentru un n fixat. Avem

$$(T_1 - T_3, T_2 - T_3)^{n+1} = (T_1 - T_3)(T_1 - T_3, T_2 - T_3)^n -$$
$$- (T_1 - T_3, T_2 - T_3)^n (T_2 - T_3) = (T_1 - T_3)(T_1, T_2)^n -$$
$$- (T_1, T_2)^n (T_2 - T_3) = (T_1, T_2)^{n+1} . \sim$$

3.3. PROPOZIŢIE. *Relaţia* $\overset{q}{\approx}$ *este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.*

Demonstraţie. Vom demonstra numai tranzitivitatea. Pentru aceasta să arătăm că pentru orice $T_j \in \mathcal{L}(X)$, $j = 1, 2, 3$, avem

$$(T_1, T_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (T_1, T_3)^{n-k} (T_3, T_2)^k .$$

Într-adevăr, pentru $n = 0$ egalitatea este verificată. Să presupunem că ea este verificată pentru un n fixat. În acest caz obţinem

$$(T_1, T_2)^{n+1} = T_1 (T_1, T_2)^n - (T_1, T_2)^n T_2 =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_1 (T_1, T_3)^{n-k} (T_3, T_2)^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (T_1, T_3)^{n-k} (T_3, T_2)^k T_2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (T_1, T_3)^{n+1-k} (T_3, T_2)^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (T_1, T_3)^{n-k} T_3 (T_3, T_2)^k -$$

$$- \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (T_1, T_3)^{n-k} (T_3, T_2)^k T_2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (T_1, T_3)^{n+1-k} (T_3, T_2)^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (T_1, T_3)^{n-k} (T_3, T_2)^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (T_1, T_3)^{n+1-k} (T_3, T_1)^k.$$

Deci relaţia este adevărată pentru $n = 0, 1, \ldots$

Dacă $T_1 \overset{q}{\approx} T_3$, $T_2 \overset{q}{\approx} T_3$, atunci

$$| (T_1, T_2)^n |^{\frac{1}{n}} \leqslant 2 (\max_{0 \leqslant k \leqslant n} | (T_1, T_3)^{n-k} | | (T_3, T_2)^k |)^{\frac{1}{n}} .$$

Rezultă $\lim\limits_{n \to \infty} | (T_1, T_2)^n |^{\frac{1}{n}} = 0$ şi prin simetrie $\lim\limits_{n \to \infty} | (T_2, T_1)^n |^{\frac{1}{n}} = 0$. ∼

3.4. TEOREMĂ. *Fie* $T_j \in \mathcal{L}(X), j = 1, 2$. *Dacă* $T_1 \overset{q}{\approx} T_2$, *atunci avem*

$$\sigma(T_1) = \sigma(T_2) .$$

Demonstraţie. Deoarece $T_1 \overset{q}{\approx} T_2$, funcţia

$$\lambda \to \sum_{u=0}^{\infty} (T_2, T_1)^n R^{n+1} (\lambda ; T_1)$$

este olomorfă în $\rho(T_1)$ şi seria converge în norma operatorilor. Folosind propoziţia 3.2 avem

$$(\lambda - T_2) \sum_{n=0}^{\infty} (T_2, T_1)^n R^{n+1} (\lambda ; T_1) =$$

$$= (\lambda - T_2) \sum_{n=0}^{\infty} (T_2 - \lambda, T_1 - \lambda)^n R^{n+1} (\lambda ; T_1) =$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} (T_2 - \lambda, T_1 - \lambda)^{n+1} R^{n+1} (\lambda ; T_1) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} (T_2 - \lambda, T_1 - \lambda)^n R^n (\lambda ; T_1) = I .$$

Deoarece avem evident şi $T_1^* \overset{q}{\approx} T_2^*$, rezultă

$$(\lambda - T_2^*) \sum_{n=0}^{\infty} (T_2^*, T_1^*)^n R^{n+1} (\lambda ; T_1^*) = I^*, \lambda \in \rho(T_1) .$$

Prin adjuncție obținem

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n R^{n+1}(\lambda ; T_1)(T_1, T_2)^n (\lambda - T_2) = I$$

deci $\rho(T_1) \subset \rho(T_2)$ și analog incluziunea inversă. ~

Teorema următoare reprezintă o generalizare a teoremei VII.6.10, [14] a lui J. T. Schwartz.

3.5. Teoremă. *Fie* $T \in \mathcal{L}(X)$ *și* $f \in \mathcal{F}(T)$. *Dacă* $T_1 \overset{q}{\approx} T$, *atunci avem*

$$f(T_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T_1, T)^n}{n!} f^{(n)}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f^{(n)}(T) \frac{(T, T_1)^n}{n!}$$

și convergența are loc în topologia uniformă a operatorilor ([3]).

Demonstrație. Din teorema precedentă rezultă că avem $f \in \mathcal{F}(T_1)$ și

$$R(\lambda, T_1) = \sum_{n=0}^{\infty} (T_1, T)^n R^{n+1}(\lambda ; T).$$

Fie Γ un contur admis ce înconjoară $\sigma(T)$.
Obținem

$$f(T_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) R(\lambda ; T_1) \, d\lambda =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (T_1, T)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) R^{n+1}(\lambda ; T) \, d\lambda =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T_1, T)^n}{n!} f^{(n)}(T) \qquad \text{(vezi VII.6.11, [14]).}$$

Analog se demonstrează a doua egalitate. ~

3.6. Teoremă. *Fie* $T_1 \in \mathcal{P}(X)$, $T_2 \in \mathcal{L}(X)$. *Dacă* $T_1 \overset{q}{\approx} T_2$, *atunci* $T_2 \in \mathcal{P}(X)$ *și pentru orice* $x \in X$ *avem*

$$\sigma_{T_1}(x) = \sigma_{T_2}(x).$$

Demonstrație. Dacă $T_1 \in \mathcal{P}(X)$ și $T_2 \notin \mathcal{P}(X)$, atunci există λ_0, $r > 0$, g astfel încît $(\lambda - T_2) g(\lambda) \equiv 0$, $g(\lambda) \neq 0$, $|\lambda - \lambda_0| < r$. Să fixăm λ, $|\lambda - \lambda_0| < r$. Dacă $\mu \neq \lambda$ să punem

$$f_\lambda(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T_1, T_2)^n}{(\mu - \lambda)^{n+1}} g(\lambda).$$

Funcția f_λ este olomorfă în domeniul $|\mu - \lambda| > 0$ (ca funcție de μ). Ținînd cont de propoziția 3.2 obținem

$$f_\lambda(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T_1 - \lambda)^n}{(\mu - \lambda)^{n+1}} g(\lambda)$$

deci f_λ reprezintă o prelungire directă a funcției $R(\cdot ; T) g(\lambda)$. Rezultă egalitatea $(\mu - T_1) f_\lambda(\mu) = g(\lambda)$, $\mu \neq \lambda$, deci $\sigma_{T_1}(g(\lambda)) \subset \{\lambda\}$.

Fie acum r_1 astfel încît $\{\mu : |\mu - \lambda| < r_1\} \subset \{\zeta : |\zeta - \lambda_0| < r\}$. În acest caz funcţia h_λ determinată de ecuaţia

$$h_\lambda(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-\lambda| = r_1} \frac{f_\zeta(\mu)}{\zeta - \lambda} \, \mathrm{d}\zeta, \qquad |\mu - \lambda| < r_1$$

este olomorfă în μ şi verifică egalităţile

$$(\mu - T_1)\, h_\lambda(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-\lambda| = r_1} \frac{g(\zeta)}{\zeta - \lambda} \, \mathrm{d}\zeta = g(\lambda).$$

Deci $\sigma_{T_1}(g(\lambda)) \not\ni \lambda$ ceea ce este absurd.

Dacă $x \in X$, seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(T_2, T_1)^n}{n!} x_{T_1}^{(n)}(\lambda)$$

este convergentă uniform în orice compact din $\rho_{T_1}(x)$. Folosind identitatea

$$n\, x_{T_1}^{(n)}(\lambda) + (\lambda - T_1)\, x_{T_1}^{(n+1)}(\lambda) = 0, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

se demonstrează ca în 3.4 egalitatea

$$(\lambda - T_2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(T_2, T_1)^n}{n!} x_{T_1}^{(n)}(\lambda) = x$$

deci incluziunea $\rho_{T_2}(x) \subset \rho_{T_1}(x)$.

Analog rezultă cealaltă incluziune.

În plus avem egalitatea

$$x_{T_2}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(T_2, T_1)^n}{n!} x_{T_1}^{(n)}(\lambda). \sim$$

§ 4. SPAŢII MAXIMAL SPECTRALE

Fie X un spaţiu Banach şi $T \in \mathcal{L}(X)$.

4.1. Definiţie. *Numim spaţiu maximal spectral al lui T un subspaţiu Y invariant pentru T şi astfel încît pentru orice alt subspaţiu invariant Z incluziunea $\sigma(T\,|\,Z) \subset \sigma(T\,|\,Y)$ implică $Z \subset Y$.*

4.2. Propoziţie. *Fie Y un spaţiu maximal spectral al lui T şi Z un subspaţiu în X.*

Atunci avem:

(i) *Y este subspaţiu ultrainvariant pentru T.*

(ii) *Dacă $Z \subset Y$, atunci Z este spaţiu maximal spectral al lui T dacă şi numai dacă el este spaţiu maximal spectral pentru $T\,|\,Y$.*

Demonstraţie. (i) Va fi suficient să arătăm că avem $AY \subset Y$ pentru orice operator inversabil A ce comută cu T. Din egalitatea $TA = AT$ rezultă că subspaţiul AY este invariant pentru T. Fie $\lambda \in \rho(T\,|\,Y)$ şi operatorul $AR(\lambda; T|Y)A^{-1}|AY = V(\lambda)$. Se verifică imediat egalitățile

$$(\lambda - T|AY)\,V(\lambda) = V(\lambda)\,(\lambda - T|AY) = I\,|AY$$

deci $\sigma(T|AY) \subset \sigma(T|Y)$. Cum Y este spațiu maximal spectral, rezultă $AY \subset Y$.

(ii) Fie $Z_1 \subset X$ un subspațiu invariant pentru T astfel încît $\sigma(T|Z_1) \subset \subset \sigma(T|Z)$.

Dacă Z este spațiu maximal spectral al lui $T|Y$, cum $\sigma(T|Z) \subset \subset \sigma(T|Y)$ (conf. (i)), avem $\sigma(T|Z_1) \subset \sigma(T|Y)$, deci $Z_1 \subset Y$.

Cum Z este spațiu maximal spectral al lui $T|Y$ obținem $Z_1 \subset Z$ deci Z este spațiu maximal spectral pentru T.

Implicația inversă este evidentă. ~

4.3. PROPOZIȚIE. *Dacă* $T \in \mathcal{P}(X)$ *și* Y *este un spațiu maximal spectral al său, atunci pentru orice* $x \in Y$ *avem*

(i) $x_T(\lambda) \in Y$, $\lambda \in \rho_T(x)$

(ii) $\sigma_T(x) = \sigma_{T|Y}(x)$.

Demonstrație. (i) Să presupunem că există $\lambda \in \rho_T(x)$ astfel încît $x_T(\lambda) \notin Y$. În acest caz subspațiul $Z = \{y + \mu x_T(\lambda) : y \in Y, \mu \in \lambda\}$ conține strict pe Y. Cum $(\lambda - T)(y + \mu x_T(\lambda)) = (\lambda - T)\,y + \mu\, x \in Z$ avem $TZ \subset Z$.

Fie acum $\lambda_0 \in \rho(T|Y)$. Dacă $(\lambda_0 - T)(y + \mu\, x_T(\lambda)) = 0$, atunci $(\lambda_0 - T)\,y + \mu\, x + \mu(\lambda - \lambda_0)\, x_T(\lambda) = 0$.

Deoarece $\lambda = \lambda_0$ implică $x_T(\lambda) = R(\lambda; T|Y)\, x \in Y$, căci T deci și $T|Y$ are proprietatea prelungirii analitice unice, rezultă $\lambda \neq \lambda_0$, deci $\mu = 0$ și $(\lambda_0 - T|Y)\,y = 0$, deci $y = 0$. Astfel aplicația $z \to (\lambda_0 - T|Z)\,z$, $z \in Z$, este injectivă și folosind identitatea

$$(\lambda_0 - T)\left(R(\lambda_0; T|Y)\left(y - \frac{\alpha}{\lambda_0 - \lambda}\, x\right) + \frac{\alpha}{\lambda_6 - \lambda}\, x_T(\lambda)\right) = y + \alpha x_T(\lambda)$$

rezultă că este surjectivă, deci inversabilă. Am obținut deci incluziunea $\sigma(T|Z) \subset \sigma(T|Y)$ sau $Z \subset Y$ ceea ce este absurd.

(ii) Incluziunea $\sigma_T(x) \subset \sigma_{T|Y}(x)$ este evidentă. Cum pentru orice $\lambda \in \rho_T(x)$ avem $x_T(\lambda) \in Y$, obținem

$$(\lambda - T|Y)\, x_T(\lambda) = x$$

deci și $\rho_T(x) \subset \rho_{T|Y}(x)$. ~

4.4. PROPOZIȚIE. *Fie* $T \in \mathcal{L}(X)$, Y *un spațiu maximal spectral al lui* T, G *un domeniu simplu conex și* $f: G \to X$ *olomorfă astfel încît* $(\lambda - T)\,f(\lambda) \equiv 0$.

Dacă $G \cap \sigma(T|Y) \neq \emptyset$, *atunci* $G \subset \sigma_p(T|Y)$.

Demonstrație. Fie $\lambda_0 \in G \cap \sigma(T|Y)$ și X_n subspațiul finit dimensional general de $\{f(\lambda_0), \ldots, f^{(n-1)}(\lambda_0)\}$, $n \in N$. Din egalitatea

$$Tf^{(n)}(\lambda_0) = \lambda_0 f^{(n)}(\lambda_0) + n f^{(n-1)}(\lambda_0)$$

rezultă $TX_n \subset X_n$. Se vede ușor că avem și $\sigma(T|X_n) \subset \{\lambda_0\}$ deci $X_n \subset Y$. Rezultă $f(\lambda) \in Y$ deci $\lambda \in \sigma_p(T|Y)$. ~

Fie $T \in \mathcal{L}(X)$ și $\lambda_0 \in \sigma(T)$ astfel încît există o funcție olomorfă nenulă, f, definită într-o vecinătate conexă a lui λ_0 și astfel încît

$(\lambda - T)f(\lambda) \equiv 0$. Mulţimea punctelor cu această proprietate o vom nota $\sigma_p^0(T)$. Avem $\sigma_p^0(T) \subset \sigma_p(T)$.

De asemenea vom pune

$$\sigma_r^0(T) = \{\lambda : \lambda \in \sigma_r(T),\ (\lambda - T)^{-1} \text{ mărginit}\}$$

(pentru definiţia spectrului punctual, $\sigma_p(T)$, şi a spectrului rezidual $\sigma_r(T)$, vezi VII, 5.1, [14]).

Mulţimile $\sigma_p^0(T)$ şi $\sigma_r^0(T)$ evident sînt deschise.

4.5. PROPOZIŢIE. *Fie* Y *un spaţiu maximal spectral al lui* T *şi* G *o componentă conexă a lui* $\sigma_p^0(T)$ (resp. $\sigma_r^0(T)$).

Dacă $G \cap \sigma(T \mid Y) \neq \emptyset$, *atunci* $G \subset \sigma(T \mid Y)$.

Demonstraţie. Vom presupune că G este o componentă conexă a lui $\sigma_r^0(T)$ (pentru că în celălalt caz putem aplica propoziţia precedentă). Dacă $G \not\subset \sigma(T \mid Y)$, atunci alegînd λ_0 pe frontiera lui $\sigma(T \mid Y)$ şi în acelaşi timp în G găsim $\lambda_0 \in \sigma_l(T \mid Y) \subset \sigma_l(T)$ deci $(\lambda_0 - T)^{-1}$ nu este mărginit ceea ce este absurd ($\sigma_l(T)$ este spectral limită al lui T). $\sim$

4.6. PROPOZIŢIE. *Fie* $T \in \mathcal{P}(X)$ *şi* $\sigma \in \mathcal{B}$. *Dacă* $X_T(\sigma)$ *este închis, atunci el este spaţiu maximal spectral pentru* T *şi avem*

$$\sigma(T \mid X_T(\sigma)) \subset \sigma .$$

Demonstraţie. Evident, $X_T(\sigma)$ este un subspaţiu invariant pentru T. Dacă Z este de asemenea un subspaţiu invariant pentru T şi $\sigma(T \mid Z) \subset \sigma(T \mid X_T(\sigma))$, folosind propoziţia 2.9 avem $\sigma(T \mid X_T(\sigma)) = \bigcup_{x \in X_T(\sigma)} \sigma_{T \mid X_T(\sigma)}(x)$.

Dar dacă $\lambda \in \rho_T(x)$, folosind propoziţia 2.2 (iii) avem $x_T(\lambda) \in X_T(\sigma)$ deci

$$(\lambda - T \mid X_T(\sigma))\, x_T(\lambda) = x ,$$

ceea ce implică $\sigma_{T \mid X_T(\sigma)}(x) \subset \sigma$ pentru $x \in X_T(\sigma)$ şi în consecinţă am obţinut

$$\sigma(T \mid X_T(\sigma)) \subset \sigma .$$

Rezultă $\sigma(T \mid Z) \subset \sigma$, deci $\sigma_T(z) \subset \sigma$, $(\forall)\, z \in Z$ şi incluziunea $Z \subset X_T(\sigma)$ ceea ce dovedeşte că $X_T(\sigma)$ este spaţiu maximal spectral pentru T. $\sim$

4.7. DEFINIŢIE. *Mulţimea* σ *se numeşte mulţime spectrală pentru operatorul* $T \in \mathcal{L}(X)$ *dacă* $\sigma \subset \sigma(T)$ *şi dacă este simultan închisă şi deschisă în* $\sigma(T)$.

Din definiţia mulţimilor spectrale rezultă că acestea sînt închise. Fie σ o mulţime spectrală a lui T şi $f \in \mathcal{F}(T)$, astfel încît $f(\lambda) = 1$ într-o vecinătate a lui σ şi 0 într-o vecinătate a lui $\sigma(T) \setminus \sigma$. Dacă Γ este un contur admis, atunci

$$E(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)\, R(\lambda;\, T)\, \mathrm{d}\lambda$$

este o proiecţie ce comută cu toţi operatorii ce comută cu T şi $\sigma(T \mid E(\sigma)X) = \sigma$ (VII.3, [14]).

4.8. PROPOZIŢIE. *Fie* $T \in \mathcal{L}(X)$ *şi* σ *o mulţime spectrală a lui* T. *Atunci* $E(\sigma)X$ *este un spaţiu maximal spectral al lui* T.

Demonstrație. Cum $E(\sigma)X$ este un subspațiu ultrainvariant al lui T, fie Z un subspațiu invariant al lui astfel încît $\sigma(T\,|\,Z)\subset\sigma(T\,|\,E(\sigma)X)=\sigma$. În acest caz pentru orice $x\in Z$ avem

$$E(\sigma)\,x=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)\,R(\lambda;\ T)\,x\,\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)\,R(\lambda;\,T\,|\,Z)\,x\,\mathrm{d}\,\lambda=x$$

deci $Z\subset E(\sigma)\,X$. ~

4.9. PROPOZIȚIE. *Fie* $T\in\mathcal{P}(X)$ *și* $\sigma_1,\ \sigma_2\in\mathcal{B}$, $\bar{\sigma}_1\cap\bar{\sigma}_2=\emptyset$. *Dacă* $X_T(\sigma_1\cup\sigma_2)$ *este închis, atunci* $X_T(\sigma_j)$ *este închis* $j=1,2$ *și*

$$X_T(\sigma_1)\cap X_T(\sigma_2)=\{0\},\ X_T(\sigma_1)+X_T(\sigma_2)=X_T(\sigma_1\cup\sigma_2)\,.$$

Demonstrație. Din propoziția 4.6 rezultă că $X_T(\sigma_1\cup\sigma_2)$ este un spațiu maximal spectral. Putem presupune că $\sigma(T\,|\,X_T(\sigma_1\cup\sigma_2))\subset F_1\cup F_2$ cu F_j închisă, $F_j\subset\sigma_j$, $j=1,2$.

Cum $F_1\cap F_2=\emptyset$, F_j este mulțime spectrală a lui $T\,|\,X_T(\sigma_1\cup\sigma_2)$. Dacă $E(F_j)$ este proiecția spectrală corespunzătoare lui F_j atunci $E(F_j)\,X_T(\sigma_1\cup\sigma_2)$ este un spațiu maximal spectral a lui $T\,|\,X_T(\sigma_1\cup\sigma_2)$ (propoziția 4.8) deci al lui T (propoziția 4.2).

Egalitatea $E(F_j)\,X_T(\sigma_1\cup\sigma_2)=X_T(\sigma_j)$ o lăsăm în seama cititorului (a se vedea 2.3 [4]).

Acum propoziția rezultă din proprietățile proiecțiilor spectrale.

II. OPERATORI DECOMPOZABILI

§ 1. STRUCTURA SPAȚIILOR MAXIMAL SPECTRALE ALE OPERATORILOR DECOMPOZABILI

Să considerăm iarăși un spațiu Banach X și $T\in\mathcal{L}(X)$.

1.1. DEFINIȚIE. *Spunem că operatorul* T *este decompozabil dacă pentru orice acoperire deschisă finită* $\{G_j\}_1^n$ *a lui* $\sigma(T)$ *există un sistem de spații maximal spectrale* $\{Y_j\}_1^n$ *ale lui* T, *astfel încît* $\sigma(T\,|\,Y_j)\subset G_j$, $j=1,\ldots,n$, *și* $\sum\limits_{j=1}^{n}Y_j=X$ ([16]).

Vom nota mulțimea operatorilor decompozabili cu $\mathcal{D}(X)$.

1.2. PROPOZIȚIE. *Fie* $T\in\mathcal{D}(X)$. *Atunci* $T\in\mathcal{P}(X)$ *și pentru orice mulțime deschisă* G *astfel încît* $G\cap\sigma(T)\neq 0$, *există un spațiu maximal spectral* $Y\neq\{0\}$ *al lui* T *cu* $\sigma(T\,|\,Y)\subset G$.

Demonstrație. Vom demonstra mai întîi partea a doua a propoziției. Pentru aceasta fie G_1 o mulțime deschisă astfel încît $G_1\not\supset\sigma(T)$, $G\cup G_1\supset\supset\sigma(T)$ și Y, Y_1 spațiile maximal spectrale ale lui T corespunzătoare acestei acoperiri.

Cum $Y+Y_1=X$ și $\sigma(T\,|\,Y_1)\subset G_1$ dacă $Y=\{0\}$ ajungem la contradicție. Vom arăta acum că avem $\sigma_p^0(T)=\sigma_r^0(T)=\emptyset$ ceea ce va implica $T\in\mathcal{P}(X)$. Într-adevăr, dacă una din cele două mulțimi este nevidă, fie G o componentă convexă a sa și Y un spațiu maximal spectral al lui T astfel încît $\sigma(T\,|\,Y)\subset G$.

Dar din I.4.5 rezultă $G \subset \sigma(T \mid Y)$ ceea ce este absurd. ~

Observaţie. $T \in \mathcal{D}(X) \Rightarrow \sigma(T) = \sigma_{\iota}(T)$.

1.3. *Teoremă. Fie* $T \in \mathcal{D}(X)$ *şi* F *o mulţime închisă.*

Atunci $X_T(F)$ *este un spaţiu maximal spectral al lui* T.

Demonstraţie. Utilizînd propoziţia I.4.6 şi propoziţia II.1.2 va fi suficient să arătăm că $X_T(F)$ este închis.

Pentru aceasta să considerăm familia Φ a mulţimilor deschise ce includ pe F.

Dacă $G \in \Phi$, să alegem o mulţime deschisă G_1 astfel încît $F \cap G_1 = \emptyset$. $G \cup G_1 \supset \sigma(T)$. Fie Y_G, Y_{G_1} spaţiile maximal spectrale ale lui T corespunzătoare acoperirii $\{G, G_1\}$. În acest caz $Y = \bigcap_{G \in \Phi} Y_G$ este un subspaţiu al lui X. Cum pentru orice $x \in Y$ avem $\sigma_T(x) \subset \bigcap_{G \in \Phi} G = F$, atunci $Y \subset X_T(F)$.

Invers, dacă $x \in X_T(F)$, fie $G \in \Phi$ şi G_1 ca mai sus. Dacă $x = y + y_1$, $y \in Y_G$, $y_1 \in Y_{G_1}$, alegînd un contur Γ admis care să înconjoare F şi să lase în afară $\sigma(T \mid Y_{G_1})$, găsim $x = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma y_T(\lambda)\, d\lambda$ deci $x \in Y_G$ şi $X_T(F) \subset Y$. ~

Observaţie. Dacă $T \in \mathcal{D}(X)$ şi Y este un spaţiu maximal spectral al lui T, avem

$$Y = X_T(\sigma(T \mid Y)).$$

1.4. PROPOZIŢIE. *Fie* $T \in \mathcal{P}(X)$. *Necesar şi suficient ca* $T \in \mathcal{D}(X)$ *este ca pentru orice familie finită* $\{F_j\}_1^n$ *de mulţimi închise astfel încît* $\bigcup_{j=1}^n \operatorname{int} F_j \supset \sigma(T)$ *să avem*

(i) $X_T(F_j)$ *închis*

(ii) $\sum_{j=1}^n X_T(F_j) = X$.

Demonstraţie. Necesitatea este evidentă. Pentru a demonstra suficienţa, dacă $\{G_j\}_1^n$ este o acoperire deschisă a lui $\sigma(T)$, putem lua $F_j \subset G_j$, F_j închisă, $\bigcup_{j=1}^n \operatorname{int} F_j \supset \sigma(T)$.

Punînd $Y_j = X_T(F_j)$, subspaţiile Y îndeplinesc condiţiile definiţiei II.1.1 (vezi 1.4.6), deci T este decompozabil. ~

1.5. PROPOZIŢIE. *Fie* X_j *un subspaţiu al lui* X, $j = 1, 2$. *Dacă* $X_1 \cap X_2 = \{0\}$, $X_1 \oplus X_2 = X$ *şi* $T_j \in \mathcal{D}(X_j)$, *atunci* $T_1 \oplus T_2 \in \mathcal{D}(X)$.

Demonstraţie. Utilizînd propoziţia precedentă, să considerăm familia de mulţimi închise $\{F_k\}_1^n$ astfel încît $\bigcup_{k=1}^n \operatorname{int} F_k \supset \sigma(T_1 \oplus T_2)$.

Din I.2.4 rezultă $T_1 \oplus T_2 \in \mathcal{P}(X)$ şi din I.2.3 obţinem că $X_T(F_k)$ este închis.

Deoarece T_j este decompozabil şi

$$\sum_{k=1}^n X_T(F_j) = \sum_{k=1}^n (X_{1T_1}(F_k) \oplus X_{2T_2}(F_k)) = X_1 \oplus X_2$$

rezultă $T_1 \oplus T_2 \in \mathcal{D}(X)$. ~

1.6. Propoziție. *Fie* $T \in \mathcal{D}(X)$ *și* $P \in \mathcal{L}(X)$ *astfel încît* $P^2 = P$, $PT = TP$. *Atunci* $T|PX$ *este decompozabil* (2.1, [4]).

Demonstrație. Să notăm $PX = Y$ și $T \mid Y = V$.

Din I.2.4 rezultă $V \in \mathcal{P}(Y)$. Fie acum $\sigma \in \mathcal{B}$.

Vom arăta că avem $Y_V(\sigma) = PX_T(\sigma)$.

Într-adevăr, deoarece $X_T(\sigma)$ este o varietate liniară ultrainvariantă pentru T (I.2.3), avem egalitatea $Y \cap X_T(\sigma) = PX_T(\sigma)$. Fie acum $y \in Y_V(\sigma)$. Dacă $(\lambda - V)\, y_V(\lambda) \equiv y$, $\lambda \in \sigma'$, deoarece $Vy_V(\lambda) = Ty_V(\lambda)$, rezultă $\sigma_T(y) \subset \sigma$ și $y \in X_T(\sigma)$ deci incluziunea $Y_V(\sigma) \subset Y \cap X_T(\sigma)$.

Invers, dacă $y \in Y \cap X_T(\sigma)$, avem $(\lambda - T)\, y_T(\lambda) \equiv y$, $\lambda \in \sigma'$, deci $(\lambda - T)\, Py_T(\lambda) \equiv y$ și pentru că $T \in \mathcal{P}(X)$, găsim $y_T(\lambda) \in Y$. Rezultă $(\lambda - V)\, y_T(\lambda) \equiv y$, deci $y \in Y_V(\sigma)$.

Fie $\{F_j\}_1^n$ o familie de mulțimi închise astfel încît $\bigcup\limits_{j=1}^{n} \operatorname{int} F_j \supset \sigma(V)$. Deoarece $Y_V(F_j) = Y_V(F_j \cap \sigma(V))$ putem presupune fără a micșora generalitatea că avem $\bigcup\limits_{j=1}^{n} \operatorname{int} F_j \supset \sigma(T)$. Din I.1.4 rezultă acum $T \in \mathcal{D}(X)$ căci $Y_V(F_j) = PX_1(F_j)$ este închis și

$$\sum_{j=1}^{n} Y_V(F_j) = \sum_{j=1}^{n} PX_T(F_j) = PX = Y. \sim$$

§ 2. OPERATORI DECOMPOZABILI ȘI FUNCȚII ANALITICE

În acest paragraf vom arăta că operatorii decompozabili formează o clasă invariantă în raport cu calculul funcțional cu funcții analitice neconstante.

2.1. Teoremă. *Fie* $T \in \mathcal{D}(X)$ *și* $f \in \mathcal{F}(T)$. *Atunci* $f(T) \in \mathcal{D}(X)$.

Demonstrație. Fie $\{G_j\}_1^n$ componentele conexe ale domeniului de definiție al lui f.

Acestei descompuneri îi corespunde o reprezentare a lui X ca sumă directă $X = \bigoplus\limits_{j=1}^{n} X_j$ astfel încît $TX_j \subset X_j$, $\sigma(T \mid X_j) \subset G_j$. Dacă $T_j = T \mid X_j$, $f_j = f \mid G_j$, atunci $f(T) = \bigoplus\limits_{j=1}^{n} f_j(T_j)$. Pentru j fixat, T este decompozabilă prin II.1.6. Dacă f este constantă, atunci $f_j(T_j) = \lambda_j P_j \mid X_j$, unde P_j notează proiecția lui X pe X_j și evident $f_j(T_j)$ este decompozabil (vezi paragraful § 6 al acestui capitol).

Dacă f_j este neconstantă prin I.2.6, avem $f_j(T_j) \in \mathcal{P}(X_j)$. Fie $\{F_k\}_1^m$ o familie de mulțimi închise astfel încît $\bigcup\limits_{k=1}^{m} \operatorname{int} F_k \supset (f_j(T_j))$.

Avem $X_{jf_j(T_j)}(F_k) = X_{jT_j}(f_j^{-1}(F_k))$ (I.2.8), deci aplicînd II.1.4 găsim că $f_j(T_j)$ este decompozabil și în consecință $f(T)$ este decompozabil (II.1.5). $\sim$

2.2. LEMĂ. *Fie* $T \in \mathcal{P}(X)$. *Dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *şi* $\lambda_0 \in \sigma(T)$ *există un sistem finit de mulţimi închise* $\{A_j\}_1^n$ *cu următoarele proprietăţi :*

(i) diam $A_j < \varepsilon$, $X_T(A_j)$ $j = 1, \ldots, n$, *este închis*

(ii) $\bigcup_{j=1}^{n} \operatorname{int} A_j \supset \sigma(T)$, $\lambda_0 \notin A_j$, $j = 2, \ldots, n$

(iii) $\overline{X_T\left(A_1 \cap \bigcup_{j=2}^{n} A_j\right)} \subset X_T\left(\bigcup_{j=2}^{n} A_j\right)$, $\sum_{j=1}^{n} X_T(A_j) = X$ (2.4, [4]),

atunci T este operator decompozabil.

Demonstraţie. Să arătăm mai întîi că $X_T(F)$ este închis oricare ar fi mulţimea închisă $F \subset \Lambda$. Într-adevăr, în caz contrar ar exista un şir $\{x_m\}_1^\infty \subset X_T(F)$ şi $\lambda_0 \in \sigma(T) \setminus F$ astfel încît $\lim_{m \to \infty} x_m = x$, $\lambda_0 \in \sigma_T(x)$. Dacă $\varepsilon = \inf_{\lambda \in F} |\lambda - \lambda_0|$, fie $\{A_j\}_1^n$ sistemul de mulţimi închise din enunţ corespunzător acestei alegeri a lui λ_0 şi ε.

Deoarece $\sum_{j=1}^{n} X_T(A_j) = X$, prin teorema grafului închis (2.12.1, [20]) există o constantă $M > 0$ astfel încît pentru orice $y \in X$ putem alege $y(A_j) \in X_T(A_j)$ cu proprietăţile :

$$\sum_{j=1}^{n} y(A_j) = y, \quad \sum_{j=1}^{n} |y(A_j)| \leqslant M\, |y|.$$

Fără a micşora generalitatea, putem presupune că $|x_{m+1} - x_m| \leqslant \frac{a}{2^m}$, $m = 0, 1, \ldots$, cu $x_0 = 0$, $a > 0$.

Luînd $z_m(A_j) \in X_T(A_j)$ astfel încît

$$\sum_{j=1}^{n} z_m(A_j) = x_{m+1} - x_m, \quad \sum_{j=1}^{n} |z_m(A_j)| \leqslant M\, |x_{m+1} - x_m|$$

şi $y_{m+1}(A_j) = \sum_{k=0}^{m} z_k(A_j)$, $m = 0, 1, \ldots$, avem $\sum_{j=1}^{n} y_{m+1}(A_j) = x_{m+1}$, $m = 0, 1, \ldots$, avem $\sum_{j=1}^{n} y_{m+1}(A_j) = x_{m+1}$.

Astfel $|y_1(A_j)| + \sum_{m=1}^{\infty} |y_{m+1}(A_j) - y_m(A_j)| = \sum_{m=0}^{\infty} |z_m(A_j)| \leqslant M \sum_{m=0}^{\infty} |x_{m+1} - x_m| \leqslant 2aM$ ceea ce arată că $\lim_{m \to \infty} y_m(A_j) = y(A_j) \in X_T(A_j)$, $\sum_{j=1}^{n} y(A_j) = x$.

Deoarece $y_m(A_1) = x_m - \sum_{j=2}^{n} y_m(A_j)$, avem $\sigma_T(y_m(A_1)) \subset \left(F \cup \bigcup_{j=2}^{n} A_j\right) \cap A_1$.

Cum $\lambda_0 \in \operatorname{int} A_1$ şi diam $A_1 < \varepsilon$, rezultă $\sigma_T(y_m(A_1)) \subset A_1 \cap \bigcup_{j=2}^{n} A_j$ şi din (iii), $y(A_1) \in X_T\left(\bigcup_{j=2}^{n} A_j\right)$. Am obţinut astfel $\lambda_0 \in \sigma_T(x) \subset \bigcup_{j=1}^{n} \sigma_T(y(A)) \subset \bigcup_{j=2}^{n} A$, în contradicţie cu (ii), deci $X_T(F)$ este închis.

Acum dacă $\{F_j\}_1^m$ este un sistem de mulţimi închise astfel încît $\bigcup_{j=1}^{m} \operatorname{int} F_j \supset \sigma(T)$, putem alege ε suficient de mic şi λ_0 fixat astfel încît $A_k \cap \sigma(T)$ să fie inclusă într-o mulţime F_j. Astfel $\sum_{j=1}^{m} X_T(F_j) \supset \sum_{j=1}^{m} X_T(A_j) = X$ şi din II.1.4 rezultă că T este operator decompozabil. ~

2.3. LEMĂ. *Fie f o funcţie olomorfă, neconstantă, definită în domeniul simplu conex G, $K \subset G$ o mulţime compactă, $z_0 \in f(K)$ şi $f^{-1}(\{z_0\}) \cap K = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.*

Dacă $C(z_0, r) = \{z : |z - z_0| \leqslant r\}$ şi $A_j(r)$ este comoponenta conexă a lui $f^{-1}(C(z_0, r))$ ce conţine pe λ_j, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $r_\varepsilon > 0$ astfel încît pentru orice $r \leqslant r_\varepsilon$:

(i) *$A_j(r)$ este închisă, $\lambda_j \in \operatorname{int} A_j(r)$, $j = 1, \ldots, n$;*

(ii) diam $A_j(r) < \varepsilon$, $A_j(r) \cap A_k(r) = \emptyset$ pentru $j \neq k$;

(iii) $f^{-1}(C(z_0, r)) \cap K = \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j(r)\right) \cap K.$

Demonstraţie. (i) şi (ii) se obţin ca o consecinţă a faptului că avem $\lim_{r \to 0} \operatorname{diam} A_j(r) = 0$. Într-adevăr, în caz contrar există $\eta > 0$ şi $0 < r_{m+1} < r_m$ astfel încît $\lim_{m \to \infty} r_m = 0$, diam $A_j(r_m) > 2\eta$ şi $C(\lambda_j, \eta) \subset G$. Folosind conexiunea lui $A_j(r_m)$ putem găsi pentru orice $0 \leqslant \rho \leqslant \eta$ un $\lambda_{\rho,m} \in A_j(r_m)$ astfel încît $|\lambda_{\rho,m} - \lambda_j| = \rho$. Fie λ_ρ un punct limită al şirului $\{\lambda_{\rho,m}\}_1^\infty$. Avem $|\lambda_\rho - \lambda_j| = \rho$, $f(\lambda_\rho) = z_0$ căci $f(\lambda_{\rho,m}) \in C(z_0, r_m)$ şi f neconstantă, ceea ce este absurd.

(iii) Să notăm $u(r) = f^{-1}(C(z_0, r)) \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j(r)$. Să presupunem că putem alege $0 < r_{m+1} < r_m$ şi $z_m \in u(r_m) \cap K$ astfel încît $\lim_{m \to \infty} r_m = 0$ şi $\lim_{m \to \infty} z_m = z_0^1$. Pentru că $f(u(r_m)) \subset C(z_0, r_m)$, avem $f(z_0^1) = z_0$ deci $z_0^1 = \lambda_j$ pentru un anumit j.

Aplicînd (i), (ii) putem presupune că $A_j(r_m) \subset G_j$, unde G este un domeniu simplu conex astfel încît $\overline{G}_j \subset G$, $f'(\lambda) \neq 0$ pentru $\lambda \in G_j \setminus \{\lambda_j\}$. Fie k ordinul de multiplicate al lui λ_j ca rădăcină a ecuaţiei $f(\lambda) - z_0 = 0$. Atunci $f(\lambda) - z_0 = ((\lambda - \lambda_j)\, h(\lambda))^{k+1}$, unde h poate fi presupusă olomorfă în G_j şi fără zerouri. Funcţia determinată de $g(\lambda) = (\lambda - \lambda_j)\, h(\lambda)$ aplică biunivoc $A_j(r_m)$ pe $C(0, \sqrt[k+1]{r_m})$ şi evident pentru m mare avem $g(z_m) \in C(0, \sqrt[k+1]{r_m})$.

Putem deci alege $v_m \in A_j(r_m)$ astfel încît $g(v_m) = g(z_m)$. Rezultă $g'(\lambda_j) = h(\lambda_j) = \lim_{m \to \infty} \dfrac{g(v_m) - g(z_m)}{v_m - z_m} = 0$ ceea ce este contradictoriu căci h nu are zerouri în G_j. ~

2.4. TEOREMĂ. *Fie $T \in \mathcal{L}(X)$ şi $f \in \mathcal{F}(T)$ neconstantă în fiecare componentă conexă a domeniului de definiţie. Dacă $f(T) \in \mathcal{D}(X)$, atunci $T \in \mathcal{D}(X)$ (2.6, [4]).*

Demonstraţie. Folosind II.1.5 şi II.1.6 putem presupune, fără a micşora generalitatea, că domeniul de definiţie al lui f este simplu conex.

Cum $f(T)$ este decompozabil, avem $f(T) \in \mathcal{P}(X)$ (II.1.2) deci $T \in \mathcal{P}(X)$ (I.2.6).

Fie acum $\varepsilon > 0$, $\lambda_0 \in \sigma(T)$. Prin II.2.3 putem alege pentru orice $z \in f(\sigma(T))$ numărul $0 < r_\varepsilon(z)$ cu proprietățile (i), (ii), (iii). Fără a micșora generalitatea putem presupune că $f(\lambda_0) \notin C(z, r_\varepsilon(z))$ dacă $f(\lambda_0) \neq z$. Deoarece $f(\sigma(T))$ este o mulțime compactă, există o mulțime finită $z_1, \ldots, z_k, z_1 = f(\lambda_0)$ astfel încît $\bigcup\limits_{\alpha=1}^{k} \operatorname{int} C(z_j, r_\varepsilon(z_j)) \supset f(\sigma(T))$.

Dacă $\{A_l\}_{n_{j-1}+1}^{n_j}$ este mulțimea componentelor conexe ale lui $f^{-1}(C(z_j, r_\varepsilon(z_j))$ definite în II.2.3 și $\lambda_0 \in A_1$, atunci diam $A_l < \varepsilon$, $l=1, \ldots, n_k$. Folosind I.2.8 găsim $X_T\left(\bigcup\limits_{l=n_{j-1}+1}^{n_j} A_l\right) = X_T(f^{-1} C(z_j, r_\varepsilon(z_j)) \cap \sigma(T)) = X_{f(T)}(C(z_j, r_\varepsilon(z_j))$ deci $X_T\left(\bigcup\limits_{l=n_{j-1}+1}^{n_j} A_l\right)$ este închis și în consecință $X_T(A_l)$ este închis (I.4.9). Evident, avem $\bigcup\limits_{l=1}^{n_k} \operatorname{int} A_l \supset \sigma(T)$, $\lambda_0 \notin A_l$, $l \neq 1$. Deoarece avem $X_T\left(A_1 \cap \bigcup\limits_{l=2}^{n_k} A_l\right) \subset X_T\left(\bigcup\limits_{l=n_1+1}^{n_k} A_l\right) = X_{f(T)}\left(\bigcup\limits_{j=2}^{k} C(z_j, r_\varepsilon(z_j))\right)$ și ultimul subspațiu este închis și $\sum\limits_{l=1}^{n_k} X_T(A_l) = \sum\limits_{j=1}^{k} X_{f(T)}(C(z_j, r_\varepsilon(z_j)) = X$, aplicînd lema II.2.2, teorema este demonstrată. ~

§ 3. OPERATORI TARE DECOMPOZABILI RESTRICȚII ȘI CÎTURI DE OPERATORI DECOMPOZABILI ([1], [2])

Fie $T \in \mathcal{L}(X)$ și Y un subspațiu invariant al lui T. În acest paragraf vom utiliza notațiile T_Y pentru restricția lui T la Y și T^Y pentru operatorul indus în X/Y.

3.1. LEMĂ. *Fie $T \in \mathcal{L}(X)$ și Y un subspațiu ultrainvariant al lui T. Avem*

$$\sigma(T) = \sigma(T_Y) \cup \sigma(T^Y).$$

Demonstrație. Incluziunea $\sigma(T_Y) \cup \sigma(T^Y) \subset \sigma(T)$ este evidentă. Fie acum $\lambda \in \rho(T_Y) \cap \rho(T^Y)$.

Pentru orice $y \in X$ vom pune

$$Ay = x + R(\lambda; T)(y - (\lambda - T)x)$$

cu $x \in X$ astfel încît $y - (\lambda - T)x \in Y$. Se vede ușor că Ay nu depinde de alegerea lui x și aplicația $y \to Ay$ este în $\mathcal{L}(X)$. De asemenea se verifică egalitatea $A(\lambda - T) = (\lambda - T)A = I$, deci $\lambda \in \rho(T)$.

Rezultă egalitatea cerută. ~

3.2. PROPOZIȚIE. *Fie $T \in \mathcal{D}(X)$ și Y un spațiu maximal spectral al său. Avem*

$$\sigma(T^Y) = \overline{\sigma(T) \setminus \sigma T(T_Y)}.$$

Demonstrație. Folosind lema precedentă va fi suficient să demonstrăm numai incluziunea $\sigma(T^Y) \subset \overline{\sigma(T) \setminus \sigma(T_Y)}$. Pentru aceasta fie $\lambda \in \sigma(T^Y)$.

Dacă $\lambda \notin \overline{\sigma(T)\setminus\sigma(T_Y)}$, putem alege mulțimile deschise G_1, G_2 astfel încît $\lambda \notin G_1 \supset \overline{\sigma(T)\setminus\sigma(T^Y)}$, $G_2 \cap \overline{\sigma(T)\setminus\sigma(T_Y)} = \emptyset$, $G_1 \cup G_2 \supset \sigma(T)$. Fie Y_1, Y_2 spațiile maximal spectrale ale lui T corespunzătoare acestei acoperiri. Avem $\sigma(T_{Y_2}) \subset G_2 \cap \sigma(T) \subset \sigma(T_Y)$ deci $Y_2 \subset Y_1$. Fie $\tilde{x} \in X/Y$ astfel încît $(\lambda - T^Y)\,\tilde{x} = 0$ și $x \in \tilde{x}$. Dacă $x = x_1 + x_2$, $x_j \in Y_j$, și $(\lambda - T)\, x = y \in \tilde{y}$, obținem $(\lambda - T_Y)\, x_1 = (\lambda - T_{Y_1})\, x_1 = y - (\lambda - T) x_2 \in Y$, deci $(\lambda - T)\, x_1 \in Y \cap Y_1$. Din egalitatea evidentă $Y \cap Y_1 = X_T(\sigma(T_Y) \cap \cap \sigma(T_{Y_1}))$ rezultă că $Y \cap Y_1$ este un spațiu maximal spectral al lui T, deci al lui T_{Y_1}(I.4.2 (ii)). Cum $\lambda \notin \sigma(T_{Y_1})$, obținem că $x_1 = R(\lambda;\, T_{Y_1})\,(\lambda - T_{Y_1})\, x_1$ este element al subspațiului $Y \cap Y_1$ ultrainvariant pentru T_{Y_1}, deci $\tilde{x} = \tilde{x}_1 = 0$. Concluzia este că aplicația $\tilde{x} \to (\lambda - T^Y)\,\tilde{x}$ este injectivă. Fiind dat acum $\tilde{y} \ni y = y_1 + y_2$, $y_j \in Y_j$, avem $\tilde{y} = \tilde{y}_1$. Cum $\lambda \notin \sigma(T_{Y_1})$, fie $x \in Y_1$ astfel încît $(\lambda - T)\, x = y_1$. Rezultă $(\lambda - T)\,\tilde{x} = \tilde{y}$, deci $\tilde{x} \to (\lambda - T^Y)\,\tilde{x}_j$ este și surjectivă în contradicție cu $\lambda \in \sigma(T^Y)$ și propoziția rezultă. ~

3.3. DEFINIȚIE. *Operatorul* $T \in \mathcal{L}(X)$ *se numește tare decompozabil dacă pentru orice acoperire finită* $\{G_j\}_1^n$ *cu mulțimi deschise ale lui* $\sigma(T)$ *există un sistem* $\{Y_j\}_1^n$, *de spații maximal spectrale de ale lui* T *astfel încît* $\sigma(T_{Y_j}) \subset G_j$ *și pentru orice spațiu maximal spectral* Y *al lui* T *să avem*

$$Y_1 \cap Y + \ldots + Y_n \cap Y = Y.$$

Observație. Operatorii tare decompozabili sînt decompozabili.

3.4. PROPOZIȚIE. *Fie* T *un operator tare decompozabil și* Y *un spațiu maximal spectral al său. Atunci* T_Y *este tare decompozabil.*

Demonstrație. Fie $\{G_j\}_1^n$ o acoperire deschisă a lui $\sigma(T_Y)$. Dacă $\{\mathcal{V}_j\}_1^n$ este o familie de mulțimi deschise astfel încît $\bigcup\limits_{j=1}^{n} V_j \supset \sigma(T)$, $G_j \cap \sigma(T_Y) = \mathcal{V}_j \cap \sigma(T_Y)$ și $\{Y_j\}_1^n$ familia de spații maximal spectrale ale lui T corespunzătoare acestei acoperiri punînd $Z_j = Y_j \cap Y$, Z_j este spațiu maximal spectral al lui T_Y și $\sigma(T_{Z_j}) \subset G_j$. Fie Z un spațiu maximal spectral al lui T_Y. Cum Z este și spațiu maximal spectral al lui T (I.4.2 (iii)) avem:

$$Z_1 \cap Z + \ldots + Z_n \cap Z = Y_1 \cap Y \cap Z + \ldots + Y_n \cap Y \cap Z = Y \cap Z = Z$$

deci T_Y este operator decompozabil tare. ~

3.5. PROPOZIȚIE. *Fie* T *un operator decompozabil tare,* Y *un spațiu maximal spectral al lui* T *și* $\tilde{Z}$ *un spațiu maximal spectral al lui* T^Y. *Atunci* $Z = \{x : x \in X,\ \tilde{x} \in \tilde{Z}\}$ *este un spațiu maximal spectral al lui* T.

Demonstrație. Evident, Z este un subspațiu invariant al lui T. Fie $\sigma = \sigma(T_Z)$. Folosind I.4.6, va fi suficient să arătăm egalitatea $Z = X_T(\sigma)$. Din egalitatea $(\lambda - T)\, R(\lambda;\, T_Z)\, x = x$, $(\forall)\, x \in Z$ rezultă $\sigma_T(x) \subset \sigma$, deci $Z \subset X_T(\sigma)$.

Folosind II.3.2 avem

$$\sigma((T_{X_T(\sigma)})_Y) \subset \overline{\sigma \setminus \sigma(T_Y)}.$$

De asemenea, Y este un spațiu maximal spectral al lui T_Z, căci dacă Z_1 este un subspațiu invariant al lui T_Z și $\sigma(T_{Z_1}) \subset \sigma(T_Z)$, atunci $Z_1 \subset Y$, căci $TZ_1 \subset Z_1$.

Deoarece $\sigma(T_Z) = \sigma(T_Y) \cup \sigma((T_Z)^Y)$ (II.3.2), obţinem

$$\sigma(T_{X_T(\sigma)})^Y) \subset \sigma((T_Z)^Y)$$

sau echivalent

$$\sigma((T^Y)_{\widetilde{X_T(\sigma)}}) \subset \sigma((T^Y)_{\widetilde{Z}})$$

şi cum $\widetilde{Z}$ este spaţiu maximal spectral al lui T, avem $\widetilde{X_T(\sigma)} \subset \widetilde{Z}$ deci $\mathcal{X}_T(\sigma) \subset Z$. ~

3.6. TEOREMĂ. *Operatorul T este tare decompozabil dacă și numai dacă T_Y este decompozabil pentru orice spațiu maximal spectral Y al lui T.*

Demonstraţie. Necesitatea condiţiei rezultă din II.3.4. Invers, dacă T_Y este decompozabil oricare ar fi spaţiul maximal spectral Y al lui T, luînd $Y = X$ găsim că T este operator decompozabil.

Fie $\{G_j\}_1^n$, $\{\mathcal{V}_j\}_1^n$ două acoperiri deschise ale lui $\sigma(T)$ astfel încît $\overline{\mathcal{V}}_j \subset G_j$. $Y_j = X_T(\overline{\mathcal{V}}_j)$ este spaţiu maximal spectral al lui T şi $\sigma(T_{Y_j}) \subset G_j$.

Dacă Y este un spaţiu maximal spectral al lui T, cum T_j este decompozabil, folosind egalitatea evidentă $Y_j \cap Y = Y_{T_Y}(\overline{\mathcal{V}}_j)$ avem

$$Y_1 \cap Y + \ldots + Y_n \cap Y = Y. \sim$$

3.7. LEMĂ. *Fie $T \in \mathcal{L}(X)$ și $Y \subset Z$ două spații maximal spectrale ale lui T. Atunci Z/Y este spațiu mxximal spectral al lui T.*

Demonstraţie. Fie $\widetilde{Z}_1$ un subspaţiu invariant al lui T^Y astfel încît

$$\sigma((T^Y)_{\widetilde{Z}_1}) \subset \sigma((T^Y)_{Z/Y}).$$

Punînd $Z_1 = \{x : x \in X,\ \widetilde{x} \in \widetilde{Z}_1\}$, Y este un spaţiu maximal spectral al lui T_{Z_1} deci aplicînd II.3.1 avem

$$\sigma(T_{Z_1}) = \sigma(T_Y) \cup \sigma((T_{Z_1})^Y) = \sigma(T_Y) \cup \sigma((T^Y)_{\widetilde{Z}_1}) \subset$$

$$\subset \sigma(T_Y) \cup \sigma((T_Z)^Y) = \sigma(T_Z)$$

şi cum Z este spaţiu maximal spectral al lui T, avem $Z_1 \subset Z$ deci $\widetilde{Z}_1 \subset Z/Y$. ~

3.8. TEOREMĂ. *Fie T un operator tare decompozabil și Y un spațiu maximal spectral al lui T. Atunci T^Y este operator tare decompozabil.*

Demonstraţie. Fie $\{G_j\}_1^n$ o acoperire deschisă a lui $\sigma(T^Y)$ şi G_0 o mulţime deschisă astfel încît $G_0 \cap \sigma(T^Y) = \emptyset$, $\bigcup_{j=0}^{n} G_j \supset \sigma(T)$. Sistemul $\{G_j\}_0^n$ este o acoperire deschisă a lui $\sigma(T)$ (II.3.2) deci fie $\{Y_j\}_0^n$ sistemul de spaţii maximal spectrale corespunzător acestei acoperiri şi $\sigma_j = \sigma(T_{Y_j}) \cup \sigma(T_Y)$, $Z_j = X_T(\sigma_j)$. Deoarece $Z_j \supset Y$, punînd $\widetilde{Z}_j = Z_j/Y$, prin lema precedentă $\widetilde{Z}_j$ este un spaţiu maximal spectral al lui T^Y. Pe de altă parte, avem

$$\sigma((T^Y)_{\widetilde{Z}_j}) = \sigma((T_{Z_j})^Y) = \overline{\sigma(T_{Z_j}) \setminus \sigma(T_Y)} \subset G_j$$

şi $\sigma(T_{Y_0}) \subset \sigma(T) \cap G_0 = (\sigma(T_Y) \cup \sigma(T^Y)) \cap G_0 \subset \sigma(T_Y)$ deci $Y_0 \subset Y$.

Fie acum $\tilde{Z}$ un spaţiu maximal spectral al lui T^Y şi $Z = \{x : x \in X, x \in \tilde{Z}\}$. Conform propoziţiei II.3.5, Z este spaţiu maximal spectral al lui T, deci avem

$$Y_0 \cap Z + Y_1 \cap Z + \ldots + Y_n \cap Z = Z$$

ceea ce implică

$$\tilde{Z}_1 \cap \tilde{Z} + \ldots + \tilde{Z}_n \cap \tilde{Z} = \tilde{Z}$$

căci $Z_j \supset Y_j, Z_j \supset Y$. $\sim$

§ 4. ECHIVALENŢA CVASINILPOTENTĂ A OPERATORILOR DECOMPOZABILI. COMUTATORI ŞI OPERATORI DECOMPOZABILI

Fie X, Y două spaţii Banach şi $\mathcal{L}(X, Y)$ mulţimea aplicaţiilor liniare şi continue ale lui X în Y.

Dacă $S \in \mathcal{L}(X)$, $T \in \mathcal{L}(Y)$ putem defini operatorii $L(T)$, $R(S)$, $C(T, S)$ prin ecuaţiile

$$L(T)A = TA, \quad A \in \mathcal{L}(X, Y)$$

$$R(S)A = AS, \quad A \in \mathcal{L}(X, Y)$$

$$C(T, S) = L(T) - R(S).$$

Operatorii mai sus definiţi sînt elemente din $\mathcal{L}(\mathcal{L}(X, Y))$. Operatorul $C(T, S)$ va fi numit comutatorul lui T şi S. Să observăm egalitatea imediată

$$L(T)R(S) = R(S)L(T)$$

4.1. PROPOZIŢIE. *Fie* $T \in \mathcal{D}(Y)$, $S \in \mathcal{D}(X)$ *şi* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. *Atunci avem :*

$$AX_S(F) \subset Y_T(F),\ (\forall)\ F \text{ închisă} \rightleftarrows \lim_{n \to \infty} |C^n(T, S)A|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Demonstraţie. Fie $\{G_j\}_1^m$ o acoperire deschisă a lui $\sigma(S)$, $\{X_j\}_1^m$, spaţiile maximal spectrale ale lui S corespunzătoare acestei acoperiri, $\sigma_j = \sigma(S \mid X_j)$ şi $Y_j = Y_T(\sigma_j)$.

Dacă $x \in X$, avem $x = \sum_{j=1}^{n} x_j$, $x_j \in X_j$ şi $C^n(T, S)Ax_j = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \times$ $\times L^{n-k}(T) R^k(S) A_{x_j} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (T - \lambda_j)^{n-k} A (S - \lambda_j)^k x_j$ cu $\lambda_j \in \sigma_j$. Dacă $AX_S(F) \subset Y_T(F)$ şi $d = \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \operatorname{diam} G_j$ avem $|C^n(T, S)Ax| \leqslant$ $\leqslant Md^n$ cu $M > 0$ convenabil ales. Deoarece putem lua d arbitrar, avem $\lim_{n \to \infty} |C^n(T, S)A|^{\frac{1}{n}} = 0$.

Invers, dacă $(\lambda - S)\, x_S(\lambda) \equiv x$, $\lambda \in \rho_S(x)$ punînd $y(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \times \frac{C^k(T, S)}{k!} A x^{(k)}(\lambda)$ se verifică ca în I.3.4 că avem

$$(\lambda - T)\, y(\lambda) = Ax, \quad \lambda \in \rho_S(x)$$

deci $\sigma_T(Ax) \subset \sigma_S(x)$ şi $AX_S(F) \subset Y_T(F)$. ~

4.2. PROPOZIŢIE. *Fie* $T, S \in \mathcal{D}(X)$. *Atunci* $T \overset{q}{\approx} S \rightleftarrows X_T(F) = X_S(F)$, $(\forall) F$ *închisă.*

Demonstraţie. Aplicăm propoziţia precedentă cu $A = I$ şi simetria relaţiei „$\overset{q}{\approx}$“.

4.3. PROPOZIŢIE. *Fie* $T \in \mathcal{D}(X)$ *şi* $S \in \mathcal{L}(X)$. *Dacă* $T \overset{q}{\approx} S$, *atunci* $S \in \mathcal{D}(X)$.

Demonstraţie. Folosind 1.3.4 avem $\sigma(T) = \sigma(S)$ şi $S \in \mathcal{P}(X)$, $\sigma_T(x) = \sigma_S(x)$, $(\forall)\, x \in X$. Rezultă $X_T(F) = X_S(F)$, $(\forall) F$ închisă şi aplicînd II.1.4 găsim că S este decompozabil. ~

4.4. PROPOZIŢIE. *Fie* $T \in \mathcal{D}(X)$, $S \in \mathcal{L}(X)$. *Dacă* $SX_T(F) \subset X_T(F)$, $\sigma(S \mid X_T(F)) \subset F$, $(\forall) F$ *închisă, atunci* $T \overset{q}{\approx} S$.

Demonstraţie. Fie $\{G_j\}_1^m$ o acoperire deschisă a lui $\sigma(T)$ şi $\{Y_j\}_1^m$ spaţiile maximal spectrale corespunzătoare.

Folosind egalităţile

$$(T, S)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (T - \lambda_j)^{n-k} (S - \lambda_j)^k$$

$$(S, T)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (S - \lambda_j)^{n-k} (T - \lambda_j)^k$$

cu $\lambda_j \in \sigma(T \mid Y_j)$, se raţionează în continuare ca în II.4.1.

§ 5. CVASISIMILARITATEA OPERATORILOR DECOMPOZABILI

Fie X un spaţiu Banach, $j = 1, 2$, şi $T_j \in \mathcal{L}(X_j)$.

5.1. DEFINIŢIE. *Operatorul* T_1 *este transformata cvasiafină a lui* T_2 *dacă există* $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ *injectiv şi* $\overline{AX_1} = X_2$ *astfel încît* $AT_1 = T_2A$. *Vom scrie în acest caz* $T_2 \xrightarrow{q.a.} T_1$.

Dacă $T_2 \xrightarrow{q.a.} T_1$ *şi* $T_1 \xrightarrow{q.a.} T_2$, *vom spune că operatorii* T_1 *şi* T_2 *sînt cvasisimilari şi vom scrie* $T_1 \overset{q.a.}{\rightleftarrows} T_2$.

5.2. PROPOZIŢIE. *Fie* X, Y *două spaţii Banach,* $T \in \mathcal{P}(X)$, $S \in \mathcal{P}(Y)$, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. *Dacă* $AT = SA$, *atunci pentru orice* $\sigma \in \mathcal{B}$ *avem*

$$AX_T(\sigma) \subset Y_S(\sigma).$$

Demonstraţie. Fie $x \in X_T(\sigma)$. Avem $(\lambda - T)\, x_T(\lambda) \equiv x$, $\lambda \in \rho_T(x)$ deci $(\lambda - S)\, Ax_T(\lambda) \equiv Ax$. Rezultă $\sigma_T(Ax) = \sigma_T(x)$, deci $Ax \in Y_S(\sigma)$. ~

5.3. Propoziție. *Fie* $T \in \mathcal{L}(X)$, $S \in \mathcal{L}(Y)$. *Dacă* $S \xrightarrow{q.a.} T$, *atunci, avem*

(i) $S \in \mathcal{P}(Y) \Rightarrow T \in \mathcal{P}(X)$
(ii) $S \in \mathcal{D}(Y) \Rightarrow \sigma(S) \subset \sigma(T)$
(iii) $T \in \mathcal{D}(X)$, $S \in \mathcal{P}(Y) \Rightarrow \sigma(T) \subset \sigma(S)$.

Demonstrație. (i) Dacă $(\lambda - T) f(\lambda) \equiv 0$ și $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ este cvasiafinitatea ce trasformă pe S în T, avem $(\lambda - S) Af(\lambda) \equiv 0$ deci $Af(\lambda) \equiv 0$ ceea ce implică $f = 0$.

(ii) Dacă $\lambda_0 \in \sigma(S) \setminus \sigma(T)$, să alegem o mulțime închisă F, $\lambda_0 \notin F$, $F \supset \sigma(T)$.

Avem $X_T(F) = X$ și $Y_S(F) \neq Y$ căci $F \supset \sigma(S)$ în contradicție cu $AX \subset Y_S(F)$. Deci $\sigma(S) \setminus \sigma(T) = \emptyset$.

(iii) Dacă $\lambda_0 \in \sigma(T) \setminus \sigma(S)$, alegînd F închisă astfel încît $\lambda_0 \in \operatorname{int} F$, $F \cap \sigma(S) = \emptyset$ avem $X_T(F) \neq \{0\}$ (II.1.2) și $Y_S(F) = \{0\}$ iarăși în contradicție cu $AX_T(F) \subset Y_S(F)$. Rezultă $\sigma(T) \setminus \sigma(S) = \emptyset$. ~

5.4. Corolar. *Dacă* $T \in \mathcal{D}(X)$, $S \in \mathcal{D}(Y)$ și $S \xrightarrow{q.a.} T$, *atunci* $\sigma(T) = \sigma(S)$.

5.5. Teoremă. *Fie* X_j, X *spații Banach* $j = 1, 2$, $T_j \in \mathcal{D}(X_j)$, $T \in L(X)$. *Dacă* $T_2 \xrightarrow{q.a.} T \xrightarrow{q.a.} T_1$ *și* $\sigma(T)$ *nu se reduce la un punct, atunci* T *are cel puțin un subspațiu propriu ultrainvariant.*

Demonstrație. Fie A și B cvasiafinități astfel încît $AT = T_2A$, $BT_1 = TB$. Deoarece AB este tot o cvasiafinitate și $ABT_1 = T_2AB$, folosind corolarul precedent avem $\sigma(T_1) = \sigma(T_2)$.

Fie F o mulțime închisă astfel încît $F \supset G(T_1)$, $\operatorname{int} F \cap \sigma(T) \neq \emptyset$. În acest caz $X_{1T_1}(F)$ și $X_{2T_2}(F)$ sînt subspații proprii. Folosind II.5.3 (i) avem $T \in \mathcal{P}(X)$, deci $\overline{X_T(F)}$ este un subspațiu ultrainvariant al lui T (I.2.3).

Deoarece $AX_T(F) \subset X_{2T_2}(F)$ și $BX_{1T_1}(F) \subset X_T(F)$, găsim că $\overline{X_T(F)}$ este un subspațiu propriu.

§ 6. EXEMPLE DE OPERATORI DECOMPOZABILI

În acest paragraf vom presupune cunoscută teoria operatorilor spectrali. Cititorul poate găsi noțiunile de bază în această direcție în [13].

6.1. Propoziție. *Orice operator compact* $T \in \mathcal{L}(X)$ *este decompozabil* (tare).

Demonstrație. Fie $\{G_j\}_1^n$, o acoperire deschisă a lui $\sigma(T)$. Putem reprezenta $\sigma(T)$ ca o reuniune de mulțimi spectrale disjuncte σ_j, $\sigma_j \subset G_j$. Dacă $E(\sigma_j)$ este proiecția asociată mulțimii σ_j (VII.3, [14]), atunci $\{E(\sigma_j) X\}_1^n$ sînt spațiile maximal spectrale căutate (vezi I.4.8).

(Cum restricția lui T la orice spațiu maximal spectral este operator decompozabil, fiind compact, rezultă prin II.3.6 că T este decompozabil tare). ~

6.2. Propoziție. *Orice operator spectral* $T \in \mathcal{L}(X)$ *este decompozabil* (*tare*).

Demonstrație. Utilizînd lema 5, [1] și I.4.6 rezultă că $E(\sigma)X$ este spațiu maximal spectral al lui T pentru orice σ închisă, unde cu E se notează măsura spectrală a lui T. Folosind proprietățile lui E și II.1.4 obținem $T \in \mathcal{D}(X)$. (Cum restricția lui T la orice subspațiu ultrainvariant al lui T este decompozabil, fiind spectral, obținem că T este decompozabil tare). ~

6.3. Propoziție. *Fie $T \in \mathcal{L}(X)$ și $S \in \mathcal{L}(X)$ spectral astfel încît $T \overset{a}{\approx} S$. Atunci T este spectrul și are aceeași măsură spectrală ca și S.*

Demonstrație. Deoarece S este decompozabil, din II.4.3 rezultă $T \in \mathcal{D}(X)$ deci $X_T(F) = X_S(F)$ pentru orice F închisă (II.4.2). Dacă E este măsura spectrală a lui S, avem deci $X_T(F) = E(F)X$ (lema 5, [13]) și

$$TE(F) = E(F)\,TE(F).$$

Aplicînd continuitatea lui E obținem

$$TE(\sigma) = E(\sigma)TE(\sigma), \quad (\forall) \quad \sigma \in \mathcal{B}$$

și folosind relația $E(\sigma) + E(\sigma') = I$ de asemenea

$$E(\sigma)T = E(\sigma)TE(\sigma)$$

deci

$$TE(\sigma) = E(\sigma)T$$

ceea ce demonstrează propoziția. ~

III. HOMOMORFISME SPECTRALE

§ 1. ALGEBRE ADMISIBILE DE FUNCȚII ȘI HOMOMORFISME SPECTRALE

Fie $\Omega \subset \Lambda$ și $f : \Omega \to \Lambda$. Vom înțelege prin suportul lui f închiderea mulțimii $\{\lambda : \lambda \in \Omega, f(\lambda) \neq 0\}$. Vom nota suportul lui f cu „sup f”.

Pentru orice $\xi \notin$ supp f vom asocia lui f funția $f_\xi : \Omega \to \Lambda$ definită prin

$$f_\xi(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{f(\lambda)}{\xi - \lambda} & \lambda \neq \xi \\ 0 & \lambda = \xi. \end{cases}$$

1.1. Definiție. *Algebra $\mathcal{A}$ de funcții complexe definite în Ω se numește normală dacă pentru orice acoperire finită deschisă $\{G_j\}_1^n$ a lui $\overline{\Omega}$ există o partiție a unității subordonată acestei acoperiri* ($(\exists)$ $\{f_j\}_1^n \subset \mathcal{A}$ supp $f_j \subset G_j$, $f_j \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{n} f_j \equiv 1\}$).

În cele ce urmează vom folosi, prin abuz, notațiile λ, 1 pentru $\lambda \to \lambda$, respectiv $\lambda \to 1$.

1.2. Definiție. *Algebra $\mathcal{A}$ de funcții complexe definite în Ω va fi numită admisă dacă este normală, $\lambda \in \mathcal{A}$ și $f \in \mathcal{A} \Rightarrow f_\xi \in \mathcal{A}$.*

1.3. DEFINIȚIE. *Numim homomorfism spectral tripletul,* $\{\mathcal{A}, \mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{X})\}$ *în care:*

$\mathcal{A}$ *este o algebră admisă (algebră de definiție);*

$\mathcal{L}(X)$ *este algebra operatorilor liniari și mărginiți pe un spațiu Banach* X.

$\mathcal{U} : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(X)$ este un homomorfism de algebre astfel încît $\mathcal{U}(1) = I$ și $\xi \to \mathcal{U}(f_\xi)$ este analitică în $\complement \operatorname{supp} f$.

În continuare vom nota omomorfismele spectrale simplu cu o singură literă, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ etc. Existența lui $\mathcal{A}$ și $\mathcal{L}(X)$ va fi subînțeleasă.

1.4. DEFINIȚIE. *Numim suportul homomorfismului spectral* $\mathcal{U}$, *cea mai mică mulțime închisă, supp* $\mathcal{U}$, *cu proprietatea*: $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} \mathcal{U} = \emptyset \Rightarrow \mathcal{U}(f) = 0$.

1.5. TEOREMĂ. *Fie* $\mathcal{U}$ *un homomorfism spectral. Avem* :

$$\operatorname{supp} \mathcal{U} = \sigma(\mathcal{U}(\lambda))$$

Demonstrație. Fie $f \in \mathcal{A}$, $\operatorname{supp} f \cap \sigma(\mathcal{U}(\lambda)) = \emptyset$.

și

$$F(\xi) = \begin{cases} R(\xi; \mathcal{U}(\lambda))\, \mathcal{U}(f), & \xi \in \rho(\mathcal{U}(\lambda)) \\ \mathcal{U}(f_\xi), & \xi \in \complement \operatorname{supp} f. \end{cases}$$

Cum F este olomorfă în tot planul și $\lim\limits_{\xi \to \infty} F(\xi) = 0$, obținem $F = 0$, deci $\mathcal{U}(f) = 0$, ceea ce implică $\operatorname{supp} \mathcal{U} \subset \sigma(\mathcal{U}(\lambda))$.

Fie acum $\xi_0 \notin \operatorname{supp} \mathcal{U}$ și $\mathcal{V}_{\xi_0}$ o vecinătate deschisă a lui ξ_0 astfel încît $\mathcal{V}_{\xi_0} \cap \operatorname{supp} \mathcal{U} = \emptyset$.

Folosind normalitatea lui $\mathcal{A}$ putem alege $f \in \mathcal{A}$ astfel încît $f(\lambda) = 1$, $\lambda \in \operatorname{supp} \mathcal{U}$, $f(\lambda) = 0$, $\lambda \in \mathcal{V}_{\xi_0}$. Avem :

$$\mathcal{U}(f_{\xi_0})(\xi_0 - \mathcal{U}(\lambda)) = \mathcal{U}(f) = \mathcal{U}(1) = I$$

deci $\xi_0 \notin \sigma(\mathcal{U}(\lambda))$ și $\sigma(\mathcal{U}(\lambda)) \subset \operatorname{supp} \mathcal{U}$. ~

1.6. LEMĂ. *Fie* $\mathcal{U}$ *un homomorfism spectral și* G *o mulțime deschisă,* $G \subset \overline{\Omega}$. *Dacă* $\lambda_0 \in G \cap \Omega$ și $(\lambda_0 - \mathcal{U}(\lambda))\, x_0 = 0$, $(x_0 \in X)$, *atunci pentru orice funcție* $f \in \mathcal{A}$, *constantă în* $G \cap \Omega$, *avem* $U(f)\, x_0 = f(\lambda_0)\, x_0$.

Demonstrație. Avem

$$\mathcal{U}(f)\, x_0 - f(\lambda_0)\, x_0 = \mathcal{U}(f - f(\lambda_0))\, x_0 =$$

$$= \mathcal{U}((f - f(\lambda_0))_{\lambda_0})\, \mathcal{U}(\lambda - \lambda_0)\, x_0 = 0. \sim$$

1.7. TEOREMĂ. *Dacă* $\mathcal{U}$ *este un homomorfism spectral, atunci* $\mathcal{U}(\lambda) \in \mathcal{P}(X)$.

Demonstrație. Dacă $\mathcal{U}(\lambda) \notin \mathcal{P}(\mathcal{X})$, atunci există $\xi_0 \in \Lambda$, $\mathcal{V}_{\xi_0}$ și $\varphi : \mathcal{V}_{\xi_0} \to X$ astfel încît : $\mathcal{V}_{\xi_0} \subset \operatorname{supp} \mathcal{U}$, $(\xi - \mathcal{U}(\lambda))\, \varphi(\xi) \equiv 0$, $\varphi \not\equiv 0$, olomorfă. Alegînd $f \in \mathcal{A}$ astfel încît

$$f(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \in \mathcal{V}^1_{\xi_0} \\ 0, & \lambda \notin \mathcal{V}^2_{\xi_0}. \end{cases}$$

unde $\overline{\mathcal{V}}^1_{\xi_0} \subset \mathcal{V}^2_{\xi_0}, \overline{\mathcal{V}}^2_{\xi_0} \subset \mathcal{V}_{\xi_0}$, obţinem

$$\mathcal{U}(f)\,\varphi(\xi) = \begin{cases} \varphi(\xi), & \xi \in \mathcal{V}^1_{\xi_0} \\ 0 & \xi \notin \mathcal{V}^2_{\xi_0} \end{cases}$$

deci $\varphi = 0$ ceea ce este absurd. ~

1.7. TEOREMĂ. *Fie* $\mathcal{U}$ *un homomorfism spectral. Avem pentru orice mulţime închisă* F :

(i) $\sigma_{\mathcal{U}(\lambda)}(\mathcal{U}(f)\,x) \subset \operatorname{supp} f, (\forall) f \in \mathfrak{A}$.

(ii) $X_{\mathcal{U}(\lambda)}(F) = \{x : x \in X, \operatorname{supp} f \cap F = \emptyset \Rightarrow \mathcal{U}(f)\,x = 0\}$.

(iii) $X_{\mathcal{U}(\lambda)}(F) = \bigcap\limits_{G \supset F} \bigvee\limits_{\substack{f \in \mathfrak{A} \\ \operatorname{supp}.f \subset G}} \mathcal{U}(f)\,X$, *unde* G *este deschisă*

(iv) $\mathcal{U}(\lambda)$ *este operator decompozabil.*

Demonstraţie. (i) Rezultă din egalitatea $(\xi - \mathcal{U}(\lambda))\,\mathcal{U}(f_\xi)\,x = \mathcal{U}(f)\,x$.

(ii) Dacă $x \in X_{\mathcal{U}(\lambda)}(F)$, atunci $\sigma_{\mathcal{U}(\lambda)}(\mathcal{U}(f)\,x) \subset F$ (I.2.2) şi folosind (i), dacă $\operatorname{supp} f \cap F = \emptyset$ avem $\sigma_{\mathcal{U}(\lambda)}(\mathcal{U}(f)x) = \emptyset$ deci $\mathcal{U}(f)\,x = 0$.

Invers, dacă $\operatorname{supp} f \cap F = \emptyset \Rightarrow \mathcal{U}(f)\;x = 0$ şi $\xi_0 \in \sigma_{\mathcal{U}(\lambda)}(x) \setminus F$, fie $\{G_j\}_1^2$ o acoperire a lui $\overline{\Omega}$ şi $\{f_j\}_1^2$ o partiţie a unităţii subordonată acestei acoperiri. Dacă $G_1 \supset F$, $\xi_0 \notin G_1$, $G_2 \cap F = \emptyset$, avem $\mathcal{U}(f_2)\,x = 0$ deci $\mathcal{U}(f_1)\,x = x$. Rezultă $(\xi - \mathcal{U}(\lambda))\,\mathcal{U}(f_{1\xi})\,x = \mathcal{U}(f_1)\,x = x$ deci şi a doua incluziune.

(iii) Este evidentă (folosind (i), (ii) şi normalitatea algebrei $\mathfrak{A}$).

(iv) Fie $\{G_j\}_1^n$ o acoperire deschisă a lui $\sigma(\mathcal{U}(\lambda))$ pe care fără a micşora generalitatea o putem presupune şi acoperire a lui $\overline{\Omega}$.

Dacă $\sum\limits_{j=1}^{n} f_j(\lambda) = 1$, $\operatorname{supp} f_j \subset G_j, f_j \in \mathfrak{A}$, atunci punînd $Y_j = X_{\mathcal{U}(\lambda)}$ $(\operatorname{supp} f_j)$ avem $\sigma(T \mid Y_j) \subset G_j$ şi pentru orice $x \in X$, $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathcal{U}(f_j)\,x$. Cum $\mathcal{U}(f_j)\,x \in Y_j$, avem $\sum\limits_{j=1}^{n} Y_j = X$ deci $\mathcal{U}(\lambda) \in \mathcal{D}(X)$. ~

§ 2. ALGEBRE DE OPERATORI GENERATE DE UN HOMOMORFISM SPECTRAL

Fie $\mathcal{U}$ un homomorfism spectral. Prin algebra generată de $\mathcal{U}$ vom înţelege cea mai mică subalgebră $\mathcal{A}$ a lui $\mathcal{L}(X)$ uniform închisă, care conţine toţi operatorii de forma $\mathcal{U}(f), f \in \mathfrak{A}$. Vom nota cu $T \to \widetilde{T}$, $T \in \mathcal{A}$, homomorfismul lui Gelfand determinat de spaţiul $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ al idealelor maximale ale lui $\mathcal{A}$.

De asemenea, pentru $T \in \mathcal{A}$ vom nota cu $\rho_{\mathcal{A}}(T)$, $\sigma_{\mathcal{A}}(T)$ mulţimea rezolvantă şi respectiv spectrul lui T ca element al algebrei $\mathcal{A}$.

2.1. PROPOZIȚIE. *Fie $\mathcal{U}$ un homomorfism spectral și $\mathcal{A}$ algebra generată de $\mathcal{U}$. Atunci avem:*

(i) $M \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}, f \in \mathfrak{A}, \widetilde{\mathcal{U}(\lambda)}(M) \notin \operatorname{supp} f \Rightarrow \widetilde{\mathcal{U}(f)}(M) = 0$.

(ii) $\sigma_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}(\lambda)) = \sigma(\mathcal{U}(\lambda))$.

Demonstrație: (i) Notînd $\widetilde{\mathcal{U}(\lambda)}(M) = \xi$, avem $(\xi - \mathcal{U}(\lambda))\,\mathcal{U}(f_\xi) = \mathcal{U}(f)$, deci $\widetilde{\mathcal{U}(f)}(M) = 0$.

(ii) Evident, $\sigma(\mathcal{U}(\lambda)) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}, (\lambda))$. Acum dacă $\mu \in \rho(\mathcal{U}(\lambda))$, alegînd $g \in \mathfrak{A}$ convenabil avem $(\mu - \mathcal{U}(\lambda))\,\mathcal{U}(g_\mu) = \mathcal{U}(g) = I$, deci $\rho(\mathcal{U}(\lambda)) \subset \rho_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}(\lambda))$. ~

2.2. DEFINIȚIE. *Algebra $\mathfrak{A}$ de funcții complexe definită în Ω se numește invers închisă dacă $f \in \mathfrak{A}$, $f(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in \Omega \Rightarrow \frac{1}{f} \in \mathfrak{A}$.*

2.3. PROPOZIȚIE. *Fie $\mathcal{U}$ un homomorfism spectral și $\mathcal{A}$ algebra generată de $\mathcal{U}$. Dacă algebra de definiție $\mathfrak{A}$ a lui $\mathcal{U}$ este o algebră invers închisă de funcții continue definite pe mulțimea închisă Ω, atunci aplicația τ definită prin $\tau(M) = \widetilde{\mathcal{U}(\lambda)}(M)$, $M \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ stabilește o corespondență homeomorfă între $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ și $\sigma(\mathcal{U}(\lambda))$. În plus avem $f(\tau(M)) = \widetilde{\mathcal{U}(f)}(M), (\forall) f \in \mathfrak{A}, M \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.*

Demonstrație. Aplicația τ este continuă prin definirea ei și $\tau(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}) = \widetilde{\mathcal{U}(\lambda)}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}) = \sigma_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}(\lambda))$.

Folosind III.2.1 (ii) avem $\tau(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}) = \sigma(\mathcal{U}(\lambda))$, deci τ este surjectivă. Cum $\sigma(\mathcal{U}(\lambda))$ este spațiu compact separat, ne mai rămîne să demonstrăm că τ este injecție. Pentru aceasta să observăm că pentru orice $h \in \mathfrak{A}$ avem $\sigma(\mathcal{U}(h)) \subset \{\mu : |\mu| \leqslant \sup_{\lambda \in \Omega} |h(\lambda)|\}$. Într-adevăr, dacă $|\mu| > \sup_{\lambda \in \Omega} |h(\lambda)|$, atunci $\frac{1}{\mu - h} \in \mathfrak{A}$ și $(\mu - \mathcal{U}(h))\,\mathcal{U}\left(\frac{1}{\mu - h}\right) = I$, deci $\mu \in \rho_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}(h))$.

Fie acum $M \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ și $f \in \mathfrak{A}$. Notînd $\tau(M) = \xi$, pentru orice $0 < \varepsilon < 1$, putem alege $g \in \mathfrak{A}$ astfel încît $g(\lambda) = 1$, $|\lambda - \xi| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, $g(\lambda) = 0$, pentru $|\lambda - \xi| \geqslant \varepsilon$, $|g(\lambda)| \leqslant 1$, pentru $\lambda \in \Omega$. Notînd $h = (f - f(\xi))\, g$ avem $|\widetilde{\mathcal{U}(\lambda)}(M)| \leqslant \sup_{\mu \in \sigma_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}(\lambda))} |\mu| \leqslant \sup_{\lambda \in \Omega} |h(\lambda)| \leqslant \sup_{|\lambda - \xi| \leqslant \varepsilon} |f(\lambda) - f(\xi)|$.

Deoarece ε este arbitrar, găsim $\widetilde{\mathcal{U}(h)}(M) = 0$, deci pentru orice $f \in \mathfrak{A}$ și orice $M \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ avem:

$$\widetilde{\mathcal{U}(f)}(M) = f(\tau(M)).$$

Rezultă că dacă $\tau(M_1) = \tau(M_2)$, avem $\widetilde{T}(M_1) = \widetilde{T}(M_2)$, $(\forall)\ T \in \mathcal{A}$ și topologia lui $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ fiind separată $M_1 = M_2$. ~

2.4. TEOREMĂ. *În ipotezele propoziției precedente avem*

$$\sigma(\mathcal{U}(f)) = f(\sigma(\mathcal{U}(\lambda))).$$

Demonstrație. Dacă τ este aplicația din III.2.3, avem $f(\sigma(\mathcal{U}(\lambda))) = f(\tau(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})) = \widetilde{\mathcal{U}(f)}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}) = \sigma_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}(f)) \supset \sigma(\mathcal{U}(f))$. De asemenea avem incluziunea $\sigma(\mathcal{U}(\lambda)) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{U}(f)))$. Într-adevăr, dacă nu avem această incluziune, $\mathcal{U}(\lambda)$ fiind operator decompozabil (III.1.8 (iv)), există un spațiu maximal spectral $Y \neq \{0\}$ al lui $\mathcal{U}(\lambda)$ astfel încît $\sigma(\mathcal{U}(\lambda) \mid Y) \subset \sigma(\mathcal{U}(\lambda)) \setminus f^{-1}(\sigma(\mathcal{U}(f)))$. Definind $\mathcal{V}$ prin egalitatea $\mathcal{V}(f) = \mathcal{U}(f) \mid Y$, $f \in \mathfrak{A}$ avem incluziunea $f(\sigma(\mathcal{V}(\lambda))) \supset \sigma(\mathcal{V}(f))$ după cum am văzut la începutul demonstrației. Deoarece $f(\sigma(\mathcal{V}(\lambda))) \subset f(\complement f^{-1}(\sigma(\mathcal{U}(f)))) \subset \complement\, \sigma(\mathcal{U}(f))$ şi în acelaşi timp $\sigma(\mathcal{V}(f)) \subset \sigma(\mathcal{U}(f))$ se obține o contradicție. Rezultă astfel şi incluziunea $f(\sigma(\mathcal{U}(\lambda))) \subset \sigma(\mathcal{U}(f))$.

2.5. LEMĂ. *În ipotezele teoremei precedente dacă Y este un subspațiu în X, $F \subset \Lambda$ închisă şi $f \in \mathfrak{A}$* astfel încît $\mathcal{U}(f) Y \subset Y$, $\sigma(\mathcal{U}(f) \mid Y) \subset F$, *atunci avem*

$$Y \subset X_{\mathcal{U}(\lambda)}(f^{-1}(F)).$$

Demonstrație. Punînd $\mathcal{V} = \mathcal{U} \mid X_{\mathcal{U}(\lambda)}(f^{-1}(F))$ avem $\sigma(\mathcal{V}(\lambda)) \subset \sigma(\mathcal{U}(\lambda)) \subset f^{-1}(F)$, deci $\sigma(\mathcal{V}(f)) = f(\sigma(\mathcal{V}(f))) \subset F$.

Dacă există $y \in Y$, $y \notin X_{\mathcal{U}(\lambda)}(f^{-1}(F))$, atunci fie $\mu \in \operatorname{int}(\sigma_{\mathcal{U}(\lambda)}(y) \setminus f^{-1}(F))$. Putem presupune că avem un disc H de rază pozitivă centrat în μ astfel ca $H \subset \operatorname{int}(\sigma_{\mathcal{U}(\lambda)}(y) \setminus f^{-1}(F))$. Fie acum $g \in \mathfrak{A}$, $\operatorname{supp} g \subset H$. Avem $\sigma_{\mathcal{U}(\lambda)}(\mathcal{U}(g) y) \subset H$ (III.1.8(i)), deci, $\mathcal{U}(g)\, y \in X_{\mathcal{U}(\lambda)}(H)$ şi deoarece $\sigma(\mathcal{U}(f) \mid X_{\mathcal{U}(\lambda)}(H)) = f(\sigma(\mathcal{U}(\lambda) \mid X_{\mathcal{U}(\lambda)}(H))) \subset f(H)$ putem defini

$$y(\xi) = \begin{cases} \mathcal{U}(g)\, R(\xi; \mathcal{U}(f) \mid Y)_y & \xi \in F' \\ R(\xi; \mathcal{U}(f) \mid X_{\mathcal{U}(\lambda)}(H))\, \mathcal{U}(g)\, y, & \xi \notin f(H). \end{cases}$$

Cum $\lim\limits_{\xi \to \infty} y(\xi) = 0$, rezultă $y(\cdot) = 0$ deci $\mathcal{U}(g)\, y = 0$ şi folosind III.1.8 (ii) obținem $\sigma_{\mathcal{U}(\lambda)}(y) \subset \overline{H}'$ ceea ce este absurd. Deci $Y \subset X_{\mathcal{U}(\lambda)}(f^{-1}(F))$. ~

2.6. TEOREMĂ. *În ipotezele lemei precedente operatorul $\mathcal{U}(f)$ este decompozabil şi pentru orice $F \subset \Lambda$ închisă avem :*

$$X_{\mathcal{U}(f)}(F) = X_{\mathcal{U}(\lambda)}(f^{-1}(F)).$$

Demonstrație. Fie $\{F_j\}_1^n$ un sistem de mulțimi închise astfel încît $\sum\limits_{j=1}^{n} \operatorname{int} F_j \supset \sigma(\mathcal{U}(f))$. Punînd $Y_j = X_{\mathcal{U}(\lambda)}(f^{-1}(F_j))$, Y_j este un spațiu maximal spectral al lui $\mathcal{U}(f)$. Într-adevăr, dacă Y este un subspațiu invariant al lui $\mathcal{U}(f)$ astfel încît $\sigma(\mathcal{U}(f) \mid Y) \subset \sigma(\mathcal{U}(f) \mid Y_j)$, aplicînd lema precedentă avem $Y \subset Y_j$. Fie acum H_j o mulțime închisă astfel încît $H_j \cap \sigma(\mathcal{U}(\lambda)) = f^{-1}(F_j) \cap \sigma(U(\lambda))$ $j = 1, \ldots, n$ şi astfel încît $\sum\limits_{j=1}^{n} \operatorname{int} H_j \supset \sigma(\mathcal{U}(\lambda))$. Cum $X_{\mathcal{U}(\lambda)}(H_j) = X_{\mathcal{U}(\lambda)}(f^{-1}(F_j))$ şi $\mathcal{U}(\lambda)$ este decompozabil, avem $\sum\limits_{j=1}^{n} Y_j = X$, deci $\mathcal{U}(f)$ este decompozabil.

Fie acum $x \in X_{\mathcal{U}(\lambda)}(f^{-1}(F))$. Dacă $\sigma_{\mathcal{U}(\lambda)}(x) = \sigma$ și $\mathcal{V} = \mathcal{U} \mid X_{\mathcal{U}(\lambda)}(\sigma)$ avem $\sigma(\mathcal{V}(f)) = f(\sigma(\mathcal{V}(\lambda))) \subset f(\sigma) \subset F$, deci $x \in X_{\mathcal{U}(\lambda)}(F)$ și $X_{\mathcal{U}(\lambda)}(f^{-1}(F)) \subset \subset X_{\mathcal{U}(f)}(F)$. Incluziunea opusă rezultă din lema precedentă. ~

2.7. Corolar. *În ipotezele teoremei precedente dacă* $\{\mathcal{A}, \mathcal{V}, \mathcal{L}(X)\}$ *este un homomorfism spectral astfel încît* $\mathcal{U}(\lambda) = \mathcal{V}(\lambda)$, *atunci pentru orice* $f \in \mathcal{A}$ *avem* $\mathcal{U}(f) \overset{q}{\approx} \mathcal{V}(f)$.

Demonstrație. Avem $X_{\mathcal{U}(f)}(F) = X_{\mathcal{V}(f)}(F)$ pentru orice $F \subset \Lambda$ închisă și putem aplica II.4.2. ~

2.8. Lemă. *Fie* $T \in \mathcal{L}(X)$ *astfel încît* $\sigma(T)$ *are cel mult un număr finit de puncte de acumulare. Atunci există un homomorfism spectral* $\mathcal{U}$ *astfel încît* $\mathcal{U}(\lambda) = T$.

Demonstrație. Luînd $\mathcal{A} = \mathcal{F}(T), \mathcal{U}(f) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma} f(\lambda)\, R(\lambda; T)\, d\lambda$ cu Γ un contur convenabil ales (VII.39[14]) și verifică ușor că $\mathcal{A}$ este admisă și $\mathcal{U}(\lambda) = T$.

2.9. Corolar. *Dacă* $T \in \mathcal{L}(X)$ *și* $p(T)$ *este compact pentru un anumit polinom* p *atunci există un homomorfism spectral* $\mathcal{U}$ *astfel încît* $\mathcal{U}(\lambda) = T$.

IV. OPERATORI SCALARI GENERALIZAȚI

În acest capitol vom nota cu $\mathcal{S}$ algebra funcțiilor indefinit derivabile în Λ înzestrată cu topologia dată de seminormele definite prin :

$$|\varphi|_{k,n} = \max_{0 \leqslant j+k \leqslant n} \sup_{\Lambda \in K} |D^k \overline{D}^j \varphi(\lambda)|$$

cu $0 \leqslant n < \infty$, K un compact $D\varphi(\lambda) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \mathrm{Re}\lambda} + i \dfrac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial Im\lambda}\right)$, $\overline{D}\varphi(\lambda) = = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial Re\lambda} - i \dfrac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial Im\lambda}\right)$.

Se vede imediat că $\mathcal{S}$ este o algebră admisă în sensul III.1.2. De asemenea $\mathcal{S}$ este invers închisă.

§ 1. OPERATORI SCALARI GENERALIZAȚI ([15])

1.1. Definiție. *Numim distribuție spectrală un homomorfism spectral continuu* $\{\mathcal{S}, \mathcal{U}, \mathcal{L}(X)\}$.

Pentru a simplifica scrierea vom folosi notația $\{\mathcal{U}, \mathcal{L}(X)\}$ pentru $\{\mathcal{S}, \mathcal{U}, \mathcal{L}(X)\}$ sau numai $\mathcal{U}$ dacă nu pot apărea confuzii. Distribuțiile spectrale sînt distribuții vectoriale multiplicative cu suport compact. Avem $|\mathcal{U}(\varphi)| \leqslant M |\varphi|_{K,n}$ în care n este ordinul distribuției, K un compact cu int $K \supset \sigma(\mathcal{U}(\lambda))$ (vezi III.1.5) și $M > 0$ depinzînd de K (analiticitatea lui $\mathcal{U}(f_{\xi})$ va rezulta din continuitatea distribuției vectoriale).

1.2. Definiție. *Operatorul* $T \in \mathcal{L}(X)$ *se numește scalar generalizat dacă există o distribuție spectrală* $\mathcal{U}$ *astfel încît* $T = \mathcal{U}(\lambda)$.

Se vede imediat că dacă $\mathcal{U}$ este o distribuţie spectrală şi $\varphi \in \mathcal{S}$, atunci $\mathcal{U}(\varphi)$ este operator scalar generalizat cu distribuţie $\mathcal{V}$ determinată de ecuaţia $\mathcal{V}(\psi) = \mathcal{U}(\psi \circ \varphi)$.

Conform III.1.8, orice operator scalar generalizat este decompozabil.

1.3. Lemă. *Fie* $\{\mathcal{U}, \mathcal{L}(X)\}$, $\{\mathcal{V}, \mathcal{L}(Y)\}$ *două distribuţii spectrale şi* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. *Dacă* $C(\mathcal{V}(\lambda), \mathcal{U}(\lambda))\, A = C(\mathcal{V}(\bar{\lambda}), \mathcal{U}(\bar{\lambda}))\, A = 0$, *atunci pentru orice* $\varphi \in \mathcal{S}$ *avem* $C(\mathcal{V}(\varphi), \mathcal{U}(\varphi))\, A = 0$.

Demonstraţie. Fie $p(\lambda, \bar{\lambda}) = \sum\limits_{k+j=0}^{m} a_{kj} \lambda^k \bar{\lambda}^j$. Avem

$$C(\mathcal{V}(p), \mathcal{U}(p))\, A = \sum_{k+j=0}^{m} a_{k,j} (\mathcal{V}(\lambda^k) \mathcal{V}(\bar{\lambda}^j)\, A - A\mathcal{U}(\lambda^k) \mathcal{U}(\bar{\lambda}^j)) =$$

$$= \sum_{k+j=0}^{m} a_{k,j} (A\mathcal{U}(\lambda^k) \mathcal{U}(\bar{\lambda}^j) - A\mathcal{U}(\lambda^k) \mathcal{U}(\lambda^j)) = 0.$$

$\mathcal{U}$ fiind continuu, există un compact K şi un număr întreg nenegativ şi $M > 0$ astfel încît $|\mathcal{U}(\varphi)| \leqslant M |\varphi|_{k,n}$.

Deci dacă $\lim\limits_{r \to \infty} |\varphi(\lambda) - p_r(\lambda, \bar{\lambda})|_{k,n} = 0$ găsim

$$C(\mathcal{V}(\varphi), \mathcal{U}(\varphi))\, A = \lim_{r \to \infty} C(\mathcal{V}(p_r), \mathcal{U}(p_r))\, A = 0. \sim$$

1.4. Teoremă. *Fie* $\{\mathcal{U}, \mathcal{L}(X)\}$ *de ordin* m, $\{\mathcal{V}, \mathcal{L}(Y)\}$ *de ordin* n *şi* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. *Dacă* $C(\mathcal{V}(\lambda), \mathcal{U}(\lambda))\, A = 0$, *atunci* $C^{m+n+1}(\mathcal{V}(\bar{\lambda}), \mathcal{U}(\bar{\lambda}))$ $A = 0$.

Demonstraţie. Pentru orice $\xi \in \Lambda$ avem $A = e^{-\bar{\xi}\mathcal{V}(\lambda)} A\, e^{\bar{\xi}\mathcal{U}(\lambda)}$. De aici deducem, $e^{\xi\mathcal{V}(\bar{\lambda})} A\, e^{-\xi\mathcal{U}(\bar{\lambda})} = \mathcal{V}(e^{2i\,\mathrm{Im}(\xi\bar{\lambda})})\, A\mathcal{U}(e^{-2i\,\mathrm{Im}(\xi\bar{\lambda})})$ şi printr-un calcul simplu obţinem majorarea

$$|e^{\xi\mathcal{V}(\bar{\lambda})} A\, e^{-\xi\mathcal{U}(\bar{\lambda})}| \leqslant M |\xi|^{m+n}, \quad |\xi| \geqslant 1$$

ceea ce dovedeşte că $e^{\xi\mathcal{V}(\bar{\lambda})} A\, e^{-\xi\mathcal{U}(\bar{\lambda})}$ este un polinom de grad cel mult $m + n$.

Deci avem:

$$\left.\frac{d^{m+n+1} e^{\xi\mathcal{V}(\bar{\lambda})} A\, e^{-\xi\mathcal{U}(\bar{\lambda})}}{d\xi^{m+n+1}}\right|_{\xi=0} = C^{m+n+1}(\mathcal{V}(\bar{\lambda}) \mathcal{U}(\bar{\lambda}))\, A = 0. \sim$$

1.5. Corolar. *În ipotezele teoremei precedente dacă* $\varphi_j \in \mathcal{S}$, $j = 1, \ldots, m + n + 1$, *atunci*:

$$C(\mathcal{V}(\varphi_1), \mathcal{U}(\varphi_1)) \ldots C(V(\varphi_{m+n+1}), \mathcal{U}(\varphi_{m+n+1}))\, A = 0.$$

Demonstraţie. Să observăm că pentru orice $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ avem $C(\mathcal{V}(\varphi), \mathcal{U}(\varphi))\, C(\mathcal{V}(\psi), \mathcal{U}(\psi)) = C(\mathcal{V}(\psi), \mathcal{U}(\psi))\, C(\mathcal{V}(\varphi), \mathcal{U}(\varphi))$. Conform teoremei precedente $C(\mathcal{V}(\bar{\lambda}), \mathcal{U}(\bar{\lambda}))\, C^{m+n}(\mathcal{V}(\bar{\lambda}), \mathcal{U}(\bar{\lambda}))\, A = 0$ şi de asemenea $C(\mathcal{V}(\lambda), \mathcal{U}(\lambda))\, C^{m+n}(\mathcal{V}(\bar{\lambda}), \mathcal{U}(\bar{\lambda}))\, A = 0$. Folosind lema IV.1.3 obţinem $C(\mathcal{V}(\varphi_1), \mathcal{U}(\varphi_1))\, C^{m+n}(\mathcal{V}(\bar{\lambda}), \mathcal{U}(\bar{\lambda}))\, A = 0$, ş.a.m.d. $\sim$

1.6. COROLAR. *Dacă* $T \in \mathcal{L}(X)$ *este operator scalar generalizat cu două distribuții* $\mathcal{U}$ *de ordin* m *și* $\mathcal{V}$ *de ordin* n, *atunci pentru orice* $\varphi \in \mathcal{S}$ *avem*

$$(\mathcal{U}(\varphi),\ \mathcal{V}(\varphi))^{m+n+1} = (\mathcal{V}(\varphi),\ \mathcal{U}(\varphi))^{m+n+1} = 0$$

Demonstrație. Prin ipoteză avem $\mathcal{V}(\lambda) = \mathcal{U}(\lambda) = T$ deci $C(\mathcal{V}(\lambda), \mathcal{U}(\lambda))\, I = C(\mathcal{U}(\lambda), \mathcal{V}(\lambda))I = 0$. Folosind $C^r(\mathcal{V}(\lambda), \mathcal{U}(\lambda))I = (\mathcal{V}(\lambda), \mathcal{U}(\lambda))^r$, $C^r(\mathcal{U}(\lambda), \mathcal{V}(\lambda))\, I = (\mathcal{U}(\lambda), \mathcal{V}(\lambda))^r$, $r = 0, 1, \ldots$ și corolarul precedent, egalitățile enunțate rezultă.~

1.7. TEOREMĂ. *Fie* T *un operator scalar generalizat cu două distribuții spectrale* $\mathcal{U}$ *și* $\mathcal{V}$. *Dacă* n *este cel mai mic număr natural astfel încît* $(\mathcal{U}(\varphi), \mathcal{V}(\varphi))^n = (\mathcal{V}(\varphi), \mathcal{U}(\varphi))^n = 0$, *atunci avem* :

$$\mathcal{U}(\varphi) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(\mathcal{U}(\bar{\lambda}), \mathcal{V}(\bar{\lambda}))^j}{j\,!} \mathcal{V}(D^j \varphi) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \mathcal{V}(D^j \varphi) \frac{(\mathcal{V}(\bar{\lambda}), \mathcal{U}(\bar{\lambda}))^j}{j\,!} .$$

Demonstrație. Este suficient să considerăm numai cazul cînd $\varphi = \sum_{k=0}^{m} a_k(\lambda)\, b_k(\bar{\lambda})$ în care $a_k b_k$ sînt polinoame. În acest caz $\mathcal{U}(\varphi) = \sum_{k=0}^{m} \mathcal{U}(a_k)\mathcal{U}(b_k)$. Folosind I.3.5 avem

$$\mathcal{U}(b_k) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(\mathcal{U}(\bar{\lambda}), \mathcal{V}(\bar{\lambda}))^j}{j\,!} \mathcal{V}(D^j b_k)$$

deci

$$\mathcal{U}(\varphi) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} \mathcal{U}(a_k) \frac{(\mathcal{U}(\bar{\lambda}), \mathcal{V}(\bar{\lambda}))^j}{j\,!} \mathcal{V}(D^j b_k) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{(\mathcal{U}(\bar{\lambda}), \mathcal{V}(\bar{\lambda})^j}{j\,!} \mathcal{V}(D^j \varphi) \text{ căci } \mathcal{U}(a_k) = \mathcal{V}(a_k).$$

Analog se demonstrează a doua egalitate. ~

1.8. LEMĂ. *Fie* $T \in \mathcal{L}(X)$ *un operator scalar generalizat. Dacă* $\sigma(T) \subset \{0\}$, *atunci* T *este nilpotent.*

Demonstrație. Fie $\mathcal{U}$ o distribuție spectrală astfel încît $T = \mathcal{U}(\lambda)$. Dacă ordinul lui $\mathcal{U}$ este n, atunci funcția $\lambda \to \lambda^{n+1}$ are derivatele pînă la ordinul n nule în 0 și cum supp $\mathcal{U} = \sigma(T)$, avem $T^{n+1} = \mathcal{U}(\lambda^{n+1}) = 0$.~

Fie $\{\mathcal{U}, \mathcal{L}(X)\}$, $\{\mathcal{V}, \mathcal{L}(X)\}$ două distribuții spectrale, comutative, deci $\mathcal{U}(\varphi)\mathcal{V}(\psi) = \mathcal{V}(\psi)\mathcal{U}(\varphi)$, $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$.

Aplicația $\sum_{j=1}^{k} \varphi_j \psi_j \to \sum_{j=1}^{n} \mathcal{U}(\varphi_j)\mathcal{V}(\psi_j)$ definită, pe produsul tensorial algebric $\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}$ este liniară și continuă în topologia proiectivă.

Dacă $\mathcal{S}_2$ este mulțimea funcțiilor indefinit derivabile în $\Lambda \times \Lambda$ cu topologia convergenței uniforme pe compacte, folosind egalitățile $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S} \mathbin{\hat{\otimes}} \mathcal{S} = \mathcal{S} \mathbin{\check{\otimes}} \mathcal{S}$ putem prelungi aplicația de mai sus prin continuitate la $\mathcal{S}_2$. Aplicaţia prelungită astfel $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ va fi numită produsul tensorial al distribuţiilor $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$.

1.9. LEMĂ. *Fie* $\{\mathcal{U}, \mathcal{L}(X)\}$, $\{\mathcal{V}, \mathcal{L}(X)\}$ *două distribuţii spectrale comutative. Atunci* $\{\mathcal{S}_2, \mathcal{U}\otimes\mathcal{V}, \mathcal{L}(X)\}$ *este o distribuţie vectorială multiplicativă astfel încît* $(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V})\,(1) = I$.

Demonstraţie. Prin construcţia sa $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ este o distribuţie vectorială multiplicativă şi $(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V})\,(1) = \mathcal{U}(1)\,\mathcal{V}\,(1) = I$. ~

1.10. TEOREMĂ. *Fie* T, $S \in \mathcal{L}(X)$ *doi operatori scalari generalizaţi cu distribuţiile spectrale* $\mathcal{U}$ *şi respectiv* $\mathcal{V}$. *Dacă* $\mathcal{U}$ şi $\mathcal{V}$ *comută, atunci* $T + S$ *şi* TS *sînt operatori scalari generalizaţi.*

Demonstraţie. Pentru orice $\varphi \in \mathcal{S}$ vom considera $\tilde{\varphi}$ şi $\hat{\varphi}$ determinate de ecuaţiile $\tilde{\varphi}\,(\lambda, \mu) = \varphi\,(\lambda + \mu)$, $\hat{\varphi}\,(\lambda, \mu) = \varphi\,(\lambda\,\mu)$. Folosind lema precedentă găsim că aplicaţiile

$$\varphi \to (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V})(\tilde{\varphi})$$

$$\varphi \to (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V})(\hat{\varphi})$$

sînt distribuţii spectrale ale lui $T + S$ respectiv TS. ~

1.11. TEOREMĂ. *Fie* T *un operator scalar generalizat. Atunci există operatorii scalari generalizaţi* R, J *cu distribuţii comutative şi spectre reale astfel încît*

$$T = R + iJ.$$

Dacă T *este inversabil, atunci există operatorii* A şi M *scalari generalizaţi cu distribuţii comutative astfel încît spectrul lui* A *este pe cercul unitate, spectrul lui* M *este pozitiv şi avem*

$$T = AM.$$

Demonstraţie. Să observăm că dacă $\mathcal{U}$ este o distribuţie spectrală şi $\varphi_0 \in \mathcal{S}$, atunci aplicaţia $\varphi \to \mathcal{U}\,(\varphi \circ \varphi_0)$ este de asemenea o distribuţie spectrală, deci $\mathcal{U}(\varphi_0)$ este operator scalar generalizat. Folosind egalitatea $\mathcal{U}\,(\lambda) = \mathcal{U}\,(\mathrm{Re}\lambda) + i\mathcal{U}\,(\mathrm{Im}\lambda)$, prima parte a teoremei devine evidentă. Dacă T este inversabil, putem alege două funcţii f, $g \in \mathcal{S}$ astfel încît $f(\lambda) = \frac{\lambda}{|\lambda|}$, $g(\lambda) = |\lambda|$ într-o vecinătate a lui $\sigma(T)$. Dacă $\mathcal{U}$ este distribuţia spectrală a lui T, putem lua $A = \mathcal{U}(f)$, $M = \mathcal{U}(g)$. ~

1.12. TEOREMĂ. *Fie* $T \in \mathcal{L}(X)$ *un operator scalar generalizat cu distribuţia spectrală* $\mathcal{U}$ *şi* $S \in \mathcal{L}(X)$ *un operator ce comută cu* $\mathcal{U}\,(\bar{\lambda})$.

Dacă există n *astfel încît*

$$(T, S)^n = (S,\ T)^n = 0,$$

atunci S *este operator scalar generalizat* [3].

Demonstraţie. Pentru orice $\varphi \in \mathcal{S}$ să punem $\mathcal{V}(\varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(S,\ T)^k}{k\,!} \times \times\,\mathcal{U}(\overline{D}^k\varphi)$. Evident, $\mathcal{V}$ este o distribuţie vectorială astfel încît $\mathcal{V}(1) = I$, $\mathcal{V}(\lambda) = S$. Dacă $\varphi\,(\lambda) = \sum_{j=0}^{m} a_j(\lambda),\ b_j(\bar{\lambda})$, unde a_j, b_j sînt polinoame, obţinem : $\mathcal{V}(\varphi) = \sum_{j=0}^{m} \mathcal{U}(a_j) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(S, T)^k}{k!} \mathcal{U}(\overline{D}^k b_j) = \sum_{j=0}^{m} \mathcal{U}(a_j) b_j(S)$ (vezi I.3.5).

Folosind această egalitate, multiplicativitatea lui $\mathcal{V}$ rezultă imediat. ~

§ 2. REGULARITATEA DISTRIBUŢIILOR SPECTRALE

Fie $T \in \mathcal{L}(X)$ un operator spectral de tip scalar cu măsura spectrală E şi Q un nilpotent ce comută cu T, $Q^2 = 0$.

Operatorul T este scalar generalizat şi realizat de distribuţiile spectrale

$$\varphi \to \int \varphi(\lambda) E(d\lambda)$$

$$\varphi \to \int \varphi(\lambda) E(d\lambda) + Q \int D\varphi(\lambda)\, E(d\lambda).$$

Acest exemplu îndreptăţeşte punerea următoarei probleme. Fiind dat un operator scalar generalizat T, există o distribuţie spectrală regulată (în sensul definiţiei de mai jos) $\mathcal{U}$ astfel încît $\mathcal{U}(\lambda) = T$? Problema este deschisă în afara unor cazuri particulare considerate în acest paragraf.

2.1. Definiţie. *Distribuţia spectrală* $\mathcal{U}$ *se numeşte regulată dacă pentru orice* $S \in \mathcal{L}(X)$ *astfel încît* $\mathcal{U}(\lambda) S = S\mathcal{U}(\lambda)$ *avem* $\mathcal{U}(\varphi) S = S U(\varphi)$, $(\forall)\ \varphi \in \mathcal{S}$.

2.2. Definiţie. *Operatorul scalar generalizat* T *se numeşte regulat dacă există o distribuţie spectrală regulată* $\mathcal{U}$ *care îl realizează* (i.e. $\mathcal{U}(\lambda) = T$).

2.3. Definiţie. *Mulţimea închisă* F *se numeşte subţire dacă există o funcţie* $h \in \mathcal{S}$ *analitică într-o vecinătate a lui* F *astfel încît* $h(\lambda) = \bar{\lambda}$, $\lambda \in F$.

2.4. Teoremă. *Orice operator scalar generalizat* T *cu spectrul subţire este regulat.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{U}$ o distribuţie spectrală a lui T şi h funcţia ce apare în 2.3 astfel încît $h(\lambda) = \bar{\lambda}$, $\lambda \in \sigma(T)$. Dacă ordinul lui $\mathcal{U}$ este n şi punem $g = (h(\lambda) - \bar{\lambda})^{n+1}$, avem $\mathcal{U}(g) = 0$, deci punînd $Q = U((h)(\lambda) - \bar{\lambda})$, avem $Q^{n+1} = 0$. Aplicaţia $\varphi \to \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \mathcal{U}(D^k \varphi)$ este o distribuţie spectrală $\mathcal{V}$ a lui T.

În plus $\mathcal{V}(\bar{\lambda}) = h(T)$, deci dacă $ST = TS$, atunci $S\mathcal{V}(\bar{\lambda}) = \mathcal{V}(\bar{\lambda}) S$.

2.5. Definiţie. *Spunem că distribuţia spectrală* U *are multiplicitatea spectrală cel mult 1, dacă singurul operator nilpotent generalizat ce comută cu* $\mathcal{U}$ *este* 0.

2.6. Teoremă. *Dacă* T *este operator spectral generalizat cu distribuţia spectrală de multiplicate spectrală cel mult 1, atunci el este regulat şi distribuţia sa spectrală este unică.*

Demonstraţie. Dacă ordinul distribuţiei spectrale $\mathcal{U}$ a lui T este n, să luăm un $S \in \mathcal{L}(X)$ astfel încît $C(T, T) S = 0$.

Folosind IV.1.4 avem asigurată existenţa unui număr minim p, $0 \leqslant p \leqslant 2n$, astfel încît $C^{p+1}(\mathcal{U}(\bar{\lambda}), \mathcal{U}(\bar{\lambda})) S = 0$ [pentru orice S].

Dacă $p = 0$, atunci $\mathcal{U}$ este regulată.

În caz contrar notînd $\Delta S = C(\mathcal{U}(\bar{\lambda}), \mathcal{U}(\bar{\lambda}))\, S$, Δ este o diferențiere în $\mathcal{L}(X)$. Cum $\Delta^2 \Delta^{p-1}\, S = 0$, rezultă că $\Delta^{p-1} S$ este nilpotent generalizat (vezi [8] sau [22]) ce comută cu T, deci $S = 0$ în contradicție cu minimalitatea lui p.

Rezultă $p = 0$. Dacă ar exista o altă distribuție spectrală $\mathcal{V}$, operatorul $\mathcal{U}(\bar{\lambda}) - \mathcal{V}(\bar{\lambda}) = Q$ ar fi nilpotent, căci $\mathcal{U}$ este regulată (vezi IV.1.6). Cum avem $\mathcal{U}(\varphi)\, Q = Q\, \mathcal{U}(\varphi)$, obținem $\mathcal{U}(\bar{\lambda}) = \mathcal{V}(\bar{\lambda})$, deci $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ ~.

PROBLEME DESCHISE

1. Este orice operator decompozabil, operator tare decompozabil?

2. În teorema I.1.8. la punctul (iv) putem adăuga că operatorul $\mathcal{U}(\lambda)$ este tare decompozabil. Într-adevăr, dacă Y este un spațiu maximal spectral al lui $\mathcal{U}(\lambda)$, atunci $\mathcal{U}(f)Y \subset Y$, $(\forall) f \in \mathcal{A}$, deci $\mathcal{V} = \mathcal{U}\,|\,Y$ este un homomorfism spectral ceea ce implică, $\mathcal{U}(\lambda)\,|\,Y$ decompozabil. Invers, fiind dat un operator tare decompozabil, există un homomorfism spectral $\{\mathcal{A}, \mathcal{U}, \mathcal{L}(X)\}$ astfel încît $\mathcal{U}(\lambda) = T$?

3. Fie T_1, T_2 doi operatori decompozabili (tare) care comută între ei. Este suma și produsul lor în aceeași clasă?

4. Fie T un operator scalar generalizat. Există o distribuție spectrală regulată, $\mathcal{U}$, astfel încît $\mathcal{U}(\lambda) = T$?

5. Fie Ω o mulțime compactă în spațiul real n-dimensional astfel încît $\overline{\operatorname{int}\ \Omega} = \Omega$ și $\mathcal{C}^m(\Omega)$ spațiul Banach al funcțiilor complexe de m ori continuu derivabile. Dacă $f \in \mathcal{C}^m(\Omega)$, să punem $Tg = gf$, $g \in \mathcal{C}^m(\Omega)$. Avem $T \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^m(\Omega))$ și punînd $\mathcal{U}(\varphi) = (\varphi \circ g)f$, $\varphi \in \mathcal{S}$ observăm că T este operator scalar generalizat cu distribuția spectrală $\mathcal{U}$.

Este distribuția $\mathcal{U}$ regulată? Un răspuns negativ ar da și o soluție (negativă) pentru 4, căci dacă operatorul T poate fi realizat de o distribuție spectrală regulată, atunci ea coincide cu $\mathcal{U}$(vezi VI. [12]). Un caz particular este considerat în [5].

6. Este cunoscut că restricțiile operatorilor spectrali la subspații invariante sînt operatori spectrali dacă și numai dacă acestea invariază și măsura spectrală.

Fie acum T un operator scalar generalizat, $T \in \mathcal{L}(X)$ și Y un subspațiu invariant al lui T astfel încît $T\,|\,Y$ este de asemenea operator scalar generalizat. Există o distribuție spectrală, $\mathcal{U}$, a lui T astfel încît $\mathcal{U}(\varphi) Y \subset Y$, $(\forall)\, \varphi \in \mathcal{S}$?

Primită la redacție la 21 noiembrie 1967

*Institutul de Matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, București*

SPECTRAL THEORY AND FUNCTIONAL CALCULUS

ABSTRACT

In this expository paper we present some basic results concerning the generalizations of the functional calculus of operators in a Banach space.

In chap. I there are studied the operators which have the single-valued extention property, and the quasi-nilpotent equivalence of operators; the notion of spectral maximal space associated to an operator is also introduced.

In chap. II there are studied the decomposable operators and their functional caculus with analytic functions.

The operators for which it is possible to associate a spectral homomorphism (Def. III 1.3) and their spectral properties are investigated in chap. III.

The last chapter, the fourth, is devoted to the study of generalized scalar operators (that is, operators which have a functional calculus by means of operator-valued distributions).

BIBLIOGRAFIE

1. C. Apostol, *Some properties of spectral maximal spaces and decomposable operators.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 607—610, **12** (1967).
2. — *Restrictions and quotients of decomposable operators in Banach space.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **13** (1968).
3. — *Sur les opérateurs scalaires généralisés.* Bul. Sc. Math. **91** (1967).
4. — *Roots of decomposable operator-valued functions.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **13** (1968).
5. — *On some multiplication operators.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **13** (1968).
6. I. Colojoară, *Generalized spectral operators.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **7** (1962), 459—469.
7. — *Operatori spectrali generalizați.* Stud. cerc. mat., **15** (1964), 499—536.
8. — , C. Foiaș, *Spectral distribution with finite multiplicity.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **12** (1967), 1039—1042.
9. — *Quasi-nilpotent equivalence of not necessarily commuting operators.* Journ. Math. Mech., **15** (1965), 521—540.
10. — *The Riesz — Dunford functional calculus with decomposable operators.* Rev. Roum. Math. Pures et App., **12** (1967), 627—641.
11. — *Commutators of decomposable operators.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **12** (1967), 807—815.
12. — *Generalized Spectral Operators,* Gordon-Breach, Science Publ. New York, 1968.
13. N. Dunford, *Spectral Operators.* Pac. Journ. Math. **4**, 321—354 (1954).
14. — , J. T. Schwartz, *Linear Operators,* Part. I. Interscience Publ., New York, 1958.
15. C. Foiaș, *Une application des distributions vectorielles à la théorie spectrale.* Bull. Sci. Math., **84** (1960), 147—158.
16. — *Spectral maximal spaces and decomposable operators in Banach spaces.* Arhiv der Math., **14**, (1963) 341—349.
17. — *Asupra unei probleme de teorie spectrală.* Stud. și cerc. mat., **17**, 921—923 (1965).
18. — *Relația dintre operatorii spectrali și scalari generalizați,* Comunicările Acad. R.P.R., **11** (1961), 1427—1430.
19. E. Hille, R. Phillips, *Functional Analysis and Semi-groups.* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **31**, Providence, 1958.
20. F.-Y. Maeda, *Generalized spectral operators on locally convex spaces.* Pac. Journ. Math., **13** (1963), 177—192.
21. B. Sz.-Nagy, C. Foiaș, *Quasi-similitude des opérateurs et sous — espaces invariants.* C. R. Acad. Sci. Paris, **261** (1965), 3938—3940.
22. C. R. Putnam, *Commutation Properties of Hilbert Space Operators and Related Topics.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1967.
23. F. H. Vasilescu, *Spectral algebras of a generalized scalar operator.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **13** (1968).
24. — *On an asymptotic behaviour of operators.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **12** (1967), 353—358.
25. — *Spectral distance of two operators.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **12**, (1967), 733—766.
26. — *On a class of scalar generalized operators.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **12** (1967), 865—867.

DESPRE CATEGORIA CVASIMAŞINILOR

DE

VIRGIL EMIL CĂZĂNESCU

În acest articol se demonstrează cîteva proprietăţi ale categoriei cvasimaşinilor considerată în [1] de acad. Gr. C. Moisil: caracterizarea monomorfismelor şi izomorfismelor, existenţa limitelor inductive şi proiective.

Prin cvasimaşină înţelegem un ansamblu format din: două semigrupuri $\mathcal{K}$ şi $\mathcal{W}$, o mulţime $\mathcal{X}$ şi două funcţii $F : \mathcal{K}\times\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ şi $G : \mathcal{K}\times\mathcal{X} \to \mathcal{W}$ care îndeplinesc următoarele condiţii:

$$(1)\qquad \begin{aligned} F(ab, x) &= F(b, F(a, x)) \\ G(ab, x) &= G(a, x)\, G(b, F(a, x)) \end{aligned} \qquad \forall\, a, b \in \mathcal{K} \text{ şi } x \in \mathcal{X}.$$

Vom nota cu $\mathcal{M}(\mathcal{K}, \mathcal{X}, \mathcal{W}, F, G)$ cvasimaşina definită mai sus.

Vom spune că $u(f, g, h) : \mathcal{M}(\mathcal{K}, \mathcal{X}, \mathcal{W}, F, G) \to \mathcal{M}'(\mathcal{K}', \mathcal{X}', \mathcal{W}', F', G')$ este un homomorfism al cvasimaşinii $\mathcal{M}$ în $\mathcal{M}'$ dacă u este un ansamblu format din: două homomorfisme de semigrupuri $f : \mathcal{K} \to \mathcal{K}'$, $h : \mathcal{W} \to \mathcal{W}'$ şi o funcţie $g : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ care îndeplinesc următoarele condiţii:

$$(2)\qquad \begin{aligned} g(F(k, x)) &= F'(f(k), g(x)) \\ h(G(k, x)) &= G'(f(k), g(x)) \end{aligned} \qquad \forall\, k \in \mathcal{K} \text{ şi } x \in \mathcal{X}.$$

Fie homomorfismele $u(f, g, h) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ şi $u'(f', g', h') : \mathcal{M}' \to \mathcal{M}''$ Homomorfismul $u''(f'', g'', h'') : \mathcal{M} \to \mathcal{M}''$ definit prin: $f''(k) = f'(f(k))$; $g''(x) = g'(g(x))$; $h''(w) = h'(h(w))$ se va numi rezultatul compunerii homomorfismelor u şi u'. Vom scrie $u'' = u'u$. Prin compunerea a două homomorfisme se obţine tot un homomorfism. Într-adevăr:

$$\begin{aligned} g''(F(k, x)) &= g'(g(F(k, x))) = g'(F'(f(k), g(x))) = \\ &= F''(f'(f(k)), g'(g(x))) = F''(f''(k), g''(x)), \\ h''(G(k, x)) &= h'(h(G(k, x))) = h'(G'(f(k), g(x))) = \\ &= G''(f'(f(k)), g'(g(x))) = G''(f''(k), g''(x)). \end{aligned}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 5, P. 669–681. BUCUREŞTI, 1968

Cvasimașinile formează o categorie în care morfismele sînt homomorfismele de cvasimașini.

1. Morfismul $u\ (f,\ g,\ h) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ este izomorfism dacă și numai dacă f, g și h sînt bijecții.

Dacă u este izomorfism, atunci există morfismul

$u'\ (f',\ g',\ h') : \mathcal{M}' \to \mathcal{M}$ astfel încît :

$$f'f = 1_{\mathcal{K}},\ ff' = 1_{\mathcal{K}'} \tag{1.1}$$

$$g'g = 1_{\mathcal{X}},\ gg' = 1_{\mathcal{X}'} \tag{1.2}$$

$$h'h = 1_{\mathcal{W}},\ hh' = 1_{\mathcal{W}'} \tag{1.3}$$

Relațiile (1.1) și (1.3) arată că f și h sînt izomorfisme în categoria semigrupurilor, deci sînt bijecții. Relațiile (1.2) arată că g este izomorfism în categoria Ens, deci este bijecție.

Reciproc , dacă f, g și h sînt bijecții, atunci f și h sînt izomorfisme în categoria semigrupurilor iar g este izomorfism în categoria Ens. Deci, există homomorfismele de semigrupuri $f' : \mathcal{K}' \to \mathcal{K}$, $h' : \mathcal{W}' \to \mathcal{W}$ și funcția $g' : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ astfel încît condițiile (1.1), (1.2) și (1.3) să fie îndeplinite. Fie $k' \in \mathcal{K}'$ și $x' \in \mathcal{X}'$. Substituind în (2) $k = f'(k')$ și $x = g'(x')$ obținem :

$$g(F(f'(k'), g'(x'))) = F(k', x'),$$

$$h(G(f'(k'), g'(x'))) = G'(k', x').$$

De aici rezultă :

$$g'(F'(k', x')) = F(f'(k'), g'(x')),$$

$$h'(G'(k', x')) = G(f'(k'), g'(x')),$$

ceea ce dovedește că $u'\ (f', g',\ h') : \mathcal{M}' \to \mathcal{M}$ este un morfism și deci că u este izomorfism.

2. Morfismul $u(f,\ g,\ h) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ este monomorfism dacă și numai dacă f, g și h sînt injecții.

Dacă f, g, h sînt injecții, atunci f și h sînt monomorfisme în categoria semigrupurilor, iar g este monomorfism în Ens. Fie cvasimașina $\mathcal{M}''$ și morfismele $u_i\ (f_i,\ g_i,\ h_i) : \mathcal{M}'' \to \mathcal{M}$ $(i = 1,\ 2)$ astfel încît $uu_1 = uu_2$, adică $ff_1 = ff_2$, $gg_1 = gg_2$, $hh_1 = hh_2$. Deoarece f, g și h sînt monomorfisme, rezultă $f_1 = f_2$, $g_1 = g_2$ și $h_1 = h_2$, adică $u_1 = u_2$ ceea ce dovedește că u este monomorfism.

Reciproc, presupunînd că u este monomorfism, vom proba succesiv că h, g și f sînt injecții.

a) Pentru a dovedi că h este injecție, este suficient să probăm că h este monomorfism în categoria semigrupurilor.

Fie semigrupul V și morfismele de semigrupuri $h'_j : V \to \mathcal{W}$ $(j = 1,\ 2)$ cu proprietatea $hh'_1 = hh'_2$. Vom nota $h' = hh'_1 = hh'_2$. Fie $\mathcal{W} \oplus V$ suma directă a semigrupurilor $\mathcal{W}$ și V, iar $i_{\mathcal{W}}$ și i_V injecțiile lor canonice. Considerînd morfismele de semigrupuri $1_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ și $h'_j : V \to \mathcal{W}$

$(j = 1, 2)$ rezultă existenţa morfismelor de semigrupuri $h_j : \mathcal{W} \oplus V \to \mathcal{W}$ $(j = 1, 2)$ care îndeplinesc condiţiile $h_j\, i_{\mathcal{W}} = 1_{\mathcal{W}}$ şi $h_j\, i_v = h'_j$ $(j = 1, 2)$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{W} \oplus V \arrow[d, shift right, "h_1"'] \arrow[d, shift left, "h_2"] & \\
\mathcal{W} \arrow[ur, "i_{\mathcal{W}}"] \arrow[r, "1_{\mathcal{W}}"] \arrow[dr, "h"'] & \mathcal{W} \arrow[d, "h"] & V \arrow[ul, "i_V"'] \arrow[l, shift right, "h'_1"'] \arrow[l, shift left, "h'_2"] \arrow[dl, "h'"] \\
 & \mathcal{W}' &
\end{tikzcd}$$

Rezultă că :

$$\begin{aligned}(h h_j)\, i_{\mathcal{W}} &= h\,(h_j\, i_{\mathcal{W}}) = h\, 1_{\mathcal{W}} = h \\ (h h_j)\, i_V &= h\,(h_j\, i_V) = h\, h'_j = h'\end{aligned} \qquad (j = 1, 2).$$

Din proprietăţile sumei directe rezultă :

$$hh_1 = hh_2. \tag{2.1}$$

Fie cvasimaşina $\mathcal{M}''(\mathcal{K}, \mathcal{X}, \mathcal{W} \oplus V, F, i_{\mathcal{W}}\, G)$ şi morfismele $u_j(1_{\mathcal{K}}, 1_{\mathcal{X}}, h_j) : \mathcal{M}'' \to \mathcal{M}$ $(j = 1, 2)$. Din (2.1) rezultă $uu_1 = uu_2$, iar din ipoteza că u este monomorfism, rezultă $u_1 = u_2$, adică $h_1 = h_2$.

Deci $h'_1 = h_1 i_V = h_2 i_V = h'_2$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

b) Presupunem prin absurd că g nu este injecţie, aidică există $x_1 \neq x_2 \in \mathcal{X}$ astfel încît $g(x_1) = g(x_2)$. Fie cvasimaşina $\mathcal{M}''(N, N, \mathcal{F}_N, F'', G'')$, unde : N este mulţimea numerelor naturale, structura de semigrup fiind dată de operaţia de adunare ; $\mathcal{F}_N$ este semigrupul liber generat de N ; $F''(i, j) = j + i$ şi $G''(i, j) = j,\ j+1,\ j+2, \ldots, j + i - 1$.

Relaţiile :

$$F''(i + j, x) = x + i + j = F''(j, x + i) = F''(j, F''(i, x))$$

$$G''(i + j, x) = x, x + 1, x + 2, \ldots, x + i - 1, x + i, x + i + 1, \ldots, x + i + j - 1 = G''(i, x)\, G''(j, x + i) = G''(i, x)\, G''(j, F''(i, x))$$

dovedesc că $\mathcal{M}''$ e cvasimaşină.

Fie $k \in K$ fixat. Notăm $x_i^0 = x_i$ $(i = 1, 2)$ şi $x_i^j = F(k, x_i^{j-1})$ $(i = 1, 2 ; j \in N)$.

Notînd cu k^j $(j \in N)$ puterile lui k în semigrupul $\mathcal{K}$, rezultă relaţia $x_i^j = F(k^j, x_i)$ $(i = 1, 2 ; j \in N)$ care se demonstrează prin inducţie după j :

$$x_i^1 = F(k, x_i^0) = F(k^1, x_i)$$
$$x_i^{j+1} = F(k, x_i^j) = F(k, F(k^j, x_i)) = F(k^{j+1}, x_i).$$

Fie morfismele $u_i(f_i, g_i, h_i) : \mathcal{M}'' \to M$ $(i = 1, 2)$ definite prin :

$$f_i(j) = k^j \quad (i = 1, 2 ;\ j \in N)$$

$$g_i(j) = x_i^{j-1} \ (i = 1, 2 ;\ j \in N)$$

$$h_i(j_1, j_2, \ldots, j_n) = G(k, x_i^{j_1-1})\, G(k, x_i^{j_2-1}) \ldots G(k, x_i^{j_n-1})$$

$$(i = 1, 2 ;\ j_m \in N \text{ pentru } m = 1, 2, \ldots, n).$$

Relațiile :

$$F(f_i(j), g_i(m)) = F(k^j, x_i^{m-1}) = F(k^j, F(k^{m-1}, x_i)) = F(k^{m+j-1}, x_i) =$$
$$= x_i^{m+j-1} = g_i(m+j) = g_i(F''(j, m)),$$

$$G(f_i(j), g_i(m)) = G(k^j, x_i^{m-1}) = G(k, x_i^{m-1})\, G(k^{j-1}, F(k, x_i^{m-1})) =$$
$$= G(k, x_i^{m-1})\, G(k^{j-1}, x_i^m) =$$
$$= G(k, x_i^{m-1})\, G(k, x_i^m)\, G(k^{j-2}, x_i^{m+1}) =$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$= G(k, x_i^{m-1})\, G(k, x_i^m) \ldots G(k, x_i^{m+j-2}) =$$
$$= h_i(m, m+1, \ldots, m+j-1) = h_i(G''(j, m))$$

dovedesc că u_i sînt morfisme. Deoarece $x_1 \neq x_2$, rezultă că $g_1(1) \neq g_2(1)$ și deci că $u_1 \neq u_2$. În continuare vom dovedi că $uu_1 = uu_2$ ceea ce ne arată că u nu este monomorfism, contradicție care dovedește că ipoteza prin care am presupus că g nu este injecție este falsă. Într-adevăr :

$$ff_1(j) = f(k^j) = ff_2(j);$$

$gg_1 = gg_2$ se demonstrează prin inducție :

$$gg_1(1) = g(x_1) = g(x_2) = gg_2(1);$$

$$gg_1(i+1) = g(x_1^i) = g(F(k, x_1^{i-1})) = F'(f(k), g(x_1^{i-1})) =$$
$$= F'(f(k), gg_1(i)) = F'(f(k), gg_2(i)) = F'(f(k), g(x_2^{i-1})) =$$
$$= g(F(k, x_2^{i-1})) = g(x_2^i) = gg_2(i+1);$$

$$hh_1(j_1, j_2, \ldots, j_n) = h(G(k, x_1^{j_1-1}))\, h(G(k, x_1^{j_2-1})) \ldots h(G(k, x_1^{j_n-1})) =$$
$$= G'(f(k), g(x_1^{j_1-1}))\, G'(f(k), g(x_1^{j_2-1})) \ldots G'(f(k), g(x_1^{j_n-1})) =$$
$$= G'(f(k), gg_1(j_1))\, G'(f(k), gg_1(j_2)) \ldots G'(f(k), gg_1(j_n)) =$$
$$= G'(f(k), gg_2(j_1))\, G'(f(k), gg_2(j_2)) \ldots G'(f(k), gg_2(j_n)) =$$
$$= G'(f(k), g(x_2^{j_1-1}))\, G'(f(k), g(x_2^{j_2-1})) \ldots G'(f(k), g(x_2^{j_n-1})) =$$
$$= h(G(k, x_2^{j_1-1}))\, h(G(k, x_2^{j_2-1})) \ldots h(G(k, x_2^{j_n-1})) = hh_2(j_1, \ldots, j_n).$$

c) Presupunem prin absurd că f nu este injecție, adică există $k_1 \neq k_2 \in \in \mathcal{K}$ astfel încît $f(k_1) = f(k_2)$, de unde notînd prin k_i^j $(i = 1, 2 ; j \in N)$ puterile lui k_i în semigrupul $\mathcal{K}$, rezultă $f(k_1^j) = f(k_2^j)$.

Din relaţiile:

$$g(F(k_1^j, x)) = F'(f(k_1^j), g(x)) = F'(f(k_2^j), g(x)) = g(F(k_2^j, x))$$

$$h(G(k_1^j, x)) = G'(f(k_1^j), g(x)) = G'(f(k_2^j), g(x)) = h(G(k_2^j, x))$$

şi din faptul că g şi h sînt injecţii rezultă:

$$\begin{matrix} F(k_1^j, x) = F(k_2^j, x) \\ G(k_1^j, x) = G(k_2^j, x) \end{matrix} \quad j \in N \text{ şi } x \in \mathcal{X}.$$

Fie cvasimaşina $\mathcal{M}''(N, \mathcal{X}, \mathcal{W}, F'', G'')$, unde:

$$F''(j, x) = F(k_1^j, x) = F(k_2^j, x),$$

$$G''(j, x) = G(k_1^j, x) = G(k_2^j, x).$$

Relaţiile:

$$F''(j + m, x) = F(k_1^{i+m}, x) = F(k_1^m, F(k_1^j, x)) = F''(m, F''(j, x))$$

$$G''(j + m, x) = G(k_1^{i+m}, x) = G(k_1^j, x)\, G(k_1^m, F(k_1^j, x)) =$$

$$= G''(j, x)\, G''(m, F''(j, x))$$

dovedesc că $\mathcal{M}''$ este cvasimaşină.

Fie morfismele $u_i(f_i, 1_{\mathcal{X}}, 1_{\mathcal{W}}) : \mathcal{M}'' \to \mathcal{M}$, unde $f_i(j) = k_i^j$ ($i = 1,2$; $j \in N$). Relaţiile:

$$F(f_i(j), 1_{\mathcal{X}}(x)) = F(k_i^j, x) = F''(j, x) = 1_{\mathcal{X}}(F''(j, x))$$

$$G(f_i(j), 1_{\mathcal{W}}(x)) = G(k_i^j, x) = G''(j, x) = 1_{\mathcal{W}}(G''(j, x))$$

dovedesc că u_i sînt morfisme. Deoarece $k_1 \neq k_2$, rezultă $f_1(1) \neq f_2(1)$ şi deci $u_1 \neq u_2$. În plus, relaţia $ff_1(j) = f(k_1^j) = f(k_2^j) = ff_2(j)$ arată că $uu_1 = uu_2$, deci că u nu este monomorfism, contradicţie care dovedeşte că ipoteza prin care am presupus că f nu este injecţie, este falsă.

3. În categoria cvasimaşinilor orice familie de cvasimaşini posedă cel puţin un produs direct.

Fie $\{\mathcal{M}_i(\mathcal{K}_i, \mathcal{X}_i, \mathcal{W}_i, F_i, G_i)\}_{i \in I}$ o familie de cvasimaşini.

Fie cvasimaşina $\mathcal{M}(\mathcal{K}, \mathcal{X}, \mathcal{W}, F, G)$ definită prin: $\mathcal{K} = \prod\limits_{i \in I} K_i$ înzestrat cu operaţia $\{k_i'\}_{i \in I} \{k_i''\}_{i \in I} = \{k_i' k_i''\}_{i \in I}$; $\mathcal{X} = \prod\limits_{i \in I} \mathcal{X}_i$; $\mathcal{W} = \prod\limits_{i \in I} \mathcal{W}_i$ înzestrat cu operaţia $\{w_i'\}_{i \in I} \{w_i''\}_{i \in I} = \{w_i' w_i''\}_{i \in I}$;

$$F(\{k_i\}_{i \in I}, \{x_i\}_{i \in I}) = \{F_i(k_i, x_i)\}_{i \in I};$$

$$G(\{k_i\}_{i \in I}, \{x_i\}_{i \in I}) = \{G_i(k_i, x_i)\}_{i \in I}.$$

Relaţiile:

$$F(\{k_i'\}\{k_i''\}, \{x_i\}) = \{F_i(k_i' k_i'', x_i)\} = F(\{k_i''\}, F(\{k_i'\}, \{x_i\}))$$

$$G(\{k_i'\}\{k_i''\}, \{x_i\}) = \{G_i(k_i' k_i'', x_i)\} =$$

$$= G(\{k_i'\}, \{x_i\})\, G(\{k_i''\}, F(\{k_i'\}, \{x_i\}))$$

dovedesc că $\mathscr{M}$ este cvasimaşină. Fie morfismele : $u_i(f_i, g_i, h_i) : \mathscr{M} \to \mathscr{M}_i$ $(i \in I)$ definite prin :

$$f_i(\{k_j\}_{j\in I}) = k_i\,;\ g_i(\{x_j\}) = x_i\,;\ h_i(\{w_j\}) = w_i\,.$$

Egalităţile :

$$g_i(F(\{k_j\},\ \{x_j\})) = F_i(k_t, x_i) = F_i(f_i(\{k_j\}),\ g_i(\{x_j\}))$$

$$h_i(G(\{k_j\}, \{x_j\})) = G_i(k_i, x_i) = G_i(f_i(\{k_j\}), g_i(\{x_j\}))$$

dovedesc că u_i sînt morfisme.

Fie cvasimaşina $\mathscr{M}'(\mathscr{K}', \mathscr{X}', \mathscr{W}', F', G')$ şi morfismele $u_i'(f_i', g_i', h_i') : \mathscr{M}' \to \mathscr{M}_i$ $(i \in I)$. Fie morfismul $u(f, g, h) : \mathscr{M}' \to \mathscr{M}$ definit prin $f(k) = \{f_i'(k)\}$; $g(x) = \{g_i'(x)\}$; $h(w) = \{h_i'(w)\}$.

Relaţiile

$$g(F'(k, x)) = \{g_i'(F'(k, x))\} = \{F_i(f_i'(k), g_i'(x))\} = F(f(k), g(x))$$

$$h(G'(k, x)) = \{h_i'(G'(k, x))\} = \{G_i(f_i'(k), g_i'(x))\} = G(f(k), g(x))$$

dovedesc că u este morfism. Egalităţile :

$$f_i f(k) = f_i(\{f_i'(k)\}) = f_i'(k)$$

$$g_i g(x) = g_i(\{g_i'(x)\}) = g_i'(x)$$

$$h_i h(w) = h_i(\{h_i'(w)\}) = h_i'(w)$$

dovedesc că $u_i u = u_i'$. Mai mult, relaţia $u_i u = u_i'$ determină în mod unic morfismul u, ceea ce ne permite să conchidem că cvasimaşina $\mathscr{M}$ este produsul direct al familiei de cvasimaşini date.

4. În categoria cvasimaşinilor există nuclee de săgeată dublă.

Fie morfismele $u_i(f_i, g_i, h_i) : \mathscr{M}'(\mathscr{K}', \mathscr{X}', \mathscr{W}', F', G') \to \mathscr{M}''(\mathscr{K}'', \mathscr{X}'', \mathscr{W}'', F'', G'')$ $(i = 1, 2)$.

Fie cvasimaşina $\mathscr{M}(\mathscr{K}, \mathscr{X}, \mathscr{W}, F, G)$ definită prin :

$$\mathscr{K} = \{k / k \in \mathscr{K}', f_1(k) = f_2(k)\}\,;\ \mathscr{X} = \{x / x \in \mathscr{X}', g_1(x) = g_2(x)\}\,;$$

$$\mathscr{W} = \{w / w \in \mathscr{W}', h_1(w) = h_2(w)\}\,;\ F(k, x) = F'(k, x)$$

şi $G(k, x) = G'(k, x)$. Relaţiile :

$$f_1(k\,m) = f_1(k) f_1(m) = f_2(k) f_2(m) = f_2(k\,m)\,;$$

$$h_1(w\,v) = h_1(w)\,h_1(v) = h_2(w)\,h_2(v) = h_2(w\,v)\,;$$

$$g_1(F(k, x)) = g_1(F'(k, x)) = F''(f_1(k), g_1(x)) = F''(f_2(k), g_2(x)) = \\ = g_2(F(k, x))\,;$$

$$h_1(G(k, x)) = h_1(G'(k, x)) = G''(f_1(k), g_1(x)) = F''(f_2(k), g_2(x)) = \\ = h_2(G(k, x)),$$

dovedesc corectitudinea definiţiei lui $\mathscr{M}$ iar relaţiile :

$$F(km, x) = F'(km, x) = F'(m, F'(k, x)) = F(m, F(k, x)),$$

$$G(km, x) = G'(km, x) = G'(k, x)\,G'(m, F'(k, x)) = \\ = G(k, x)\,G(m, F(k, x)),$$

dovedesc că $\mathcal{M}$ este cvasimaşină. Fie morfismul $u(f, g, h) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ definit prin : $f(k) = k$, $g(x) = x$, $h(w) = w$. Egalităţile :

$$g(F(k, x)) = F(k, x) = F'(k, x) = F'(f(k), g(x))$$
$$h(G(k, x)) = G(k, x) = G'(k, x) = G'(f(k), g(x))$$

dovedesc că u este morfism.

Fie cvasimaşina $\mathcal{M}^*$ şi morfismul u' $(f', g', h') : \mathcal{M}^* \to \mathcal{M}'$ astfel încît $u_1 u' = u_2 u'$. Fie morfismul u^* $(f^*, g^*, h^*) : \mathcal{M}^* \to \mathcal{M}$ definit prin : $f^*(k) = f'(k)$; $g^*(x) = g'(x)$; $h^*(w) = h'(w)$. Relaţiile :

$$f_1(f^*(k)) = f_1 f'(k) = f_2 f'(k) = f_2(f^*(k))$$
$$g_1(g^*(x)) = g_1 g'(x) = g_2 g'(x) = f_2(g^*(x))$$
$$h_1(h^*(w)) = h_1 h'(w) = h_2 h'(w) = h_2(h^*(w))$$

dovedesc corectitudinea definiţiei lui u^*, iar relaţiile :

$$g^*(F^*(k, x)) = g'(F^*(k, x)) = F'(f'(k), g'(x)) = F'(f^*(k), g^*(x)) = \\ = F(f^*(k), g^*(x))$$
$$h^*(G^*(k, x)) = h'(G^*(k, x)) = G'(f'(k), g'(x)) = G'(f^*(k), g^*(x)) = \\ = G(f^*(k), g^*(x))$$

dovedesc că u^* este morfism. Se arată uşor că $uu^* = u'$. Mai mult, relaţia $uu^* = u'$ determină în mod unic morfismul u^* ceea ce ne permite să conchidem că cvasimaşina $\mathcal{M}$ împreună cu morfismul u este un nucleu al cuplului de morfisme u_1, u_2.

5. Bazîndu-ne pe o teoremă din [3] putem afirma că în categoria cvasimaşinilor orice sistem proiectiv are cel puţin o limită proiectivă.

6. În categoria cvasimaşinilor orice familie de cvasimaşini are cel puţin o sumă directă.

Fie $\{\mathcal{M}_i(\mathcal{K}_i, \mathcal{X}_i, \mathcal{W}_i, F_i, G_i)\}_{i \in I}$ o familie de cvasimaşini.

Fie $\mathcal{K}$ suma directă a semigrupurilor $\mathcal{K}_i$ în categoria semigrupurilor, iar $f_i : \mathcal{K}_i \to \mathcal{K}$ injecţiile canonice. Putem considera :

$$\mathcal{K} = \{k_1 k_2 \dots k_n / k_j \in \mathcal{K}_{i_j} \ (j = 1, \dots, n ;\ i_j \in I),\ i_j \neq i_{j+1} \ (j = 1, \dots, \\ \dots, n - 1),\ n \in N\}, \text{ unde}$$

$$(k_1 k_2 \dots k_n)(k'_1 k'_2 \dots k'_m) = \begin{cases} k_1 k_2 \dots k_n k'_1 \dots k'_m \text{ dacă } k_n \text{ şi } k'_i \\ \quad \text{nu fac aparte din acelaşi } \mathcal{K}_i\,. \\ k_1 \dots k_{n-1}(k_n k'_1) k'_2 \dots k'_m \\ \quad \text{în caz contrar} \end{cases}$$

şi $f_i(k) = k$ oricare ar fi $k \in \mathcal{K}_i$.

Dacă $k = k_1 k_2 \dots k_n \in \mathcal{K}$ vom spune că n este lungimea elementului k şi vom scrie $n = L(k)$. Vom nota :

$$\mathcal{K}^i = \{k = k_1 k_2 \dots k_n / k \in \mathcal{K} \text{ şi } k_1 \notin \mathcal{K}_i\}.$$

Fie $\mathcal{X} = \bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{X}_i \cup \bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{K}^i \times \mathcal{X}_i$; reuniunile fiind considerate disjuncte. Fie $g_i : \mathcal{X}_i \to \mathcal{X}$ definite prin $g_i(x)$ oricare ar fi $x \in \mathcal{X}_i$.

Fie $F : \mathcal{K} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ definită prin inducție după lungimea cuvintelor din $\mathcal{K}$ în felul următor :

$$\text{dacă } k \in \mathcal{K}_i, \text{ atunci } F(k, x) = \begin{cases} F_i(k, x) \text{ dacă } x \in \mathcal{X}_i \\ (k, x) \text{ dacă } x \in \mathcal{X}_j \text{ cu } j \neq i \\ (k^1 k, x^1) \text{ dacă } x = (k^1, x^1) \in \bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{K}^i \times \mathcal{X}_i ; \end{cases}$$

dacă $k = k' k''$, unde $L(k) = L(k') + 1$ și $L(k'') = 1$, atunci $F(k, x) = F(k'', F(k', x))$. Funcția F îndeplinește următoarele proprietăți :

$$\alpha)\ F(k_1 k_2, x) = F(k_2, F(k_1, x)), k_1,\ k_2 \in \mathcal{K},\ x \in \mathcal{X}$$

$$\beta)\ F(f_i(k),\ g_i(x)) = g_i(F_i(k, x)),\ k \in \mathcal{K}_i \text{ și } x \in \mathcal{X}_i.$$

Întrucît β se demonstrează foarte ușor , ne vom mărgini să dovedim α, demonstrația ei făcînd-o prin inducție după $L(k_2)$. Fie $k_1 = k_1^1 k_2^1 \ldots \ldots k_n^1$ și $k_2 = k_1^2 k_2^2 \ldots k_m^2$. Dacă $m = 1$, atunci :

a) Dacă $L(k_1, k_2) = n + 1$, relația α este banal verificată.

b) Presupunem $L(k_1 k_2) = n$. Dacă $n = 1$, atunci

$$F(k_1 k_2, x) = \begin{cases} F_i(k_1 k_2, x) \\ (k_1 k_2, x) \\ (k^1 k_1 k_2, x^1) \end{cases} = \begin{cases} F_i(k_2, F_i(k_1, x)) \\ F(k_2, (k_1, x)) \\ F(k_2, (k^1 k_1, x^1)) \end{cases} = F(k_2, F(k_1, x)).$$

Dacă $n = 1$, atunci

$$F(k_1 k_2, x) = F(k_n^1 k_2, F(k_1^1 k_2^1 \ldots k_{n-1}^1, x)) =$$
$$= F(k_q, F(k_n^1, F(k_1^1, k_2^1 \ldots k_{n-1}^1, x))) = F(k_2, F(k_1^1 \ldots k_n^1, x)) = F(k_2, F(k_1, x)).$$

Dacă $m \neq 1$, presupunînd că
$F(k_1(k_1^2 \ldots k_{m-1}^2), x) = F(k_1^2 k_2^2 \ldots k_{m-1}^2, F(k_1, x))$, rezultă

$$F(k_1 k_2, x) = F(k_1(k_1^2 \ldots k_{m-1}^2) k_m^2, x) = F(k_m^2, F(k_1(k_1^2 \ldots k_{m-1}^2) x)) =$$
$$= F(k_m^2, F(k_1^2 \ldots k_{n-1}^2, F(k_1, x))) = F(k_2, F(k_1, x)).$$

Fie $\mathcal{W}_1$ semigrupul liber generat de mulțimea $\mathcal{K} \times \mathcal{X} - \bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{K}_i \times \mathcal{X}_i$. Notăm cu $\mathcal{W}_0$ suma directă a familiei de semigrupuri $\{\{\mathcal{W}_i\}_{i\in I}, \mathcal{W}_1\}$ și cu $t_i : \mathcal{W}_i \to \mathcal{W}_0$, $t_1 : \mathcal{W}_1 \to \mathcal{W}_0$ injecțiile canonice. Fie $G_0 : \mathcal{K} \times \mathcal{X} \to \mathcal{W}_0$ definită prin :

$$G_0(k, x) = \begin{cases} G_i(k, x) \text{ dacă } k \in \mathcal{K}_i \text{ și } x \in \mathcal{X}_i \\ (k, x) \text{ în rest.} \end{cases}$$

Vom construi o congruență $\sim$ în $\mathcal{W}_0$ în modul descris mai jos :

În $\mathcal{W}_0$ introducem relația R definită prin : $w_1 R w_2$ dacă există $k_1, k_2 \in \mathcal{K}$ și $x \in \mathcal{X}$ astfel încît $w_1 = G_0(k_1 k_2, x)$ și $w_2 = G_0(k_1, x) G_0(k_2, F(k_1, x))$.

În $\mathcal{W}_0$ introducem relația R_1 definită prin : $w_1 R_1 w_2$ dacă $w_1 R_1 w_2$ sau $w_1 = w_2$. Relația R_1 este reflexivă. În plus $w_1 R w_2$ implică $w_1 R_1 w_2$.

În $\mathcal{W}_0$ introducem relația R_2 definită prin $w_1 R_2 w_2$ dacă $w_1 R_1 w_2$ sau $w_2 R_1 w_1$. Relația R_2 este reflexivă și simetrică. În plus $w_1 R_1 w_2$ implică $w_1 R_2 w_2$.

În $\mathcal{W}_0$ introducem relația R_3 definită prin : $w_1 R_3 w_2$ dacă $(w_1, w_2) \in \in \bigcup_{i=0}^{\infty} Y_i$, unde $Y_0 = \{(w_1, w_2)/w_1 R_2 w_2\}$ și $Y_{i+1} = Y_i \cup \{(w_1 w_2) \mid$ există $(w'_1, w'_2) \in Y_i$ și $(w''_1, w''_2) \in Y_i$ astfel încît $w_1 = w'_1 w''_1$ și $w_2 = w'_2 w''_2\}$. Relația R_3 este reflexivă, simetrică și compatibilă cu operația din semigrupul $\mathcal{W}_0$. Deoarece R_2 este reflexivă și din faptul că $w_1 R_2 w_2$ implică $w_1 R_3 w_2$, rezultă că R_3 este reflexivă. Pentru a demonstra că R_3 este simetrică, este suficient să demonstrăm prin inducție că Y_i sînt simetrice. Într-adevăr, Y_0 este simetrică deoarece R_2 este simetrică ; din $(w_1, w_2) \in \in Y_{i+1} - Y_i$ rezultă succesiv că : există $(w'_1, w'_2) \in Y_i$ deci $(w'_2, w'_1) \in Y_i$ și $(w''_1, w''_2) \in Y_i$ deci $(w''_2, w''_1) \in Y_i$ astfel încît $w_1 = w'_1 w''_1$ și $w_2 = w'_2 w''_2$, deci $(w_2, w_1) \in Y_{i+1}$. Dacă $w'_1 R_3 w'_2$ și $w''_1 R_3 w''_2$, atunci există $i_1, i_2 \in N$ așa încît $(w'_1, w'_2) \in Y_{i_1}$ și $(w''_1, w''_2) \in Y_{i_2}$; dacă $i = \max(i_1, i_2)$, atunci $(w'_1, w'_2) \in Y_i$ și $(w''_2, w''_2) \in Y_i$, de unde rezultă că $(w'_1 w''_1, w'_2 w''_2) \in Y_{i+1}$ adică $w'_1 w''_1 R_3 w'_2 w''_2$.

Definiția congruenței $\sim$ este : $w_1 \sim w_2$ dacă există $n \geqslant 0$ și $w^1, w^2, \ldots, \ldots, w^n \in \mathcal{W}_0$ astfel încît $w_1 R_3 w^1, w^1 R_3 w^2, w^2 R_3 w^3, \ldots, w^n R_3 w_2$. Mă voi mărgini să arăt că relația $\sim$ este compatibilă cu operația din semigrupul $\mathcal{W}_0$. Dacă $w'_1 \sim w'_2$ și $w''_1 \sim w''_2$, atunci există $n_1, n_2 \geqslant 0$ și $w_1^1, w_1^2, \ldots \ldots, w_1^{n_1}, w_2^1, \ldots, w_2^{n_2} \in \mathcal{W}_0$ astfel încît $w'_1 R_3 w_1^1, \ldots, w_1^{n_1} R_3 w'_2, w''_1 R_3 w_2^1, \ldots \ldots, w_2^{n_2}, R_3 w''_2$. Presupunînd $n_1 \leqslant n_2$, rezultă $w'_1 w''_1 R_3 w_1^1 w_2^1, w_1^1, w_2^1 R_3 w_1^2 w_2^2, \ldots, w_1^{n_1} w_2^{n_1} R_3 w'_2 w_2^{n_1+1}, \ldots, w'_2 w_2^{n_2} R_3 w'_2 w''_2$ adică $w'_1 w''_1 \sim w'_2 w''_2$.

Fie $\mathcal{W} = \mathcal{W}_0/\sim$ și morfismele de semigrupuri $h_i : \mathcal{W}_i \to \mathcal{W}$ definite prin $h_i(m) = \widehat{m}$ pentru $m \in \mathcal{W}_i$.

Fie $G : \mathcal{K} \times \mathcal{X} \to \mathcal{W}$ definită prin $G(k, x) = \widehat{G_0(k, x)}$. Din cele de mai sus rezultă că funcția G se bucură de următoarele proprietăți :

$$\gamma)\quad G(k_1 k_2, x) = G(k_1, x)\, G(k_2, F(k_1, x)) \quad \forall k_1, k_2 \in \mathcal{K} \text{ și } x \in \mathcal{X}.$$

$$\delta)\quad h_i(G_i(k, x)) = G(f_i(k), g_i(x)) \quad \forall i \in I,\ k \in \mathcal{K} \text{ și } x \in \mathcal{X}.$$

Din α și γ rezultă că $\mathcal{M}(\mathcal{K}, \mathcal{X}, \mathcal{W}, F, G)$ este cvasimașină, iar din β și δ rezultă că : $u_i(f_i, g_i, h_i) : \mathcal{M}_i \to \mathcal{M}$ sînt morfisme de cvasimașini.

Vom arăta că cvasimașina $\mathcal{M}$ împreună cu morfismele u_i constituie o sumă directă a familiei de cvasimașini $\{M_i\}_{i \in I}$.

Fie cvasimașina $\mathcal{M}'(\mathcal{K}', \mathcal{X}', \mathcal{W}', F', G')$ și morfismele $u'_i(f'_i, g'_i, h'_i) : : \mathcal{M}_i \to \mathcal{M}'$.

Fie $f : \mathcal{K} \to \mathcal{K}'$ un morfism de semigrupuri definit prin : dacă $k = k_1 k_2 \ldots k_n \in \mathcal{K}$, unde $k_j \in \mathcal{K}_{i_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, atunci $f(k) = = f'_{i_1}(k_1) f'_{i_2}(k_2) \ldots f'_{i_n}(k_n)$.

Fie $g : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ o funcţie definită prin:

$$g(x) = \begin{cases} g'_i(x) & \text{dacă } x \in \mathcal{X}_i \\ F'(f(k^1), g(x^1)) & \text{dacă } x = (k^1, x^1) \in \mathcal{K}^i \times \mathcal{X}_i . \end{cases}$$

Vom arăta că $g(F(k, x)) = F'(f(k), g(x))\ \forall k \in \mathcal{K}$ şi $x \in \mathcal{X}$.

Demonstraţia o vom face prin inducţie după $L(k)$.

Dacă $L(k) = 1$, atunci există $i \in I$ astfel încît $k \in \mathcal{K}_i$ şi deci $f(k) = f'_i(k)$.

Fie $x \in \mathcal{X}$. Dacă $x \in \mathcal{X}_i$, atunci $g(x) = g'_i(x)$ şi $F(k, x) = F_i(k, x)$, deci $g(F(k, x)) = g(F_i(k, x)) = g'_i(F_i(k, x)) = F'(f'_i(k), g'_i(x)) = F'(f(k), g(x))$. Dacă $x \in \mathcal{X}_j$ cu $j \neq i$, atunci $F(k, x) = (k, x)$ de unde rezultă că $g(F(k, x)) = g((k, x)) = F'(f(k), g(x))$. Dacă $x = (k^1, x^1) \in \mathcal{K}^j \times \mathcal{X}_j$, atunci $g(x) = F'(f(k^1), g(x^1))$ şi $F(k, x) = (k^1 k, x)$ de unde rezultă $g(F(k, x)) = g((k^1 k, x^1) = F'(f(k^1 k), g(x^1)) = F'(f(k^1) f(k), g(x^1)) = F'(f(k), F'(f(k^1), g(x^1)) = F'(f(k), g(x))$.

Dacă $k = k' k''$, unde $L(k) = L(k') + 1$ şi $L(k'') = 1$, atunci $g(F(k,x)) = g(F(k' k'', x)) = g(F(k'', F(k', x))) = F'(f(k''), g(F(k', x))) = F'(f(k''), F'(f(k'), g(x))) = F'(f(k') f(k''), g(x)) = F'(f(k), g(x))$.

Fie morfismul de semigrupuri $h_1 : \mathcal{W}_1 \to \mathcal{W}'$ pe care îl vom defini numai pentru $\mathcal{K} \times \mathcal{X} - \bigcup_{i \in I} \mathcal{K}_i \times \mathcal{X}_i$ care este un sistem de generatori ai lui $\mathcal{W}_1 : h_1((k, x)) = G'(f(k), g(x))$. Din definiţia sumei directe rezultă că există un unic morfism de semigrupuri $h_0 : \mathcal{W}_0 \to \mathcal{W}'$ astfel încît $h_0 t_i = h'_i\ (\forall i \in I)$ şi $h_0 t_1 = h_1$. Vom demonstra că $h_0(G_0(k, x)) = G'(f(k), g(x))\ \forall k \in \mathcal{K}$ şi $x \in \mathcal{X}$. Dacă $k \in \mathcal{K}_i$ şi $x \in \mathcal{X}_i$, atunci $h_0(G_0(k, x)) = h_0(G_i(k, x)) = h_0(t_i(G_i(k, x))) = h'_i(G_i(k, x)) = G'(f'_i(k), g'_i(x)) = G'(f(k), y(x))$. În cazul contrar avem $h_0(G_0(k, x)) = h_0((k, x)) = h_0(t_1((k, x))) = h_1((k, x)) = G'(f(k), g(x))$.

Fie morfismul de semigrupuri $h : \mathcal{W} \to \mathcal{W}'$ definit prin $h(\widehat{w}) = h_0(w)$. Este necesar să probăm corectitudinea acestei definiţii. Vom arăta la început că $w_1 R w_2$ implică $h_0(w_1) = h_0(w_2)$. Într-adevăr, dacă $w_1 R w_2$, atunci există $k_1, k_2 \in \mathcal{K}$ şi $x \in \mathcal{X}$ aşa încît $w_1 = G_0(k_1 k_2, x)$ şi $w_2 = G_0(k_1, x)\, G_0(k_2, F(k_1, x))$. Deci $h_0(w_1) = h_0(G_0(k_1 k_2, x)) = G'(f(k_1 k_2), g(x)) = G'(f(k_1) f(k_2), g(x)) = G'(f(k_1), g(x))\, G'(f(k_2), F'(f(k_1), g(x))) = h_0(G_0(k_1, x))\, G'(f(k_2), g(F(k_1, x))) = h_0(G_0(k_1, y)\, G_0(k_2, F(k_1, x))) = h_0(w_2)$.

Din aceste proprietăţi rezultă că $w_1 R_1 w_2$ implică $h_0(w_1) = h_0(w_2)$ şi deci că $w_1 R_2 w_2$ implică $h_0(w_1) = h_0(w_2)$. Pentru a arăta că $w_1 R_3 w_2$ implică $h_0(w_1) = h_0(w_1)$, este suficient să arătăm prin inducţie după i că $(w_1, w_2) \in Y_i$ implică $h_0(w_1) = h_0(w_2)$. Dacă $i = 0$, atunci $w_1 R_2 w_2$ şi deci $h_0(w_1) = h_0(w_2)$. Dacă $(w_1, w_2) \in Y_i$ implică $h_0(w_1) = h_0(w_2)$ şi dacă $(w_1, w_2) \in Y_{i+1}$, atunci sau $(w_1, w_2) \in Y_i$ deci $h_0(w_1) = h_0(w_2)$ sau $w_1 = w'_1 w''_1$ şi $w_2 = w'_2 w''_2$, unde $(w'_1\ w'_2) \in Y_i$ deci $h_0(w'_1) = h_0(w'_2)$ şi $(w''_1\ w''_2) \in Y_i$ deci $h_0(w''_1) = h_0(w''_2)$. Deci $h_0(w_1) = h_0(w'_1)\, h_0(w''_1) = h_0(w'_2 w''_2) = h_0(w_2)$. De aici rezultă uşor că $w_1 \sim w_2$ implică $h_0(w_1) = h_0(w_2)$.

Egalităţile $h(G(k, x)) = h(\widehat{G_0(k, x)}) = h_0(G_0(k, x)) = G'(f'(k), g(x))$ împreună cu egalitatea corespunzătoare de mai sus dovedesc că $u(f, g, h) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ este un morfism de cvasimaşini. În plus rezultă uşor că $u u_i = u'_i$. Vom demonstra în continuare că această relaţie îl determină în mod unic pe u.

Fie morfismul $u'\,(f', g', h') : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ cu proprietatea $u'u_i = u_i'$. De aici rezultă că $f'f_i = f_i'$ şi deci $f' = f$. Dacă $x \in \mathcal{X}_i$, atunci $g(x) = gg_i(x) = g_i'(x) = g'\,g_i(x) = g'(x)$. Dacă $x = (k^1, x^1) \in \mathcal{K}^i \times \mathcal{X}_i$ vom arăta prin inducţie după $L(k^1)$ că $g(x) = g'(x)$. Dacă $L(k^1) = 1$, atunci $g'(x) = g'((k^1, x^1)) = g'(F(k^1, x^1)), = F'(f'(k^1), g'(x^1)) = F'(f(k^1), g(x^1)) = g(F(k^1, x')) = g(x)$. Dacă $k^1 = k_1 \ldots k_n\,(n > 1)$ şi $k_1 \in \mathcal{K}_i$, atunci $g'(x) = g'((k_1 \ldots k_{n-1}\, k_n, x^1)) = g'(F(k_n, (k_1 \ldots k_{n-1}\, x'))) = F'(f'(k_n), g'((k_1 \ldots k_{n-1}, x^1))) = F'(f(k_n), g((k_1 \ldots k_{n-1}, x^1))) = g(F(k_n, (k_1 \ldots k_{n-1}, x^1))) = g((k_1 \ldots k_n, x^1)) = g(x)$. Fie morfismul de semigrupuri $h_0' : \mathcal{W}_0 \to \mathcal{W}'$ definit prin $h_0'(w) = h'(\widehat{w})$. Din definiţia lui h şi a lui h_0' se vede că pentru a demonstra că $h' = h$, este suficient să arătăm că $h_0' = h_0$, iar pentru aceasta este suficient să demonstrăm că $h_0'\,t_i = h_i'$ şi $h_0'\,t_1 = h_1$. Dacă $w \in \mathcal{W}_i$, atunci $h_0'\,t_i(w) = h_0'(\widehat{w}) = h'(w) = h'\,h_i(w) = h_i'(w)$. Relaţia $h_0'\,t_1 = h_1$ o vom demonstra numai pentru mulţimea $\mathcal{K} \times \mathcal{X} - \bigcup_{i \in I} \mathcal{K}_i \times \mathcal{X}_i$ care este un sistem de generatori pentru $\mathcal{W}_1$. Dacă $(k, x) \in \mathcal{K} \times \mathcal{X} - \bigcup_{i \in I} \mathcal{K}_i \times \mathcal{X}_i$, atunci $h_0'\,t_1((k, x)) = h_0'((k, x)) = h'(\widehat{(k, x)}) = h'(\widehat{G_0(k, x)}) = h'(G(k, x)) = G'(f'(k), g'(x)) = G'(f(k), g(x)) = h_1((k, x))$.

7. În categoria cvasimaşinilor există conuclee de săgeată dublă.

Fie morfismele $u_i\,(f_i, g_i, h_i) : \mathcal{M}_1\,(\mathcal{K}_1, \mathcal{X}_1, \mathcal{W}_1, F_1, G_1) \to \mathcal{M}_2(\mathcal{K}_2, \mathcal{X}_2, \mathcal{W}_2, F_2, G_2)$.

Vom introduce în $\mathcal{K}_2$ o congruenţă $\sim$ construită în modul următor: $k_1\,R\,k_2$ dacă $k_1 = k_2$ sau există $k \in \mathcal{K}_1$ astfel încît $k_i = f_i(k)$ $(i = 1, 2)$ sau $k_1 = f_2(k)$ şi $k_2 = f_1(k)$; $k_1\,R_1\,k_2$ dacă $(k_1, k_2) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} Y_i$, unde $Y_0 = \{(k_1, k_2)/k_1\,R\,k_2\}$ şi $Y_{i+1} = Y_i \cup \{(k_1, k_2)/\exists\,(k_1', k_2') \in Y_i$ şi $(k_1'', k_2'') \in Y_i$ astfel încît $k_1 = k_1'\,k_1''$ şi $k_2 = k_2'\,k_2''\}$; $k_1 \sim k_2$ dacă există $n \geqslant 0$ şi $k^1, k_2, \ldots, k^n \in \mathcal{K}_2$, astfel încît $k_1\,R_1\,k^1$, $k^1\,R_1\,k^2, \ldots, k^n\,R_1\,k_2$. Demonstraţia faptului că $\sim$ este congruenţă este identică cu cea dată la punctul 6. Fie $\mathcal{K} = \mathcal{K}_2/\sim$ şi $f : \mathcal{K}_2 \to \mathcal{K}$ epimorfismul canonic.

Vom introduce în $\mathcal{X}_2$ o congruenţă $\sim$ construită în modul următor: $x_1\,R_0\,x_2$ dacă există $x \in \mathcal{X}_1$ astfel încît $x_i = g_i(x)$ $(i = 1, 2)$; notăm cu $\sim_0$ relaţia de echivalenţă generată de R_0; $x_1\,R_i\,x_2$ dacă $x_1 \sim_{i-1} x_2$ sau există $k' \sim k''$ $(k', k'' \in \mathcal{K}_2)$ şi $x' \sim_{i-1} x''$ astfel încît $x_1 = F_2(k', x')$ şi $x_2 = F_2(k'', x'')$; notăm cu $\sim_i$ relaţia de echivalenţă generată de R_i; $\sim = \biguplus_{i=0}^{\infty} \sim_i$, unde prin $\biguplus$ am notat reuniunea în laticea completă a relaţiilor de echivalenţă. Fie $\mathcal{X} = \mathcal{X}_2/\sim$ şi $g : \mathcal{X}_2 \to \mathcal{X}$ epimorfismul canonic. Vom introduce în $\mathcal{W}_2$ o congruenţă $\sim$ construită în modul următor: $w_1\,R\,w_2$ dacă există $w \in \mathcal{W}_1$ astfel încît $w_i = h_i(w)$ $(i = 1, 2)$ sau există $k' \sim k''$ şi $x' \sim x''$ astfel încît $w_1 = G_2(k', x')$ şi $w_2 = G_2(k'', x'')$; $w_1 R_1 w_2$ dacă $w_1 = w_2$ sau $w_1 R w_2$; $w_1 R_2 w_2$ dacă $w_1\,R_1 w_2$ sau $w_2\,R_1 w_1$; $w_1\,R_3\,w_2$ dacă $(w_1, w_2) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} Y_i$, unde $Y_0 = \{(w_1, w_2)/w_1\ R_2 w_2\}$ şi $Y_{i+1} = Y_i \cup \{(w_1, w_2)/\exists\,(w_1', w_2') \in Y_i$ şi $(w_i'', w_2'') \in Y_i$ astfel încît $w_1 = w_1'\,w_1''$ şi $w_2 = w_2'\,w_2''\}$; $w_1 \sim w_2$ dacă există $n \geqslant 0$ şi $w^1, w^2, \ldots, w^n \in \mathcal{W}_2$, astfel încît $w_1\,R_3\,w^1$, $w^1\,R_3\,w^2, \ldots w^n\,R_3\,w_2$. Fie $\mathcal{W} = \mathcal{W}_2/\sim$ şi $h : \mathcal{W}_2 \to \mathcal{W}$ epimorfismul canonic.

Fie funcţia $F : \mathcal{K} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ definită prin $F(\widehat{k}, \widehat{x}) = \widehat{F_2(k, x)}$. Dacă $x' \sim x''$, există $n \geqslant 0$, $i_1 \geqslant 0$, $i_2 \geqslant 0, \ldots i_n \geqslant 0$, $i_{n+1} \geqslant 0$ şi $x^1, \ldots, x^n \in \mathcal{X}_2$ astfel încît $x' \sim_{i_1} x^1$, $x^1 \sim_{i_1} x^2, \ldots, x^{n-1} \sim_{i_n} x^n \, x^n \sim_{i_{n+1}} x''$. Notînd $i = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n+1} \{i_j\}$, rezultă că $x' \sim_i x''$. Dacă în plus $k' \sim k''$, atunci $F_2(k', x') \, R_{i+1} F_2(k'', x'')$ şi deci $F_2(k', x') \sim F_2(k'', x'')$. În plus rezultă uşor că F verifică relaţiile :

$$F(k_1 k_2, x) = F(k_2, F(k_1, x)) \, \forall \, k_1, k_2 \in \mathcal{K} ; \; x \in \mathcal{X}$$

şi

$$F(f(k), g(x)) = g(F_2(k, x)) \, \forall \, k \in \mathcal{K}_2 \text{ şi } x \in \mathcal{X}_2 .$$

Fie funcţia $G : \mathcal{K} \times \mathcal{X} \to \mathcal{W}$ definită prin $G(\widehat{k}, \widehat{x}) = \widehat{G_2(k, x)}$. Dacă $k' \sim k''$ şi $x' \sim x''$, atunci $G_2(k', x') \; R \; G_2(k'', x')$ şi deci $G_2(k', x') \sim G_2(k'', x'')$. În plus rezultă uşor că G verifică relaţiile : $G(k_1 k_2, x) = G(k_1, x) \, G(k_2, F(k_1, x)) \; \forall \, k_1, k_2 \in \mathcal{K}$, $x \in \mathcal{X}$ şi $G(f(k), g(x)) = h(G_2(k, x)) \; \forall \, k \in \mathcal{K}_2$ şi $x \in \mathcal{X}_2$.

Vom demonstra că cvasimaşina $\mathcal{M}(\mathcal{K}, \mathcal{X}, \mathcal{W}, F, G)$ împreună cu morfismul $u(f, g, h) : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}$ este un conucleu pentru cuplul de morfisme considerat.

Este uşor de arătat că $u u_1 = u u_2$.

Fie cvasimaşina $\mathcal{M}'(\mathcal{K}', \mathcal{X}', \mathcal{W}', F', G')$ şi morfismul $u'(f', g', h') : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}'$ astfel încît $u' u_1 = u' u_2$. Dacă există un morfism $u_3(f_3, g_3, h_3) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ astfel încît $u_3 u = u'$, este necesar ca u_3 să fie definit prin : $f_3(\widehat{k}) = f'(k), g_3(\widehat{x}) = g'(x) ; h_3(\widehat{w}) = h'(w)$ fapt care dovedeşte unicitatea lui. Vom arăta că aceste relaţii definesc un morfism.

Din relaţia $f' f_1 = f' f_2$ rezultă că $k_1 R \, k_2$ implică $f'(k_1) = f'(k_2)$. Pentru a arăta că $k_1 R_1 k_2$ implică $f'(k_1) = f'(k_2)$ este suficient să arătăm prin inducţie după i că $(k_1, k_2) \in Y_i$ implică $f'(k_1) = f'(k_2)$. Dacă $i = 0$, atunci $k_1 \, R \, k_2$ şi deci $f'(k_1) = f'(k_2)$. Dacă $(k_1, k_2) \in Y_i$, implică $f'(k_1) = f'(k_2)$ şi dacă $(k_1, k_2) \in Y_{i+1}$, atunci sau $(k_1, k_2) \in Y_i$, deci $f'(k_1) = f'(k_2)$ sau $k_1 = k_1' k_1''$ şi $k_2 = k_2' k_2''$, unde $(k_1', k_2') \in Y_i$, deci $f'(k_1') = f'(k_2')$ şi $(k_1'', k_2'') \in Y_i$, deci $f'(k_1'') = f'(k_2'')$. Deci $f'(k_1) = f'(k_1') f'(k_1'') = f'(k_2' k_2'') = f'(k_2)$. De aici rezultă uşor că $k_1 \sim k_2$ implică $f'(k_1) = f'(k_2)$.

Dacă $x_1 \sim x_2$, atunci există $i \geqslant 0$ astfel încît $x_1 \sim_i x_2$. Pentru a arăta că g_3 este bine definit, este suficient să arătăm prin inducţie după i că $x_1 \sim_i x_2$ implică $g'(x_1) = g'(x_2)$. Pentru $i = 0$, din relaţia $g' g_1 = g' g_2$ rezultă că $x_1 R_0 x_2$ implică $g'(x_1) = g'(x_2)$ şi de aici rezultă că $x_1 \sim_0 x_2$ implică $g'(x_1) = g'(x_2)$. Dacă $x_1 \sim_{i+1} x_2$, atunci există $n \geqslant 0$ şi $x^1, \ldots, x^n \in \mathcal{X}_2$ astfel încît $x_1 R_{i+1} x^1$, $x^1 R_{i+1} x^2, \ldots, x^n R_{i+1} x_2$, deci este suficient să dovedim că dacă $x_1 \sim_i x_2$ implică $g'(x_1) = g'(x_2)$, atunci $x_1 R_{i+1} x_2$ implică $g'(x_1) = g'(x_2)$. Dacă $x_1 R_{i+1} x_2$, atunci $x_1 \sim_i x_2$ deci $g'(x_1) = g'(x_2)$ sau există $k' \sim k''$ şi $x' \sim_i x''$ astfel încît $x_1 = F_2(k', x'), x_2 = F_2(k', x')$ şi în aceste condiţii avem $g'(x_1) = g'(F_2(k', x')) = F'(f'(k'), g'(x')) = F'(f'(k''), g'(x'')) = g'(F_2(k'', x'')) = g'(x_2)$. Dacă $w_1 R w_2$, atunci $w_i = h_i(w)$ $(i = 1, 2)$, deci $h'(w_1) = h'(w_2)$ sau $w_1 = G_2(k', x')$ şi $w_2 = G_2(k'', x'')$ cu $k' \sim k''$ şi $x' \sim x''$ deci $h'(w_1) = h'(G_2(k', x')) = G'(f'(k'), g'(x')) = G'(f'(k''), g'(x'')) = h'(G_2(k'', x'')) = h'(w_2)$.

Din $w_1 R_2 w_2$ rezultă $h'(w_1) = h'(w_2)$. Pentru a dovedi că $w_1 R_3 w_2$ implică $h'(w_1) = h'(w_2)$ este suficient să demonstrăm prin inducţie după i că

$(w_1, w_2) \in Y_i$ implică $h'(w_1) = h'(w_2)$. Pentru $i = 0$ acest lucru este evident. Dacă $(w_1, w_2) \in Y_{i+1}$, atunci $(w_1 w_2) \in Y_i$ deci $h'(w_1) = h'(w_2)$ sau $w_1 = w_1' w_1''$ şi $w_2 = w_2' w_2''$ cu $(w_1' w_2') \in Y_i$ deci $h'(w_1') = h'(w_2')$ şi $(w_1'', w_2'') \in Y_i$ deci $h'(w_1'') = h'(w_2'')$ de unde $h'(w_1) = h'(w_1')h'(w_1'') = h'(w_2' w_2'') = h'(w_2)$. Acum este evident că $w_1 \sim w_2$ implică $h'(w_1) = h'(w_2)$.

Relaţiile :

$$g_3(F(\widehat{k}, \widehat{x})) = g_3(\widehat{F_2(k, x)}) = g'(F_2(k, x)) = F'(f'(k), g'(x)) =$$

$$= F'(f_3(\widehat{k}), g_3(\widehat{x})) \text{ şi } h_3(G(\widehat{k}, \widehat{x})) = h_3(\widehat{G_2(k, x)}) = h'(G_2(k, x)) = G'(f'(k),$$

$$g'(x)) = G'(f_3(\widehat{k}), g_3(\widehat{x}))$$

dovedesc că u_3 este morfism de cvasimaşini.

8. Bazîndu-ne pe o teoremă din [3] putem afirma că în categoria cvasimaşinilor orice sistem inductiv are cel puţin o limită inductivă.

Primită la redacţie la 8 noiembrie 1967

Universitatea din Bucureşti
Facultatea de matematică şi mecanică,
Str. Academiei nr. 14.

SUR LA CATÉGORIE DES QUASIMACHINES

(RÉSUMÉ)

Dans cette note on présente quelques propriétés de la catégorie des quasimachines : la structure des monomorphismes et des isomorphismes, l'existence des limites projectives et des limites inductives.

BIBLIOGRAFIE

1. Gr. C. Moisil, *Capitole speciale de maşini de calcul*. Facultatea de matematică şi mecanică, Universitatea din Bucureşti.
2. I. Bucur, *Algebra omologică*. Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1966.
3. M. Jurchescu, *Teoria categoriilor* (în *Topologie, Categorii, Suprafeţe riemaniene* de C. Andreian-Cazacu, A. Deleanu şi M. Jurchescu, Ed. Academiei, Bucureşti, 1967).

Δ-DOMINARE ȘI DOMINARE CONDIȚIONATĂ ÎN GRAMATICA ALGEBRICĂ

DE

CONSTANTIN V. CRĂCIUN

Se face un studiu al cîtorva clase de sublimbaje, definite aproape la fel ca și cele din [8], [9] și [10], dar în care relația de *Δ-dominare* este înlocuită cu relația de *dominare condiționată* introdusă în [7].

I

Vom aminti, la început, noțiunile și rezultatele pe care le vom folosi în lucrare.

Fie V o mulțime nevidă (*vocabularul*). Elementele mulțimii V vor fi numite cuvinte. Notăm cu $L(V)$ semigrupul liber generat de V. Se numește *limbaj* pe vocabularul V, orice submulțime L a mulțimii $L(V)$. Frazele din L se numesc *marcate* sau *reperate* (în raport cu L).

Dacă $u \in L(V)$ și $v \in L(V)$, atunci cuplul ordonat (u, v) este numit *context* pe V. Fie $x \in V$ și $y \in V$. Spunem că x *domină* pe y și scriem $x \rightarrow y$, dacă pentru orice context (u, v) are loc implicația : $uxv \in L \Rightarrow uyv \in L$.

Dacă $x \rightarrow y$ și $y \rightarrow x$, se spune că x este *echivalent* sau *congruent* cu y (în raport cu L) și se scrie $x \longleftrightarrow y$ ([1], [2], [3], [4]). I. I. Revzin a relativizat relațiile $\rightarrow$ și $\longleftrightarrow$.

Fie $\Delta \subseteq L$, $x \in V$ și $y \in V$. Spunem că x *Δ-domină* pe y și scriem $x \underset{\Delta}{\rightarrow} y$, dacă oricare ar fi contextul (u,v) are loc implicația : $uxv \in \Delta \Rightarrow uyv \in \Delta$. Dacă au loc în același timp relațiile $x \underset{\Delta}{\rightarrow} y$ și $y \underset{\Delta}{\rightarrow} x$, spunem despre cuvintele x și y că sînt *Δ-echivalente* sau *Δ-congruente* și scriem $x \underset{\Delta}{\longleftrightarrow} y$.

Bazîndu-se pe unele situații întîlnite în limbile rusă și poloneză [5], Revzin a considerat sublimbajele $\Delta \subseteq L$ ce satisfac condiția :

(1) $$x \longleftrightarrow y \Rightarrow x \underset{\Delta}{\longleftrightarrow} y.$$

Sublimbajele Δ ale lui L ce satisfac proprietatea (1) se numesc *fragmente regulate* ([6]).

În [7], L. Nebeský a introdus relaţia de *dominare condiţionată* dată de definiţia 1 de mai jos.

Fie $x \in V$, $y \in V$ şi $M \subseteq L(V)$, $N \subseteq L(V)$.

DEFINIŢIA 1. Spunem că x *domină condiţionat* pe y (în raport cu M şi N) şi scriem $x \xrightarrow[M|N]{} y$, dacă pentru orice context (u, v) are loc implicaţia :

$$(uxv \in N,\ uyv \in N) \Rightarrow (uxv \in M \Rightarrow uyv \in M).$$

Definiţia 1 este echivalentă [7] cu :

DEFINIŢIA 2. Spunem că x domină condiţionat pe y (în raport cu M şi N) şi scriem $x \xrightarrow[M|N]{} y$, dacă pentru orice context (u, v) are loc implicaţia :

$$uxv \in M \cap N \Rightarrow uyv \in M \cup (L(V) - N).$$

Observaţii. 1) Din definiţia 1 rezultă că dacă $M \cap N = 0$, atunci orice cuvînt x domină orice cuvînt y în raport cu M şi N.

2) Dacă $N = L(V)$, avem $x \xrightarrow[M]{} y$. Relaţia de dominare condiţionată este identică, deci, în acest caz, cu relaţia de dominare a lui Dobrušin.

În [7] este demonstrată

TEOREMA A. *Oricare ar fi $a \in V$, $b \in V$ şi oricare ar fi M, N, $N' \subseteq L(V)$, avem :*

I. $a \xrightarrow[M|M]{} b$.

II. *Dacă* $a \xrightarrow[M|N']{} b$ *şi* $N \subseteq N'$, *atunci* $a \xrightarrow[M|N]{} b$.

III. $a \xrightarrow[0|M]{} b$.

IV. *Dacă* $a \xrightarrow[M|N]{} b$, *atunci* $a \xrightarrow[M \cap N|N]{} b$.

V. *Dacă* $N \subseteq M$, *atunci* $a \xrightarrow[M|N]{} b$.

VI. $a \xrightarrow[M|0]{} b$.

VII. *Dacă* $a \xrightarrow[M|N]{} b$, *atunci* $b \xrightarrow[L-M|N]{} a$.

VII′. *Dacă* $a \xrightarrow[M]{} b$, *atunci* $b \xrightarrow[L-M]{} a$.

VIII. *Dacă* $a \xrightarrow[M|N]{} b$, *atunci* $b \xrightarrow[N-M|N]{} a$.

IX. $a \xrightarrow[M|N]{} a$.

II

Vom face, mai întîi, legătura dintre relaţia de Δ-dominare, studiată în [8], [9] şi [10] şi cea de dominare condiţionată introdusă în [7].

PROPOZIŢIA 1. *Fie L un limbaj pe un vocabular V, $a \in V$, $b \in V$, $\Delta \subseteq L$ şi $B \subseteq L$.*

Dacă $a \xrightarrow[\Delta]{} b$, *atunci* $a \xrightarrow[\Delta|B]{} b$.

Demonstraţie. Presupunem că $a \xrightarrow[\Delta]{} b$ şi totuşi nu avem $a \xrightarrow[\Delta|B]{} b$. Rezultă că există un context (u, v) cu proprietăţile : $uav \in B$, $ubv \in B$ (deci $uav \in L$, $ubv \in L$), $uav \in \Delta$ şi $ubv \notin \Delta$. Atunci nu avem $a \xrightarrow[\Delta]{} b$ (absurd).

Reciproca propoziției 1 nu este adevărată, așa cum rezultă din

PROPOZIȚIA 2. *Există un limbaj L pe un vocabular V, două sublimbaje Δ și B ale lui L și două cuvinte $x, y \in V$, astfel încît $x \xrightarrow[\Delta|B]{} y$, dar nu avem $x \xrightarrow[\Delta]{} y$.*

Demonstrație. Fie $V = \{a, b, c, d\}$. Considerăm limbajul $L = \{aa, ab, ba, ad, da, bb, bd, ca, db\}$. Punem $\Delta = \{aa, ab, ad, ba, bb, bd, ca, db\}$ și $B = \{aa, ab, ad, ba, bb, bd, ca, da, db\}$. Constatăm că avem $a \xrightarrow[\Delta|B]{} b$ dar nu avem $a \xrightarrow[\Delta]{} b$, deoarece $ca \in \Delta$ și $cb \notin \Delta$.

Propoziția 2 este astfel demonstrată.

Să considerăm un limbaj L pe un vocabular V, $\Delta \subseteq L$ și $B \subseteq L$.

Notăm $M = \{(x, y) \in V \times V : x \xrightarrow[\Delta]{} y\}$ și $N = \{(x, y) \in V \times V : x \xrightarrow[\Delta|B]{} y\}$.

Ținînd seama de propozițiile 1 și 2 de mai sus, rezultă că are loc incluziunea $M \subseteq N$ și că uneori această incluziune este strictă.

Fie B un sublimbaj al unui limbaj L pe un vocabular V.

În [8] este studiată clasa $\mathcal{D}$ a sublimbajelor $\Delta \subseteq L$ astfel ca: Dacă $x \xrightarrow[\Delta]{} y$, atunci $x \rightarrow y$.

În cele ce urmează ne propunem să studiem o problemă asemănătoare, bazîndu-ne pe relația de dominare condiționată [7]. Considerăm clasa de sublimbaje

$$\mathcal{C}(B) = \{\Delta \subseteq L : x \xrightarrow[\Delta|B]{} y \Rightarrow x \rightarrow y\}. \tag{2}$$

Pentru ușurarea scrierii, vom nota uneori această clasă numai cu $\mathcal{C}$. Vom da cîteva proprietăți ale clasei $\mathcal{C}$. În baza propoziției 3 de mai jos, va rezulta că $\mathcal{C}$ nu este totdeauna vidă.

PROPOZIȚIA 3. *Există un limbaj L pe un vocabular V, Δ și B două sublimbaje ale lui L, nevide, astfel încît $\Delta \in \mathcal{C}$ (B).*

Demonstrație. Considerăm $V = \{a, b, c\}$. Fie $L = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, b, c\}$. Punem $\Delta = \{ab, ac\}$ și $B = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$. Singurele perechi de cuvinte distincte (x, y) cu proprietatea $x \xrightarrow[\Delta|B]{} y$ sînt (c, b) și (b, c). Deoarece $c \rightarrow b$ și $b \rightarrow c$, rezultă că $\Delta \in \mathcal{C}(B)$.

Legătura dintre clasa $\mathcal{C}$ și clasa $\mathcal{D}$ [8] este dată de

PROPOZIȚIA 4. *Oricare ar fi limbajul L, are loc incluziunea*

$$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}.$$

Demonstrația propoziției 4 este imediată, ținînd seama de propoziția 1. Propoziția care urmează ne arată că nu avem egalitate între cele două clase.

PROPOZIȚIA 5. *Există un limbaj L pe un vocabular V, B și Δ două sublimbaje ale sale, nevide, astfel încît $\Delta \in \mathcal{D}$ și $\Delta \notin \mathcal{C}$ (B).*

Demonstrație. Fie $V = \{a, b, c, d\}$. Considerăm limbajul $L = \{ab, bb, bc, bd, cb, cc, cd, db, dc, dd, a, d\}$ și sublimbajele: $B = \{ab, bb, bc, bd, cb, cc, cd, db, dc, dd\}$, $\Delta = \{ab, bc, bd, cb, cd, db, dc, dd\}$. Singurele cuvinte distincte x și y astfel ca $x \xrightarrow[\Delta]{} y$ sînt: $x = a$, $y = c$, $x = a$, $y = d$, și $x = c$, $y = d$. Deoarece avem $a \rightarrow c$, $a \rightarrow d$ și $c \rightarrow d$, rezultă că $\Delta \in \mathcal{D}$. Dar $\Delta \notin \mathcal{C}(B)$, deoarece $b \xrightarrow[\Delta|B]{} d$ și totuși nu avem $b \rightarrow d$.

Ne propunem, în continuare, să vedem cum se comportă clasa $\mathcal{C}$ față de principalele operații cu mulțimi : reuniunea, intersecția și complementara. Vom ajunge la concluzia că proprietățile algebrice ale supraclasei $\mathcal{D}$, studiate în [8], se vor menține și în cadrul clasei $\mathcal{C}$.

PROPOZIȚIA 6. *Există un limbaj L pe un vocabular V și sublimbajele sale, B, Δ_1 și Δ_2 astfel încît $\Delta_1 \in \mathcal{C}(B)$, $\Delta_2 \in \mathcal{C}(B)$, dar $\Delta_1 \cup \Delta_2 \notin \mathcal{C}(B)$.*

Demonstrație. Fie $V = \{a, b, c\}$, $L = \{a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cca, ccb\}$, $B = L - \{cca, ccb\}$, $\Delta_1 = \{a, b, ac, bc, cb\}$ și $\Delta_2 = \{c, ab, bb\}$.

Punînd $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ rezultă că $\Delta = \{a, b, c, ab, ac, bb, bc, cb\}$. Singura pereche de cuvinte distincte (x, y) cu proprietatea $x \xrightarrow[\Delta_1|B]{} y$ este (a, b). Deoarece $a \rightarrow b$, rezultă că $\Delta_1 \in \mathcal{C}(B)$. De asemenea, unica pereche de cuvinte distincte (x, y) astfel ca $x \xrightarrow[\Delta_2|B]{} y$, este (a, b). Cum $a \rightarrow b$, rezultă că $\Delta_2 \in \mathcal{C}(B)$. Totuși, $\Delta_1 \cup \Delta_2 \notin \mathcal{C}(B)$, deoarece avem $b \xrightarrow[\Delta|B]{} c$ și nu avem $b \rightarrow c$.

PROPOZIȚIA 7. *Există un limbaj L pe un vocabular V și B, Δ_1, Δ_2 sublimbaje ale sale, astfel încît $\Delta_1 \in \mathcal{C}(B)$, $\Delta_2 \in \mathcal{C}(B)$ și $\Delta_1 \cap \Delta_2 \notin \mathcal{C}(B)$.*

Demonstrație. Fie $V = \{a, b, c, d\}$. Considerăm limbajul $L = \{ab, ad, bb, bc, bd, cb, cc, cd, da, db, dc, dd, bbd, bbb, bbbb\}$ și sublimbajele $B = L - \{bbbb\}$, $\Delta_1 = \{bb, bc, bd, cb, db, dd\}$, $\Delta_2 = \{cd, db, dd, bbb\}$. Punem $\Delta = \Delta_1 \cap \Delta_2$. Avem $\Delta = \{db, dd\}$. Singurele perechi de cuvinte distincte (x, y) care au proprietatea $x \xrightarrow[\Delta_1|B]{} y$ sînt : (a, b), (a, c), (a, d), (c, b), (d, b) și (c, d). Deoarece $a \rightarrow b$, $a \rightarrow c$, $a \rightarrow d$, $c \rightarrow b$, $d \rightarrow b$ și $c \rightarrow d$, rezultă că $\Delta_1 \in \mathcal{C}(B)$.

Perechile de cuvinte distincte (x, y) cu proprietatea $x \xrightarrow[\Delta_2|B]{} y$ sînt (a, b), (a, c), (a, d) și (c, d). Dar $a \rightarrow b$, $a \rightarrow c$, $a \rightarrow d$ și $c \rightarrow d$. Deci $\Delta_2 \in \mathcal{C}(B)$.

Deoarece avem $b \xrightarrow[\Delta|L]{} d$ și nu avem $b \rightarrow d$, rezultă că $\Delta \notin \mathcal{C}(B)$ și propoziția 7 este demonstrată.

Propoziția care urmează ne arată că $\mathcal{C}(B)$ nu este închisă nici în raport cu operația de luare a complementarei.

PROPOZIȚIA 8. *Există un limbaj L pe un vocabular V și B, Δ, sublimbaje ale sale, astfel încît $\Delta \in \mathcal{C}(B)$ și $L - \Delta \notin \mathcal{C}(B)$.*

Demonstrație. Considerăm $V = \{a, b, c\}$. Fie $L = \{c, cccc, ab, ba, ac, ca, bb, cb, bc, cc, aa, ccc\}$, $B = L - \{c, cccc\}$ și $\Delta = \{cc, bc, ccc\}$. Atunci $L - \Delta = \{c, cccc, ab, ba, ac, cb, ca, bb, aa\}$.

Singurele perechi de cuvinte distincte (x, y) cu proprietatea $x \xrightarrow[\Delta|B]{} y$ sînt : (a, b), (a, c) și (b, c). Deoarece $a \rightarrow b$, $a \rightarrow c$ și $b \rightarrow c$, rezultă că $\Delta \in \mathcal{C}(B)$. Dar $L - \Delta \notin \mathcal{C}(B)$, deoarece avem $c \xrightarrow[L-\Delta|B]{} a$ și nu avem $c \rightarrow a$.

III

Notăm cu $\mathcal{D}_1$ clasa perechilor (A, B) de sublimbaje ale unui limbaj L pe un vocabular V, definită astfel :

$$\mathcal{D}_1 = \{(A, B) \in L \times L : x \rightarrow y \Rightarrow x \xrightarrow[A|B]{} y\}.$$

Din cele ce urmează va rezulta că pentru orice limbaj L, clasa $\mathcal{D}_1$ asociată nu este *niciodată* vidă.

Vom da cîteva proprietăţi ale clasei $\mathcal{D}_1$.

P_1. *Oricare ar fi* $A \subseteq L$, *avem* $(A, A) \in \mathcal{D}_1$. Această proprietate rezultă din teorema A.

COROLAR. *Pentru orice limbaj* L *avem* : $(L, L) \in \mathcal{D}_1$.

P_2. *Oricare ar fi* $B \subseteq L$, *avem* $(O, B) \in \mathcal{D}_1$. Rezultă imediat din teorema A.

P_3. *Dacă* $(A, B) \in \mathcal{D}_1$, *atunci* $(A \cap B, B) \in \mathcal{D}_1$. Pentru demonstraţie se ţine seama de punctul IV al teoremei A.

P_4. *Pentru orice pereche* (A,B) *de sublimbaje ale limbajului* L, *cu condiţia* $B \subseteq A$, *avem* $(A, B) \in \mathcal{D}_1$.

Proprietatea P_4 este o consecinţă imediată a teoremei A (punctul V).

COROLAR. *Oricare ar fi* $B \subseteq L$, *avem* $(L, B) \in \mathcal{D}_1$.

P_5. *Dacă* $A \subseteq L$, *atunci* $(A, O) \in \mathcal{D}_1$. Rezultă din teorema A (punctul VI)

P_6. *Dacă* $(A_i, B_i) \in \mathcal{D}_1$, $i = 1, 2$, *atunci* $(A_1 \cup A_2, B_1 \cap B_2) \in \mathcal{D}_1$.

Demonstraţie. Fie $x \in V$, $y \in V$ cu proprietatea : $x \rightarrow y$. Considerăm contextul (u, v) astfel ca

$$uxv \in B_1 \cap B_2 \text{ şi } uyv \in B_1 \cap B_2. \tag{3}$$

Din (3) rezultă :

$$uxv \in B_1, \quad uyv \in B_1 \tag{4}$$

şi

$$uxv \in B_2, \quad uyv \in B_2. \tag{5}$$

Din ipoteză şi din (4) rezultă că are loc implicaţia

$$uxv \in A_1 \Rightarrow uyv \in A_1. \tag{6}$$

Deoarece $(A_2, B_2) \in \mathcal{D}_1$, din (5) rezultă :

$$uxv \in A_2 \Rightarrow uyv \in A_2. \tag{7}$$

Fie $uxv \in A_1 \cup A_2$. Distingem două cazuri :

I) $uxv \in A_1$. Ţinînd seama de (6), rezultă că

$$uyv \in A_1 \cup A_2 \tag{8}$$

II) $uxv \in A_2$. Din (7), rezultă că

$$uyv \in A_1 \cup A_2. \tag{9}$$

Ţinînd seama de ipoteză, de (8) şi de (9), rezultă că avem :

$$(A_1 \cup A_2, B_1 \cap B_2) \in \mathcal{D}_1, \text{ c.c.t.d.}$$

P_7. *Dacă* $(A, B) \in \mathcal{D}_1$ *şi* $(A', B') \in \mathcal{D}_1 (A \neq A', B \neq B')$, *atunci avem* :

7.1) $(A, B - B') \in \mathcal{D}_1$;

7.2) $(A', B' - B) \in \mathcal{D}_1$;

7.3) $(A \cup B, B - B') \in \mathcal{D}_1$;

7.4) $(A \cup B, B' - B) \in \mathcal{D}_1$.

Demonstrație. Proprietățile 7.1 și 7.2 rezultă imediat, ținînd seama de incluziunile $B-B' \subseteq B$, $B'-B \subseteq B'$ și de teorema A (Punctul II).

Pentru a demonstra proprietatea 7.3, să considerăm $x \in V$ și $y \in V$ astfel încît $x \rightarrow y$.

Fie contextul (u, v) cu proprietatea : $uxv \in B - B'$ și $uyv \in B - B'$. Deoarece $B-B' \subseteq B$, rezultă că (u, v) face parte din mulțimea contextelor (α, β) cu proprietatea :

$$\alpha x \beta \in B \quad \text{și} \quad \alpha y \beta \in B \tag{10}$$

Fie $uvx \in A \cup B$. Avem două posibilități.

1) $uxv \in A$ și deci $uyv \in A \cup B$ (deoarece are loc (10) și $(A, B) \in \mathcal{D}_1$)

sau

2) $uxv \in B$. Din motive asemănătoare ca la punctul 1) rezultă că $uyv \in A \cup B$. Proprietatea 7.3 este demonstrată. Proprietatea 7.4 se demonstrează la fel ca și proprietatea 7.3.

Proprietățile P_1 și P_2 justifică afirmația făcută la început că $\mathcal{D}_1$ nu este niciodată vidă.

Propoziția ce urmează arată că $\mathcal{D}_1$ nu conține totdeauna numai perechi de sublimbaje date de proprietățile P_1 și P_2.

PROPOZIȚIA 9. *Există un limbaj L pe un vocabular V și o pereche (A, B) de sublimbaje ale sale, $0 \neq A \neq L$, $0 \neq B \neq L$, astfel încît $(A, B) \in \mathcal{D}_1$.*

Demonstrație. Considerăm un limbaj L și un sublimbaj Δ cu proprietatea :

$$x \rightarrow y \Rightarrow x \underset{\Delta}{\rightarrow} y. \tag{11}$$

Proprietățile unor asemenea sublimbaje Δ au fost studiate în [9]. Luînd $A = \Delta$ și B orice parte strictă a lui L, avem :

$$x \rightarrow y \Rightarrow x \xrightarrow[\Delta | B]{} y. \tag{12}$$

Într-adevăr, fie $x \in V$, $y \in V$ astfel încît $x \rightarrow y$.

Din (11) rezultă că $x \underset{\Delta}{\rightarrow} y$. Deci oricare ar fi contextul (α, β) avem :

$$\alpha x \beta \in \Delta \Rightarrow \alpha y \beta \in \Delta \tag{13}$$

În particular, implicația (13) este verificată și pentru contextele (u, v) pentru care $uxv \in B$ și $uyv \in B$.

IV

Fie B un sublimbaj al unui limbaj L pe un vocabular V. Vom nota

$$\mathcal{D}_2(B) = \{\Delta \subseteq L : x \rightarrow y \Rightarrow x \xrightarrow[\Delta | B]{} y\},$$

unde $x \in V$ și $y \in V$.

În cele ce urmează, pentru simplificarea scrierii, vom pune în loc de $\mathcal{D}_2(B)$ pur și simplu $\mathcal{D}_2$.

Fie $\mathcal{D}_0 = \{\Delta \subseteq L : x \to y \Rightarrow x \xrightarrow[\Delta]{} y\}$. Din propoziția de mai sus rezultă următorul :

COROLAR. *Pentru orice limbaj L pe un vocabular dat V avem :*

$$\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}_2 .$$

Nu avem totdeauna egalitate, așa cum arată :

PROPOZIȚIA 10. *Există un limbaj L pe un vocabular V, două sublimbaje Δ și B ale sale astfel încît $\Delta \in \mathcal{D}_2\ (B)$ și $\Delta \notin \mathcal{D}_0$.*

Demonstrație. Fie $V = \{a, b, c, d\}$, $L = \{ab, ad, bb, bd, bc, ac, ca, cc, cb\}$, $\Delta = \{ab, bb, ac\}$ și $B = \{ab, bb, ca\}$.

Avem $a \to b$. Deoarece nu are loc $a \xrightarrow[\Delta]{} b$, rezultă că $\Delta \notin \mathcal{D}_0$. Se constată că singurele perechi de cuvinte distincte (x, y) cu proprietatea $x \to y$ sînt : (a, b) și (d, b).

Deoarece avem $a \xrightarrow[\Delta|B]{} b$ și $d \xrightarrow[\Delta|B]{} b$. rezultă că $\Delta \in \mathcal{D}_2$ și propoziția 10 este demonstrată.

În baza celor arătate mai sus, rezultă despre clasa $\mathcal{D}_2$ că este o supraclasă a clasei $\mathcal{D}_0$, studiată în [9] de către S. Marcus. În continuare, ne propunem să studiem cîteva proprietăți algebrice ale clasei $\mathcal{D}_2$, pentru a vedea în ce măsură proprietățile subclasei $\mathfrak{D}_0$ se păstrează la clasa $\mathcal{D}_2$.

Vom demonstra mai întîi :

PROPOZIȚIA 11. *Orice reuniune : $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ de mulțimi A_γ din $\mathcal{D}_2$ aparține tot clasei $\mathcal{D}_2$.*

Demonstrație. Fie $a \in V$ și $b \in V$ astfel ca $a \to b$. Deoarece $A_\gamma \in \mathcal{D}_2$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$, rezultă că $a \xrightarrow[A_\gamma|B]{} b$, oricare ar fi $\gamma \in \Gamma$. Deci, pentru orice context (u, v) și pentru orice $\gamma \in \Gamma$ are loc implicația :

$$(uav \in B \text{ și } ubv \in B) \Rightarrow (uav \in A_\gamma \Rightarrow ubv \in A_\gamma). \tag{14}$$

Fie (u, v) astfel ca $uav \in B$ și $ubv \in B$. Presupunem că $uav \in \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$. Rezultă că există $\gamma \in \Gamma$ astfel ca

$$uav \in A_\gamma. \tag{15}$$

Ținînd seama de (14), din (15) rezultă că $ubv \in A_\gamma \subseteq \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$.

Deci, dacă $uav \in \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$, atunci $ubv \in \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ și astfel are loc implicația :

$$a \to b \Rightarrow a \xrightarrow[\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma/B]{} b$$

care demonstrează propoziția 11.

PROPOZIȚIA 12. *Orice intersecție : $\bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ de mulțimi A_γ din clasa $\mathcal{D}_2$ aparține tot clasei $\mathcal{D}_2$.*

Demonstrație. Fie $A_\gamma \in \mathcal{D}_2$ $(\gamma \in \Gamma)$. Înseamnă că au loc implicațiile :

$$a \to b \Rightarrow a \xrightarrow[A_\gamma/B]{} b$$

pentru orice $\gamma \in \Gamma$. Rezultă că oricare ar fi contextul (u, v) avem :

(16) $$(uav \in B \text{ şi } ubv \in B) \Rightarrow (uav \in A_\gamma \Rightarrow ubv \in A_\gamma)$$

pentru orice $\gamma \in \Gamma$. Fie (u, v) astfel ca $uav \in B$ şi $ubv \in B$. Presupunem că $uav \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$. Deci, oricare ar fi $\gamma \in \Gamma$, avem : $uav \in A_\gamma$. Ţinînd seama de (16), rezultă că $ubv \in A_\gamma$, oricare ar fi $\gamma \in \Gamma$ şi deci $ubv \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$. Deci are loc implicaţia

$$a \to b \Rightarrow a \xrightarrow[\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma/B]{} b$$

şi propoziţia 12 este demonstrată.

PROPOZIŢIA 13. *Oricare ar fi limbajul L, avem :* $O \in \mathcal{D}_2$ *şi* $L \in \mathcal{D}_2$.

Demonstraţia rezultă imediat ţinînd seama de P_2 şi de corolarul de la P_4, ale clasei $\mathcal{D}_1$ studiate în capitolul III.

Propoziţiile 11, 12 şi 13 demonstrează :

TEOREMA 1. *Clasa $\mathcal{D}_2$ asociată unui limbaj L pe un vocabular V este o latice distributivă.*

COROLAR. *Dacă $(A_n)_{n\in N}$ este un şir de mulţimi din $\mathcal{D}_2$ atunci :* lim sup $A_n \in \mathcal{D}_2$ *şi* lim inf $A_n \in \mathcal{D}_2$.

PROPOZIŢIA 14. *Există un limbaj L pe un vocabular V şi două sublimbaje $\Delta \subset L$, $B \subset L$, astfel încît :*

$$\Delta \in \mathcal{D}_2(B) \text{ şi } L - \Delta \notin \mathcal{D}_2(B).$$

Demonstraţie : Fie $V = \{a, b, c, d\}$, $L = \{ab, ac, ad, bb, bd, bc, ca, cc, cb, db, dc, dd, cd\}$, $\Delta = \{ab, bb, bc, db, ac, cd\}$ şi $B = \{ab, bb, bc, ca, db, cd\}$. Atunci $L - \Delta = \{ad, bd, ca, cc, cb, dc, dd\}$. Constatăm că singurele perechi de cuvinte distincte (x, y) cu proprietatea $x \to y$ sînt : (a,b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d) (d, b) şi (d, c). Deoarece avem şi $x \to y$, rezultă că $\Delta \in \mathcal{D}_2(B)$. Totuşi $L - \Delta \notin \mathcal{D}_2(B)$. Într-adevăr, avem $a \to d$, dar nu avem $a \xrightarrow[L-\Delta|B]{} d$, deoarece $ca \in B$, $cd \in B$, $ca \in L - \Delta$ şi $cd \notin L - \Delta$. Propoziţia 14 este demonstrată.

Concluzie. Propoziţiile 11, 12, 13 şi 14 de mai sus ne arată că $\mathcal{D}_2$ nu este o algebră booleană cum este subclasa sa $\mathcal{D}_0$ ([9], [10]). Clasa $\mathcal{D}_2$ este numai *latice distributivă.*

V

În acest capitol vom studia clasa de sublimbaje

(17) $$\mathcal{D}_3(A) = \{B \subseteq L : x \to y \Rightarrow x \xrightarrow[A|B]{} y\}$$

ale unui limbaj L pe un vocabular V : $(A \subseteq L)$.

LEMĂ. *Orice submulţime B' a unei mulţimi B din $\mathcal{D}_3$ aparţine tot la $\mathcal{D}_3$.*

Demonstrație. Fie $B \in \mathcal{D}_3$, $B' \subseteq B$ și $x \in V$, $y \in V$ astfel încît $x \to y$. Deoarece $B \in \mathcal{D}_3$, rezultă că $x \xrightarrow[A|B]{} y$. În baza teoremei A, rezultă că $x \to y$. Deci $B' \in \mathcal{D}_3$ și lema este demonstrată.

COROLAR. *Orice mulțime $B \in \mathcal{D}_3$ formată din mai mult de o frază, conține o submulțime strictă care aparține clasei $\mathcal{D}_3$.*

PROPOZIȚIA 15. *Orice intersecție de mulțimi din $\mathcal{D}_3$ aparține clasei $\mathcal{D}_3$.*

Demonstrație. Afirmația propoziției 15 rezultă imediat din lema de mai sus. În acest scop considerăm pe B ca fiind una din mulțimile care se intersectează iar pe B' ca fiind mulțimea intersecție.

PROPOZIȚIA 16. *Dacă $B_1 \in \mathcal{D}_3$ și $B_2 \in \mathcal{D}_3$, atunci :*

$$1)\ B_1 - B_2 \in \mathcal{D}_3 \quad \textit{și} \quad 2)\ B_2 - B_1 \in \mathcal{D}_3.$$

Demonstrație. Rezultă imediat din lemă, punînd $B = B_1$, $B' = B_1 - B_2$ și respectiv $B = B_2$, $B' = B_2 - B_1$.

Spre deosebire de clasa $\mathcal{D}_2$ care este închisă și în raport cu operația de reuniune, propoziția de mai jos ne arată că $\mathcal{D}_3$ nu are această proprietate.

PROPOZIȚIA 17. *Există un limbaj L pe un vocabular V și două mulțimi $B_1 \in \mathcal{D}_3$, $B_2 \in \mathcal{D}_3$, astfel ca $B_1 \cup B_2 \notin \mathcal{D}_3$.*

Demonstrație. Fie $V = \{a, b, c, d\}$. Considerăm limbajul $L = \{ab, ad, bb, bd, cb, cd, cc, abb, bbb, cbbb, bcc\}$ și sublimbajele : $A = \{ab, ad, bb, cb\}$, $B_1 = \{ab, ad, bb, cb, bcc\}$ și $B_2 = \{ab, bb, cd, cb, cbbb\}$. Atunci $B_1 \cup B_2 = \{ab, bb, ad, cb, cd, bcc, cbbb\}$.

Singurele dominări între cuvinte diferite, care au loc în raport cu limbajul L, sînt : $a \to b$ și $a \to c$. Se constată că avem :

$$a \xrightarrow[A|B_1]{} b, \quad a \xrightarrow[A|B_1]{} c, \quad a \xrightarrow[A|B_2]{} b \quad \text{și} \quad a \xrightarrow[A|B_2]{} c.$$

Rezultă că $B_1 \in \mathcal{D}_3\ (A)$ și $B_2 \in \mathcal{D}_3(A)$. Totuși nu are loc $a \xrightarrow[A|B_1 \cup B_2]{} c$.

Într-adevăr, $ad \in B_1 \cup B_2$, $cd \in B_1 \cup B_2$, $ad \in A$, dar $cd \notin A$.

Complementara unei mulțimi din $\mathcal{D}_3$ nu aparține lui $\mathcal{D}_3$ așa cum arată :

PROPOZIȚIA 18. *Există un limbaj L pe un vocabular V și o mulțime $B \in \mathcal{D}_3$ astfel ca $L - B \notin \mathcal{D}_3$.*

Demonstrație. Ca și în demonstrația propoziției 17, vom lua $V = \{a, b, c, d\}$, $L = \{ab, ad, bb, bd, cb, cd, cc, abb, bbb, cbbb, bcc\}$ și $A = \{ab, ad, bb, cb\}$ (din propoziția 17).

Fie $B = B_2 = \{ab, bb, cd, cb, cbbb\}$. Atunci $L - B = \{ad, bd, cc, abb, bbb, bcc\}$. Avem $a \to b$. Deoarece $ad \in L - B$, $bd \in L - B$, $ad \in A$ și $bd \notin A$, rezultă că nu avem $a \xrightarrow[A|L-B]{} b$ și deci $L - B \notin \mathcal{D}_3\ (A)$.

Propozițiile de mai sus ne arată că, în general, clasa $\mathcal{D}_3$ de sublimbaje a unui limbaj L, nu este o algebră booleană. Vom da o teoremă care ne va ajuta să recunoaștem clasele $\mathcal{D}_3$ care sînt algebre booleene.

Fie L un limbaj pe un vocabular V și $\mathcal{D}_3$ clasa de sublimbaje asociată, definită de (17).

Fie $\mathcal{D}_0 = \{\Delta \subseteq L : x \to y \Rightarrow x \to y\}$. Clasa $\mathcal{D}_0$ a fost studiată în [9], arătîndu-se despre ea că formează o algebră booleană.

TEOREMA 2. *Necesar şi suficient ca $\mathcal{D}_3(A)$ să formeze o algebră booleană este ca $A \in \mathcal{D}_0$.*

Demonstrație. Suficiența condiției rezultă din propoziția 1 şi din faptul că $\mathcal{D}_0$ este algebră booleană.

Necesitatea. Presupunînd că $\mathcal{D}_3$ este algebră booleană, rezultă că $L \in \mathcal{D}_3$. Deducem că are loc implicația:

$$a \rightarrow b \Rightarrow a \xrightarrow[A \backslash L]{} b. \tag{18}$$

Fie $a \in V$ şi $b \in V$ astfel ca $a \rightarrow b$. Ținînd seama de (18), rezultă că pentru orice context (u, v) avem:

$$(uav \in L \text{ şi } ubv \in L) \Rightarrow (uav \in A \Rightarrow ubv \in A),$$

adică $A \in \mathcal{D}_0$ şi teorema 2 este demonstrată.

VI

Fie V un vocabular şi A un limbaj pe V. Notăm

$$\mathcal{D}_4(A) = \{B \subseteq L(V) : x \xrightarrow[A \backslash B]{} y \Rightarrow x \xrightarrow[A]{} y\},$$

unde $x \in V$ şi $y \in V$.

Ne propunem în acest capitol să studiem această clasă, aşa cum în [8] am studiat clasa:

$$\mathcal{D}(L) = \{\Delta \subseteq L : x \xrightarrow[\Delta]{} y \Rightarrow x \xrightarrow[L]{} y\}.$$

Ținînd seama de teorema A, vom exclude din considerațiile ce urmează acele limbaje B care satisfac cel puțin una din proprietățile:

$$B \subseteq A \quad \text{sau} \quad B = O.$$

Vom avea în vedere numai limbajele A şi B pe V, astfel ca $O \neq A \cap B \neq B$. Oricare ar fi limbajul A pe un vocabular V, clasa $\mathcal{D}_4$ asociată conține cel puțin un element: $B = L(V)$. Uneori, însă, $\mathcal{D}_4$ conține şi alte elemente aşa cum arată:

PROPOZIȚIA 19. *Există două limbaje A şi B pe un acelaşi vocabular V, astfel ca $O \neq B \neq L(V)$ şi $B \in \mathcal{D}_4(A)$.*

Demonstrație. Fie $V = \{a, b, c, d\}$. Considerăm limbajele: $A = \{aa, ab, ac, ad, ba, bb, bc, bd, cd, da, db, dc, dd\}$ şi $B = \{ab, bb, ca, cb, cd, bbb\}$. Avem $O \neq A \cap B \neq B$ şi $B \neq L(V)$.

Singurele perechi de cuvinte distincte (x, y) astfel ca $x \xrightarrow[A \backslash B]{} y$ sînt: (a, b), (b, a), (a, d), (b, d), (c, a), (c, b) şi (c, d).

Deoarece pentru aceste cuvinte este verificată şi relația $x \xrightarrow[A]{} y$, rezultă că $B \in \mathcal{D}_4(A)$. Propoziția 19 este demonstrată.

PROPOZIȚIA 20. *Orice supramulțime a unei mulțimi B din $\mathcal{D}_4$ este tot o mulțime din $\mathcal{D}_4$.*

Demonstrație : Fie $B \in \mathcal{D}_4$ și $B' \subseteq L(V)$ cu proprietatea : $B \subseteq B'$. Fie $x \in V$ și $y \in V$ astfel ca $x \xrightarrow[A|B]{} y$. Deoarece $B \subseteq B'$, în baza teoremei A (punctul II), rezultă că $x \xrightarrow[A|B]{} y$ și deci $x \xrightarrow[A]{} y$, deoarece $B \in \mathcal{D}_4$. Deci are loc implicația

$$x \to y \Rightarrow x \xrightarrow[A]{} y.$$

Rezultă că $B' \in \mathcal{D}_4$.

COROLARUL 1. *Orice reuniune de mulțimi din $\mathcal{D}_4$ este tot o mulțime din $\mathcal{D}_4$.*

COROLARUL 2. *Avem* : $L(V) \in \mathcal{D}_4$.

COROLARUL 3. *Dacă* $B_1 \subset L(V)$, $B_2 \subset L(V)$ și $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{D}_4$, *atunci* : 1) $B_1 \in \mathcal{D}_4$ și 2) $B_2 \in \mathcal{D}_4$.

Rezultă imediat, ținînd seama de propoziția 20 și de incluziunile : $B_1 \cap B_2 \subseteq B_1$ și $B_1 \cap B_2 \subseteq B_2$.

Dacă clasa $\mathcal{D}_4$ este închisă în raport cu operația de reuniune, ea nu va fi întotdeauna închisă în raport cu operația de intersecție așa cum arată :

PROPOZIȚIA 21. *Există un limbaj A pe un vocabular V pentru care clasa $\mathcal{D}_4$ asociată nu este închisă în raport cu operația de intersecție.*

Demonstrație. Fie $V = \{a, b, c\}$. Considerăm limbajele $A = \{a, c$ $aa, ac, ba, ca\}$, $B_1 = \{a, b, c, aa, ac, ca, cc, aaa, ccc\}$ și $B_2 = \{aa, ab, ba, ac, bc, aaa, ccc\}$. Fie $B = B_1 \cap B_2$. Avem $B = \{aa, ac, aaa, ccc\}$

Singurele perechi de cuvinte distincte (x, y) cu proprietatea $x \xrightarrow[A|B_1]{} y$ sînt : (b, a), (b, c) și (c, a).

Deoarece avem $b \xrightarrow[A]{} a$, $b \xrightarrow[A]{} c$ și $c \xrightarrow[A]{} a$, rezultă că $B_1 \in \mathcal{D}_4$.

Perechile de cuvinte (x, y) astfel ca $x \xrightarrow[A|B_2]{} y$, sînt : (b, a), (b, c) și (c, a). Cum $b \xrightarrow[A]{} a$, $b \xrightarrow[A]{} c$ și $c \xrightarrow[A]{} a$, rezultă că $B_2 \in \mathcal{D}_4$. Totuși intersecția $B = B_1 \cap B_2$ nu aparține familiei $\mathcal{D}_4$, deoarece avem : $a \xrightarrow[A|B]{} c$ și nu avem $a \xrightarrow[A]{} c$.

Referitor la complementara unei mulțimi din $\mathcal{D}_4$ vom demonstra

PROPOZIȚIA 22. *Fie $B \in \mathcal{D}_4$, $B \neq L(V)$. Necesar și suficient pentru ca să avem $L - V \in \mathcal{D}_4$, este ca să existe cel puțin o mulțime nevidă $B' \in \mathcal{D}_4$ astfel încît* : $B \cap B' = 0$.

Demonstrație. Condiția este suficientă. Din ipoteză rezultă că $B' \subset L - B$ și aplicînd propoziția 20, rezultă că $L - B \in \mathcal{D}_4$. Condiția este și necesară. Presupunem deci că $B \in \mathcal{D}_4$ și $L - B \in \mathcal{D}_4$. Luăm $B' = L - B$ și avem $B \cap B' = 0$.

Fie A un limbaj pe un vocabular V. Pentru acest limbaj putem considera clasele de sublimbaje $\mathcal{D}(A)$ ([8]) și $\mathcal{D}_4(A)$ pe care le-am studiat mai sus. Între aceste două clase există o legătură pe care o indicăm în cele ce urmează.

Fie $B \subset L(V)$. Vom demonstra mai întîi următoarea :

LEMĂ. *Dacă $a \in V$, $b \in V$ și $a \xrightarrow[A \cap B]{} b$, atunci $a \xrightarrow[A|B]{} b$.*

Demonstrație. Din ipoteză rezultă că pentru orice context (u, v) avem $uav \in A \cap B \Rightarrow ubv \in A \cap B$ și deci are loc implicația :

Ținînd seama de definiția 2 a dominării condiționate, din (19) rezultă că avem $a \xrightarrow[A\setminus B]{} b$ și lema este demonstrată.

Propoziția 23. *Dacă* $B \in \mathcal{D}_4(A)$, *atunci* $A \cap B \in \mathcal{D}(A)$.

Demonstrație. Fie $a \in V$ și $b \in V$ astfel ca $a \xrightarrow[A\cap B]{} b$. Aplicînd lema de mai sus, rezultă că $a \xrightarrow[A\setminus B]{} b$ și deoarece $B \in \mathcal{D}_4(A)$, avem $a \xrightarrow[A]{} b$. Deci are loc implicația $a \xrightarrow[A\cap B]{} b \Rightarrow a \xrightarrow[A]{} b$, de unde rezultă că $A \cap B \in \mathcal{D}_4(A)$.

Corolar. *Dacă* $B_1 \in \mathcal{D}_4(A)$ *și* $B_2 \in \mathcal{D}_4(A)$, *atunci avem* :

$$A \cap (B_1 \cup B_2) \in \mathcal{D}(A).$$

Acesta rezultă ținînd seama de corolarul 1 al propoziției 20 și de propoziția 23.

Reciproca propoziției 23 nu este adevărată, așa cum rezultă din :

Propoziția 24. *Există două limbaje A și B pe un vocabular V astfel încît* $A \cap B \in \mathcal{D}(A)$ *și* $B \notin \mathcal{D}_4(A)$.

Demonstrație. Fie vocabularul $V = \{a, b, c, d\}$ și limbajele : $A = \{aa, ab, ad, bb, bd, cd, db, dd\}$, $B = \{aa, ab, ad, cd, db, dd, aaa, bbb, aba, bab\}$. Avem : $A \cap B = \{aa, ab, ad, cd, db, dd\}$.

Singurele perechi de cuvinte distincte (x, y) cu proprietatea $x \xrightarrow[A\cap B]{} y$ sînt : (b, d), (c, a) și (c, d). Deoarece avem $b \xrightarrow[A]{} d$, $c \xrightarrow[A]{} a$ și $c \xrightarrow[A]{} d$, rezultă că $A \cap B \in \mathcal{D}(A)$.

Dar $B \notin \mathcal{D}_4(A)$, deoarece avem $a \xrightarrow[A\setminus B]{} b$ și totuși nu avem $a \xrightarrow[A]{} b$.

Primită la redacție la 8 decembrie 1967

Universitatea din București
Facultatea de matematică și mecanică
Str. Academiei nr. 14

Δ-DOMINATION ET DOMINATION CONDITIONNÉE DANS LA GRAMMAIRE ALGÉBRIQUE

(RÉSUMÉ)

On fait l'étude de quelques classes de sous-langages qui s'obtiennent en remplaçant dans les définitions données dans [8], [9] et [10] la relation de Δ-domination, par la relation de Δ-domination conditionnée, due à L. Nebeský [7].

On montre que la relation de Δ-domination conditionnée est effectivement plus générale que la relation de Δ-domination.

Pour les classes de langages envisagées on étudie le comportement par rapport à certaines opérations ; plus précisément, on indique, pour chaque classe K, les opérations $\circ$ tels

BIBLIOGRAFIE

1. R. L. Dobrušin, *Opyt opredelenija ponjatija grammaticeskoi kategorii.* Tezisy konferencii po mašinnomu perevodu (15—21 Maja 1958 goda), Moskva, 1958, 37 p.
2. R. L. Dobrušin, *Elementarnaja grammaticeskaja kategorija,* Bjulleten Obedinenija po problemam mašinnogo perevoda, *5,* 19—21 (1957).
3. S. Marcus, *Sur un modèle logique de la catégorie grammaticale élémentaire,* I. Revue de Math. Pures et App., **7,** *1,* 91—107 (1962).
4. S. Marcus, *Lingvistica matematică,* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1966, 253 p.
5. I. I. Revzin, *Nekotorye formalnye osobennosti paradigmy glagola.* (K probleme vnutrennei tipologii). Issledovanija po strukturnoi tipologii (sbornic statei). Izdatelstvo Akademii Nauk S.S.S.R., 1963, p. 94—103).
6. I. I. Revzin, *Nekotorye problemy teorii modelei jazyka Naučnotehničeskaja informacija,* 1964, p. 42—46.
7. L. Nebeský, *Conditional Replacement of Words.* The Prague Bulletin of Mathematical Linguistics, *3,* 3—12 (1965).
8. C. V. Crăciun, *Domination et sous-langages dans la théorie analitique de la grammaire.* Revue Roum. de Math. Pures et Appl., **13,** *1* (1968).
9. S. Marcus, *Hérédité par domination et par double domination dans les modèles analitiques de langages.* I.C.C. Bulletin, *3,* 159—170 (1967).
10. S. Marcus, *Introduction mathématique à la linguistique structurale.* Dunod, Paris, 1967.

CONEXIUNI INVARIANTE PE UN SPAŢIU RIEMANNIAN V_3 CU METRICA NEDEFINITĂ

DE

EUGENIA OPRESCU

În această lucrare se determină conexiunile afine invariante pe un spaţiu riemannian V_3 cu metrica nedefinită, cu grup de mişcări G_4.

Fiind dat un spaţiu riemannian V_n care admite un grup de mişcări G_r, conexiunea lui Levi-Civita ataşată acestui spaţiu este invariantă la grupul G_r.

Prof. G. Vrănceanu a demonstrat [5] că pe un spaţiu riemannian V_2 cu curbură constantă negativă nu există nici o conexiune invariantă la grupul G_3 de mişcări ale spaţiului, în afară de conexiunea lui Levi-Civita ataşată acestui spaţiu.

M. Stoka a demonstrat o proprietate analogică pentru spaţiile V_2 cu curbură constantă pozitivă şi a determinat conexiunile invariante pe spaţii V_3 cu metrica definită şi pe spaţii V_3 cu metrica nedefinită cu curbură constantă [2], [3].

În această lucrare vom determina conexiunile invariante pe un spaţiu riemannian V_3 cu metrica nedefinită care are ca grup total de mişcări un grup G_4, arătînd că aceste conexiuni sînt compatibile cu un spaţiu V_3, compact şi orientabil.

G. I. Krucikovici a demonstrat [1] că spaţiile V_3 care au ca grup total de mişcări un grup G_4, au metricile de forma :

$$(1) \qquad ds^2 = k\,dx^{1^2} + 2(2-c)\,e^{cx^1}\,dx^1\,dx^2 + e^{2x^1}\,dx^{3^2}$$

k, c, fiind constante arbitrare, $c \neq 2$.

$$(2) \qquad ds^2 = k dx^{1^2} + e^{2x^1}(2dx^1\,dx^2 - dx^{3^2}),\ k = \text{const.}$$

$$(3) \qquad ds^2 = k dx^{1^2} + 2dx^1 dx^2 - \cos^2 x^1\,dx^{3^2},\ k_e = \text{const.}$$

$$(4) \qquad ds^2 = e_1\,dx^{1^2} + dx^{2^2} + 2x^1\,dx^2\,dx^3 + (x^{1^2} + e_3)\,dx^{3^2}$$

$$e_1,\ e_3 = \pm 1$$

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 5, P. 697–721, BUCUREŞTI, 1968

5 – c. 5181

$$(5)\qquad ds^2 = e_1\, dx^{1^2} + \varepsilon_2\, e^{2x^1}\, dx^{2^2} + 2n e^{x^1}\, dx^2\, dx^3 + \varepsilon_3\, dx^{3^2}$$

$$e_1 = \pm 1;\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3 = \pm \text{ sau } 0;\ \varepsilon_2\,\varepsilon_3 - n^2 \neq 0$$

$$(6)\qquad ds^2 = e_1\, dx^{1^2} + (e_1 \cos^2 x^1 + m \sin^2 x^1)\, dx^{2^2} - 2m \sin x^1 dx^2 dx^3$$

$$+ m d\, x^{3^2},\ e_1 = \pm 1,\ m \neq 0.$$

$$(7)\qquad ds^2 = e_1\, dx^{1^2} + dx^{2^2} + \sin^2 x^2\, dx^{3^2}$$

$$(8)\qquad ds^2 = e_1\, dx^{1^2} + dx^{2^2} + e_3\, \mathrm{sh}^2\, x^2\, dx^{3^2}.$$

Grupurile de mişcări ale acestor spaţii sînt definite , respectiv, de operatorii :

$$(1')\qquad X_1 f = p_2\ ,\ X_2 f = p_3\ ,\ X_3 f = x^3\, p_2 + e^{(c-2)\,x^1}\, p^3,\ X_4 f =$$

$$= p_1 + c x^2\, p_2 + x^3\, p_3,$$

$$(2')\qquad X_1 f = p_2\ ,\ X_2 f = p_3\ ,\ X_3 f = x^3\, p_2 + x^1\, p_3\ ,\ X_4 f =$$

$$= - p_1 + 2x^2\, p_2 + x^3\, p_3,$$

$$(3')\qquad X_1 f = p_2\ ,\ X_2 f = p_3\ ,\ X_3 f = x^3\, p_2 + \mathrm{tg}\, x^1\, \mathrm{p}_3\ ,\ X_4 f =$$

$$= p_1 + \frac{1}{2}\, x^{3^2}\, p_2 + x^3\, \mathrm{tg}\, x^1\, p_3,$$

$$(4')\qquad X_1 f = p_2\ ,\ X_2 f = p_3\ ,\ X_3 f = - p_1 + x^3\, p_2\ ,\ X_4 f =$$

$$= e_1\, e_3\, x^3\, p_1 + \frac{1}{2}\,(x^{1^2} - e_1\, e_3\, x^{3^2})\, p_2 - x^1\, p_3,$$

$$(5')\qquad X_1 f = p_2\ ,\ x_2 f = p_3\ ,\ X_3 f = - p_1 + x^2 p_2\ ,\ X_4 f = x^2\, p_1 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{e_1\ \varepsilon_3}{\varepsilon_2\ \varepsilon_3 - n^2}\, e^{-2x^1} - x^{2^2}\right) p_2 - \frac{e_1\, n}{\varepsilon_2\, \varepsilon_3 - n^2}\, e^{-x^1}\, p_3,$$

$$(6')\qquad X_1 f = p_2\ ,\ X_2 f = \cos x^2 p_1 + \mathrm{tg}\, x^1 \sin x^2\, p_2 + \frac{\sin x^2}{\cos x^1}\, p_3,$$

$$X_3 f = - \sin x^2\, p_1 + \mathrm{tg}\, x^1 \cos x^2\, p_2 + \frac{\cos x^2}{\cos x^1}\, p_3\ ,\ X_4 f = p_3,$$

$$(7')\qquad X_1 f = p_3,\ X_2 f = \sin x^3\, p_2 + \mathrm{ctg}\, x^2 \cos x^3\, p_3\ ,\ X_3 f =$$

$$= \cos x^3\, p_2 - \mathrm{ctg} x^2 \sin x^3\, p_3,\ X_4 f = p_1,$$

$$(8')\qquad \left.\begin{aligned} X_1 f = p_3\ ,\ X_2 f = \sin x^3\, p_2 + \mathrm{cth}\, x^2 \cos\, x^3\, p_3 \\ X_3 f = \cos\, x^3\, p_2 - \mathrm{cth}\, x^2 \sin\, x^3\, p_3,\ X_4 f = p_1 \end{aligned}\right\}\text{pentru } e_3 = 1$$

$$(8'')\qquad \left.\begin{aligned} X_1 f = p_3\ ,\ X_2 f = \mathrm{sh} x^3 p_2 - \mathrm{cth}\, x^2\, \mathrm{ch}\, x^3\, p_3 \\ X_3 f = \mathrm{ch}\, x^3\, p_2 - \mathrm{cth} x^2\, \mathrm{sh} x^3\, p_3,\ X_4 f = p_1 \end{aligned}\right\}\text{pentru } e_3 = -1.$$

Componentele Γ^i_{jk} ale conexiunii invariante față de un grup G_r sînt soluțiile sistemului :

$$\frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^s}\, \xi^s + \frac{\partial \xi^s}{\partial x^k}\, \Gamma^i_{js} + \frac{\partial \xi^s}{\partial x^j}\, \Gamma^i_{sk} - \Gamma^s_{jk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^s}. \tag{9}$$

Vom nota

$$R = a^{ij} P_{ij} \;,\; \overline{R} = a^{ij}\, \overline{P}_{ij} \;,\; T = a^{ij} (T_l\, T^l_{ij} - T_{ij}),$$

unde a^{ij} sînt reciprocii elementelor a_{ij} și

$$P_{ij} = \frac{\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}}{2} \qquad (\Gamma_{ij} = \Gamma^l_{ilj}),$$

Γ^i_{jkl} fiind tensorul de curbură al conexiunii Γ^i_{jk}, iar

$$T_l = T^i_{li} \;,\; T_{ij} = T^l_{kj}\, T^k_{il}$$

unde am notat $T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \overline{\Gamma}^i_{jk}$.

Invariantul lui Tallini al spațiului V_3 este $R - \overline{R} - T$ și în baza teoremei lui Tallini [4] conexiunea este compatibilă cu un spațiu riemannian V_3 compact și orientabil numai dacă $R - \overline{R} - T = 0$.

Notînd prin $(i, j, k; h)$ sistemul (9) obținut pentru coeficienții transformării infinitesimale $X_h f$, sistemul (9) corespunzător transformărilor $X_1 f$ și $X_2 f$ ale grupului (1') dă :

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^3} = 0,$$

de unde deducem

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x^1).$$

Ecuațiile (1, 1, 2 ; 3) și (1, 2, 1 ; 3) dau :

$$\Gamma^1_{32} = 0 \;,\; \Gamma^1_{23} = 0.$$

iar din (1, 2, 3 ; 3) și respectiv (2, 2, 2 ; 3) se obține

$$\Gamma^1_{22} = 0 \;,\; \Gamma^3_{22} = 0.$$

Din ecuațiile (2, 2, 3 ; 3) și (2, 3, 2 ; 3) obținem

$$\Gamma^2_{22} = \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32}$$

iar din (3, 1, 2 ; 3) și respectiv (3, 2, 1 ; 3)

$$\Gamma^3_{32} = \Gamma^1_{12} \quad \text{și} \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^1_{21}.$$

Folosind și ecuațiile (1, 1, 3 ; 3) și (1, 3, 1 ; 3) care dau

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -(c-2)\, e^{(c-2)x^1}\, \Gamma^1_{33},$$

obținem :

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = -(c-2)\, e^{(c-2)x^1}\, \Gamma^1_{33}.$$

Înlocuind aceste valori în (3, 3, 3 ; 3) avem :

$$\Gamma^1_{33} = 0 \quad \text{deci} \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \Gamma^1_{33} = 0.$$

Ecuaţiile (1, 1, 1 ; 3) (2, 1, 2 ; 3) şi (2, 2, 1 ; 3) dau :

$$\Gamma^1_{31} = - \Gamma^1_{13}$$

şi respectiv

$$\Gamma^3_{12} = (c - 2)\, e^{(c-2)x^1}\, \Gamma^2_{32} \quad , \quad \Gamma^3_{21} = (c - 2)\, e^{(c-2)x^1}\, \Gamma^2_{23}.$$

Înlocuind aceste valori în ecuaţiile (3, 1, 3 ; 3) şi (3, 3, 1 ; 3) şi adunîndu-le rezultă :

$$\Gamma^2_{23} + \Gamma^2_{32} = - 2\, \Gamma^3_{33}.$$

Comparînd acest rezultat cu

$$\Gamma^2_{23} + \Gamma^2_{32} = \Gamma^3_{33} \text{ (ecuaţia (2, 3, 3 ; 3))}$$

avem

$$\Gamma^3_{33} = 0 \quad , \quad \Gamma^2_{32} = - \Gamma^2_{23} = \Gamma^1_{13}$$

şi

$$\Gamma^3_{12} = - \Gamma^3_{21} = (c - 2)\, e^{(c-2)x^1}\, \Gamma^1_{13}.$$

Folosind aceste rezultate, ecuaţiile (1, 1, 3 ; 4) ; (1, 3, 1 ; 4) (2, 2, 3 ; 4), (2, 3, 2 ; 4), (3, 1, 2 ; 4) şi (3, 2, 1 ; 4) dau

$$\Gamma^1_{13} = a^1_{13}\, e^{x^1}$$

$$\Gamma^1_{31} = - a^1_{13}\, e^{x^1}$$

$$\Gamma^2_{23} = - a^1_{13}\, e^{x^1}$$

$$\Gamma^2_{32} = a^1_{13}\, e^{x^1}$$

$$\Gamma^3_{12} = (c - 2)\, a^1_{13}\, e^{(c-1)x^1}$$

$$\Gamma^3_{21} = - (c - 2)\, a^1_{13}\, e^{(c-1)x^1}$$

Din ecuaţiile (2, 1, 1 ; 4), (2, 3, 3 ; 4), (2, 1, 3 ; 4) şi (2, 3, 1, 4) obţinem respectiv :

$$\Gamma^2_{11} = a^2_{11}\, e^{-cx^1} \quad , \quad \Gamma^2_{33} = a^2{}_{33}\, e^{(2-c)x^1}$$

$$\Gamma^2_{13} = a^2_{13}\, e^{(1-c)x^1} \quad , \quad \Gamma^2_{31} = a^2_{31}\, e^{(1-c)x^1}.$$

Ecuaţia (1, 1, 1 ; 4) şi respectiv (3, 1, 3 ; 4) şi (3, 3, 1 ; 4) dau

$$\Gamma^1_{11} = a^1_{11} \quad , \quad \Gamma^3_{13} = a^3_{13} \quad , \quad \Gamma^3_{31} = a^3_{31}.$$

Înlocuind aceste valori în ecuaţia (3, 1, 1; 3) obţinem :

$$a^1_{11} = a^3_{13} + a^3_{31} - (c - 2).$$

Din (2, 1, 2 ; 4) și (2, 2, 1 ; 4) rezultă

$$\Gamma^2_{12} = a^2_{12} \quad \text{și} \quad \Gamma^2_{21} = a^2_{21}.$$

Înlocuind valorile corespunzătoare în (2, 1, 3 ; 3) și (2, 3, 1 ; 3) rezultă

$$a^2_{21} = a^3_{31} - (c-2)\, a^2_{33} \quad , \quad a^2_{12} = a^3_{13} - (c-2)\, a^2_{33}.$$

Ecuația (3, 1, 1 ; 4) are soluția :

$$\Gamma^3_{11} = a^3{}_{11}\, \mathrm{e}^{-x^1}.$$

Înlocuind în (2, 1, 1 ; 3) se obține

$$a^3_{11} = (c-2)\,(a^2_{13} + a^2_{31}).$$

Deci conexiunea invariantă la grupul (1′) are componentele :

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{11} = a^3_{13} + a^3_{31} - (c-2),\\
&\Gamma^2_{11} = a^2_{11}\, \mathrm{e}^{-cx^1} \quad , \quad \Gamma^2_{12} = a^3_{13} - (c-2)\, a^2_{33} \quad , \quad \Gamma^2_{13} = a^2_{13}\, \mathrm{e}^{(1-c)x^1},\\
(10)\quad &\Gamma^2_{21} = a^3_{31} - (c-2)\, a^2_{33} \quad , \quad \Gamma^2_{31} = a^2_{31}\, \mathrm{e}^{(1-c)x^1} \quad , \quad \Gamma^2_{33} = a^2_{33}\, \mathrm{e}^{(2-c)x^1},\\
&\Gamma^3_{11} = (c-2)\,(a^2_{13} + a^2_{31})\, \mathrm{e}^{-x^1} \quad , \quad \Gamma^3_{13} = a^3_{13} \quad , \quad \Gamma^3_{31} = a^3_{31},\\
&\Gamma^3_{12} = -\Gamma^3_{21} = (c-2)\, a^1_{13} \mathrm{e}^{(c-1)x^1}, \; \Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{32} = -\Gamma^1_{31} = -\Gamma^2_{23} = a^1_{13} \mathrm{e}^{x^1},\\
&\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = \Gamma^1_{33} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^3_{22} = \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{33} = 0.
\end{aligned}$$

Componentele nenule $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ ale conexiunii lui Levi-Civita atașată spațiului (1) sînt :

$$\overline{\Gamma}^1_{11} = -c \quad , \quad \overline{\Gamma}^2_{33} = \frac{1}{2-c}\, \mathrm{e}^{(2-c)x^1} \quad , \quad \overline{\Gamma}^3_{13} = \overline{\Gamma}^3_{31} = -1.$$

Calculînd R, $\overline{R}$ și T rezultă :

$$R - \overline{R} - T = 0$$

deci aplicînd teorema lui Tallini rezultă : Conexiunile invariante pe spațiul V_3 cu metrica (1) sînt conexiunile (10) compatibile cu un spațiu V_3, care depind de șapte constante arbitrare.

Vom determina acum conexiunile invariante la grupul (2′).

Ecuațiile corespunzătoare transformărilor $X_1 f$ și $X_2 f$ dau

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^3} = 0$$

ceea ce implică :

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x^1).$$

Din (1, 1, 2 ; 3), (1, 2, 1 ; 3), (1, 2, 3 ; 3) ; (2, 2, 2 ; 3) se obține

$$\Gamma^1_{32} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^3_{22} = 0,$$

iar din ecuațiile (2, 2, 3 ; 3) (2, 3, 2 ; 3), (3, 1, 2 ; 3), (3, 2, 1 ; 3), (1, 1, 3 ; 3)

$$\Gamma^2_{22} = \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\Gamma^1_{33}.$$

Înlocuind aceste valori în ecuaţia (3, 3, 3; 3), rezultă $\Gamma^1_{33} = 0$ şi deci toate componentele egale cu ea nule.

Din (2, 2, 3; 4), (2, 3, 2; 4), (3, 1, 2; 4) şi (3, 2, 1; 4) avem:

$$\Gamma^2_{23} = a^2_{23}\, e^{x^1} \quad , \quad \Gamma^2_{32} = a^2_{32}\, e^{x^1} \quad , \quad \Gamma^3_{12} = a^3_{12}\, e^{x^1} \quad , \quad \Gamma^3_{21} = a^3_{21}\, e^{x^1}.$$

Înlocuind aceste valori în ecuaţiile (2, 1, 2; 3) şi (2, 2, 1; 3) rezultă

$$a^2_{23} = a^3_{21} \quad \text{şi} \quad a^2_{32} = a^3_{12}$$

Din (1, 1, 3; 4) şi (1, 3, 1; 4) avem:

$$\Gamma^1_{13} = a^1_{13}\, e^{x^1} \quad , \quad \Gamma^1_{31} = a^1_{31}\, e^{x^1}$$

care înlocuite în (1, 1, 1; 3) dau

$$a^1_{13} = - a^1_{31}$$

iar în (3, 1, 3; 3) şi (3, 3, 1; 3):

$$\Gamma^2_{23} + \Gamma^3_{33} = \Gamma^1_{13}$$

$$\Gamma^2_{32} + \Gamma^3_{33} = - \Gamma^1_{13}$$

pe care adunîndu-le rezultă:

$$\Gamma^2_{23} + \Gamma^2_{32} = - 2\Gamma^3_{33}$$

şi conform (2, 3, 3; 3)

$$\Gamma^2_{23} + \Gamma^2_{32} = \Gamma^3_{33}$$

ceea ce implică

$$\Gamma^3_{33} = 0$$

$$\Gamma^2_{23} = - \Gamma^2_{32}$$

deci

$$a^1_{13} = a^3_{12} = a^2_{32} = - a^3_{21} = - a^2_{23}.$$

Din (2, 1, 1; 4), (2, 1, 3; 4), (2, 3, 1; 4), (2, 3, 3; 4), (3, 1, 1, 4) avem

$$\Gamma^2_{11} = a^2_{11}\, e^{-2x^1}, \quad \Gamma^2_{13} = a^2_{13}\, e^{-x^1} \quad , \quad \Gamma^2_{31} = a^2_{31}\, e^{-x^1} \quad , \quad \Gamma^2_{33} = a^2_{33} \quad , \quad \Gamma^3_{11} = a^3_{11}\, e^{-x^1};$$

înlocuind în ecuaţia (2, 1, 1; 3) rezultă:

$$a^3_{11} = a^2_{13} + a^2_{31}.$$

Din (2, 1, 2; 4), (2, 2, 1; 4), (3, 1, 3; 4), (3, 3, 1; 4) rezultă

$$\Gamma^2_{12} = a^2_{12} \quad , \quad \Gamma^2_{21} = a^2_{21} \quad , \quad \Gamma^3_{13} = a^3_{13} \quad , \quad \Gamma^3_{31} = a^3_{31}.$$

Înlocuind aceste valori în ecuaţiile (2, 1, 3; 3), (2, 3, 1; 3) şi (3, 1, 1; 3) rezultă:

$$a^2_{12} = a^3_{13} - a^2_{33} \quad , \quad a^2_{21} = a^3_{31} - a^2_{33} \quad , \quad a^1_{11} = a^3_{13} + a^3_{31}.$$

Deci conexiunea invariantă la grupul (2′) are componentele

$$\Gamma^1_{11} = a^3_{13} + a^3_{31},\ \Gamma^2_{11} = a^2_{11}\, e^{-2x^1},\ \Gamma^2_{12} = a^3_{13} - a^2_{33},\ \Gamma^2_{13} = a^2_{13}\, e^{-x^1},$$

$$\Gamma^2_{21} = a^3_{31} - a^2_{33},\ \Gamma^2_{31} = a^2_{31}\, e^{-x^1},\ \Gamma^2_{33} = a^2_{33},\ \Gamma^3_{11} = (a^2_{13} + a^2_{31})\, e^{-x^1},$$

$$\text{(11)}\quad \Gamma^3_{13} = a^3_{13},\ \Gamma^3_{31} = a^3_{31},$$

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{32} = \Gamma^3_{12} = -\Gamma^1_{31} = -\Gamma^2_{23} = -\Gamma^3_{21} = a^1_{13}\, e^{x^1}$$

componentele nescrise fiind nule.

Componentele nenule $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ ale conexiunii lui Levi-Civita atașată spațiului (2) sînt:

$$\overline{\Gamma}^1_{11} = -2,\quad \overline{\Gamma}^2_{33} = \overline{\Gamma}^3_{13} = \overline{\Gamma}^3_{31} = -1.$$

Calculînd R, $\overline{R}$, T rezultă $R - \overline{R} - T = 0$, deci conform teoremei lui Tallini rezultă:

Conexiunile invariante pe un spațiu V_3 cu metrica (2) sînt conexiunile (11), depinzînd de șapte constante arbitrare, compatibile cu un spațiu V_3.

Pentru determinarea conexiunilor invariante la grupul (3′) vom considera transformările $X_1 f$ și $X_2 f$. Ele dau:

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^3} = 0$$

ceea ce implică

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x^1).$$

Din ecuațiile (1, 1, 2; 3), (1, 2, 1; 3), (1, 2, 3; 3), (2, 2, 2; 3) rezultă:

$$\Gamma^1_{32} = 0,\quad \Gamma^1_{23} = 0,\quad \Gamma^1_{22} = 0,\quad \Gamma^3_{22} = 0.$$

Din (1, 1, 2; 4), (1, 2, 1; 4), (1, 3, 3; 4), (2, 2, 2; 4), (3, 2, 3; 4), (3, 3, 2,; 4), obținem

$$\Gamma^1_{12} = a^1_{12},\ \Gamma^1_{21} = a^1_{21},\ \Gamma^1_{33} = a^1_{33}\cos^2 x^1,\ \Gamma^2_{22} = a^2_{22}$$

$$\Gamma^3_{23} = a^3_{23},\ \Gamma^3_{32} = a^3_{32}.$$

Înlocuind aceste valori în ecuațiile (1, 1, 3; 3) (1, 3, 1; 3), (3, 1, 2; 3), (3, 2, 1; 3), (3, 3, 3; 3) avem

$$a^1_{12} = a^1_{21} = -a^1_{33} = a^3_{23} = a^3_{32} = 0.$$

Din (1, 1, 1; 3) rezultă $\Gamma^1_{31} = -\Gamma^1_{13}$ și conform rezultatelor anterioare din (1, 1, 3; 4) și (1, 3, 1; 4) avèm $\Gamma^1_{13} = -\Gamma^1_{31} = a^1_{13}\cos x^1$; înlocuind în (1, 1, 1; 4),

$$\Gamma^1_{11} = a^1_{11}.$$

Pentru determinarea celorlalte componente ale conexiunii, înmulţim ecuaţiile $(i, j, k; 3)$ cu $-x^3$ şi le adunăm cu $(i, j, k; 4)$. Astfel obţinem :

Din $(2, 1, 1; h)$, $(2, 1, 3; h)$, $(2, 3, 1; h)$, $(2, 3, 3; h)$; $(3, 1, 3; h)$, $(3, 3, 1; h)$ (pentru $h = 3, 4$) avem

$$\Gamma^2_{11} = a^2_{11},\ \Gamma^2_{13} = a^2_{13} \cos x^1,\ \Gamma^2_{31} = a^2_{31} \cos x^1;\ \Gamma^2_{33} = \sin x^1 \cos x^1 + $$
$$+ a^2_{33} \cos^2 x^1,\ \Gamma^3_{13} = \operatorname{tg} x^2 + a^3_{13},\ \Gamma^3_{31} = \operatorname{tg} x^1 + a^3_{31}$$

şi înlocuind în $(3, 1, 1; 3)$ rezultă

$$a^1_{11} = a^3_{13} + a^3_{31}.$$

În mod analog din $(2, 1, 2; h)$, $(2, 2, 1; h)$ $(2, 2, 3; h)$, $(2, 3, 2; h)$, $(3, 1, 1; h)$, $(3, 1, 2; h)$ $(3, 2, 1; h)$, $(3, 3, 3; h)$

$$\Gamma^2_{12} = a^2_{12},\ \Gamma^2_{21} = a^2_{21},\ \Gamma^2_{23} = a^2_{23} \cos x^1,\ \Gamma^2_{32} = a^3_{32} \cos x^1,$$

$$\Gamma^3_{11} = \frac{a^3_{11}}{\cos x^1},\ \Gamma^3_{12} = \frac{a^3_{12}}{\cos x^1},\ \Gamma^3_{21} = \frac{a^3_{21}}{\cos x^1},\ \Gamma^3_{33} = a^3_{32} \cos x^1.$$

Din $(2, 1, 1; 3)$, $(2, 1, 3,; 3)$, $(2, 3, 1; 3)$ avem

$$a^3_{11} = a^2_{13} + a^2_{31}$$
$$a^2_{12} = a^3_{13} - a^2_{33}$$
$$a^2_{21} = a^3_{31} - a^2_{33}.$$

Din $(2, 1, 2; 3)$, $(2, 2, 1; 3)$ şi $(2, 3, 3; 3)$ avem

$$a^3_{12} + a^3_{21} = a^3_{33};$$

comparînd cu $(3, 1, 3; 3)$ şi $(3, 3, 1; 3)$ rezultă $a^3_{33} = 0$, deci $a^3_{12} = a^1_{13} = - a^3_{21}$ iar din $(2, 1, 2; 3)$ şi $(2, 2, 1; 3)$ avem

$$a^3_{12} = a^2_{32} = - a^2_{23}.$$

Deci componentele conexiunii la grupul (3′) sînt :

$$\Gamma^1_{11} = a^3_{13} + a^3_{31},\ \Gamma^2_{11} = a^2_{11},\ \Gamma^2_{12} = a^3_{13} - a^2_{33},\ \Gamma^2_{13} = a^2_{13} \cos x^1$$
$$\Gamma^2_{21} = a^3_{31} - a^2_{33},\ \Gamma^2_{31} = a^2_{31} \cos x^1,\ \Gamma^2_{33} = \sin x^1 \cos x^1 + a^2_{33} \cos^2 x^1,$$
$$\Gamma^3_{11} = \frac{a^2_{13} + a^2_{31}}{\cos x^1},\ \Gamma^3_{13} = \operatorname{tg} x^1 + a^3_{13},\ \Gamma^3_{31} = \operatorname{tg} x^1 + a^3_{31} \tag{12}$$
$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{32} = - \Gamma^1_{31} = - \Gamma^2_{23} = a^1_{13} \cos x^1,\ \Gamma^3_{12} = - \Gamma^3_{21} = \frac{a^1_{13}}{\cos x^1}.$$

Componentele nescrise sînt nule.

Componentele nenule $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ ale conexiunii lui Levi-Civita ataşată spaţiului (3) sînt :

$$\overline{\Gamma}^2_{33} = \sin x^1 \cos x^1,\quad \overline{\Gamma}^3_{13} = \overline{\Gamma}^3_{31} = \operatorname{tg} x^1.$$

Cum $R - \overline{R} - T = 0$ rezultă, conform teoremei lui Tallini :

Conexiunile (12), invariante pe spaţiul V_3 cu metrica (3), depinzînd de şapte constante arbitrare, sînt compatibile cu acest spaţiu.

Vom determina acum conexiunile invariante la grupul de transformări (4').

Sistemul (9) corespunzător transformărilor $X_1 f$ și $X_2 f$ ale grupului (4') dau:

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^3} = 0$$

de unde rezultă

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x^1).$$

Din (1, 2, 2,; 3) rezultă

$$\Gamma^1_{22} = a^1_{22};$$

înlocuind în (1, 2, 2; 4) avem

$$\Gamma^3_{22} = 0.$$

iar din (3, 2, 2; 4)

$$a^1_{22} = 0.$$

Din ecuațiile (1, 1, 1; 3), (1, 1, 2; 3), (1, 2, 1; 3), (1, 2, 3; 3), (1, 3, 2; 3), (2, 2, 2; 3), (3, 1, 1; 3), (3, 1, 2; 3), (3, 2, 1; 3), (3, 2, 3; 3), (3, 3, 2; 3) rezultă:

$$\Gamma^1_{11} = a^1_{11}, \; \Gamma^1_{12} = a^1_{12}, \; \Gamma^1_{21} = a^1_{21}, \; \Gamma^1_{23} = a^1_{23}, \; \Gamma^1_{32} = a^1_{32}, \; \Gamma^2_{22} = a^2_{22}, \; \Gamma^3_{11} = a^3_{11},$$

$$\Gamma^3_{12} = a^3_{12}, \; \Gamma^3_{21} = a^3_{21}, \; \Gamma^3_{23} = a^3_{23}, \; \Gamma^3_{32} = a^3_{32}$$

iar din ecuațiile (2, 1, 2; 3), (2, 2, 1; 3), (2, 2, 3; 3), (2, 3, 2; 3) avem:

$$\Gamma^2_{12} = -a^3_{12} x^1 + a^2_{12}, \quad \Gamma^2_{21} = -a^3_{21} x^1 + a^2_{21},$$

$$\Gamma^2_{23} = (a^2_{22} - a^3_{23}) x^1 + a^2_{23}, \quad \Gamma^2_{32} = (a^2_{22} - a^3_{32}) x^1 + a^2_{32}.$$

Înlocuind aceste valori în ecuațiile (2, 1, 2; 4), (2, 2, 1; 4) (2, 2, 3; 4), (2, 3, 2; 4) obținem

$$a^2_{32} = a^2_{23} = a^2_{12} = a^2_{21} = 0$$

$$a^1_{23} = -e_1 e_3 a^3_{21}, \quad a^1_{32} = -e_1 e_3 a^3_{12},$$

Cu aceste valori din (1, 1, 3; 3), (1, 3, 1; 3), (1, 3, 3; 3), (2, 1, 1; 3), (3, 1, 3; 3), (3, 3, 1; 3), (2, 1, 3; 3), (2, 3, 1; 3), (3, 3, 3; 3), (2, 3, 3,; 3)
avem

$$\Gamma^1_{13} = a^1_{12} x^1 + a^1_{13}, \quad \Gamma^1_{31} = a^1_{21} x^1 + a^1_{31},$$

$$\Gamma^1_{33} - = e_1 e_3 (a^3_{12} + a^3_{21}) x^1 + a^1_{33}, \quad \Gamma^2_{11} = -a^3_{11} x^1 + a^2_{11},$$

$$\Gamma^3_{13} = a^3_{12} x^1 + a^3_{13}, \quad \Gamma^3_{31} = a^3_{21} x^1 + a^3_{31},$$

$$\Gamma^2_{13} = -a^3_{12} x^{1^2} - a^3_{13} x^1 + a^2_{13}, \quad \Gamma^2_{31} = -a^3_{21} x^{1^2} - a^3_{31} x^1 + a^2_{31},$$

$$\Gamma^3_{33} = (a^3_{23} + a^3_{32}) x^1 + a^3_{33}, \qquad \Gamma^2_{33} = -(a^3_{23} + a^3_{32} - a^2_{22}) x^{1^2} - a^3_{33} x^1 + a^2_{33}.$$

Înlocuind aceste valori în ecuaţiile (1, 1, 1 ; 4), (1, 3, 3 ; 4), (2, 1, 3 ; 4) şi (2, 3, 1 ; 4) rezultă :

$$a^1_{13} = a^1_{31} = a^3_{11} = a^3_{33} = 0$$

iar din (1, 1, 3 ; 4), (1, 3, 1 ; 4), (2, 1, 1 ; 4) (2, 3, 3, ;4) :

$$a^1_{11} = a^3_{13} = a^3_{31} = a^1_{33} = 0.$$

Cu aceleaşi valori din ecuaţiile (1, 2, 3 ; 4), (1, 3, 2 ; 4) (2, 1, 3 ; 4) şi (2, 3, 3 ; 4) avem :

$$a^3_{23} = a^1_{21},\ a^3_{32} = a^1_{12},\ a^2_{33} = e_1 e_3 a^2_{11},\ a^2_{31} = -a^2_{13} - 1.$$

Deci conexiunea invariantă pe spaţiul (4) are componentele :

a) Pentru $e_1,\ e_3 = +1$ şi $e_1,\ e_3 = -1$ avem

$$\Gamma^1_{13} = a^1_{12} x^1,\ \Gamma^1_{31} = a^1_{21} x^1,\ \Gamma^1_{33} = -(a^3_{12} + a^3_{21}) x^1,$$

$$\Gamma^2_{11} = a^2_{11},\ \Gamma^2_{13} = - a^3_{12} x^{1^2} + a^2_{13},\ \Gamma^2_{22} = a^2_{22},$$

$$\Gamma^2_{23} = (a^2_{22} - a^1_{21}) x^1,\ \Gamma^2_{31} = - a^3_{21} x^{1^2} - a^2_{13} - 1,\ \Gamma^2_{32} = (a^2_{22} - a^1_{12}) x^1,$$

$$\Gamma^2_{33} = (a^2_{22} - a^1_{12} - a^1_{21}) x^1 + a^2_{11},\ \Gamma^3_{33} = (a^1_{12} + a^1_{21}) x^1, \tag{13}$$

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^3_{32} = a^1_{12},\ \Gamma^1_{21} = \Gamma^3_{23} = a^1_{21},\ \Gamma^1_{23} = -\Gamma^3_{21} = -a^3_{21}$$

$$\Gamma^1_{32} = -\Gamma^3_{12} = -a^3_{12},\ \Gamma^2_{12} = -\Gamma^3_{13} = -a^3_{12} x^1,\ \Gamma^2_{21} = -\Gamma^3_{31} = -a^3_{21} x^1,$$

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{22} = 0.$$

b) Pentru $e_1 = +1$ şi $e_3 = -1$ sau $e_1 = -1$ şi $e_3 = +1$ avem

$$\Gamma^1_{23} = \Gamma^3_{21} = a^3_{21},\ \Gamma^1_{32} = \Gamma^3_{12} = a^3_{12},\ \Gamma^1_{33} = (a^3_{12} + a^3_{21}) x^1,$$

$$\Gamma^2_{33} = (a^2_{22} - a^1_{12} - a^1_{21}) x^1 - a^2_{11}, \tag{13'}$$

celelalte componente sînt egale cu cele de la (13).

Componentele nenule $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ ale conexiunii lui Levi-Civita ataşată spaţiului (4) sînt :

c) pentru $e_1,\ e_3 = 1$

$$\overline{\Gamma}^1_{23} = \overline{\Gamma}^1_{32} = -\overline{\Gamma}^3_{12} = -\overline{\Gamma}^3_{21} = \frac{1}{2},$$

$$\overline{\Gamma}^2_{12} = \overline{\Gamma}^2_{21} = -\overline{\Gamma}^3_{13} = -\overline{\Gamma}^3_{31} = \frac{x^1}{2},$$

$$\overline{\Gamma}^2_{13} = \overline{\Gamma}^2_{31} = \frac{x^{1^2}}{2} - \frac{1}{2},\ \overline{\Gamma}^1_{33} = x^1.$$

d) Pentru $e_1 = 1,\ e_3 = -1$,

$$\overline{\Gamma}^1_{23} = \overline{\Gamma}^1_{32} = \overline{\Gamma}^3_{12} = \overline{\Gamma}^3_{21} = \frac{1}{2},$$

$$\overline{\Gamma}^2_{12} = \overline{\Gamma}^2_{21} = -\overline{\Gamma}^3_{13} = -\overline{\Gamma}^3_{31} = -\frac{x^1}{2},$$

$$\overline{\Gamma}^2_{13} = \overline{\Gamma}^2_{31} = -\frac{x^{1^2}}{2} - \frac{1}{2},\ \overline{\Gamma}^1_{33} = x^1.$$

e) Pentru $e_1 = -1,\ e_3 = 1$

$$\overline{\Gamma}^1_{23} = \overline{\Gamma}^1_{32} = \overline{\Gamma}^3_{12} = \overline{\Gamma}^3_{21} = -\frac{1}{2},$$

$$\overline{\Gamma}^2_{12} = \overline{\Gamma}^2_{21} = -\overline{\Gamma}^3_{13} = -\overline{\Gamma}^3_{31} = \frac{x^1}{2},$$

$$\overline{\Gamma}^2_{13} = \overline{\Gamma}^2_{31} = \frac{x^{1^2}}{2} - \frac{1}{2},\ \overline{\Gamma}^1_{33} = -x^1.$$

f) Pentru $e_1,\ e_3 = -1$,

$$\overline{\Gamma}^1_{23} = \overline{\Gamma}^1_{32} = -\overline{\Gamma}^3_{12} = -\overline{\Gamma}^3_{21} = -\frac{1}{2},$$

$$\overline{\Gamma}^2_{12} = \overline{\Gamma}^2_{21} = -\overline{\Gamma}^3_{13} = -\overline{\Gamma}^3_{31} = -\frac{x^1}{2}$$

$$\overline{\Gamma}^2_{13} = \overline{\Gamma}^2_{31} = -\frac{x^{1^2}}{2} - \frac{1}{2},\ \overline{\Gamma}^1_{33} = -x^1.$$

Aplicînd teorema lui Tallini, cum $R - \overline{R} - T = 0$, rezultă :

Conexiunile (13) şi (13′), invariante pe spaţiul V_3 cu metrica (4), depinzînd de şapte constante arbitrare, sînt compatibile cu acest spaţiu.

Vom determina acum conexiunile invariante la grupul (5′).

Considerînd transformările $X_1 f$ şi $X_2 f$ obţinem :

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^3} = 0$$

ceea ce implică :

$$\Gamma^i_{jk} \Rightarrow \Gamma^i_{jk}(x^1).$$

Din ecuaţiile (1, 1, 1 ; 3), (1, 1, 3 ; 3), (1, 3, 1 ; 3), (1, 3, 3 ; 3), (2, 1, 2 ; 3) (2, 2, 1 ; 3), (2, 2, 3 ; 3), (2, 3, 2 ; 3), (3, 1, 1 ; 3), (3, 1, 3 ; 3), (3, 3, 1 ; 3), (3, 3, 3 ; 3) obţinem :

$$\Gamma^1_{11} = a^1_{11},\ \Gamma^1_{13} = a^1_{13},\ \Gamma^1_{31} = a^1_{31},\ \Gamma^1_{33} = a^1_{33},\ \Gamma^2_{12} = a^2_{12}$$

$$\Gamma^2_{21} = a^2_{21},\ \Gamma^2_{23} = a^2_{23},\ \Gamma^2_{32} = a^2_{32},\ \Gamma^3_{11} = a^3_{11},\ \Gamma^3_{13} = a^3_{13}$$

$$\Gamma^3_{31} = a^3_{31},\ \Gamma^3_{33} = a^3_{33}.$$

Din (1, 3, 3 ; 4) şi (3, 3, 3 ; 4) rezultă :

$$\Gamma^2_{33} = \Gamma^1_{33} = 0.$$

Din ecuaţiile (1, 2, 3 ; 3), (1, 3, 2 ; 3), (2, 1, 3 ; 3) şi (2, 3, 1 ; 3), avem :

$$\Gamma^1_{23} = a^1_{23}\,\mathrm{e}^{x^1},\quad \Gamma^1_{32} = a^1_{32}\,\mathrm{e}^{x^1},\quad \Gamma^2_{13} = a^2_{13}\,\mathrm{e}^{-x^1},\quad \Gamma^2_{31} = a^2_{31}\,\mathrm{e}^{-x^1}.$$

Înlocuind valorile obţinute în (1, 1, 3 ; 4), (1, 3, 1 ; 4), (1, 2, 3 ; 4), (1, 3, 2 ; 4), (3, 2, 3 ; 4) şi (3, 3, 2 ; 4) avem :

$$a^2_{13} = -\frac{e_1\,\varepsilon_3}{\varepsilon_2\,\varepsilon_3 - n^2}\,a^1_{23},\quad a^2_{31} = -\frac{e_1\,\varepsilon_3}{\varepsilon_2\,\varepsilon_3 - n^2}\,a^1_{32}$$

$$a^1_{13} = a^2_{23},\quad a^1_{31} = a^2_{32}$$

$$a^3_{13} = \frac{e_1\,n}{\varepsilon_2\,\varepsilon_3 - n^2}\,a^1_{23},\quad a^3_{31} = \frac{e_1\,n}{\varepsilon_2\,\varepsilon_3 - n^2}\,a^1_{32}.$$

Din (1, 1, 2 ; 3), (1, 2, 1 ; 3), (1, 2, 2 ; 3), (2, 1, 1 ; 3), (2, 2, 2 ; 3) (3, 1, 2 ; 3) (3, 2, 1 ; 3), (3, 2, 2 ; 3) (3, 2, 3 ; 3), (3, 3, 2 ; 3) avem

$$\Gamma^1_{12} = a^1_{12}\,\mathrm{e}^{x^1},\quad \Gamma^1_{21} = a^1_{21}\,\mathrm{e}^{x^1},\quad \Gamma^1_{22} = a^1_{22}\,\mathrm{e}^{x^1},\quad \Gamma^2_{11} = a^2_{11}\,\mathrm{e}^{-x^1}$$

$$\Gamma^2_{22} = a^2_{22}\,\mathrm{e}^{-x^1},\quad \Gamma^3_{12} = a^3_{12}\,\mathrm{e}^{x^1},\quad \Gamma^3_{21} = a^3_{21}\,\mathrm{e}^{x^1},\quad \Gamma^3_{22} = a^3_{22}\,\mathrm{e}^{2x^1},$$

$$\Gamma^3_{23} = a^3_{23}\,\mathrm{e}^{x^1},\quad \Gamma^3_{32} = a^3_{32}\,\mathrm{e}^{x^1}.$$

Înlocuind în (1, 2, 2 ; 4) rezultă

$$a^2_{22} = 0\quad a^1_{21} = -\,a^1_{12}.$$

Adunînd ecuaţiile (2, 1, 2 ; 4) şi (2, 2, 1 ; 4) şi comparînd cu (1, 1, 1 ; 4) rezultă

$$a^2_{11} = 0$$

deci

$$a^1_{13} = -\,a^1_{31} = +\frac{\varepsilon_3}{n}\,a^1_{12}.$$

Din ecuaţiile (3, 1, 3 ; 4) şi (3, 3, 1 ; 4) determinăm pe a^3_{33} şi respectiv a^3_{32} care înlocuite în (3, 1, 2 ; 4) şi (3, 2, 1 ; 4) dau :

$$a^3_{11} = \frac{e_1\,\varepsilon_3}{\varepsilon_2\,\varepsilon_3 - n^2}\,a^3_{22} - \frac{e_1\,n}{\varepsilon_2\,\varepsilon_3 - n^2}\,(a^3_{23} + a^1_{12}),$$

$$a^3_{32} = 2\,a^1_{12} + a^3_{23},$$

$$a^3_{33} = \frac{\varepsilon_3}{n}\,(a^1_{12} + a^3_{23}).$$

Din (1, 2, 1 ; 4) şi (1, 1, 2 ; 4) exprimăm pe a^1_{23} şi a^1_{32}, deci şi suma lor.

Înlocuind această valoare şi valoarea sumei $a_{12}^2 + a_{21}^2$ din (2, 2, 2 ; 4) în (2, 1, 1 ; 4) şi (3, 1, 1 ; 4), rezultă $a_{11}^1 = 0$. Deci :

$$a_{22}^1 = \frac{\varepsilon_2\,\varepsilon_3 - n^2}{e_1\,n}\,(a_{12}^3 + a_{21}^3) \quad \text{din } (3, 2, 2 ; 4),$$

$$a_{21}^2 = -\frac{\varepsilon_3}{n}\,(a_{12}^3 + a_{21}^3) - a_{12}^2 - 1,$$

$$a_{23}^1 = -\frac{\varepsilon_2\,\varepsilon_3 - n^2}{e_1\,n}\,(a_{12}^2 + 1)$$

$$a_{32}^1 = \frac{\varepsilon_2\,\varepsilon_3 - n^2}{e_1\,n}\left[a_{12}^2 + \frac{\varepsilon_3}{n}\,(a_{12}^3 + a_{21}^3)\right],$$

$$a_{13}^2 = \frac{\varepsilon_3}{n}\,(a_{12}^2 + 1),$$

$$a_{31}^2 = -\frac{\varepsilon_3}{n}\left[a_{12}^2 + \frac{\varepsilon_3}{n}\,(a_{12}^3 + a_{21}^3)\right],$$

$$a_{13}^3 = -\,(a_{12}^2 + 1),$$

$$a_{31}^3 = a_{12}^2 + \frac{\varepsilon_3}{n}\,(a_{12}^3 + a_{21}^3).$$

Deci conexiunea, invariantă pe spaţiul (5), are componentele :

(a) Pentru $e_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = 1, \quad \varepsilon_3 = -1$:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{33}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{33}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{12}^1 = -\,\Gamma_{21}^1 = a_{12}^1\,e^{x^1}$$

$$\Gamma_{12}^2 = a_{12}^2, \quad \Gamma_{12}^3 = a_{12}^3\,\mathrm{e}^{x^1}, \quad \Gamma_{13}^3 = -\,(a_{12}^2 + 1),$$

$$\Gamma_{21}^3 = a_{21}^3\,\mathrm{e}^{x^1}, \quad \Gamma_{22}^3 = a_{22}^3\,\mathrm{e}^{2x^1}, \quad \Gamma_{23}^3 = a_{23}^3\,\mathrm{e}^{x^1}, \quad \Gamma_{32}^3 = (2\,a_{12}^1 + a_{23}^3)\,\mathrm{e}^{x^1},$$

$$\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{23}^2 = -\,\Gamma_{31}^1 = -\,\Gamma_{32}^2 = -\frac{1}{n}\,a_{12}^1,$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1+n^2}{n}\,(a_{12}^3 + a_{21}^3)\,\mathrm{e}^{2x^1}, \quad \Gamma_{23}^1 = \frac{1+n^2}{n}\,(a_{12}^2 + 1)\,\mathrm{e}^{x^1}$$

$$\Gamma_{32}^1 = \left[-\frac{1+n^2}{n}\,a_{12}^2 + \frac{1+n^2}{n^2}(a_{12}^3 + a_{21}^3)\right]\mathrm{e}^{x^1}, \quad \Gamma_{13}^2 = -\frac{1}{n}(a_{12}^2 + 1)\,\mathrm{e}^{-x^1},$$

$$\Gamma_{21}^2 = \frac{1}{n}\,(a_{12}^3 + a_{21}^3) - a_{12}^2 - 1, \quad \Gamma_{31}^2 = \left[\frac{1}{n}\,a_{12}^2 - \frac{1}{n^2}\,(a_{12}^3 + a_{21}^3)\right]\mathrm{e}^{-x^1},$$

$$\text{(14a)} \quad \Gamma_{11}^3 = -\frac{1}{1+n^2}\,a_{22}^3 + \frac{n}{1+n^2}\,(a_{23}^3 + a_{12}^1), \quad \Gamma_{31}^3 = a_{12}^2 - \frac{1}{n}\,(a_{12}^3 + a_{21}^3),$$

$$\Gamma_{33}^3 = -\frac{1}{n}\,(a_{12}^1 + a_{23}^3).$$

Componentele nenule $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ ale conexiunii lui Levi-Civita ataşată spaţiului (5) (cazul a) sînt :

$$\overline{\Gamma}^1_{22} = \mathrm{e}^{2x^1}\ \overline{\Gamma}^1_{23} = \overline{\Gamma}^1_{32} = \frac{n}{2}\,\mathrm{e}^{x^1},$$

$$\overline{\Gamma}^2_{12} = \overline{\Gamma}^2_{21} = -\frac{n^2+2}{2\,(1+n^2)},\ \overline{\Gamma}^2_{13} = \overline{\Gamma}^2_{31} = -\frac{n}{2\,(1+n^2)}\,\mathrm{e}^{-x^1},$$

$$\overline{\Gamma}^3_{12} = \overline{\Gamma}^3_{21} = -\frac{n}{2\,(1+n^2)}\,\mathrm{e}^{x^1},\ \overline{\Gamma}^3_{13} = \overline{\Gamma}^3_{31} = -\frac{n^2}{2\,(1+n^2)}.$$

(b) Pentru $e_1 = 1,\ \varepsilon_2 = -1,\ \varepsilon_3 = 1$:

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = -\Gamma^1_{31} = -\Gamma^2_{32} = \frac{1}{n}\,a^1_{12},$$

$$\Gamma^1_{32} = \left[-\frac{1+n^2}{n}\,a^2_{12} - \frac{1+n^2}{n^2}\,(a^3_{12} + a^3_{21})\right]\mathrm{e}^{x^1},$$

$$\Gamma^2_{13} = \frac{1}{n}\,(a^2_{12} + 1)\,\mathrm{e}^{-x^1},$$

$$\Gamma^2_{21} = -\frac{1}{n}\,(a^3_{12} + a^3_{21}) - a^2_{12} - 1, \tag{14 b}$$

$$\Gamma^2_{31} = \left[-\frac{1}{n}\,a^2_{12} - \frac{1}{n^2}\,(a^3_{12} + a^3_{21})\right]\mathrm{e}^{-x^1},$$

$$\Gamma^3_{11} = \frac{1}{1+n^2}\,a^3_{22} + \frac{n}{1+n^2}\,(a^3_{23} + a^1_{12}),$$

$$\Gamma^3_{31} = a^2_{12} + \frac{1}{n}\,(a^3_{12} + a^3_{21}),$$

$$\Gamma^3_{33} = \frac{1}{n}\,(a^1_{12} + a^3_{23}).$$

Celelalte componente ale conexiunii sînt egale cu cele de la cazul a). Componentele nenule $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ ale conexiunii lui Levi-Civita ataşată spaţiului (5), (cazul b), sînt :

$$\overline{\Gamma}^1_{22} = -\mathrm{e}^{2x^1},\ \overline{\Gamma}^1_{23} = \overline{\Gamma}^1_{32} = \frac{n}{2}\,\mathrm{e}^{x^1},\ \overline{\Gamma}^2_{12} = \overline{\Gamma}^2_{21} = -\frac{n^2+2}{2\,(1+n^2)},$$

$$\overline{\Gamma}^2_{13} = \overline{\Gamma}^2_{31} = \frac{n}{2\,(1+n^2)}\,\mathrm{e}^{-x^1},\ \overline{\Gamma}^3_{12} = \overline{\Gamma}^3_{21} = \frac{n}{2\,(1+n^2)}\,\mathrm{e}^{x^1},$$

$$\overline{\Gamma}^3_{13} = \overline{\Gamma}^3_{31} = -\frac{n^2}{2\,(1+n^2)}.$$

(c) Pentru $e_1 = 1,\ \varepsilon_2 = -1,\ \varepsilon_3 = -1$:

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1-n^2}{n}(a^3_{12} + a^3_{21})\,\mathrm{e}^{2x^1},\ \Gamma^1_{23} = -\frac{1-n^2}{n}(a^2_{12} + 1)\,\mathrm{e}^{x^1},$$

$$\Gamma^1_{32} = \frac{1-n^2}{n}a^2_{12} - \frac{1-n^2}{n^2}(a^3_{12} + a^3_{21})\,\mathrm{e}^{x^1} \tag{14 c}$$

$$\Gamma^3_{11} = -\frac{1}{1-n^2}a^3_{22} - \frac{n}{1-n^2}(a^3_{23} + a^1_{12}).$$

Celelalte componente sînt egale cu cel de la cazul (a). Componentele nenule ale conexiunii lui Levi-Civita $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ sînt:

$$\overline{\Gamma}^1_{22} = -\mathrm{e}^{2x^1},\ \overline{\Gamma}^1_{23} = \overline{\Gamma}^1_{32} = \frac{n}{2}\mathrm{e}^{x^1},\ \overline{\Gamma}^2_{12} = \overline{\Gamma}^2_{21} = \frac{n^2-2}{2(1-n^2)},$$

$$\overline{\Gamma}^2_{13} = \overline{\Gamma}^2_{31} = -\frac{n}{2(1-n^2)}\mathrm{e}^{-x^1},\ \overline{\Gamma}^3_{12} = \overline{\Gamma}^3_{21} = -\frac{n}{2(1-n^2)}\mathrm{e}^{x^1},$$

$$\overline{\Gamma}^3_{13} = \overline{\Gamma}^3_{31} = \frac{n^2}{2(1-n^2)}.$$

(d) Pentru $e_1 = 1,\ \varepsilon_2 = -1,\ \varepsilon_3 = 0$:

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{31} = \Gamma^2_{32} = \Gamma^3_{33} = 0,$$

$$\Gamma^1_{22} = -n(a^3_{12} + a^3_{21})\,\mathrm{e}^{2x^1},\ \Gamma^1_{23} = n(a^2_{12} + 1)\,\mathrm{e}^{x^1},\ \Gamma^1_{32} = -na^2_{12}, \tag{14 d}$$

$$\Gamma^2_{21} = -a^2_{12} - 1\ (= \Gamma^3_{13}),\ \Gamma^3_{11} = \frac{1}{n}(a^3_{23} + a^1_{12}),\ \Gamma^3_{31} = a^2_{12}\ (= \Gamma^2_{12}).$$

Componentele nescrise sînt aceleaşi cu cele de la cazul (a). Conexiunea lui Levi-Civita ataşată spaţiului (5), cazul (d), are componentele nenule:

$$\overline{\Gamma}^1_{22} = -\mathrm{e}^{2x^1},\ \overline{\Gamma}^1_{23} = \overline{\Gamma}^1_{32} = \frac{n}{2}\mathrm{e}^1,$$

$$\overline{\Gamma}^2_{12} = \overline{\Gamma}^2_{21} = \overline{\Gamma}^3_{13} = \overline{\Gamma}^3_{31} = -\frac{1}{2}\ \overline{\Gamma}^3_{12} = \overline{\Gamma}^3_{21} = \frac{1}{2n}\mathrm{e}^{x^1}.$$

(e) Pentru $e_1 = 1,\ \varepsilon_2 = 0,\ \varepsilon_3 = -1$:

$$\Gamma^1_{22} = -n(a^3_{12} + a^3_{21})\,\mathrm{e}^{2x^1},\ \Gamma^1_{23} = n(a^2_{12} + 1)\,\mathrm{e}^{x^1}, \tag{14 e}$$

$$\Gamma^1_{32} = (-na^2_{12} + a^3_{12} + a^3_{21})\,\mathrm{e}^{x^1},\ \Gamma^3_{11} = \frac{1}{n^2}a^3_{22} + \frac{1}{n}(a^3_{23} + a^1_{12}).$$

Componentele celelalte sînt egale cu cele din cazul (a), iar conexiunea lui Levi-Civita ataşată acestui caz are componentele nenule:

$$\overline{\Gamma}^1_{23} = \overline{\Gamma}^1_{32} = \frac{n}{2}\mathrm{e}^{x^1},\ \overline{\Gamma}^2_{12} = \overline{\Gamma}^2_{21} = \overline{\Gamma}^3_{13} = \overline{\Gamma}^3_{31} = -\frac{1}{2},$$

$$\overline{\Gamma}^2_{13} = \overline{\Gamma}^2_{31} = -\frac{1}{2n}\mathrm{e}^{-x^1}.$$

(f) Pentru $e_1 = -1,\ \varepsilon_2 = 1,\ \varepsilon_3 = 1$:

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = -\,\Gamma^1_{31} = -\,\Gamma^2_{32} = \frac{1}{n}\,a^1_{12},$$

$$\Gamma^1_{22} = -\,\frac{1-n^2}{n}\,(a^3_{12} + a^3_{21})\,e^{2x^1},\ \ \Gamma^1_{23} = \frac{1-n^2}{n}\,(a^2_{12} + 1)\,e^{x^1},$$

$$\Gamma^1_{32} = \left[-\,\frac{1-n^2}{n}\,a^2_{12} - \frac{1-n^2}{n^2}\,(a^3_{12} + a^3_{21})\right]e^{x^1},\ \ \Gamma^2_{13} = \frac{1}{n}\,(a^2_{12} + 1)\,e^{-x^1},$$

(14 f)

$$\Gamma^2_{21} = -\,\frac{1}{n}\,(a^3_{12} + a^3_{21}) - a^2_{12} - 1,\ \ \Gamma^2_{31} = \left[-\,\frac{1}{n}\,a^2_{12} - \frac{1}{n^2}\,(a^3_{12} + a^3_{21})\right]e^{-x^1},$$

$$\Gamma^3_{11} = -\,\frac{1}{1-n^2}\,a^3_{22} + \frac{n}{1-n^2}\,(a^3_{23} + a^1_{12}),\ \ \Gamma^3_{31} = a^2_{12} + \frac{1}{n}\,(a^3_{12} + a^3_{21}),$$

$$\Gamma^3_{33} = \frac{1}{n}\,(a^1_{12} + a^3_{23}).$$

Celelalte componente ale conexiunii sînt egale cu componentele de la cazul (a). Conexiunea lui Levi-Civita atașată spațiului (5) are componentele nenule:

$$\overline{\Gamma}^1_{22} = -\,e^{2x^1},\ \ \overline{\Gamma}^1_{23} = \overline{\Gamma}^1_{32} = -\,\frac{n}{2}\,e^{x^1},\ \ \overline{\Gamma}^2_{12} = \overline{\Gamma}^2_{21} = \frac{n^2-2}{2\,(1-n^2)},$$

$$\overline{\Gamma}^2_{13} = \overline{\Gamma}^2_{31} = -\,\frac{n}{2\,(1-n^2)}\,e^{-x^1},\ \ \overline{\Gamma}^3_{12} = \overline{\Gamma}^3_{21} = \frac{n}{2\,(1-n^2)}\,e^{x^1},$$

$$\overline{\Gamma}^3_{13} = \overline{\Gamma}^3_{31} = \frac{n^2}{2\,(1-n^2)}.$$

(g) Pentru $e_1 = -1,\ \varepsilon_2 = 1,\ \varepsilon_3 = -1$;

(14 g) $$\Gamma^1_{22} = \frac{1+n^2}{n}\,(a^3_{12} + a^3_{21})\,e^{2x^1},\ \ \Gamma^1_{23} = -\,\frac{1+n^2}{n}\,(a^2_{12} + 1)\,e^{x^1}$$

$$\Gamma^1_{32} = \left[\frac{1+n^2}{n}\,a^2_{12} - \frac{1+n^2}{n^2}\,(a^3_{12} + a^3_{21})\right]e^{x^1},\ \ \Gamma^3_{11} = -\,\frac{1}{1+n^2}\,a^3_{22} -$$

$$-\,\frac{n}{1+n^2}\,(a^3_{23} + a^1_{21}).$$

Celelalte componente sînt aceleași ca în cazul (a). Conexiunea lui Levi-Civita atașată acestui caz are componentele nenule:

$$\overline{\Gamma}^1_{22} = -\,e^{2x^1},\ \ \overline{\Gamma}^1_{23} = \overline{\Gamma}^1_{32} = -\,\frac{n}{2}\,e^{x^1},\ \ \overline{\Gamma}^2_{12} = \overline{\Gamma}^2_{21} = -\,\frac{n^2+2}{2\,(1+n^2)},$$

$$\overline{\Gamma}^2_{13} = \overline{\Gamma}^2_{31} = -\,\frac{n}{2\,(1+n^2)}\,e^{-x^1},\ \ \overline{\Gamma}^3_{12} = \overline{\Gamma}^3_{21} = -\,\frac{n}{2\,(1+n^2)}\,e^{x^1},$$

$$\overline{\Gamma}^3_{13} = \overline{\Gamma}^3_{31} = -\,\frac{n^2}{2\,(1+n^2)},$$

(h) Pentru $e_1 = -1,\ \varepsilon_2 = 1,\ \varepsilon_3 = 0$:

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{31} = \Gamma^2_{32} = \Gamma^3_{33} = 0,$$

$$(14\text{ h})\quad \Gamma^1_{22} = n\,(a^3_{12} + a^3_{21})\,\mathrm{e}^{2x^1},\ \Gamma^1_{23} = -n\,(a^2_{12} + 1)\,\mathrm{e}^{x^1},\ \Gamma^1_{32} = na^2_{12},$$

$$\Gamma^2_{21} = -a^2_{12} - 1\,(= \Gamma^3_{13}),\ \Gamma^3_{11} = -\frac{1}{n}(a^3_{23} + a^1_{12}),\ \Gamma^3_{31} = a^2_{12}\,(= \Gamma^2_{12}).$$

Celelalte componente sînt egale cu cele de la cazul (a). Componentele nenule ale conexiunii lui Levi-Civita sînt :

$$\overline{\Gamma}^1_{22} = -\mathrm{e}^{2x^1},\ \overline{\Gamma}^1_{23} = \overline{\Gamma}^1_{32} = -\frac{n}{2}\mathrm{e}^{x^1},\ \overline{\Gamma}^2_{12} = \overline{\Gamma}^2_{21} = \overline{\Gamma}^3_{13} = \overline{\Gamma}^3_{31} = -\frac{1}{2},$$

$$\overline{\Gamma}^3_{12} = \overline{\Gamma}^3_{21} = -\frac{1}{2\,n}\,\mathrm{e}^{x^1}$$

(i) Pentru $e_1 = 1,\ \varepsilon_2 = -1,\ \varepsilon_3 = 1$:

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = -\Gamma^1_{31} = -\Gamma^2_{32} = \frac{1}{n}\,a^1_{12},$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1+n^2}{n}(a^3_{12} + a^3_{21})\,\mathrm{e}^{2x^1},\ \Gamma^1_{23} = -\frac{1+n^2}{n}(a^2_{12} + 1),$$

$$(14\text{ i})\qquad \Gamma^1_{32} = \left[\frac{1+n^2}{n}a^2_{12} + \frac{1+n^2}{n^2}(a^3_{12} + a^3_{21})\right]\mathrm{e}^{x^1},\ \Gamma^2_{13} = \frac{1}{n}(a^2_{12} + 1)\,\mathrm{e}^{-x^1},$$

$$\Gamma^2_{21} = -\frac{1}{n}(a^3_{12} + a^3_{21}) - a^2_{12} - 1,\ \Gamma^2_{31} = \left[-\frac{1}{n}a^2_{12} - \frac{1}{n^2}(a^3_{12} + a^3_{21})\right]\mathrm{e}^{-x^1},$$

$$\Gamma^3_{11} = \frac{1}{1+n^2}a^3_{22} - \frac{n}{1+n^2}(a^3_{23} + a^1_{12}),\ \Gamma^3_{31} = a^2_{12} + \frac{1}{n}(a^3_{12} + a^3_{21}),$$

$$\Gamma^3_{33} = \frac{1}{n}(a^1_{12} + a^3_{23}).$$

Componentele nescrise sînt egale cu cele de la (a). Componentele nenule ale conexiunii lui Levi-Civita ataşată spaţiului (5) (cazul (i)) sînt :

$$\overline{\Gamma}^1_{22} = \mathrm{e}^{2x^1},\ \overline{\Gamma}^1_{23} = \overline{\Gamma}^1_{32} = -\frac{n}{2}\mathrm{e}^{x^1},\ \overline{\Gamma}^2_{12} = \overline{\Gamma}^2_{21} = -\frac{n^2+2}{2\,(1+n^2)},$$

$$\overline{\Gamma}^2_{13} = \overline{\Gamma}^2_{31} = \frac{n}{2\,(1+n^2)}\,\mathrm{e}^{-x^1},\ \overline{\Gamma}^3_{12} = \overline{\Gamma}^3_{21} = \frac{n}{2\,(1+n^2)}\,\mathrm{e}^{x^1}$$

$$\overline{\Gamma}^3_{13} = \overline{\Gamma}^3_{31} = -\frac{n^2}{2\,(1+n^2)}\,.$$

(j) Pentru $e_1 = 1,\ \varepsilon_2 = -1,\ \varepsilon_3 = -1$:

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1-n^2}{n}(a^3_{12} + a^3_{21})\,\mathrm{e}^{2x^1},\ \Gamma^1_{23} = \frac{1-n^2}{n}(a^2_{12} + 1)\,\mathrm{e}^{x^1},$$

$$\Gamma^1_{32} = \left[-\frac{1-n^2}{n}a^2_{12} + \frac{1-n^2}{n^2}(a^3_{12} + a^3_{21})\right]\mathrm{e}^{x^1},$$

$$\Gamma^3_{11} = \frac{1}{1-n^2}a^3_{22} + \frac{n}{1-n^2}(a^3_{23} + a^1_{12}). \tag{14 j}$$

Componentele nescrise sînt aceleaşi cu cele din cazul (a). Conexiunea lui Levi-Civita ataşată spaţiului (5) are componentele nenule:

$$\overline{\Gamma}^1_{22} = \mathrm{e}^{2x^1},\ \overline{\Gamma}^1_{23} = \overline{\Gamma}^1_{32} = -\frac{n}{2}\,\mathrm{e}^{x^1},\ \overline{\Gamma}^2_{12} = \overline{\Gamma}^2_{21} = \frac{n^2-2}{2\,(1-n^2)},$$

$$\overline{\Gamma}^2_{13} = \overline{\Gamma}^2_{31} = \frac{n}{2\,(1-n^2)}\,\mathrm{e}^{-x^1},\ \overline{\Gamma}^3_{12} = \overline{\Gamma}^3_{21} = -\frac{n}{2\,(1-n^2)}\,\mathrm{e}^{x^1},$$

$$\overline{\Gamma}^3_{13} = \overline{\Gamma}^3_{31} = \frac{n^2}{2\,(1-n^2)}.$$

(k) Pentru $e_1 = 1,\ \varepsilon_2 = -1,\ \varepsilon_3 = 0$:

Componentele conexiunii sînt aceleaşi ca în cazul (h), iar conexiunea lui Levi-Civita ataşată acestui spaţiu are componentele nenule:

$$\overline{\Gamma}^1_{22} = \mathrm{e}^{2x^1},\ \overline{\Gamma}^1_{23} = \overline{\Gamma}^1_{32} = -\frac{n}{2}\mathrm{e}^{x^1},\ \overline{\Gamma}^2_{12} = \overline{\Gamma}^2_{21} = \overline{\Gamma}^3_{13} = \overline{\Gamma}^3_{31} = -\frac{1}{2},$$

$$\overline{\Gamma}^3_{12} = \overline{\Gamma}^3_{21} = \frac{1}{2n}\mathrm{e}^{x^1}.$$

(l) Pentru $e_1 = -1,\ \varepsilon_2 = 0,\ \varepsilon_3 = 1$:

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = -\Gamma^1_{31} = -\Gamma^2_{32} = \frac{1}{n}a^1_{12}$$

$$\Gamma^1_{22} = n\,(a^3_{12} + a^3_{21})\,\mathrm{e}^{2x^1},\ \Gamma^1_{23} = -n\,(a^2_{12} + 1)\,\mathrm{e}^{x^1},$$

$$\Gamma^1_{32} = [n\,a^2_{12} + a^3_{12} + a^3_{21}]\,\mathrm{e}^{x^1},\ \Gamma^2_{13} = \frac{1}{n}(a^2_{12} + 1)\,\mathrm{e}^{-x^1}, \tag{14 l}$$

$$\Gamma^2_{21} = -\frac{1}{n}(a^3_{12} + a^3_{21}) - a^2_{12} - 1,\ \Gamma^2_{31} = -\frac{1}{n}a^2_{12} - \frac{1}{n^2}(a^3_{12} + a^3_{21})\,\mathrm{e}^{-x^1},$$

$$\Gamma^3_{11} = \frac{1}{n^2}a^3_{22} - \frac{1}{n}(a^3_{23} + a^1_{12}),\ \Gamma^3_{31} = a^2_{12} + \frac{1}{n}(a^3_{12}+a^3_{21}),\ \Gamma^3_{33} = \frac{1}{n}(a^1_{12} + a^3_{23}).$$

Celelalte componente sînt aceleași cu cele din cazul (a). Conexiunea lui Levi-Civita atașată spațiului (5), cazul l), are componentele nenule :

$$\overline{\Gamma}^1_{23} = \overline{\Gamma}^1_{32} = -\frac{n}{2}\,\mathrm{e}^{x^1},\ \overline{\Gamma}^2_{12} = \overline{\Gamma}^2_{21} = \overline{\Gamma}^3_{13} = \overline{\Gamma}^3_{31} = -\frac{1}{2}$$

$$\overline{\Gamma}^2_{13} = \overline{\Gamma}^2_{31} = \frac{1}{2n}\,\mathrm{e}^{-x^1}.$$

(m) Pentru $e_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = -1$:

Componentele conexinii, diferite de cele de la cazul (a) sînt :

$$\Gamma^1_{22} = n\,(a^3_{12} + a^3_{21})\,\mathrm{e}^{2x^1},\ \Gamma^1_{23} = -n\,(a^2_{12} + 1)\,\mathrm{e}^{x^1}, \tag{14 m}$$

$$\Gamma^1_{32} = (n\,a^2_{12} - a^3_{12} - a^3_{21})\,\mathrm{e}^{x^1},\ \Gamma^3_{11} = -\frac{1}{n^2}\,a^3_{22} - \frac{1}{n}\,(a^3_{23} + a^1_{12}).$$

Conexiunea lui Levi-Civita are componentele nenule :

$$\overline{\Gamma}^1_{23} = \overline{\Gamma}^1_{32} = -\frac{n}{2}\,\mathrm{e}^{x^1},\ \overline{\Gamma}^2_{12} = \overline{\Gamma}^2_{21} = \overline{\Gamma}^3_{13} = \overline{\Gamma}^3_{31} = -\frac{1}{2},$$

$$\overline{\Gamma}^2_{13} = \overline{\Gamma}^2_{31} = -\frac{1}{2n}\,\mathrm{e}^{-x^1},$$

(n) Pentru $e_1 = -1,\ \varepsilon_2 = 0,\ \varepsilon_3 = 0$.
Conexiunea are componentele egale cu cele de la cazul (h), iar conexiunea lui Levi-Civita atașată acestui spațiu are componentele nenule :

$$\overline{\Gamma}^1_{23} = \overline{\Gamma}^1_{32} = -\frac{n}{2}\,\mathrm{e}^{x^1},\ \overline{\Gamma}^2_{12} = \overline{\Gamma}^2_{21} = \overline{\Gamma}^3_{13} = \overline{\Gamma}^3_{31} = -\frac{1}{2}\cdot$$

Cum în toate cazurile invariantul lui Tallini este nul, rezultă :

Conexiunile invariante pe un spațiu V_3 cu metrica (5) sînt conexiunile (14) depinzînd de șase constante arbitrare, compatibile cu un spațiu V_3.

Vom determina acum conexiunile invariante pentru grupul (6′) de transformări :

Din $X_1 f$ și $X_4 f$ rezultă

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^2} = 0,\ \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^3} = 0, \qquad \text{deci } \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}\,(x^1).$$

Pentru determinarea conexiunii vom înmulți ecuațiile $(i,\ j,\ k;\ 2)$ și $(i,\ j,\ k;\ 3)$ respectiv cu $\cos x^2$ și $\sin x^2$ și le vom aduna. În acest mod din $(1,\ 1,\ 1;\ h)$, $(1,\ 1,\ 3;\ h)$, $(1,\ 3,\ 1;\ h)$, $(1,\ 3,\ 3;\ h)$ obținem :

$$\Gamma^1_{11} = a^1_{11},\ \Gamma^1_{13} = a^1_{13},\ \Gamma^1_{31} = a^1_{31},\ \Gamma^1_{33} = a^1_{33}.$$

Din $(2,\ 1,\ 1;\ h)$, $(2,\ 1,\ 3;\ h)$, $(2,\ 3,\ 1;\ h)$, $(2,\ 3,\ 3;\ h)$,

$$\Gamma^2_{11} = -\frac{a^2_{11}}{\cos x^1},\ \Gamma^2_{13} = -\frac{a^2_{13}}{\cos x^1},\ \Gamma^2_{31} = -\frac{a^2_{31}}{\cos x^1},\ \Gamma^2_{33} = -\frac{a^2_{33}}{\cos x^1}.$$

Înmulțind ecuațiile $(i,\ j,\ k\,;\ 2)$, și $(i,\ j,\ k\,;\ 3)$ respectiv cu $\sin x^2$ și $-\cos x^2$ și adunîndu-le rezultă din $(1,\ 3,\ 3\,;\ h)$ și $(2,\ 3,\ 3\,;\ h)$:

$$a^2_{33} = 0 \text{ și } a^1_{33} = 0.$$

În mod analog ca în primul caz determinăm din $(1,\ 1,\ 2\,;\ h)$, $(1,\ 2,\ 1\,;\ h)$, $(1,\ 2,\ 3\,;\ h)$, $(2,\ 1,\ 2\,;\ h)$, $(2,\ 2,\ 1\,;\ h)$, $(2,\ 2,\ 3\,;\ h)$ $(2,\ 3,\ 2\,;\ h)$, $(3,\ 1,\ 1\,;\ \mathrm{h})$, $(3,\ 1,\ 3\,;\ h)$, $(3,\ 3,\ 1\,;\ h)$, $(3,\ 3,\ 3\,;\ h)$:

$$\Gamma^1_{12} = -\,a^1_{13}\sin x^1 + a^1_{12}\cos x^1,\ \Gamma^1_{21} = -\,a^1_{31}\sin x^1 + a^1_{21}\cos x^1,$$

$$\Gamma^1_{23} = a^1_{23}\cos x^1,$$

$$\Gamma^1_{32} = a^1_{32}\cos x^1,\ \Gamma^2_{12} = (a^2_{13}+1)\operatorname{tg} x^1 + a^2_{12},\ \Gamma^2_{21} = (a^2_{31}+1)\operatorname{tg} x^1 + a^2_{21},$$

$$\Gamma^2_{23} = a^2_{23},\ \ \Gamma^2_{32} = a^2_{32},\ \ \Gamma^3_{11} = -\,a^2_{11}\operatorname{tg} x^1 + a^3_{11},$$

$$\Gamma^3_{13} = -\,a^2_{13}\operatorname{tg} x^1 + a^3_{13},\ \ \Gamma^3_{31} = -\,a^2_{31}\operatorname{tg} x^1 + a^3_{31},\ \ \Gamma^3_{33} = a^3_{33}.$$

Înlocuind aceste valori în $(1,\ 2,\ 2,\,;\ h)$, $(2,\ 2,\ 2\,;\ h)$, $(3,\ 1,\ 2\,;\ h)$, $(3,\ 2,\ 1\,;\ h)$, $(3,\ 2,\ 2\,;\ h)$, $(3,\ 2,\ 3\,;\ h)$, $(3,\ 3,\ 2\,;\ h)$ obținem:

$$\Gamma^1_{22} = -\,(a^1_{23} + a^1_{32} + 1)\sin x^1\cos x^1 + a^1_{22}\cos^2 x^1,$$

$$\Gamma^2_{22} = -\,(a^2_{23} + a^2_{32})\sin x^1 + a^2_{22}\cos x^1,$$

$$\Gamma^3_{12} = (a^2_{13}+1)\,\frac{\sin^2 x^1}{\cos x^1} + (a^2_{12} - a^3_{13})\sin x^1 + a^3_{12}\cos x^1,$$

$$\Gamma^3_{21} = (a^2_{31}+1)\,\frac{\sin^2 x^1}{\cos x^1} + (a^2_{21} - a^3_{31})\sin x^1 + a^3_{21}\cos x^1,$$

$$\Gamma^3_{22} = -\,(a^1_{13} + a^1_{31} - a^3_{33})\sin^2 x^1 - (a^3_{23} + a^3_{32} - a^2_{22})\sin x^1\cos x^1 + a^3_{22}\cos^2 x^1,$$

$$\Gamma^3_{23} = (a^2_{23} - a^3_{33})\sin x^1 + a^3_{23}\cos x^1,\ \ \Gamma^3_{32} = (a^2_{32} - a^3_{33})\sin x^1 + a^3_{32}\cos x^1.$$

Pentru determinarea relațiilor dintre coeficienți, folosind al doilea mod de lucru, obținem din:

$(3,\ 2,\ 3\,;\ h)$ $\quad a^3_{13} = 0 \quad a^2_{13} = a^1_{23}$,

$(3,\ 3,\ 2\,;\ h)$ $\quad a^3_{31} = 0 \quad a^2_{31} = a^1_{32}$,

$(3,\ 1,\ 3\,;\ h)$ și $(3,\ 3,\ 1\,;\ h)$: $a^3_{23} = 0 \quad a^3_{32} = 0$,

$(1,\ 2,\ 3\,;\ h)$ și $(1,\ 3,\ 2\,;\ h)$, $a^1_{13} = a^2_{23}$ și $a^1_{31} = a^2_{32}$,

$(3,\ 1,\ 2\,;\ h)$: $\quad a^3_{11} = a^3_{22}$,

$(3,\ 1,\ 1\,;\ h)$ $\quad a^3_{21} = 1 - a^3_{12}$.

Din ecuațiile rămase se determină: $a^1_{31} = -\,a^1_{13}$ și

$$a^1_{11} = a^1_{12} = a^1_{21} = a^1_{22} = a^2_{11} = a^2_{12} = a^2_{21} = a^2_{22} = 0.$$

Deci conexiunea invariantă pe spațiul V_3 cu metrica (6) are componentele nenule :

$$\begin{gathered}
\Gamma^1_{12} = -\Gamma^1_{21} = -a^1_{13}\sin x^1,\ \Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = -\Gamma^1_{31} = -\Gamma^2_{32} = a^1_{13},\\
\Gamma^1_{22} = -(a^1_{23} + a^1_{32} + 1)\sin x^1\cos x^1,\ \Gamma^1_{23} = a^1_{23}\cos x^1\ \Gamma^1_{32} = a^1_{32}\cos x^1,\\
\Gamma^2_{12} = (a^1_{23} + 1)\operatorname{tg} x^1,\ \Gamma^2_{13} = \frac{a^1_{23}}{\cos x^1},\ \Gamma^2_{21} = (a^1_{32} + 1)\operatorname{tg} x^1,\\
\Gamma^2_{31} = -\frac{a^1_{32}}{\cos x^1},\ \Gamma^3_{11} = a^3_{11},\ \Gamma^3_{12} = (a^1_{23} + 1)\frac{\sin^2 x^1}{\cos x^1} + a^3_{12}\cos x^1,\\
\Gamma^3_{13} = -a^1_{23}\operatorname{tg} x^1,\ \Gamma^3_{21} = (a^1_{32} + 1)\frac{\sin^2 x^1}{\cos x^1} + (1 - a^3_{12})\cos x^1,\\
\Gamma^3_{22} = a^3_{33}\sin^2 x^1 + a^3_{11}\cos^2 x^1,\ \Gamma^3_{23} = (a^1_{13} - a^3_{33})\sin x^1,\\
\Gamma^3_{31} = -a^1_{32}\operatorname{tg} x^1,\ \Gamma^3_{32} = -(a^1_{13} + a^3_{33})\sin x^1,\ \Gamma^3_{33} = a^3_{33}.
\end{gathered}\tag{15}$$

Componentele nenule $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ ale conexiunii lui Levi-Civita atașată spațiului (6) sînt :

$$\begin{gathered}
\overline{\Gamma}^1_{22} = (m-1)\sin x^1\cos x^1,\ \overline{\Gamma}^1_{23} = \overline{\Gamma}^1_{32} = -\frac{m}{2}\cos x^1,\\
\overline{\Gamma}^2_{12} = \overline{\Gamma}^2_{21} = \left(1 - \frac{m}{2}\right)\operatorname{tg} x^1,\ \overline{\Gamma}^2_{13} = \overline{\Gamma}^2_{31} = \frac{m}{2}\frac{1}{\cos x^1},\\
\overline{\Gamma}^3_{12} = \overline{\Gamma}^3_{21} = \left(1 - \frac{m}{2}\right)\frac{\sin^2 x^1}{\cos x^1} + \frac{1}{2}\cos x^1,\ \overline{\Gamma}^3_{13} = \overline{\Gamma}^3_{31} = \frac{m}{2}\operatorname{tg} x^1.
\end{gathered}$$

Calculînd R, $\overline{R}$, T, rezultă $R - \overline{R} - T = 0$, deci aplicînd teorema lui Tallini avem :

Conexiunile invariante pe un spațiu V_3 cu metrica (6) sînt conexiunile (15) depinzînd de șase constante arbitrare, combatibile cu un spațiu V_3.

Pentru determinarea conexiunilor la grupul (7′) de transformări vom considera întîi transformările $X_1 f$ și $X_4 f$. Din acestea rezultă :

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^3} = 0,\quad \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^1} = 0,$$

deci

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x^2).$$

Pentru determinarea conexiunii folosim același procedeu ca în cazul anterior, adică înmulțim ecuațilile $(i, j, k;\ 2)$ cu $\sin x^3$ și $(i, j, k;\ 3)$ cu $\cos x^3$. Prin adunarea lor vom obține: din $(1, 1, 1;\ h)$, $(1, 1, 2;\ h)$, $(1, 1, 3;\ h)$, $(1, 2, 1;\ h)$, $(1, 2, 2,;\ h)$, $(1, 3, 1;\ h)$, $(2, 1, 1;\ h)$, $(2, 1, 2;\ h)$, $(2, 2, 1;\ h)$ $(2, 2, 2;\ h)$, $(3,1, 1;\ h)$, $(3, 1, 3;\ h)$, $(3, 3, 1;\ h)$, $(3, 3, 3;\ b)$

$$\begin{gathered}
\Gamma^1_{11} = a^1_{11},\ \Gamma^1_{12} = a^1_{12},\ \Gamma^1_{13} = a^1_{13}\sin x^2,\ \Gamma^1_{21} = a^1_{21},\\
\Gamma^1_{22} = a^1_{22},\ \Gamma^1_{31} = a^1_{31}\sin x^2,\ \Gamma^2_{11} = a^2_{11},\\
\Gamma^2_{12} = a^2_{12},\ \Gamma^2_{21} = a^2_{21},\ \Gamma^2_{22} = a^2_{22},\ \Gamma^3_{11} = a^3_{11}\sin x^2,\ \Gamma^3_{13} = a^3_{13},\\
\Gamma^3_{31} = a^3_{31},\ \Gamma^3_{33} = a^3_{33}\sin x^2.
\end{gathered}$$

Pentru a determina constantele a^i_{jk} înmulţim ecuaţiile de mai sus ($h = 2, 3$) respectiv cu $-\cos x^3$ şi $\sin x^3$ şi le adunăm. Astfel obţinem:

Din $(1, 1, 2; h)$, $(1, 1, 3; h)$ $(1, 2, 1; h)$, $(1, 3, 1; h)$, $(2, 1, 1; h)$, $(3, 1, 1, h)$:

$$a^1_{13} = a^1_{12} = a^1_{31} = a^1_{21} = a^3_{11} = a^2_{11} = 0$$

şi din $(3, 1, 3; h)$ şi $(3, 3, 1; h)$:

$$a^3_{13} = a^2_{12} \text{ şi } a^3_{31} = a^2_{21}.$$

În acelaşi fel din $(1, 2, 3; h)$, $(1, 3, 2; h)$, $(1, 3, 3; h)$, $(2, 1, 3; h)$, $(2, 2, 3; h)$, $(2, 3, 1; h)$, $(2, 3, 2; h)$, $(2, 3, 3; h)$, $(3, 1, 2; h)$, $(3, 2, 1; h)$, $(3, 2, 2; h)$, $(3, 2, 3; h)$, $(3, 3, 2; h)$:

$$\Gamma^1_{23} = a^1_{23} \sin x^2,\ \Gamma^1_{32} = a^1_{32} \sin x^2,\ \Gamma^1_{33} = a^1_{33} \sin^2 x^2,$$

$$\Gamma^2_{13} = a^2_{13} \sin x^2\ \ \Gamma^2_{33} = \sin x^2 \cos x^2 + a^2_{33} \sin^2 x^2$$

$$\Gamma^2_{23} = a^2_{23} \sin x^2,\ \Gamma^2_{31} = a^2_{31} \sin x^2,\ \Gamma^2_{32} = a^2_{32} \sin x^2,\ \Gamma^3_{12} = \frac{a^3_{12}}{\sin x^2}$$

$$\Gamma^3_{21} = \frac{a^3_{21}}{\sin x^2},\ \Gamma^3_{22} = \frac{a^3_{22}}{\sin x^2},\ \Gamma^3_{23} = -\operatorname{ctg} x^2 + a^3_{23},\ \Gamma^3_{32} = -\operatorname{ctg} x^2 + a^3_{32}.$$

Pentru determinarea relaţiilor dintre constante, folosind aceeaşi metodă, obţinem respectiv din $(1, 2, 2; h)$, $(1, 2, 3; h)$ $(2, 1, 2; h)$ $(2, 1, 3; h)$, $(2, 2, 1; h)$:

$$a^1_{32} = -a^1_{23},\ a^1_{22} = a^1_{33}\ \ a^3_{12} = -a^2_{13},\ a^3_{13} = a^2_{12},$$

$$a^3_{21} = -a^2_{31},\ a^3_{31} = a^2_{21}.$$

Folosind în acelaşi fel ecuaţiile $(2, 2, 2; h)$, $(2, 2, 3; h)$, $(2, 3, 2; h)$, $(2, 3, 3; h)$, $(3, 2, 2; h)$, $(3, 2, 3; h)$, $(3, 3, 2; h)$, $(3, 2, 3; h)$ determinăm:

$$a^2_{22} = a^2_{23} = a^2_{32} = a^3_{22} = a^3_{23} = a^3_{32} = a^3_{33} = a^2_{33} = 0.$$

Celelalte ecuaţii sînt identic satisfăcute.

Rezultă deci că conexiunea invariantă pe spaţiul V_3 cu metrica (7) are componentele nenule

$$\Gamma^1_{11} = a^1_{11},\ \Gamma^1_{22} = a^1_{22},\ \Gamma^1_{33} = a^1_{22} \sin^2 x^2,\ \Gamma^2_{13} = a^2_{13} \sin x^2$$

$$\Gamma^2_{31} = a^2_{31} \sin x^2,\ \Gamma^2_{33} = \sin x^2 \cos x^2,\ \Gamma^3_{12} = -\frac{a^2_{13}}{\sin x^2},\ \Gamma^3_{21} = -\frac{a^2_{31}}{\sin x^2} \tag{16}$$

$$\Gamma^1_{23} = -\Gamma^1_{32} = a^1_{23} \sin x^2,\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = a^2_{12},\ \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = a^2_{21},$$

$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = -\operatorname{ctg} x^2.$$

Componentele nenule ale conexiunii lui Levi-Civita ataşată spaţiului (7) sînt:

$$\overline{\Gamma}^3_{23} = \overline{\Gamma}^3_{32} = -\operatorname{ctg} x^2,\ \overline{\Gamma}^2_{33} = \sin x^2 \cos x^2.$$

Calculînd R, $\overline{R}$, T avem :

$$R - \overline{R} - T = 0$$

deci conform teoremei lui Tallini rezultă :

Componentele conexiunii invariante pe un spaţiu V_3 cu metrica (7) sînt conexiunile (16), depinzînd de şapte constante arbitrare, compatibile cu acest spaţiu.

Vom determina acum conexiunea invariantă la grupul (8′) de transformări.

Din $(i, j, k; 1)$ şi $(i, j, k; 4)$ rezultă

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^3} = 0 \quad \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^1} = 0 \text{ deci } \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x^2).$$

Înmulţind $(i, j, k; 2)$ şi $(i, j, k; 3)$ cu $\cos x^3$ şi adunînd rezultă din $(1, 1, 1,; h)$, $(1, 1, 2; h)$, $(1, 2, 1; h)$, $(1, 2, 2,; h)$, $(2, 1, 1,; h)$, $(2, 1, 2; h)$, $(2, 2, 1; h)$, $(2, 2, 2; h)$, $(3, 1, 3; h)$ $(3, 2, 3; h)$ $(3, 3, 1; h)$ $(3, 3, 2; h)$,

$$\Gamma^1_{11} = a^1_{11},\ \Gamma^1_{12} = a^1_{12},\ \Gamma^1_{21} = a^1_{21},\ \Gamma^1_{22} = a^1_{22},\ \Gamma^2_{11} = a^2_{11},\ \Gamma^2_{12} = a^2_{12},$$

$$\Gamma^2_{21} = a^2_{21},\ \Gamma^2_{22} = a^2_{22},\ \Gamma^3_{13} = a^3_{13},\ \Gamma^3_{23} = -\operatorname{cth} x^2 + a^3_{23},\ \Gamma^3_{31} = a^3_{31},$$

$$\Gamma^3_{32} = -\operatorname{cth} x^2 + a^3_{32}.$$

În acelaşi mod din $(1, 1, 3; h)$, $(1, 2, 3; h)$, $(1, 3, 1; h)$, $(1, 3, 2; h)$, $(1, 3, 3; h)$, $(2, 1, 3; h)$, $(2, 2, 3; h)$, $(2, 3, 1; h)$, $(2, 3, 2; h)$, $(2, 3, 3; h)$, $(3, 1, 1; h)$, $(3, 1, 2; h)$:

$$\Gamma^1_{13} = a^1_{13} \operatorname{sh} x^2,\ \Gamma^1_{23} = a^1_{23} \operatorname{sh} x^2,\ \Gamma^1_{31} = a^1_{31} \operatorname{sh} x^2,\ \Gamma^1_{32} = a^1_{32} \operatorname{sh} x^2,$$

$$\Gamma^1_{33} = a^1_{33} \operatorname{sh} x^2,\ \Gamma^2_{13} = a^2_{13} \operatorname{sh} x^2,\ \Gamma^2_{23} = a^2_{23} \operatorname{sh} x^2,\ \Gamma^2_{31} = a^2_{31} \operatorname{sh} x^2,$$

$$\Gamma^2_{32} = a^2_{32} \operatorname{sh} x^2,\ \Gamma^2_{33} = \operatorname{sh} x^2 + a^2_{33} \operatorname{sh}^2 x^2,\ \Gamma^3_{11} = \frac{a^3_{11}}{\operatorname{sh} x^2},\ \Gamma^3_{12} = \frac{a^3_{12}}{\operatorname{sh} x^2},$$

$$\Gamma^3_{21} = \frac{a^3_{21}}{\operatorname{sh} x^2},\ \Gamma^3_{22} = \frac{a^3_{22}}{\operatorname{sh} x^2},\ \Gamma^3_{33} = a^3_{33} \operatorname{sh} x^2.$$

Pentru a determina relaţiile dintre coeficienţii a^i_{jk}, înmulţim ecuaţiile $(i, j, k; 2)$ cu $\cos x^3$ şi $(i, j, k; 3)$ cu $-\sin x^3$ şi le adunăm. În acest mod obţinem respectiv din $(1, 1, 2; h)$, $(1, 2, 1; h)$, $(1, 1, 3; h)$, $(1, 3, 1; h)$, $(2, 1, 1; h)$, $(3, 1, 1; h)$:

$$a^1_{13} = a^1_{31} = a^1_{12} = a^1_{21} = a^3_{11} = a^2_{11} = 0,$$

iar din $(1, 2, 2; h)$, $(1, 2, 3; h)$, $(2, 1, 2; h)$, $(2, 1, 3; h)$, $(2, 2, 1; h)$ $(2, 3, 1; h)$:

$$a^1_{32} = -a^1_{23},\ a^1_{33} = a^1_{22},\ a^3_{12} = -a^2_{13},\ a^3_{13} = a^2_{12},\ a^3_{21} = -a^2_{31},\ a^3_{31} = a^2_{21}.$$

Din ecuaţiile $(2, 2, 2; h)$, $(2, 2, 3; h)$, $(2, 3, 2; h)$, $(2, 3, 3; h)$, $(3, 2, 2,; h)$, $(3, 2, 3; h)$, $(3, 3, 2; h)$, $(3, 3, 3; h)$ determinăm

$$a^2_{22} = a^2_{23} = a^2_{32} = a^2_{33} = a^3_{22} = a^3_{23} = a^3_{32} = a^3_{33} = 0.$$

Celelalte ecuaţii sînt identice satisfăcute

Conexiunea va avea componentele nenule :

$$\Gamma^1_{11} = a^1_{11},\ \Gamma^1_{22} = a^1_{22},\ \Gamma^1_{33} = a^1_{22}\,\mathrm{sh}^2\, x^2,\ \Gamma^2_{13} = a^2_{13}\,\mathrm{sh}\, x^2$$

$$\Gamma^2_{31} = a^2_{31}\,\mathrm{sh}\, x^2,\ \Gamma^2_{33} = \mathrm{sh}\, x^2\,\mathrm{ch}\, x^2,\ \Gamma^3_{12} = -\frac{a^2_{13}}{\mathrm{sh}\, x^2},\ \Gamma^3_{21} = -\frac{a^2_{31}}{\mathrm{sh}\, x^2},$$

$$\Gamma^1_{23} = -\Gamma^1_{32} = a^1_{23}\,\mathrm{sh}\, x^2,\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = a^2_{12},\ \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = a^2_{21}, \tag{17}$$

$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = -\,\mathrm{cth}\, x^2.$$

Conexiunea lui Levi-Civita ataşată spaţiului (8) are componentele nenule :

$$\overline{\Gamma}^2_{33} = \mathrm{sh}\, x^2\,\mathrm{ch}\, x^2,$$

$$\overline{\Gamma}^3_{23} = \overline{\Gamma}^3_{32} = -\,\mathrm{cth}\, x^2.$$

Pentru a determina conexiunea în cazul grupului (8″) de transformări, procedăm în acelaşi mod ca pentru cazul de transformări (8′). Factori cu care înmulţim ecuaţiile $(i,\ j,\ k;\ 2)$ şi $(i,\ j,\ k;\ 3)$ sînt respectiv $-\ \mathrm{sh} x^2$ şi $\mathrm{ch} x^2$. Prin adunare obţinem din aceleaşi ecuaţii :

$$\Gamma^1_{11} = a^1_{11},\ \Gamma^1_{22} = a^1_{22},\ \Gamma^1_{33} = a^1_{22}\,\mathrm{sh}\, x^2,\ \Gamma^2_{13} = a^2_{13}\,\mathrm{sh}\, x^2$$

$$\Gamma^2_{31} = a^2_{31}\,\mathrm{sh}\, x^2,\ \Gamma^2_{33} = -\,\mathrm{sh}\, x^2\,\mathrm{ch}\, x^2,\ \Gamma^3_{12} = \frac{a^2_{13}}{\mathrm{sh}\, x^2},\ \Gamma^3_{21} = \frac{a^2_{31}}{\mathrm{sh}\, x^2}$$

$$\Gamma^1_{23} = -\Gamma^1_{32} = a^1_{23}\,\mathrm{sh}\, x^2,\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = a^2_{12},\ \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = a^2_{21} \tag{17'}$$

$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = -\,\mathrm{cth}\, x^2.$$

Componentele scrise sînt nule.

Conexiunea lui Levi-Civita ataşată acestui spaţiu are componentele nenule :

$$\overline{\Gamma}^2_{33} = -\,\mathrm{sh}\, x^2\,\mathrm{ch}\, x^2,\quad \overline{\Gamma}^3_{23} = \overline{\Gamma}^3_{32} = -\,\mathrm{cth}\, x^2.$$

Întrucît invariantul lui Tallini este nul în ambele cazuri, rezultă :

Conexiunile invariante pe un spaţiu V_3 cu metrica (8) sînt conexiunile (17) şi (17′), depinzînd de şapte constante arbitrare, compatibile cu un spaţiu V_3, compact şi orientabil.

Din aceste rezultate putem deduce următoarea :

TEOREMA. *Conexiunile invariante pe un spaţiu V_3 care admite ca grup total de mişcări un grup G_4, depind de şapte constante arbitrare (de şase în cazurile (5) şi (6)), fiind compatibile cu un spaţiu V_3, compact şi orientabil.*

Primită la redacţie la 27 octombrie 1967

Universitatea din Bucureşti,
Institutul Pedagogic

CONNEXIONS INVARIANTES SUR UN ESPACE RIEMANNIEN V_3 À LA MÉTRIQUE INDÉFINIE

(RÉSUMÉ)

Dans cet ouvrage on détermine les connexions affines invariantes sur un espace riemannien V_3, à la métrique non définie, avec groupe de mouvements G_4.

En considérant la classification de G. I. Krucikovici [1] des espaces V_3, qui admettent comme groupe total de mouvements un groupe G_4 et les groupes réspectifs de mouvements, on détermine les connexions affines invariantes de ces groupes de mouvements. Par la suite, en utilisant un théorème de Tallini [4], on démontre que ces connexions sont compatibles avec un espace V_3 compact et orientable.

BIBLIOGRAFIE

1. Krucikovici, G.I., *Clasificarea spațiilor riemanniene tridimensionale după grupurile de mișcări-Grupuri de mișcări ale spațiilor riemanniene,* Buc., 1959.
2. Stoka, M., *Connexions invariantes sur un espace riemannien Vn* .Rev. Roum. de Math. Pures et Appl., **9**, 1281—1300 (1965).
3. Stoka, M., *Sur les connexions sur un espace à métrique indéfinie à curbure constante.* Boll U M I, **2** (1967).
4. Tallini, G., *Una propietà in grande della varietà à connessione affine compatte con applicazioni alla varietà à connessione proettiva.* Rend. Acc. Lincei, **32**, 644—648 (1962).
5. Vrănceanu, Gh., *Sur quelques théorémes de géométrie différentielle globale.* Rev. Roum. de Math. Pures et Appl., **10**, **2** (1965).

ASUPRA SCUFUNDĂRII NATURALE A UNEI CLASE DE SPAȚII LENTICULARE

DE

IULIAN POPOVICI

Se studiază scufundările naturale ale spațiilor lenticulare L_{2n+1} $(p;1,\ldots,1)$ [4], obținute prin generalizarea scufundării lui Manoury pentru spațiile proiective. Se stabilește, printre altele, analiticitatea acestui tip de scufundare. Se deduce metrica indusă în L_{2n+1} $(p;1,\ldots,1)$, care păstrează aspectul ortogonal-simplectic din cazul spațiilor proiective complexe sau al celor reale cu număr impar de dimensiuni.

Fie $E_{2(n+1)}$ spațiul euclidian $2(n+1)$-dimensional, raportat la un sistem ortogonal de coordonate $x_0, x_1, \ldots, x_{2n+1}$. Vom introduce în $E_{2(n+1)}$ coordonatele complexe $z_0, z_1, \ldots, z_n$ date de:

$$z_h = x_{2h} + ix_{2h+1}, \qquad (h = 0, 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Sfera S_{2n+1} este definită de ecuația:

$$\sum z_h\bar{z}_h = 1. \tag{2}$$

Avem:

$$z_h d\bar{z}_h + \bar{z}_h dz_h = 0. \tag{3}$$

Orice sistem de numere întregi și nenule $p; p_0, p_1, \ldots, p_n$ astfel ca fiecare pereche (p, p_h) să fie formată din numere relativ prime definește un grup G generat de transformarea lui $E_{2(n+1)}$:

$$z'_h = \exp\left(\frac{2\pi i p_h}{p}\right) z_h; \tag{4}$$

grupul G este discret pe sfera S_{2n+1}. *Spațiul lenticular* L_{2n+1} $(p; p_0, p_1, \ldots, p_n)$ [3] este prin definiție varietatea compactă a orbitelor lui S_{2n+1} în raport cu grupul G. În cele ce urmează vom considera cazul cînd $p_0 = p_1 = \ldots = p_n = 1$ și vom nota cu L^p_{2n+1} spațiul lenticular L_{2n+1} $(p; 1, \ldots, 1)$. Putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că $p > 1$.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 5, P. 723–729, BUCUREȘTI, 1968

Pentru $p = 2$ regăsim spaţiul proiectiv real cu număr impar de dimensiuni P_{2n+1}.

În cazul spaţiului lenticular L^p_{2n+1} grupul G este generat de transformarea :

$$z'_h = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\right) z_h . \tag{4'}$$

Vom considera de asemenea varietatea $L^p_{2(n+1)}$ a orbitelor lui $E_{2(n+1)} - \{0\}$ în raport cu grupul G definit de transformarea (4'). $L^p_{2(n+1)}$ poate fi considerată şi ca varietate complexă de dimensiune $n+1$.

Construirea diverselor scufundări ale spaţiilor proiective [1], [2], [4] se axează pe următoarele două aspecte :

a) ilustrarea teoremei de scufundare a lui Whitney [5] ;

b) definirea unor metrici induse cît mai simple (în general fără respectarea teoremei lui Whitney).

Scufundarea lui James [2] este de prima categorie. Scufundările din a doua categorie se mai numesc *naturale*. Ca exemplu de scufundare naturală cităm scufundarea lui Manoury dată de formulele următoare :

$$\begin{aligned} u_h &= z_h^2 \qquad (h, k = 0, 1, \ldots, n), \\ u_{hk} &= \sqrt{2} z_h z_k \qquad (h < k) \end{aligned} \tag{5}$$

a spaţiului proiectiv P_{2n+1} raportat la coordonatele complexe omogene $z_0, z_1, \ldots, z_n$ în spaţiul euclidian cu $(n + 1)(n+2)$ dimensiuni (a se vedea [4], p. 224). Scufundarea (5) induce o metrică simplectică.

Se pot construi efectiv scufundări de tip a) pentru orice spaţiu lenticular [3] prin generalizarea scufundării lui James, însă fără a se păstra analiticitatea.

În ceea ce priveşte scufundările naturale, Gh. Vrănceanu a extins, în cadrul unui curs special ţinut în 1964, scufundarea (5) la cazul spaţiilor lenticulare L^p_{2n+1} (a se vedea şi [4], p. 235). În articolul de faţă ne propunem să studiem mai îndeaproape acest gen de scufundări.

Considerăm în spaţiul euclidian cu $2(n + 1)^p$ dimensiuni un sistem de coordonate complexe de forma (1), notate cu $u_{h_1 h_2 \ldots h_p}$, unde indicii $h_1, \ldots, h_p$ parcurg în mod independent valorile $0, 1, \ldots, n$.

Vom stabili mai întîi rezultatul următor :

Formulele

$$u_{h_1 h_2 \ldots h_p} = z_{h_1} z_{h_2} \ldots z_{h_p} \qquad (h_1, \ldots, h_p = 0, \ldots, n) \tag{6}$$

realizează o scufundare topologică a spaţiului lenticular L^p_{2n+1} *în* $E_{2(n+1)^p}$. *Imaginea* V *a acestei scufundări este situată pe sfera* $S_{2(n+1)^p-1}$ *dată de ecuaţia*

$$\sum u_{h_1 \ldots h_p} \overline{u}_{h_1 \ldots h_p} = 1. \tag{7}$$

Observăm că formula (7) este o consecinţă imediată a formulelor (2) şi (6). Va trebui să verificăm doar biunivocitatea aplicaţiei (6). Fie, pentru aceasta, un punct $P(z_0, \ldots, z_n)$ situat pe sfera S_{2n+1}, care merge prin aplicaţia (6) într-un punct $Q\ (u_{h_1\dots h_p})$. Există un indice h pentru care $z_h \neq 0$. Din (6) deducem:

$$z_h^p = u_{h\dots h}$$

şi deci:

$$z_k = \frac{u_{kh\dots h}}{u_{hh\dots h}^{(p-1)/p}}. \tag{8}$$

Fie acum un alt punct $P'(z'_0, \dots, z'_n)$ de pe sfera S_{2n+1} care merge, prin aceeaşi aplicaţie, tot în Q. Avem, evident, formule analoage cu (8), deoarece sîntem asiguraţi de faptul că $u_{h\dots h}$ este nenul:

$$z'_k = \frac{u_{kh\dots h}}{u_{hh\dots h}^{(p-1)/p}}. \tag{8'}$$

Punctele P şi P' diferă, în virtutea formulelor (8) şi (8′), cel mult printr-o putere a transformării (4′); deci ele definesc un acelaşi punct al spaţiului lenticular L_{2n+1}^p.

Vom stabili în continuare trei proprietăţi importante ale scufundării (6).

I. *Scufundarea* (6) *induce pe varietatea* $L_{2(n+1)}^p$ *metrica următoare*:

$$\mathrm{d}s^2 = p(z_h\bar{z}_h)^{p-1}\,\mathrm{d}z_k\mathrm{d}\bar{z}_k + p\,(p-1)\,(z_h\bar{z}_h)^{p-2}\,z_k\mathrm{d}\bar{z}_k\bar{z}_l\mathrm{d}z_l, \tag{9}$$

care devine de-a lungul spaţiului lenticular L_{2n+1}^p:

$$\mathrm{d}s^2 = p\mathrm{d}z_h\,\mathrm{d}\bar{z}_h - p\,(p-1)\,(z_h d\bar{z}_h)^2 \equiv p\mathrm{d}z_h\mathrm{d}\bar{z}_h - p(p-1)\,(\bar{z}_h\mathrm{d}z_h)^2. \tag{9'}$$

Observăm că (9′) rezultă din (9), în virtutea relaţiilor (2) şi (3). Pentru a stabili metrica (9), vom porni de la metrica

$$\mathrm{d}s^2 = \sum \mathrm{d}u_{h_1\dots h_p}\,\mathrm{d}\bar{u}_{h_1\dots h_p} \tag{10}$$

a spaţiului euclidian $F_{2(n+1)^p}$ şi vom ţine seamă de relaţiile (6). Obţinem asftfel, de-a lungul lui $L_{2(n+1)}^p$:

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{r,s=1}^{p} z_{h_1}\dots z_{h_{r-1}}z_{h_{r+1}}\dots z_{h_p}\bar{z}_{h_1}\dots\bar{z}_{h_{s-1}}\bar{z}_{h_{s+1}}\dots\bar{z}_{h_p}\mathrm{d}z_{h_r}\mathrm{d}\bar{z}_{h_s}.$$

În membrul drept al acestei relaţii avem p termeni de forma

$$(z_h\bar{z}_h)^{p-1}\mathrm{d}z_k\mathrm{d}\bar{z}_k$$

şi $p(p-1)$ termeni de forma

$$(z_h\bar{z}_h)^{p-2}\,z_k\mathrm{d}\bar{z}_k\bar{z}_l\mathrm{d}z_l,$$

după cum $r = s$ sau $r \neq s$. Relaţia (9) este deci demonstrată.

Observăm că metricile (9) şi (9′) sînt simplectice ca şi în cazul scufundării (5). Într-adevăr, formula (9′), de exemplu, devine în coordonatele reale iniţiale $x_0, \dots, x_{2n+1}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= p(\mathrm{d}x_0^2 + \mathrm{d}x_1^2 + \dots + \mathrm{d}x_{2n+1}^2) + \\ &+ p(p-1)\,(x_0\mathrm{d}x_1 - x_1\mathrm{d}x_0 + \dots + x_{2n}\mathrm{d}x_{2n+1} - x_{2n+1}\mathrm{d}x_{2n})^2. \end{aligned} \tag{9''}$$

Metricele (9) *și* (9′) *admit deci un grup tranzitiv de mișcare,* anume grupul transformărilor ortogonale ale variabilelor $x_0, \dots, x_{2n+1}$, care sînt în același timp și transformări simplectice.

Menționăm că metrica (9′) a fost dedusă în [4] pentru $n = 2$.

Fie acum $\widetilde{V}$ imaginea prin scufundarea (6) a varietății $L^p_{2(n+1)}$. Un punct arbitrar $P\,(u_{h_1 \dots h_p})$ situat pe $\widetilde{V}$ verifică ecuațiile :

$$u_{h_1 h \dots h}\, u_{h_2 h \dots h} \dots u_{h_p h \dots h} = u_{h_1 h_2 \dots h_p}\, u^{p-1}_{h \dots h}. \tag{11}$$

Relațiile (11) rezultă imediat din (6). Avem de asemenea :

$$u_{0 \dots 0} \neq 0 \ \text{sau}\ u_{1 \dots 1} \neq 0 \ \text{sau} \dots \text{sau}\ u_{n \dots n} \neq 0. \tag{12}$$

II. *Imaginea V a scufundării* (6) *a spațiului lenticular* L^p_{2n+1} *este varietatea analitică definită de ecuațiile* (7), (11) *și de inegalitățile* (12). *Relațiile* (11) *și* (12) *definesc varietatea* $\widetilde{V}$.

Într-adevăr, fie un punct $Q\,(u_{h_1 \dots h_p})$ al spațiului euclidian cu $2(n+1)^p$ dimensiuni, care verifică (7) și (11) și pentru care există un indice h astfel ca $u_{h \dots h} \neq 0$. Vom considera punctul $P\,(z_0, \dots, z_n) \in L^p_{2(n+1)}$ definit de (8). Din (8) și din (11) deducem imediat relațiile (6). Avem atunci :

$$\sum u_{h_1 \dots h_p} \overline{u}_{h_1 \dots h_p} = (z_k \overline{z}_k)^p.$$

Din (7) rezultă deci (2), deoarece cantitatea $\sum z_k \overline{z}_k$ este reală și pozitivă. În consecință punctul P este situat pe L^p_{2n+1}.

Pe varietatea $\widetilde{V}$ putem considera $n+1$ vecinătăți de coordonate $V_h (h = 0, 1, \dots, n)$, definite respectiv de condițiile $u_{h \dots h} \neq 0$. În V_h putem lua drept coordonate complexe pe $u_{kh \dots h}$ și avem :

$$u_{h_1 \dots h_p} = \frac{u_{h_1 h \dots h}\, u_{h_2 h \dots h} \dots u_{h_p h \dots h}}{u^{p-1}_{h \dots h}}. \tag{11′}$$

Varietatea V apare ca intersecția varietății $\widetilde{V}$ cu sfera $S_{2(n+1)^p - 1}$.

Observăm că, în cazul $p = 2$, condiția (12) este o consecință a ecuațiilor (7) și (11) (proprietate care nu are loc în cazul general, după cum se poate vedea ușor din contraexemple). Într-adevăr, formulele (11) devin pentru $p = 2$:

$$u_{hl} u_{kl} = u_{hk} u_{ll},$$

ceea ce dă, pentru $k = h$:

$$u^2_{hl} = u_{hh} u_{ll}.$$

Deci, dacă toate cantitățile u_{hh} ar fi nule, ar rezulta că și $u_{hl} = 0\ (h \neq l)$' ceea ce contrazice relația (7).

III. *Formulele* (6) *realizează o scufundare analitică a spațiului lenticular* L^p_{2n+1}.

Este suficient să verificăm analiticitatea scufundării (6) a varietății $L^p_{2(n+1)}$. Dar această proprietate este dată de formulele (8) pentru inversa aplicației (6), pe fiecare vecinătate de coordonate V_h în parte. Aplicația (6) directă este evident analitică.

Formulele (6) ne arată că, pe varietatea V, coordonatele $u_{h_1 \ldots h_p}$ sînt simetrice în toţi indicii. V este deci situată pe o varietate liniară a lui $E_{2(n+1)^p}$ şi aceasta ne permite să micşorăm clasa scufundării (6), cu păstrarea metricilor (9) şi (9′).

Vom considera în spaţiul liniar complex m-dimensional C_m de coordonate $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ transformarea $U(m)$ dată de:

$$\zeta'_a = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_b \omega^{ab} \zeta_b \qquad (a, b = 1, \ldots, m), \tag{13}$$

unde $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)$.

Transformarea $U(m)$ este unitară. În adevăr, avem:

$$\zeta'_a \bar{\zeta}'_a = \frac{1}{m} \sum_{b,c} \left(\sum_a \omega^{a(b-c)} \right) \zeta_b \bar{\zeta}_c .$$

Se vede că ω^{b-c} este, pentru $b, c = 1, \ldots, m$ şi $b \neq c$, o rădăcină de ordin m a unităţii diferită de 1. Atunci avem:

$$\sum_a \omega^{a(b-c)} = m \delta_{bc}$$

şi deci transformarea $U(m)$ conservă forma hermitică $\zeta_a \bar{\zeta}_a$. Dacă raportăm spaţiul euclidian E_{2m} la un sistem de coordonate complexe de forma (1), $U(m)$ poate fi privită şi ca o transformare ortogonală a lui E_{2m}.

Dreapta complexă

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \ldots = \zeta_m \tag{13'}$$

se scrie în coordonatele ζ'_a date de (13):

$$\zeta'_1 = \zeta'_2 = \ldots = \zeta'_{m-1} = 0. \tag{13''}$$

Pe această dreaptă avem:

$$\zeta'_m = \sqrt{m}\, \zeta_1 = \ldots = \sqrt{m}\, \zeta_m . \tag{13'''}$$

Vom asocia acum fiecărui şir de întregi $j_0, j_1, \ldots, j_n$ astfel că:

$$\begin{cases} j_0 + j_1 + \cdots + j_n = p; \\ j_0 \geqslant 0, j_1 \geqslant 0, \ldots, j_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{14}$$

spaţiul euclidian $E(j_0, \ldots, j_n)$ de dimensiune reală $\frac{2p!}{j_0! \cdots j_n!}$ al variabilelor $u_{h_1 \ldots h_p}$ cu proprietatea că şirul $h_1, h_2, \ldots, h_p$ conţine j_0 indici egali cu 0, j_1 indici egali cu 1, …, j_n indici egali cu n. Spaţiul euclidian $E_{2(n+1)^p}$ este deci egal cu suma directă a spaţiilor $E(j_0, \ldots, j_n)$ aşa fel ca indicii $j_0, \ldots, j_n$ să ia toate valorile posibile, cu respectarea condiţiilor (14).

De-a lungul varietăţilor V şi $\widetilde{V}$, coordonatele $u_{h_1 \ldots h_p}$ care definesc spaţiul $E(j_0, \ldots, j_n)$ sînt toate egale între ele, deci verifică relaţiile

(13′). În virtutea formulelor (13″), transformarea U (m) în care $m = \frac{p!}{j_0!\dots j_n!}$ va anula (de-a lungul lui V sau al lui $\widetilde{V}$) toate aceste variabile cu excepţia uneia singure, pe care să o notăm cu $v_{j_0\dots j_n}$. Din (6) şi din (13‴) deducem :

$$v_{j_0 j_1\dots j_n} = \sqrt{\frac{p!}{j_0!\dots j_n!}}\, z_0^{j_0} z_1^{j_1}\dots z_n^{j_n}, \tag{15}$$

unde întregii $j_0, \dots, j_n$ verifică condiţiile (14).

Obţinem astfel următoarea teoremă :

Formulele (15) *în care indicii* $j_0, j_1, \dots, j_n$ *iau toate valorile posibile cu respectarea condiţiilor* (14), *realizează o scufundare analitică a spaţiului lenticular* L^p_{2n+1} *în spaţiul euclidian cu*

$$N = 2\cdot\frac{(p+1)(p+2)\dots(p+n-1)}{(n-1)!} \equiv 2C^p_{n+p-1} \tag{16}$$

dimensiuni. Imaginea acestei scufundări se află pe sfera S_{N-1}. *Scufundarea* (15) *induce pe* $L^p_{2(n+1)}$ *şi pe* L^p_{2n+1} *metricile* (9) *respectiv* (9′).

Demonstraţia acestei teoreme rezultă imediat din proprietăţile stabilite anterior pentru scufundarea (6). Într-adevăr, scufundarea (15) se obţine prin compunerea scufundării (6) cu transformarea ortogonală dată de suma directă a transformărilor $U\left(\frac{p!}{j_0!\dots j_n!}\right)$. Or, această ultimă transformare conservă metrica (10), şi deci şi metricile (9), (9′) ; ea este în acelaşi timp analitică.

Dimensiunea N dată de (16) a spaţiului de scufundare se poate determina, de exemplu, prin inducţie în raport cu p.

Pentru $p = 2$, scufundarea (15) se reduce la scufundarea (5) a spaţiului proiectiv P_{2n+1}.

Menţionăm că scufundarea (15) este indicată şi în [4], p. 236.

Primită la redacţie la 19 octombrie 1967

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti.

SUR LE PLONGEMENT NATUREL D'UNE CLASSE D'ESPACES LENTICULAIRES

(RÉSUMÉ)

Soit $L_{2n+1}(p : p_0, p_1, \dots, p_n)$ [3] l'espace lenticulaire défini, sur la sphère S_{2n+1}, par le groupe généré par la transformation (4). Gh. Vrânceanu a montré [4] qu'on peut considérer des plongements naturels pour les espaces $L_{2n+1}(p ; 1, \dots, 1) = L^p_{2n+1}$.

Dans cet ouvrage on étudie ces plongements naturels. Le résultat principal est le théorème suivant :

Les formules (15) *donnent un plongement analytique de* L^p_{2n+1} *sur la sphère* $S_{N-1} \subset E_N$, *les indices* $j_0, j_1, \ldots, j_n$ *vérifiant les conditions* (14) *et* N *étant donné par* (16). *Ce plongement induit sur* L^p_{2n+1} *la métrique orthogonale-symplectique* (9').

Le plongement (15) se réduit, dans le cas $p = 2$, au plongement (5) de Manoury pour l'espace projectif réel P_{2n+1}.

Pour simplifier les calculs, on considère tout d'abord le plongement (6) de L^p_{2n+1}. Le passage de (6) à (15) est donné par une transformation orthogonale de $E_{2(n+1)^p}$ qui annule, sur L^p_{2n+1}, certaines composantes $u_{h_1h_2\ldots h_p}$.

L'image du plongement (6) est la variété analytique définie par les conditions (7), (11) et (12).

BIBLIOGRAFIE

1. W. Hodge, *The thoery and applications of harmonic integrals*, Cambridge University Press, 1952.
2. I. M. James, *Some embeddings of projective spaces*, Proc. Cambridge Phil. Soc., **55**, 294 (1959).
3. Gh. Vrănceanu şi colab., *Topological embeddings of lens spaces*, Proc. Cambridge Phil. Soc., **57**, 688 (1961).
4. Gh. Vrănceanu, Th. Hangan, C. Teleman, *Geometrie elementară din punct de vedere modern*, Bucureşti, 1967.
5. H. Whitney, *The self-intersections of a smooth n-manifold in the 2n-space*. Ann. Math., **45**, 220 (1944).

CERCETĂRI ASUPRA INVARIANŢILOR INTEGRALI

DE

MARCEL N. ROŞCULEŢ

Se extinde noţiunea de invariant integral introdusă de H. Poincaré prin definirea (T, Φ)-invarianţilor integrali. Dacă T este operatorul de derivare D iar $\Phi \equiv 0$, definiţia coincide cu aceea dată de H. Poincaré. Se stabilesc proprietăţi după natura operatorului T. În ultima parte a lucrării se pun în evidenţă legături între (T, Φ)-invarianţi integrali şi noţiunea de multiplicator.

I. (T, Φ) – INVARIANT INTEGRAL

1.1. Fie $V_0 \subset R^n$ un domeniu din spaţiul cu n dimensiuni şi $M_0(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ un punct curent din V_0.

Fie

$$x_k = x_k(u_1, u_2, \ldots, u_m), \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{1.1}$$

n funcţii continue cu derivate parţiale pînă la ordinul p, continue pe un domeniu $\Delta \subset R^m$. Vom presupune că

$$x_k(0, 0, \ldots, 0) = \xi_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

în consecinţă pentru $u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_m^2 \neq 0$, domeniului V_0 îi corespunde domeniul $V_u \subset R^n$, pentru care un punct curent este $M_u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Fie $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcţie definită în V_u, continuă cu derivate parţiale pînă la ordinul p, continue în V_u.

Fie T un operator diferenţial de ordinul p, cel mult, definit în Δ.

DEFINIŢIA 1.1.1. Vom spune că integrala multiplă

$$\mathcal{J}(u) = \iint \ldots \int_{V_u} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n \tag{1.2}$$

este un (T, Φ)-invariant integral în Δ dacă

$$T\left[\iint \cdots \int_{V_u} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n\right] = \Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

unde $\Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ este o funcţie definită în V_0.

În particular, dacă $\Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \equiv 0$ pe V_0, atunci integrala (1.2) este un $(T, 0)$ invariant integral. Pentru T dat de operaţia de derivare D în raport cu $u \in \Delta \subset R$, definiţia coincide cu aceea dată de H. Poincaré [1] [1]; cu această notaţie invariantul integral definit de H. Poincaré este un $(D, 0)$-invariant integral.

În general, condiţia ca $\mathcal{J}(u)$ să fi (T, Φ)-invariant integral, cere ca F să fie soluţie în V_0 a unei ecuaţii cu derivate parţiale.

1.2. Să luăm pentru T operatorul definit de

$$T[\mathcal{J}(u)] = \lim_{h \to 0} \frac{\mathcal{J}(u+h) - 2\mathcal{J}(u) + \mathcal{J}(u-h)}{h^2}, \quad u \in R,\ h \in R \tag{1.3}$$

iar pe Φ nul pe V_0, deci cerem ca $\mathcal{J}(u)$ să aibă derivata a doua simetrică nulă pentru orice $u \in \Delta \subset R$.

a) În urma unei schimbări de variabile

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n),$$

prin înlocuirea lui u cu $u + h$ avem

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}(u+h) = \\ &= \iint \cdots \int_{V_u} F(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \frac{D(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\, \mathrm{d}x'_1\, \mathrm{d}x'_2, \ldots, \mathrm{d}x'_n \end{aligned} \tag{1.4}$$

însă

$$x'_i = x_i + hX_i + \frac{h^2}{2!} Y_i + \ldots \tag{1.5}$$

deci

$$\begin{aligned} &F(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} \left(hX_i + \frac{h^2}{2!} Y_i + \ldots\right) \frac{\partial F}{\partial x_i} + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2!} \left(hX_i + \frac{h^2}{2!} Y_i + \ldots\right)\left(hX_j + \frac{h^2}{2!} Y_j + \ldots\right) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\, \partial x_j} + \ldots \end{aligned} \tag{1.6}$$

în consecinţă putem scrie, oprindu-ne la puterea a doua a lui h,

$$\begin{aligned} &F(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_u) + \\ &+ h \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{h^2}{2!}\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_i X_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\, \partial x_j}\right] + \ldots \end{aligned} \tag{1.7}$$

---

[1] Pag. 414.

b) Să evaluăm și pe

$$\frac{D(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

oprindu-ne în (1.5) la puterea a doua a lui h; avem

$$\frac{D(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \left| 1 + h\frac{\partial X_i}{\partial x_j} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial Y_i}{\partial x_j} \right|, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \tag{1.8}$$

deci

$$\begin{aligned} \frac{D(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} &= 1 + h\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) + \\ &+ \frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial Y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Y_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial Y_n}{\partial x_n}\right) + \\ &+ \frac{h^2}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_i}\frac{\partial X_j}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right) + \ldots \end{aligned} \tag{1.9}$$

c) În urma schimbării de variabile

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x''_1, x''_2, \ldots, x''_n)$$

obținută prin înlocuirea lui u cu $u-h$, expresiile ce intervin în $\mathcal{J}(u-h)$ se obțin din (1.7) și (1.9), înlocuind pe h cu $-h$. Înlocuind aceste date în (1.3) obținem

$$T[\mathcal{J}(u)] = \iint \ldots \int_{V_u} A \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n \tag{1.10}$$

cu A dat de

$$\begin{aligned} A = &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial X_j}{\partial x_j}X_i\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\left(F\frac{\partial Y_i}{\partial x_i} + Y_i\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) + \\ &+ \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[X_i X_j\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \, \partial x_j} + F\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_i}\frac{\partial X_j}{\partial x_j} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right)\right]. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Sîntem în măsură să enunțăm:

TEOREMA 1.2.1 *Condiția necesară și suficientă ca derivata a doua simetrică a integralei (1.2) să fie nulă pentru orice* $u \in \Delta \subset R$, *este ca* F *să fie o soluție în* V_0 *a ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial^2 F(X_i X_j)}{\partial x_i \, \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[F\left(Y_i - 2\frac{\partial X_i}{\partial x_j}X_j\right)\right] = 0. \tag{1.12}$$

Demonstrație. În (1.12) am adoptat convenția de însumare a indicilor care se repetă într-un monom. Cu această convenție, expresiile (1.11) și (1.12) sînt identice.

Ecuaţia (1.12) se mai poate scrie şi sub forma

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[X_i \frac{\partial}{\partial x_j}(X_j F)\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[F\left(Y_i - X_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right)\right] = 0 \tag{1.12'}$$

şi dacă punem

$$\Phi_i = Y_i - X_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}, \qquad \Phi = \frac{\partial}{\partial x_j}(X_j F),$$

ecuaţia (1.12) se înlocuieşte cu sistemul de ordinul I,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_i}(X_i \Phi) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\Phi_i F) = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial x_j}(X_j F) = \Phi, \end{aligned} \tag{1.12''}$$

funcţiile X_i, Φ_i fiind cunoscute.

Ecuaţia (1.12) este de tip eliptic dacă forma pătratică

$$\alpha_{ij} X_i X_j$$

este definită.

Dacă suprafaţa

$$\bar{r} = X_1 \bar{e}_1 + X_2 \bar{e}_2 + \ldots + X_n \bar{e}_n,$$

îndeplineşte condiţiile

$$(\bar{r}, \operatorname{grad} X_i) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.13}$$

atunci ecuaţia (1.12) ia forma mai simplă

$$\frac{\partial^2 (F X_i X_j)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}(F Y_i) = 0. \tag{1.14}$$

Avem şi

TEOREMA 1.2.2. *Dacă pentru orice* $u \in \Delta \subset R$, $(0 \in \Delta)$, *are loc relaţia*

$$T[\reflectbox{∂}(u)] = \iint \ldots \int_{V_0} F \Phi^* \, d\xi_1 \, d\xi_2 \ldots d\xi_n \tag{1.15}$$

cu

$$\Phi^* = 2 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} X_j\right)\bigg|_{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}$$

atunci F este o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale

$$\frac{\partial^2 (F X_i X_j)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}(F Y_i) = 0$$

şi reciproc.

Demonstrație. Dacă

$$\iint \dots \int_{V_u} A \,\mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n = 0$$

pentru orice $u \in \Delta$, deoarece $0 \in \Delta$, urmează că este adevărată și pentru $u=0$, de unde rezultă condiția (1.14) dacă relația (1.15) este satisfăcută. Reciproc, din (1.14) rezultă (1.15).

1.3. Să luăm pentru T operatorul D^2, iteratul lui D definit de

$$D\,[\mathcal{J}\,(u)] = \lim_{h \to 0} \frac{\mathcal{J}\,(u+h) - \mathcal{J}\,(u)}{h}, \qquad u,\ u+h \in \Delta \subset R. \tag{1.16}$$

TEOREMA 1.3.1. *Derivata a doua a integralei* (*1.2*) *este nulă pentru orice* $u \in \Delta \subset R$, *dacă și numai dacă* F *este o soluție în* V_0 *a ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[X_j \frac{\partial}{\partial x_i}(F\,X_i)\right] = 0, \qquad i,\ j = 1,\ 2, \dots, n. \tag{1.17}$$

Demonstrație. Conform unui rezultat cunoscut [1] ²), avem

$$D\,[\mathcal{J}\,(u)] = \lim_{h \to 0} \frac{\mathcal{J}\,(u+h) - \mathcal{J}\,(u)}{h} =$$

$$= \iint \dots \int_{V_u} \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(X_1\,F) + \frac{\partial}{\partial x_2}(X_2 F) + \dots \right. \tag{1.18}$$

$$\left. \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}(X_n F)\right] \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n$$

deci pentru ca

$$D^2\,(\mathcal{J}\,(u)) = 0, \qquad u \in \Delta \subset R$$

trebuie ca

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[X_j \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(X_1\,F) + \frac{\partial}{\partial x_2}(X_2 F) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}(X_n F)\right)\right] = 0$$

care este tocmai condiția din enunț (1.17). Reciproc, din (1.17) rezultă că derivata a doua a integralei 1.12 este nulă.

Se observă că relațiile (1.17) și (1.12) în general nu sînt echivalente.

În mod asemănător avem și :

TEOREMA 1.3.2. *Derivata a r-a a integralei* (*1.2*) *este nulă pentru orice* $u \in \Delta \subset R$, *dacă și numai dacă* F *este o soluție în* V_0 *a ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\left\{X_{i_r} \frac{\partial}{\partial x_{i_{r-1}}}\left[X_{i_{r-1}}\left(\dots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(F X_{i_1})\right)\right]\right\} = 0 \tag{1.19}$$

cu $i_r,\ i_{r-1}, \dots, i_1 = 1,\ 2, \dots, n.$

---

²) Pag. 414.

În (1.17) și (1.19) am adoptat regula de sumare relativă la indici care se repetă într-un monom.

Această teoremă poate fi formulată și în modul următor :

TEOREMA 1.3.2′. *Dacă F este o soluție a ecuației (1.19), atunci*

$$D^{r-1}\int\int\ldots\int_{V_u} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n \tag{1.20}$$

este un invariant integral și reciproc.

Demonstrație. Deoarece $D^r(\mathcal{J}(u)) = 0$ pentru orice $u \in \Delta \subset R$, rezultă că $D^{r-1}(\mathcal{J}(u))$ nu depinde de u în Δ. În acest enunț noțiunea de invariant integral este aceea dată de H. Poincaré.

Să luăm pentru T operatorul τ definit de

$$\tau(u) = \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{\mathcal{J}(u+h+k) - \mathcal{J}(u+h) - \mathcal{J}(u+k) + \mathcal{J}(u)}{hk}$$

adică cerem ca $\mathcal{J}(u)$ să aibă derivata a doua directă, în raport cu u, nulă, pentru orice $u \in \Delta \subset R$.

În urma unei schimbări de variabile

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$$

prin înlocuirea lui u cu $u + h + k$, avem

$$x'_i = x_i + (h+k)\,X_i + \frac{1}{2\,!}(h+k)^2\,Y_i + \ldots$$

cît și

$$\begin{aligned} F(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) &= F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\left[(h+k)\,X_i + \frac{1}{2\,!}(h+k)^2\,Y_i + \ldots\right]\frac{\partial F}{\partial x_i} + \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2\,!}\left[(h+k)\,X_i + \frac{1}{2\,!}(h+k)^2\,Y_i + \ldots\right]\times \\ &\times\left[(h+k)\,X_j + \frac{1}{2\,!}(h+k)^2\,Y_j + \ldots\right]\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial x_j} + \ldots \end{aligned} \tag{1.21}$$

în consecință putem scrie oprindu-ne la coeficientul lui hk :

$$\begin{aligned} F(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) &= F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \\ + (h+k)\sum_{i=1}^{n} X_i\frac{\partial F}{\partial x_i} &+ hk\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial x_j}\right] + \ldots \end{aligned} \tag{1.22}$$

Deoarece avem relația

$$\mathcal{J}(u+h+k) =$$

$$= \iint \cdots \int_{V_u} F(x_1', x_2', \ldots, x_n') \frac{D(x_1', x_2', \ldots, x_n')}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \mathrm{d}x_1' \, \mathrm{d}x_2' \ldots \mathrm{d}x_n'$$

rămîne să mai calculăm determinantul funcțional al transformării. Procedînd la fel ca la § 1.2, obținem

$$\begin{aligned} \frac{D(x_1', x_2', \ldots, x_n')}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} &= 1 + (h+k)\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) + \\ &+ hk\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Y_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{D(X_i, X_j)}{D(x_i, x_j)}\right) + \ldots \end{aligned} \tag{1.23}$$

prin urmare

$$\mathcal{J}(u+h+k) = \iint \cdots \int_{V_u} B \, \mathrm{d}x_1' \, \mathrm{d}x_2' \ldots \mathrm{d}x_n'$$

cu

$$\begin{aligned} B &= F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (h+k)\left[F \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial F}{\partial x_i}\right] + \\ &+ hk\left[F\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Y_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{D(X_i, X_j)}{D(x_i, x_j)}\right) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial X_j}{\partial x_j} + \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \, \partial x_j}\right] + \ldots \end{aligned} \tag{1.24}$$

În mod asemănător obținem pe $\mathcal{J}(u+h)$, $\mathcal{J}(u+k)$; introducîndu-i în (1.21) și trecînd la limită avem:

TEOREMA 1.3.4. *Derivata a doua directă a integralei (1.2) este nulă pentru orice $u \in \Delta \subset R$ dacă și numai dacă F este în V_0 o soluție a ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial^2 (F X_i X_j)}{\partial x_i \, \partial x_j} + \frac{\partial (F Y_i)}{\partial x_i} = 2 \frac{\partial}{\partial x_i}\left[F \frac{\partial X_i}{\partial x_j} X_j\right]. \tag{1.25}$$

II. $\Delta \subset R^n$, n ÎNTREG > 1

2.1. Să considerăm acum operatorul T definit de

$$T[\mathcal{J}(u,v)] = \lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \frac{\mathcal{J}(u+h, v+k) - \mathcal{J}(u+h, v) - \mathcal{J}(u, v+k) + \mathcal{J}(u,v)}{hk} \tag{2.1}$$

pentru $(u, v) \in \Delta$, $(u+h, v+k) \in \Delta \subset R^2$.

a) În urma unei schimbări de variabile $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \to (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, prin înlocuirea lui (u, v) cu $(u+h, v+k)$ avem

$$\mathcal{J}(u+h, v+k) =$$

$$= \iint \cdots \int_{V_{uv}} F(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \frac{D(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \mathrm{d}x'_1 \, \mathrm{d}x'_2 \ldots \mathrm{d}x'_n ,$$

însă

$$x'_i = x_i + hX_i + kY_i + \frac{1}{2!}(h^2 U_i + 2hkV_i + k^2 W_i) + \ldots$$

deci

$$F(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(hX_i + kY_i + \frac{1}{2} h^2 U_i + hkV_i + \frac{1}{2} k^2 W_i + \ldots \right) \frac{\partial F}{\partial x_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2!} (hX_i + kY_i + \ldots)(hX_j + kY_j + \ldots) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \, \partial x_j} + \ldots$$

prin urmare putem scrie

$$F(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$

$$(2.2) \qquad + h \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + k \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + hk \sum_{i=1}^{n} V_i \frac{\partial F}{\partial x_i} +$$

$$+ \frac{1}{2!} hk \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (X_i Y_j + X_j Y_i) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \, \partial x_j} + \ldots$$

b) Să evaluăm și determinantul funcțional; avem

$$\frac{D(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = |\gamma_{ij}|, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

și unde

$$\gamma_{ii} = 1 + h \frac{\partial X_i}{\partial x_i} + k \frac{\partial Y_i}{\partial x_i} + hk \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + \ldots ,$$

$$\gamma_{ij} = h \frac{\partial X_i}{\partial x_j} + k \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} + hk \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \ldots$$

$$(2.3) \qquad \frac{D(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 1 + h \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} + k \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Y_i}{\partial x_i} +$$

$$+ hk \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2!} hk \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{D(X_i, Y_j)}{D(x_i, x_j)} - \frac{D(X_j, Y_i)}{D(x_i, x_j)} \right] + \ldots$$

c) Expresiile ce intervin în expresia lui T prin înlocuirea lui u cu $u+h$, sau ale lui v cu $v+k$, se obțin imediat din § 1.2, pct. a, încît putem scrie

$$T[\mathcal{J}(u,v)] = \iint \cdots \int_{V_{uv}} A \,\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n$$

cu A dat de

$$A = F \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2\,!} F \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{D(X_i, Y_j)}{D(x_i, x_j)} - \frac{D(X_j, Y_i)}{D(x_i, x_j)} \right] + \tag{2.4}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Y_j}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} V_i \frac{\partial F}{\partial x_i} +$$

$$+ \frac{1}{2\,!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (X_i Y_j + X_j Y_i) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}.$$

TEOREMA 2.1.1. *Derivata a doua mixtă a integralei*

$$\iint \cdots \int_{V_{uv}} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n$$

este nulă pentru orice $(u, v) \in \Delta \subset R^2$ *dacă și numai dacă* F *este în* V_{00} *o soluție a ecuației cu derivate parțiale :*

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [F(X_i Y_j + X_j Y_i)] + 2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[F \left(V_i - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} Y_j - \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} X_j \right) \right] = 0. \tag{2.5}$$

Demonstrație. Dacă adoptăm în (2.5) convenția de însumare a indicilor care se repetă într-un monom și dacă înmulțim pe (2.4) cu 2 observăm că aceasta este identică cu (2.5).

2.2. Să considerăm operatorul T obținut prin aplicarea operatorului D_v operatorului D_u, unde

$$D_u[\mathcal{J}(u,v)] = \lim_{h \to 0} \frac{\mathcal{J}(u+h) - \mathcal{J}(u)}{h}.$$

TEOREMA 2.2.1. *Dacă pentru orice* $(u, v) \in \Delta \subset R^2$ *are loc relația*

$$D_u D_v \iint \cdots \int_{V_{uv}} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n = 0, \tag{2.6}$$

atunci F *este în* V_{00} *o soluție a ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[Y_j \frac{\partial}{\partial x_i} (F X_i) \right] = 0 \tag{2.7}$$

și reciproc.

Demonstrație. Avem

$$D_u[\mathcal{I}(u,v)] = \iint \cdots \int_{V_{uv}} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(X_i F)\right] \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n ;$$

dacă acestei relații îi aplicăm operatorul D_v și impunem condiția din enunț, rezultă (2.7).

Dacă înlocuim operatorul $T = D_v D_u$ cu $T^* = D_u D_v$, relația (2.7) se transformă în

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[X_j \frac{\partial}{\partial x_i}(Y_i F)\right] = 0. \tag{2.8}$$

Relațiile (2.7) și (2.8), evident, nu sînt echivalente, deci efectul lui T nu este egal cu al lui T^*. Spunem că produsul operatorilor $D_u D_v$ nu este comutativ.

Să luăm pentru T derivata a treia mixtă :

$$T[\mathcal{I}(u,v,w)] = \lim_{h,k,l \to 0} \frac{D_3[\mathcal{I}(u,v,w)]}{hkl}, \tag{2.9}$$

unde D_3 este diferența :

$$\begin{aligned} D_3[\mathcal{I}(u,v,w)] &= \mathcal{I}(u+h, v+k, w+l) - \mathcal{I}(u+h, v+k, w) - \\ &- \mathcal{I}(u+h, v, w+l) - \mathcal{I}(u, v+k, w+l) + \mathcal{I}(u, v, w+l) + \\ &+ \mathcal{I}(u, v+k, w) + \mathcal{I}(u+h, v, w) - \mathcal{I}(u, v, w) \end{aligned} \tag{2.10}$$

cu (u, v, w), $(u + h,\ v + k,\ w + l) \in \Delta \subset R^3$.

a) În urma unei schimbări de variabile

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$$

prin înlocuirea lui (u, v, w) cu $(u + h,\ v + k,\ w + l)$ avem

$$\mathcal{I}(u+h, v+k, w+l) =$$

$$= \iint \cdots \int_{V_{uvw}} F(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \frac{D(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \mathrm{d}x'_1 \mathrm{d}x'_2 \ldots \mathrm{d}x'_n$$

însă

$$x'_i = x_i + hX_{1i} + kX_{2i} + lX_{3i} + \frac{1}{2!}[h^2 Y_{11i} + k^2 Y_{22i} + l^2 Y_{33i} +$$

$$+ 2hkY_{12i} + 2klY_{23i} + 2lhY_{31i}] + \frac{1}{3!}[h^3 Y_{111i} + \ldots + 6hklY_{123i}] + \ldots$$

deci

$$F(x_1', x_2', \ldots, x_n') = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + h\sum_{i=1}^{n} X_{1i}\frac{\partial F}{\partial x_i} + k\sum_{i=1}^{n} X_{2i}\frac{\partial F}{\partial x_i} +$$

$$+ l\sum_{i=1}^{n} X_{3i}\frac{\partial F}{\partial x_i} + hk\Bigl[\frac{1}{2\,!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(X_{1i}X_{2j} + X_{1j}X_{2i})\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} Y_{12i}\frac{\partial F}{\partial x_i}\Bigr] + kl\Bigl[\frac{1}{2\,!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(X_{2i}X_{3j} + X_{2j}X_{3i})\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} Y_{23i}\frac{\partial F}{\partial x_i}\Bigr] + lh\Bigl[\frac{1}{2\,!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(X_{3i}X_{1j} + X_{3j}X_{1i})\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} Y_{31i}\frac{\partial F}{\partial x_i}\Bigr] + hkl\Bigl[\sum_{i=1}^{n} Y_{123i}\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{1}{2\,!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(X_{1i}Y_{23j} +$$

$$+ X_{1j}Y_{23i} + X_{2i}Y_{13j} + X_{2j}Y_{13i} + X_{3i}Y_{12j} + X_{3j}Y_{12i})\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$+ \frac{1}{3\,!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(X_{1i}X_{2j}X_{3k} + X_{1i}X_{2k}X_{3j} + \ldots)\frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\Bigr] + \cdots$$

b) Să evaluăm și determinantul

$$\frac{D(x_1', x_2', \ldots, x_n')}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = |\gamma_{ij}|,\ i,\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

și unde

$$\gamma_{ii} = 1 + h\frac{\partial X_{1i}}{\partial x_i} + k\frac{\partial X_{2i}}{\partial x_i} + l\frac{\partial X_{3i}}{\partial x_i} + \ldots + hkl\frac{\partial Y_{123i}}{\partial x_i} + \ldots$$

$$\gamma_{ij} = h\frac{\partial X_{1i}}{\partial x_j} + k\frac{\partial X_{2i}}{\partial x_j} + l\frac{\partial X_{3i}}{\partial x_j} + \ldots + hkl\frac{\partial Y_{123i}}{\partial x_j} + \ldots$$

Avem

$$\frac{D(x_1', x_2', \ldots, x_n')}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 1 + h\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X_{1i}}{\partial x_i} + k\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X_{2i}}{\partial x_i} + l\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X_{3i}}{\partial x_i} +$$

$$+ hk\Bigl[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial Y_{12i}}{\partial x_i} + \frac{1}{2\,!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Bigl(\frac{D(X_{1i}, X_{2j})}{D(x_i, x_j)} - \frac{D(X_{1j}, X_{2i})}{D(x_i, x_j)}\Bigr)\Bigr] +$$

$$+ kl\Bigl[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial Y_{23i}}{\partial x_i} + \frac{1}{2\,!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Bigl(\frac{D(X_{2i}, X_{3j})}{D(x_i, x_j)} - \frac{D(X_{2j}, X_{3i})}{D(x_i, x_j)}\Bigr)\Bigr] +$$

$$+ hl\Bigl[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial Y_{31i}}{\partial x_i} + \frac{1}{2\,!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Bigl(\frac{D(X_{3i}, X_{1j})}{D(x_i, x_j)} - \frac{D(X_{3j}, X_{1i})}{D(x_i, x_j)}\Bigr)\Bigr] +$$

$$+ hkl\Bigl\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial Y_{123i}}{\partial x_i} + \frac{1}{2\,!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Bigl[\frac{D(X_{1i}, Y_{23j})}{D(x_i, x_j)} - \frac{D(X_{1j}, Y_{23i})}{D(x_i, x_j)} +$$

$$+\frac{D(X_{2i}, Y_{31j})}{D(x_i, x_j)} - \frac{D(X_{2j}, X_{31i})}{D(x_i, x_j)} + \frac{D(X_{3i}, Y_{12j})}{D(x_i, x_j)} - \frac{D(X_{3j}, Y_{12i})}{D(x_i, x_j)}\Bigg] +$$

$$+\frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\Bigg[\frac{D(X_{1i}, X_{2j}, X_{3k})}{D(x_i, x_j, x_k)} - \frac{D(X_{1i}, X_{2k}, X_{3j})}{D(x_i, x_j, x_k)} - \frac{D(X_{1j}, X_{2i}, X_{3k})}{D(x_i, x_j, x_k)} +$$

$$+\frac{D(X_{1j}, X_{2k}, X_{3i})}{D(x_i, x_j, x_k)} + \frac{D(X_{1k}, X_{2i}, X_{3j})}{D(x_i, x_j, x_k)} - \frac{D(X_{1k}, X_{2j}, X_{3i})}{D(x_i, x_j, x_k)}\Bigg]\Bigg\}.$$

c) Expresiile lui $\mathcal{J}(u + h,\ v + k,\ w)$ cît şi celelalte ce intervin în (2.9), se obţin în mod analog, încît putem scrie

$$T\left[\mathcal{J}(u, v, w)\right] = \iint \cdots \int_{V_{uvw}} A\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n\,, \tag{2.11}$$

cu A dat de

$$A = \alpha F + \beta_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \eta_{ij}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial x_j} + \delta_{ijk}\frac{\partial^3 F}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_k}\,, \tag{2.12}$$

unde

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial Y_{123i}}{\partial x_i} + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Bigg[\frac{D(X_{1i}, Y_{23j})}{D(x_i, x_j)} - \frac{D(X_{1j}, Y_{23i})}{D(x_i, x_j)} +$$

$$+\frac{D(X_{2i}, Y_{31j})}{D(x_i, x_j)} - \frac{D(X_{2j}, Y_{31i})}{D(x_i, x_j)} + \frac{D(X_{3i}, Y_{12j})}{D(x_i, x_j)} - \frac{D(X_{3j}, Y_{12i})}{D(x_i, x_j)}\Bigg] +$$

$$+\frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\Bigg[\frac{D(X_{1i}, X_{2j}, X_{3k})}{D(x_i, x_j, x_k)} - \frac{D(X_{1i}, X_{2k}, X_{3j})}{D(x_i, x_j\ x_k)} - \frac{D(X_{1j}, X_{2i}, X_{3k})}{D(x_i, x_j, x_k)} +$$

$$+\frac{D(X_{1j}, X_{2k}, X_{3i})}{D(x_i, x_j, x_k)} + \frac{D(X_{1k}, X_{2i}, X_{3j})}{D(x_i, x_j, x_k)} - \frac{D(X_{1k}, X_{2j}, X_{3i})}{D(x_i, x_j, x_k}\Bigg]$$

$$\beta_i = Y_{123i} + X_{1i}\Bigg[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Y_{23j}}{\partial x_j} + \frac{1}{2!}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{D(X_{2j}, X_{3k})}{D(x_j, x_k)} - \frac{D(X_{2k}, X_{3j})}{D(x_j, x_k)}\right)\Bigg] +$$

$$+ X_{2i}\Bigg[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Y_{31j}}{\partial x_j} + \frac{1}{2!}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{D(X_{3j}, X_{1k})}{D(x_j, x_k)} - \frac{D(X_{3k}, X_{1j})}{D(x_j, x_k)}\right)\Bigg] +$$

$$+ X_{3i}\Bigg[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Y_{12j}}{\partial x_j} + \frac{1}{2!}\sum_{j=1}^{k}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{D(X_{1j}, X_{2k})}{D(x_j, x_k)} - \frac{D(X_{1k}, X_{2j})}{D(x_j, x_k)}\right)\Bigg] +$$

$$+ Y_{12i}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial X_{3j}}{\partial x_j} + Y_{23i}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial X_{1j}}{\partial x_j} + Y_{3Ii}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial X_{2j}}{\partial x_j}\,,$$

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2!}(X_{1i}X_{2j} + X_{1j}X_{2i})\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial X_{3k}}{\partial x_k} + \frac{1}{2!}(X_{2i}X_{3j} + X_{2j}X_{3i})\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial X_{Ik}}{\partial x_k} +$$

$$+\frac{1}{2!}(X_{3i}X_{1j} + X_{3j}X_{1i})\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial X_{2k}}{\partial x_k} + X_{1i}Y_{23j} + X_{1j}Y_{23i} + X_{2i}Y_{13j} +$$

$$+ X_{2j}Y_{13i} + X_{3i}Y_{12j} + X_{3j}Y_{12i}$$

şi

$$\delta_{ijk} = \frac{1}{3\,!}(X_{1i} X_{2j} X_{3k} + X_{1i} X_{2k} X_{3j} + X_{1j} X_{2k} X_{3i} + X_{1j} X_{2i} X_{3k} +$$
$$+ X_{1k} X_{2i} X_{3j} + X_{1k} X_{2j} X_{3i}).$$

Am demonstrat

TEOREMA 2.3.1. *Derivata a treia mixtă a integralei (2.11) este nulă pentru orice* $(u, v, w) \in \Delta \subset R^3$, *dacă și numai dacă* F *este în* V_{000} *o soluție a ecuației cu derivate parțiale*

$$\delta_{ijk} \frac{\partial^3 F}{\partial x_i\, \partial x_j\, \partial x_k} + \eta_{ij} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\, \partial x_j} + \beta_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \alpha F = 0 \tag{2.13}$$

cu coeficienții δ_{ijk}, η_{ij}, β_i *și* α *precizați mai sus.*

2.4. a) Să presupunem acum că $\Delta \subset R^m$, $m > 2$, şi să cerem ca $\mathcal{J}(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ să aibă derivata a doua parțială, simetrică, în raport cu u_i, nulă pentru orice $(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in \Delta$.

Dacă punem

$$x'_i = x_i + h_k X_{jk} + \frac{1}{2\,!} h_k h_l X_{jkl} + \ldots, \tag{2.14}$$

cu $i = 12, \ldots, n$; $k, = 1, 2, \ldots, m$, obținem printr-un procedeu analog :

TEOREMA 2.4.1. *Derivata a doua parțială, simetrică, în raport cu* u_j *a integralei*

$$\iint \cdots \int_{V(u)} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n \tag{2.15}$$

este nulă pentru orice $(u) \in \Delta$, *dacă și numai dacă* F *este o soluție în* $V_{(0)}$ *a ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial^2 (F X_{hj} X_{kj})}{\partial x_h\, \partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_h}\left[F\left(X_{hjj} - 2\,\frac{\partial X_{hj}}{\partial x_k} X_{kj}\right)\right] = 0 \tag{2.16}$$

b) Să cerem ca $\mathcal{J}(u_1, u_1, \ldots, u_m)$ să aibă derivata parțială, mixtă, de ordinul doi, în raport cu u_i, u_j, nulă în Δ; avem

TEOREMA 2.4.2. *Derivata a doua parțială, mixtă, de ordinul doi în raport cu* u_i, u_j, *a integralei (2.15) este nulă pentru orice* $(u) \in \Delta$, *dacă și numai dacă* F *este o soluție în* $V_{(0)}$ *a ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial^2}{\partial x_h\, \partial x_k} F(X_{hi} X_{kj} + X_{ki} X_{hj}) + \frac{\partial}{\partial x_h}\left[F\left(X_{hij} - \frac{\partial X_{hi}}{\partial x_k} X_{kj} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\partial X_{hj}}{\partial x_k} X_{ki}\right)\right] = 0. \tag{2.17}$$

Să notăm cu D_i operatorul de derivare parțială în raport cu u_i.

TEOREMA 2.4.3. *Derivata parțială de ordinul doi* $D_j D_i$ *a integralei* (*2.15*) *este nulă pentru orice* $(u) \in \Delta$, *dacă și numai dacă* F *este o soluție în* $V_{(0)}$ *a ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\left[X_{hj}\frac{\partial}{\partial x_k}(F X_{ki})\right] = 0. \tag{2.18}$$

TEOREMA 2.4.4. *Derivata parțială de ordinul* p

$$D_{i_p} D_{i_{p-1}} \ldots D_{i_2} D_{i_1}$$

a integralei (*2.15*) *este nulă pentru orice* $(u) \in \Delta$, *dacă și numai dacă* F *este o soluție în* $V_{(0)}$ *a ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial}{\partial x_{h_p}}\left[X_{h_p i_p}\frac{\partial}{\partial x_{h_{p-1}}}\left(X_{h_{p-1} i_{p-1}} \ldots \frac{\partial}{\partial x_{h_1}}(F X_{h_1 i_1})\right)\right] = 0. \tag{2.19}$$

Produsul operatorilor D_{ik} *nu este comutativ.*

III. T ESTE O DIFERENȚIALĂ

3.1. În ipoteza că $\Delta \subset R^m$, să cerem ca

$$\mathcal{J}(u_1, u_2, \ldots, u_m) = \iint \ldots \int_{V(u)} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n \tag{3.1}$$

să aibă diferențiala $\mathrm{d}\mathcal{J}$, nulă pentru orice $(u) \in \Delta$. Trebuie ca

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\mathcal{J}(u_1, u_2, \ldots, u_m) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

și conform unui rezultat cunoscut [1], această condiție (k, fix) cere ca F să fie o soluție a ecuației cu derivate parțiale

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[F X_{ik}] = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.2}$$

Am demonstrat următoarea teoremă:

TEOREMA 3.1.1. *Diferențiala integralei* (*3.1*) *este nulă pentru orice* $(u) \in \Delta$, *dacă și numai dacă* F *este o soluție în* $V_{(0)}$ *a sistemului de ecuații cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[F X_{ik}] = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, m \tag{3.3}$$

care este o altă formulare a unei teoreme a lui Deltheil [3][3]).

Să considerăm acum o formă diferențială

$$\delta = B_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\, \mathrm{d}u_1 + B_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\, \mathrm{d}u_2 + \ldots$$
$$\ldots + B_m(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\, \mathrm{d}u_m$$

---

[3]) Pag. 11.

cu coeficienții B_k continui în $V_{(0)}$ și $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ un punct curent din $V_{(0)}$; avem

TEOREMA 3.1.2. *Relația integrală*

$$\mathrm{d}\iint \cdots \int_{V_{(u)}} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n = \iint \cdots \int_{V_{(0)}} \delta \mathrm{d}\,\xi_1\,\mathrm{d}\,\xi_2 \ldots \mathrm{d}\,\xi_n$$

are loc, dacă și numai dacă F este soluția sistemului de ecuații cu derivate parțiale

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}\,[F X_{ik}] = B_k(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

cu $k = 1, 2, \ldots, m$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

3.2. Am văzut că operatorii $D_i\,D_j$ și $D_j\,D_i$ nu sînt comutativi, de aceea dacă pentru operatorul T luăm diferențiale de ordin superior, trebuie să ținem seama de acest fapt.

Dacă definim diferențiala a doua a lui $\mathcal{J}(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ astfel

$$\mathrm{d}^2 \mathcal{J} = D_i\,D_i\,(\mathcal{J})\,h_i\,h_i + \frac{1}{2}\,(D_i\,D_j + D_j\,D_i)\,(\mathcal{J})\,h_i\,h_j, \tag{3.4}$$

unde D_i este operatorul de derivare parțială în raport cu u_i, atunci avem

TEOREMA 3.2.1. *Diferențiala* (*3.4*) *a integralei* (*3.1*) *este nulă pentru orice* $(u) \in \Delta$, *dacă și numai dacă F este în* $V(_0)$ *o soluție a sistemului de ecuații cu derivate parțiale de ordinul doi*

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\left[X_{hi}\,\frac{\partial}{\partial x_k}\,(F\,X_{kj})\right] + \frac{\partial}{\partial x_h}\left[X_{hj}\,\frac{\partial}{\partial x_k}\,(F X_{ki})\right] = 0 \tag{3.5}$$

cu $h, k = 1, 2, \ldots, n$; $i, j = 1, 2, \ldots, m$.

Deoarece $D_i\,D_j$ este diferit de $D_j\,D_i$, putem, mai general, să considerăm diferențiala a doua definită de

$$\delta^2 = D_i\,D_j\,(\mathcal{J})\,h_i\,h'_j \tag{3.6}$$

iar $\delta^2\,\mathcal{J} = 0$ implică $D_i\,D_j = 0$, pentru orice i și j:

TEOREMA 3.2.2. *Dacă diferențiala* (*3.6*) *a integralei* (*3.1*) *este nulă pentru orice* $(u) \in \Delta$, *atunci F este în* $V_{(0)}$ *o soluție a sistemului de ecuații cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\left[X_{hi}\,\frac{\partial}{\partial x_k}\,(F\,X_{kj})\right] = 0 \tag{3.7}$$

cu $h, k = 1, 2, \ldots, n$; $i, j = 1, 2, \ldots, m$, *și reciproc.*

3.3. Dacă luăm pentru T diferențiala a doua directă $\overrightarrow{d}^2$ [2]4), deci

$$\overrightarrow{d}^2 \mathcal{J}(u) = \mathcal{D}_{ii}(\mathcal{J})(u)\, h_i h_i + \mathcal{D}_{ij} \mathcal{J}(u)\, h_i h_j, \tag{3.8}$$

unde $\mathcal{D}_{ii}$ este derivata a doua directă în raport cu u_i, definită de (1.21), iar $\mathcal{D}_{ij}$ este derivata a doua mixtă (hiperbolică) în raport cu u_i, u_j, definită de (2.1), şi dacă folosim rezultatele teoremelor 2.4.2 şi 2.4.3 avem :

TEOREMA 3.3.1. *Diferențiala a doua directă, definită de (3.8), a integralei (3.1) este nulă pentru orice* $(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in \Delta \subset R^m$, *dacă şi numai dacă* F *este o soluție în* $V_{(0)}$ *a sistemului de ecuații cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial^2}{\partial x_h\, \partial x_k}\left[F(X_{hi} X_{kj} + X_{hj} X_{ki})\right] + \tag{3.9}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_h}\left[F\left(X_{hij} - \frac{\partial X_{hi}}{\partial x_k} X_{kj} - \frac{\partial X_{hj}}{\partial x_k} X_{ki}\right)\right] = 0$$

pentru $h, k = 1, 2, \ldots, n;\ i, j = 1, 2, \ldots, m.$

Deoarece $X_{hij} = X_{hji}$, urmează că $\mathcal{D}_{ij} = \mathcal{D}_{ji}$, de unde rezultă imediat (3.9). Condiția $X_{hij} = X_{hji}$ cere ca funcțiile x_k date de (1.1) să aibă derivatele de ordinul doi continue.

IV. MULTIPLICATORI

4.1. Să considerăm ecuația cu derivate parțiale de ordinul întîi

$$X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial u}{\partial x_n} + X_{n+1} u = 0, \tag{4.1}$$

cu $X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ continue în $D \subset R^n$ şi $\sum_1^{n+1} X_k^2 \neq 0.$

Fie

$$u = \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

n soluții independente ale ecuației (4.1) în D. Ecuația

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial u}{\partial x_n} & u \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & \varphi_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} & \varphi_n \end{vmatrix} = 0 \tag{4.2}$$

---

4) Pag. 459.

are aceleași soluții ca și ecuația (4.1), deci cele două ecuații (4.1) și (4.2) au coeficienții proporționali; prin urmare dacă notăm ecuația (4.2) astfel

$$(4.2') \qquad \Delta_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \Delta_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + \Delta_n \frac{\partial u}{\partial x_n} + \Delta_{n+1} u = 0,$$

unde

$$(4.3) \qquad \Delta_k = (-1)^{k-1} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{k-1}} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{k+1}} \ldots \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{k-1}} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{k+1}} \ldots \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{k-1}} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{k+1}} \ldots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

$$(4.4) \qquad \Delta_{n+1} = (-1)^n \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

atunci

$$(4.5) \qquad \Delta_n = MX_k, \qquad k=1, 2, \ldots, n-1.$$

TEOREMA 4.1.1. *Funcțiile* MX_k *satisfac ecuația cu derivate parțiale*

$$(4.6) \qquad \frac{\partial (MX_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (MX_2)}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial (MX_n)}{\partial x_n} + nMX_{n+1} = 0.$$

Demonstrație. Se înlocuiesc MX_k cu Δ_k și se derivează determinanții care dau pe Δ_k.

DEFINIȚIA 4.1.1. Funcția M definită de relațiile (4.5) se numește multiplicator.

Cînd $X_{n+1} \equiv 0$, această definiție coincide cu definiția dată de H. Poincaré. Următoarea teoremă [1][5] datorită lui H. Poincaré stabilește o legătură între noțiunea de multiplicator ($X_{n+1} = 0$) și de invariant integral ((D, 0) invariant integral):

TEOREMA 4.1.2. *Condiția necesară și suficientă ca integrala multiplă*

$$\iint_{V_n} M \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n$$

să fie un invariant integral este ca M să fie un multiplicator.

În cele ce urmează vom stabili cîteva rezultate de acest tip în legătură cu invarianții integrali introduși în această lucrare.

4.2. În teorema 1.31 ecuația

$$(4.7) \qquad \frac{\partial}{\partial x_j} \left[X_j \frac{\partial}{\partial x_i} (FX_i) \right] = 0, \qquad i, j=1, 2, \ldots, n$$

---

[5] Pag. 416.

dacă punem

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(FX_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(FX_2)+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}(FX_n)=G$$

devine

$$\frac{\partial (X_1G)}{\partial x_1}+\frac{\partial (X_2G)}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial (X_nG)}{\partial x_n}=0$$

încît putem să enunțăm

TEOREMA 4.2.1. *Derivata D^2 a integralei*

$$\iint\ldots\int_{V_u} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n \tag{4.8}$$

este nulă pentru orice $u\in\Delta\subset R$, dacă și numai dacă F este în V_0 o soluție a ecuației cu derivate parțiale

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(FX_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(FX_2)+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}(FX_n)=G, \tag{4.9}$$

unde $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este un multiplicator al ecuației

$$X_1\frac{\partial H}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial H}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial H}{\partial x_n}=0. \tag{4.10}$$

Corespondentul teoremei 2.2.1 este :

TEOREMA 4.2.2. *Derivata $D_v D_u$ a integralei*

$$\iint\ldots\int_{V_{uv}} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n \tag{4.11}$$

este nulă pentru orice $(u, v)\in\Delta\subset R^2$, dacă și numai dacă F este în V_{00} o soluție a ecuației cu derivate parțiale

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(X_1F)+\frac{\partial}{\partial x_2}(X_2F)+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}(X_nF)=G, \tag{4.12}$$

unde $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este un multiplicator al ecuației

$$Y_1\frac{\partial H}{\partial x_1}+Y_2\frac{\partial H}{\partial x_2}+\ldots+Y_n\frac{\partial H}{\partial x_n}=0. \tag{4.13}$$

În teorema 3.2.2 în sistemul

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\left[X_{hi}\frac{\partial}{\partial x_k}(FX_{kj})\right]=0$$

dacă punem

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(FX_{kj})=\Phi_j$$

se obține

$$\frac{\partial}{\partial x_h}[X_{hi}\Phi_j]=0.$$

TEOREMA 4.3.1. *Diferenţiala (3.6) a integralei (3.1) este nulă pentru orice* $(u) \in \Delta$, *dacă şi numai dacă* F *este în* $V_{(0)}$ *o soluţie a sistemului de ecuaţii cu derivate parţiale*

$$(4.14)\quad \frac{\partial}{\partial x_1}(FX_{1j}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(FX_{2j}) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}(FX_{nj}) = \Phi_j, \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

unde Φ_j *este un invariant integral al sistemului*

$$(4.15)\quad \frac{\partial}{\partial x_1}(X_{1i}\,\Phi) + \frac{\partial}{\partial x_2}(X_{2i}\,\Phi) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}(X_{ni}\,\Phi) = 0, \; \imath = 1, 2, \ldots, n.$$

Primită la redacţie la 19 octombrie 1967

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu

RECHERCHES SUR LES INVARIANTS INTÉGRAUX

(RÉSUMÉ)

Soient un ouvert $V_0 \subset R^n$ et $\xi \in V_0$. Soient $x_k(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in C^{(p)}$ $k = 1, 2, \ldots, n$, en $\Delta \subset R^m$ avec $x_k(0, 0, \ldots, 0) = \xi_k$. On a pour $\xi \to x$, $V_0 \to V_u$. Soient $F(x) \in C^{(p)}$ et T un opérateur différentiel d'ordre p, au plus, défini sur $\Delta \subset R^m$.

DÉFINITION. 1.1. L'intégrale

$$\mathcal{J}(u) = \iint \ldots \int_{V_u} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \ldots x_n$$

est un (T, Φ) — invariant intégral en Δ et $T[\mathcal{J}(u)] = \Phi(\xi)$ avec Φ une fonction définie sur V_0.

THÉORÈME 1.2.1. *La condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée seconde symétrique de* $\mathcal{J}(u)$ *soit nulle pour tout* $u \subset \Delta \subset R$ *est*

$$\frac{\partial^2 (FX_i\, X_j)}{\partial x_i\, \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[F\left(Y_i - 2\,\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\, X_j\right]\right. = 0.$$

THÉORÈME 2.4.3. *La dérivée partielle du second ordre* $D_j\, D_i$ *de l'intégrale* $\mathcal{J}(u)$ *est nulle pour tout* $u \in \Delta \subset R^m$ *si et seulement si* F *est une solution en* V_0 *de l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\left[X_{hj}\, \frac{\partial}{\partial x_k}(FX_{ki}) \right] = 0.$$

Dans la dernière partie du travail on fait une liaison entre les résultats obténus et les multiplicateurs.

BIBLIOGRAFIE

1. E. GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, vol. II, Gauthier-Villars, Paris, 1942.
2. M. NICOLESCU, *Analiza matematică*, vol. II, Ed. tehnică, Bucureşti, 1958.
3. MARIUS I. STOKA, *Geometrie integrală*. Ed. Academiei, Bucureşti, 1967.

ASUPRA SPAȚIILOR A_2 CU CONEXIUNE AFINĂ[1]

DE

ION D. TEODORESCU

Scopul acestei lucrări este de a vedea în ce măsură curbele caracteristice ale unui spațiu A_2 $(x,\ y)$ cu conexiune afină simetrică caracterizează (determină) conexiunea afină a spațiului.

Abstracție făcînd de o transformare proiectivă de conexiune, se găsește forma conexiunii afine, folosindu-se clasificarea spațiilor A_2 după speța curbelor caracteristice.

În particular, se studiază cazurile unor spații Cartan sau ale unor spații local euclidiene.

Fie un spațiu bidimensional $A_2\,(x,\ y)$ cu conexiune afină simetrică Γ^i_{jk}. Curbele sale autoparalele sînt date prin ecuația ([1], I, p. 179)

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -\Gamma^1_{22}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3 - (2\,\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22})\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + (2\,\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11})\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \Gamma^2_{11}.$$

Rezultă că prin fiecare punct $P(x,\ y)$ trec trei curbe autoparalele avînd punctul P ca punct de inflexiune. Deci direcțiile $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ corespunzătoare, denumite *direcții caracteristice*, sînt date de ecuația

$$(1)\qquad \Gamma^2_{11}\,\mathrm{d}x^3 + (2\,\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11})\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y - (2\,\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^2 - \Gamma^1_{22}\,\mathrm{d}y^3 = 0.$$

Extinzînd clasificarea lui *Boruvka-Vrănceanu* [2], ([1], II, p. 382), vom zice [3] că A_2 este *de prima*, *de a doua* sau *de a treia speță* după cum direcțiile caracteristice $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ — definite de ecuația (1) — sînt distincte, două sau toate trei coincid. Cînd spațiul A_2 este local euclidian, se obțin clasele lui Boruvka-Vrănceanu.

---

[1] Comunicare prezentată la Seminarul de teoria varietăților diferențiabile (București, 30 iunie — 9 iulie 1967), organizat de Academia Republicii Socialiste România, Secția de științe matematice, și Uniunea matematică internațională.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 5, P. 751–761, BUCUREȘTI, 1968

Dacă ecuaţia (1) este identic verificată, adică direcţiile caracteristice sînt nedeterminate, spaţiul A_2 este *proiectiv euclidian*.

★

Să considerăm un spaţiu A_2 de prima speţă. În acest caz, ecuaţia (1) este de forma

$$(2)\qquad (A\mathrm{d}x^2 + 2B\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + C\,\mathrm{d}y^2)(\nu\,\mathrm{d}x + \eta\,\mathrm{d}y),\quad (AC - B^2 \neq 0).$$

Din (1) şi (2), prin identificare, rezultă

$$\Gamma^2_{11} = \rho A\nu,\quad 2\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11} = \rho(2B\nu + A\eta),$$
$$\Gamma^1_{22} = -\rho C\eta,\ 2\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22} = -\rho(2B\eta + C\nu).$$

Aşadar : *Un spaţiu A_2 de prima speţă are conexiunea afină de forma*

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = 2g - \rho(2B\nu + A\eta),\quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = f,\quad \Gamma^1_{22} = -\rho C\eta,\\ &\Gamma^2_{11} = \rho A\nu,\quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = g,\quad \Gamma^2_{22} = 2f + \rho(2B\eta + C\nu). \end{aligned}$$

Deoarece putem avea $\nu = 1$ (sau $\eta = 1$) şi una din mărimile A, B, C egală cu 1, un astfel de spaţiu depinde – în general – de şase funcţii arbitrare (de variabilele x, y).

Dacă spaţiul A_2 este de a doua speţă, ecuaţia (1) are forma

$$(4)\qquad (\lambda\mathrm{d}x + \mu\,\mathrm{d}y)^2(\nu\,\mathrm{d}x + \eta\mathrm{d}y) = 0.$$

Atunci, din (1) şi (4), prin identificare, obţinem

$$\Gamma^2_{11} = \rho\nu\lambda^2,\quad 2\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11} = \rho(2\lambda\mu\nu + \eta\lambda^2),$$
$$\Gamma^1_{22} = -\rho\eta\mu^2,\ 2\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22} = -\rho(2\lambda\mu\eta + \nu\mu^2).$$

Aşadar : *Conexiunea afină a unui spaţiu A_2 de speţa a doua este de forma*

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = 2g - \rho\lambda(2\mu\nu + \eta\lambda),\quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = f,\quad \Gamma^1_{22} = -\rho\eta\mu^2,\\ &\Gamma^2_{11} = \rho\nu\lambda^2,\quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = g,\quad \Gamma^2_{22} = 2f + \rho\mu(2\lambda\eta + \nu\mu). \end{aligned}$$

Putem avea $\lambda = 1$ (sau $\mu = 1$) şi $\eta = 1$ (sau $\nu = 1$) ; rezultă că un spaţiu de speţa a doua depinde, în general, de cinci funcţii arbitrare (de variabilele x, y).

Să presupunem că spaţiul A_2 este de speţa a treia ; deci ecuaţia (1) este de forma

$$(6)\qquad (\lambda\mathrm{d}x + \mu\mathrm{d}y)^3 = 0.$$

Din (1) şi (6), prin identificare, găsim

$$\Gamma^2_{11} = \rho\lambda^3,\quad 2\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11} = 3\rho\lambda^2\mu,$$
$$\Gamma^1_{22} = -\rho\mu^3,\ 2\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22} = -3\rho\lambda\mu^2.$$

Aşadar : *Spaţiile A_2 de speţă trei au conexiunea afină definită de formulele*

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = 2g - 3\rho\lambda^2\mu,\quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = f,\quad \Gamma^1_{22} = -\rho\mu^3,\\ &\Gamma^2_{11} = \rho\lambda^3,\quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = g,\quad \Gamma^2_{22} = 2f + 3\rho\lambda\mu^2. \end{aligned}$$

Însă putem avea $\lambda = 1$ (sau $\mu = 1$) ; deci, aceste spaţii depind – în general – de patru funcţii arbitrare (de variabilele x, y).

În cazul cînd ecuația (1) este identic verificată, rezultă

$$\Gamma^2_{11} = 0,\quad 2\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11} = 0,\quad 2\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22} = 0,\quad \Gamma^1_{22} = 0\,;$$

deci ([1], I,p. 180) : *Conexiunea afină a unui spațiu A_2 proiectiv euclidian are expresia*

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = 2g,\quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = f,\quad \Gamma^1_{22} = 0,\\ &\Gamma^2_{11} = 0,\quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = g,\quad \Gamma^2_{22} = 2f, \end{aligned} \tag{8}$$

depinzînd de două funcții arbitrare.

★

Observăm că ecuația (1) a curbelor caracteristice se conservă printr-o transformare proiectivă de conexiune

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j\varphi_k + \delta^i_k\varphi_j, \tag{9}$$

unde φ_i sînt componentele unui vector convariant. Luînd

$$\varphi_1 = -g,\quad \varphi_2 = -f,$$

avem (suprimînd supraliniererea)

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0,\quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0. \tag{10}$$

În condițiile (10), vectorul tangent la o curbă coordonată se transportă prin paralelism de-a lungul celeilalte curbe coordonate. De aceea, prin analogie cu cazul riemannian (v. [4], p. 130 ; [5], p. 294—295), vom spune că rețeaua de curbe coordonate formează o *rețea Cebîșev*.

Obținem, astfel, *teorema* :

Abstracție făcînd de o transformare proiectivă de conexiune, un spațiu A_2 neproiectiv euclidian are conexiunea afină de forma :

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = -\rho(2B\nu + A\eta),\quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0,\quad \Gamma^1_{22} = -\rho C\eta,\\ &\Gamma^2_{11} = \rho A\nu,\qquad\qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0,\quad \Gamma^2_{22} = \rho(2B\eta + C\nu)\,; \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = -\rho\lambda(2\mu\nu + \eta\lambda),\quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0,\quad \Gamma^1_{22} = -\rho\eta\mu^2,\\ &\Gamma^2_{11} = \rho\nu\lambda^2,\qquad\qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0,\quad \Gamma^2_{22} = \rho\mu(2\lambda\eta + \lambda\mu) \end{aligned} \tag{12}$$

sau

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = -3\rho\lambda^2\mu,\quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0,\quad \Gamma^1_{22} = -\rho\mu^3,\\ &\Gamma^2_{11} = \rho\lambda^3,\qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0,\quad \Gamma^2_{22} = 3\rho\lambda\mu^2, \end{aligned} \tag{13}$$

după cum spațiul este de prima, de a doua sau de a treia speță, spațiul fiind raportat la o rețea Cebîșev.

Observație. Cu ajutorul conexiunii afine Γ^i_{jk} se construiesc doi tensori : *tensorul de torsiune*

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} \tag{14}$$

și *tensorul de curbură*

$$\Gamma^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{rk}\,\Gamma^r_{jl} - \Gamma^i_{rl}\,\Gamma^r_{jk} \tag{15}$$

($x^1 = x$, $x^2 = y$; $i, j, \ldots = 1, 2$). Deci, spațiile A_2 considerate sînt fără torsiune (au tensorul de torsiune nul).

*

Să studiem cazul cînd curbele coordonate ale spațiului A_2 sînt curbe autoparalele ; atunci avem [6]

$$\Gamma^1_{22} = 0, \quad \Gamma^2_{11} = 0. \tag{16}$$

Aceste condiții se conservă printr-o transformare de forma

$$x' = \varphi(x), \ y' = \psi(y). \tag{16'}$$

Dacă spațiul A_2 este de prima speță, deci cînd spațiul are conexiunea (11), condițiile (16) devin

$$A\nu = 0, \quad C\eta = 0.$$

Deoarece putem avea $\nu \neq 0$, $\eta = -1$, rezultă numai posibilitatea

$$A = C = 0 \quad \left(B = \frac{1}{2}\right).$$

Obținem, astfel, spațiul A_2 avînd conexiunea

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = -\rho\nu, \ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0, \ \Gamma^1_{22} = 0, \\ &\Gamma^2_{11} = 0, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0, \ \Gamma^2_{22} = -\rho, \end{aligned} \tag{17}$$

unde ρ și ν sînt funcții arbitrare de variabilele x, y ; curbele caracteristice ale spațiului sînt date de ecuația

$$\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, (\nu \, \mathrm{d}x - \mathrm{d}y) = 0. \tag{17'}$$

Dacă spațiul A_2 este de speța a doua, deci cînd spațiul are conexiunea (12), condițiile (16) se scriu

$$\nu\lambda^2 = 0, \quad \eta\mu^2 = 0.$$

Însă putem avea $\lambda = 1$, $\eta = 1$; atunci, rezultă doar cazul

$$\nu = \mu = 0.$$

Așadar, obținem spațiul A_2 avînd conexiunea

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = -\rho, \ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0, \ \Gamma^1_{22} = 0, \\ &\Gamma^2_{11} = 0, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0, \ \Gamma^2_{22} = 0, \end{aligned} \tag{18}$$

unde ρ este o funcție arbitrară în x, y ; acest spațiu are curbele caracteristice date de ecuația

$$\mathrm{d}x^2 \, \mathrm{d}y = 0, \tag{18'}$$

adică curbele coordonate sînt curbe caracteristice.

În cazul cînd spațiul A_2 este de speța a treia, adică pentru un spațiu cu conexiune (13), condițiile (16) dau

$$\lambda = 0, \ \mu = 0 ;$$

atunci toate componentele conexiunii afine sînt nule, ceea ce contrazice ipoteza (spațiului este cu conexiune afină).

Așadar, avem *rezultatul* :

Un spațiu A_2, raportat la un sistem de curbe coordonate autoparalele ce constituie o rețea Cebîșev, este de prima sau de a doua speță, conexiunea spațiului fiind de forma (17) sau (18).

Presupunînd că spațiul A_2 este raportat la un sistem de curbe coordonate autoparalele ce constituie o rețea Cebîșev, să studiem cazurile cînd spațiile A_2 sînt spații de curbură constantă — în particular, spații local euclidiene — sau sînt spații Cartan.

★

Cînd spațiul A_2 este raportat la curbe coordonate autoparalele ce constituie o rețea Cebîșev, tensorul de curbură are componentele

$$\Gamma^2_{121} = 0,\ \Gamma^1_{112} = \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial y},\ \Gamma^2_{221} = \frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial x},\ \Gamma^2_{212} = 0. \tag{15'}$$

Spațiul A_2 este de curbură constantă dacă componentele tensorului de curbură sînt constante.

Spațiul A_2 este local euclidian dacă tensorii de torsiune și de curbură sînt nuli ([1], II, p. 384) ; atunci, transformarea punctuală

$$u = u(x,\ y),\ v = v(x,\ y), \tag{19}$$

ce aplică spațiul A_2 $(x,\ y)$ *în* sau *pe* spațiul afin E_2 $(u,\ v)$, este constituită din două soluții independente ale sistemului complet integrabil

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^j\, \partial x^k} + \Gamma^i_{jk} \frac{\partial V}{\partial x^i} = 0\,. \tag{19'}$$

În acest caz, speța spațiului A_2 local euclidian coincide cu *speța lui Boruvka* a corespondenței (19) între spațiile proiective A_2 și E_2, [2], (v. și [1], II, p. 382).

Să presupunem că tensorul de curbură al spațiului (17) de prima speță este constant ; ținînd seama de (17) în (15′), putem avea

$$-\,\rho\nu = k_1\, y + \sigma(x),\quad -\,\rho = k_2 x + \zeta\ (y),$$

unde σ (x), ζ (y) sînt funcții arbitrare, iar k_1, k_2 constante ; deci, găsim conexiunea

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = k_1 y + \sigma\,(x),\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0,\ \Gamma^1_{22} = 0 \\ &\Gamma^2_{11} = 0,\qquad\qquad\quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0,\ \Gamma^2_{22} = k_2 x + \zeta(y), \end{aligned} \tag{20}$$

componentele tensorului de curbură fiind

$$\Gamma^2_{121} = 0,\ \Gamma^1_{112} = k_1,\ \Gamma^2_{221} = k_2,\ \Gamma^1_{212} = 0. \tag{20'}$$

În particular, *cînd $k_1 = k_2 = 0$, spațiul A_2 este local euclidian* ; în acest caz, sistemul (19′) devine

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \sigma\,(x)\, \frac{\partial V}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} = 0,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \zeta(y)\, \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

admiţînd soluţia (v. şi [7], p. 219)

$$V = c_1 \int e^{-\int \sigma(x) dx} dx + c_2 \int e^{-\int \zeta(y) dy} dy + c_0 .$$

Rezultă că transformarea punctuală, asociată conexiunii local euclidiene, este

$$u = \int e^{-\int \sigma(x) dx} dx, \quad v = \int e^{-\int \zeta(y) dy} dy ;$$

deci, acest spaţiu nu este echivalent în mare cu spaţiul afin.

Observăm că, printr-o transformare de forma (16') cu

$$\varphi = \ln \int e^{-\int \sigma dx} dx, \quad \psi = \ln \int e^{-\int \zeta dy} dy ,$$

conexiunea local euclidiană ia forma canonică[2] (v. şi [8], p. 339; [1], II, p. 370)

$$(21) \qquad \begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = -1, \ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0, \ \Gamma^1_{22} = 0, \\ &\Gamma^2_{11} = 0, \ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0, \ \Gamma^2_{22} = -1 ; \end{aligned}$$

transformarea asociată este

$$(21') \qquad u = e^x, \quad v = e^y .$$

Să considerăm că spaţiul (18) de speţa a doua are tensorul de curbură constant; ţinînd seama de formulele (15') şi abstracţie făcînd de o transformare afină, obţinem conexiunea

$$(22) \qquad \begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = \varepsilon y + \sigma(x), \ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0, \ \Gamma^1_{22} = 0, \\ &\Gamma^2_{11} = 0, \qquad\qquad\quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0, \ \Gamma^2_{22} = 0, \end{aligned}$$

unde $\varepsilon = \pm 1, 0$ iar $\sigma(x)$ este o funcţie arbitrară; componentele tensorului de curbură sînt

$$(22') \qquad \Gamma^1_{121} = 0, \ \Gamma^1_{112} = \varepsilon, \ \Gamma^2_{221} = 0, \ \Gamma^1_{212} = 0.$$

Cînd $\varepsilon = 0$, *spaţiul* A_2 *este local euclidian*; în acest caz, sistemul (19') devine

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \sigma(x) \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \, \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

---

[2]) Printr-o transformare de coordonate

$$x'^i = x'^i (x^1, \ldots, x^n),$$

coeficienţii conexiunii afine Γ^i_{jk} ai spaţiului $A_n(x^1, \ldots, x^n)$ se schimbă după legea ([1], I, p. 162)

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma'^i_{rs}(x') \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} - \Gamma^r_{jk}(x) \frac{\partial x'^i}{\partial x^r} .$$

a cărui integrală generală este

$$V = c_1 \int e^{-\int \sigma(x) \mathrm{d}x} \mathrm{d}x + c_2 y + c_0 .$$

Deci, transformarea asociată se poate pune sub forma

$$u = \int e^{-\int \sigma(x) \mathrm{d}x} \mathrm{d}x, \quad v = y .$$

Aşadar, nici acest spaţiu nu este echivalent în mare cu spaţiul afin E_2.

Prin transformarea (16′) cu

$$\varphi = \ln \int e^{-\int \sigma \mathrm{d}x} \mathrm{d}x, \quad \psi = y,$$

conexiunea local euclidiană se aduce la forma canonică

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = -1, \ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0, \ \Gamma^1_{22} = 0, \\ &\Gamma^2_{11} = 0, \ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0, \ \Gamma^2_{22} = 0, \end{aligned} \tag{23}$$

fiind o conexiune constantă, pusă în evidenţă de *prof. G. Vrănceanu* ([1], II, p. 370); transformarea asociată este

$$u = e^x, \quad v = y, \tag{23'}$$

Aşadar, *avem rezultatul* :

Dacă un spaţiu A_2, raportat la un sistem de curbe coordonate autoparalele ce constituie o reţea Cebîşev, este local euclidian, conexiunea poate fi făcută constantă şi ia forma canonică (*21*) *sau* (*23*) *după cum spaţiul este de prima sau de a doua speţă ; un astfel de spaţiu nu este echivalent în mare cu spaţiul afin.*

★

Un spaţiu A_2 cu conexiune afină simetrică Γ^i_{jk} este un *spaţiu Cartan* dacă derivata covariantă a tensorului de curbură Γ^i_{jkl} este nulă [9], (v. şi [1], I, p. 230), adică

$$\Gamma^i_{jkl,\,p} = 0. \tag{24}$$

Condiţiile de integrabilitate ale acestui sistem sînt

$$-\Gamma^s_{jkl}\,\Gamma^i_{srp} + \Gamma^i_{skl}\,\Gamma^s_{jrp} + \Gamma^i_{jsl}\,\Gamma^s_{krp} + \Gamma^i_{jks}\,\Gamma^s_{lrp} = 0 . \tag{24'}$$

Cînd spaţiul este raportat la curbe coordonate autoparalele ce constituie o reţea Cebîşev, ecuaţiile (24) şi condiţiile de integrabilitate (24′) se scriu

$$\begin{aligned} &\Gamma^2_{121,\,r} = 0, && \Gamma^1_{212,\,r} = 0, \\ &\Gamma^1_{112,1} = \frac{\partial^2 \Gamma^1_{11}}{\partial x\, \partial y} + \Gamma^1_{11} \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial y} = 0, && \Gamma^1_{112,2} = \frac{\partial^2 \Gamma^1_{11}}{\partial y^2} + \Gamma^2_{22} \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial y} = 0, \\ &\Gamma^2_{221,1} = \frac{\partial^2 \Gamma^2_{22}}{\partial x^2} + \Gamma^1_{11} \frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial x} = 0, && \Gamma^2_{221,2} = \frac{\partial^2 \Gamma^2_{22}}{\partial y\, \partial x} + \Gamma^2_{22} \frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial x} = 0 \end{aligned} \tag{24'}$$

şi

$$\Gamma^{i}_{j12}\ (\Gamma^{1}_{112} + \Gamma^{2}_{212}) = 0, \text{ adică } \frac{\partial \Gamma^{1}_{11}}{\partial y} = \frac{\partial \Gamma^{2}_{22}}{\partial x}, \tag{24''}$$

deoarece se presupune că spaţiul nu este local euclidian.

Să cercetăm dacă printre spaţiile A_2 cu conexiune (17) sînt spaţii Cartan. Din condiţia (24'') obţinem

$$-\rho\nu = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad -\rho = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Atunci, ecuaţiile (24') devin

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x\, \partial y^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} = 0,$$

de unde rezultă că φ este o funcţie de clasă C^2 care satisface ecuaţia

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} = C\, \mathrm{e}^{-\varphi}. \tag{25}$$

Deci, regăsim conexiunea considerată de *prof. A. Haimovici* ([4], p. 147)

$$\begin{aligned} &\Gamma^{1}_{11} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \ \Gamma^{1}_{12} = \Gamma^{1}_{21} = 0, \ \Gamma^{1}_{22} = 0, \\ &\Gamma^{2}_{11} = 0\quad, \ \Gamma^{2}_{12} = \Gamma^{2}_{21} = 0, \ \Gamma^{2}_{22} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \end{aligned} \tag{26}$$

unde φ satisface ecuaţia (25); tensorul de curbură are componentele

$$\Gamma^{1}_{121} = 0, \ \Gamma^{1}_{112} = \Gamma^{2}_{221} = C\, \mathrm{e}^{-\varphi}, \ \Gamma^{1}_{212} = 0. \tag{26'}$$

Fie spaţiul (18). Din ecuaţia (24'') rezultă $\rho = \rho\,(x)$; în acest caz, spaţiul este local euclidian.

Aşadar, avem *rezultatul* :

Dacă un spaţiu A_2 este raportat la curbe coordonate autoparalele ce constituie o reţea Cebîşev, numai printre spaţiile de prima speţă există spaţii Cartan ; ***conexiunea unui astfel de spaţiu are forma (26).***

★

Putem căuta şi alte clase particulare de spaţii A_2 cu conexiune afină. De exemplu, să considerăm spaţiile A_2 de speţa a treia, cînd spaţiul este raportat la o reţea Cebîşev cu una din familiile de curbe autoparalele ; de exemplu, curbele $x = \text{const.}$ sînt curbe autoparalele. Atunci, avem condiţiile

$$\Gamma^{1}_{22} = 0, \ \Gamma^{2}_{11} \neq 0, \tag{27}$$

care se conservă printr-o transformare de forma

$$x' = \varphi\,(x), \ y' = \psi\,(x, y). \tag{27'}$$

Fie un spațiu A_2 de speța a treia, adică un spațiu cu conexiune (13); în acest caz rezultă

$$\mu = 0, \ \lambda = 1.$$

Așadar, găsim conexiunea:

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = 0, \ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0, \ \Gamma^1_{22} = 0, \\ &\Gamma^2_{11} = \rho, \ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0, \ \Gamma^2_{22} = 0, \end{aligned} \tag{28}$$

unde ρ este o funcție arbitrară de variabilele x, y. Curbele caracteristice ale spațiului (28) sînt date de ecuația

$$\mathrm{d}x^3 = 0 \tag{28'}$$

adică sînt curbele coordonate $x = \text{const.}$

În particular, putem considera spațiile care au tensorul de curbură constant; ținînd seama de (28) în (15′) și abstracție făcînd de o transformare afină, obținem conexiunea

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = 0, && \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0, \ \Gamma^1_{22} = 0, \\ &\Gamma^2_{11} = \varepsilon y + \sigma(x), && \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0, \ \Gamma^2_{22} = 0, \end{aligned} \tag{29}$$

unde $\varepsilon = \pm 1$, 0 iar $\sigma(x)$ este o funcție arbitrară; tensorul de curbură are componentele

$$\Gamma^2_{121} = -\varepsilon, \ \Gamma^1_{112} = \Gamma^2_{221} = \Gamma^1_{212} = 0. \tag{29'}$$

Dacă $\varepsilon = 0$, spațiul A_2 este local euclidian. În acest caz, sistemul (19′) se scrie

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

a cărui integrală generală este

$$V = c_1 x + c_2 \left[y - \int \left(\int \sigma \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}x \right] + c_0.$$

Deci, transformarea punctuală asociată conexiunii local euclidiene este

$$u = x, \ v = y - \int \left(\int \sigma \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}x.$$

Rezultă că spațiul local euclidian $A_2(x, y)$ poate fi echivalent în mare cu spațiul afin $E_2(u, v)$; de exemplu, dacă $\sigma(x)$ este o funcție întreagă, spațiul A_2 este echivalent în mare cu spațiul E_2 (v. [1], II, p. 386).

Dacă spațiul este echivalent în mare cu spațiul afin, prin transformarea (admisibilă)

$$x' = x, \ y' = -\frac{x^2}{2} - \int \left(\int \sigma \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}x$$

se ajunge la conexiunea constantă

$$(30)\quad \begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = 0,\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0,\ \Gamma^1_{22} = 0,\\ &\Gamma^2_{11} = -1,\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0,\ \Gamma^2_{22} = 0, \end{aligned}$$

pusă în evidență de *prof. G. Vrănceanu* ([1], II, p. 370); transformarea asociată acestei conexiuni este

$$u = x,\ v = y + \frac{x^2}{2},$$

care este o transformare cremoniană întreagă.

Dacă spațiul nu este echivalent în mare cu spațiul afin, prin transformarea

$$x' = x,\ y' = \ln x - \int\left(\int \sigma\, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}x,$$

conexiunea se reduce la forma

$$(31)\quad \begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = 0,\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0,\ \Gamma^1_{22} = 0,\\ &\Gamma^2_{11} = -\frac{1}{x^2},\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0,\ \Gamma^2_{22} = 0, \end{aligned}$$

transformarea asociată fiind

$$(31')\quad u = x,\ v = y + \ln x.$$

Așadar, putem enunța *rezultatul*:

Un spațiu A_2 de speța a treia, raportat la o rețea Cebîșev cu una din familiile de curbe coordonate constituită din curbe autoparalele, are conexiunea (28).

Dacă spațiul este local euclidian, conexiunea poate fi adusă la forma (30) sau (31), după cum spațiul este sau nu este echivalent în mare cu spațiul afin.

★

Se pot da și alte clasificări ale spațiilor A_2 cu conexiune afină, folosindu-se diverse criterii și metode, (v., de exemplu, [10], [11], ș.a.).

Primită la redacție la 2 decembrie 1967

Universitatea din București
Facultatea de matematică și mecanică,
Str. Academiei nr. 14

SUR LES ESPACES A_2 À CONNEXION AFFINE

(RÉSUMÉ)

Soit A_2 un espace bidimensionnel à connexion affine symétrique Γ^i_{jk}. Par chaque point $P(x, y)$ passent trois courbes autoparallèles ayant le point P comme point d'infléxion. Ces directions, qu'on appelle *caractéristiques*, sont définies par l'équation (1). Nous dirons (v. et

[3]) que l'espace A_2 est de *l'espèce un*, *de l'espèce deux* ou *de l'espèce trois* suivant le fait, que les directions caractéristiques sont respectivement toutes distinctes, seulement deux distinctes, ou toutes confondues ; si l'espace A_2 est localement euclidien, on obtient la classification de *Boruvka-Vrănceanu* [2], ([1], II, p. 382).

Nous nous proposons de savoir de quelle façon les courbes caractéristiques d'un espace A_2 à connexion affine, symétrique , caractérisent (déterminent) la connexion de l'espace. On démontre que :

À une transformation projective de la connexion près, un espace A_2 non projectif euclidien a la connexion de la forme (11), (12) ou (13) suivant le fait que l'espace est de l'espèce un, de l'espèce deux ou de l'espèce trois, l'espace étant rapporté à un réseau de Cebîșev (Tchebycheff).

On étudie, en particulier, les cas dans lesquels les courbes coordonnées sont autoparallèles et constituent un réseau Cebîșev. On a :

1) *Un tel espace peut être de la première ou de la seconde espèce, la connexion de l'espace étant de la forme (17) ou (18).*

2) *Si l'espace est localement euclidien, la connexion peut être réduite à une connexion constante et prend la forme canonique (21) ou (23) quand l'espace est respectivement de la première ou de la seconde espèce ; un tel espace n'est pas équivalent, en grand, avec l'espace affine.*

3) *Il y a des espaces de Cartan seulement si l'espace est de la première espèce ; la connexion d'un tel espace a la forme (26).*

On étudie, aussi, le cas des espaces A_2 de la troisième espèce, rapportés à un réseau de Cebîșev avec l'une des familles de courbes coordonnées constituée des courbes autoparallèles ; alors, il en résulte :

Un tel espace a la connexion (28).

Si l'espace est localement euclidien, la connexion peut être réduite à la forme (30) ou (31), suivant que l'espace est, ou non, équivalent en grand avec l'espace affine.

BIBLIOGRAFIE

1. G. VRĂNCEANU, *Leçons de Géométrie différentielle*, vol. I—II, Editura Academiei, 1957.
2. O. BORUVKA, *Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs.* Publ. Fac. Sci. Brno, 72, 85 (1926).
3. ION D. TEODORESCU, *Sur l'espèce des espaces localement euclidiens A_2 à connexion polynomiale*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R.P.R., **8 (56)**, *1—2*, 143—150 (1964).
4. A. HAIMOVICI, *Asupra conexiunii spațiilor lui Cartan*, Studii și cercetări științifice — Matematică, Acad. R.P.R. — filiala Iași, **13**, *1*, 129—149 (1962).
5. A. DOBRESCU, *Geometrie diferențială.* Ed. didactică și pedagogică, București, 1963.
6. G. VRĂNCEANU, *Asupra reducerii la o formă canonică a ecuațiilor curbelor autoparalele ale unui spațiu A_2*. Com. Acad. R.P.R., **2**, *9—10*, 479—484 (1952).
7. ION D. TEODORESCU, *Sur l'équivalence en grand des espaces localement euclidiens A_2 à connexion polynomiale.* Bull. Math. de la Soc. Math. de la R.S.R., **8 (56)**, *3—4*, 217—227 (1964).
8. G. VRĂNCEANU, *Spații A_2 local euclidiene*, Com. Acad. R.P.R., 4, *7—8*, 335—340, (1954).
9. E. CARTAN, *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann.* Bull. Soc. Math. France, **54**, 214 (1926) și **55**, 114 (1927).
10. A. E. LIBER, *Asupra clasificării conexiunii afine a unui spațiu cu două dimensiuni.* Mat. Sbornik, **27 (69)**, *2*, 249—260 (1950).
11. ST. PETRESCU, *Despre clasificarea spațiilor cu conexiune afină cu două dimensiuni.* Bul. științ. Acad. R.P.R., Seria mat. fiz. chim., **2**, *8*, 639—646 (1950).
12. — *Clasificarea spațiilor cu conexiune afină A_2*, St. cerc. mat. **2**, *2*, 1—42 (1951).

ASUPRA PROBLEMEI SINTEZEI AUTOMATELOR SECVENȚIALE DE TIPUL MEALY

DE

IOAN TOMESCU

În această lucrare este prezentat un algoritm matricial pentru determinarea tuturor perechilor de stări interne incompatibile, iar în cazul cînd automatul are o partiție cu un număr minim de clase a mulțimii stărilor interne, astfel încît fiecare mulțime a partiției care nu este închisă să conțină cel puțin o stare stabilă cu ieșirile definite se construiește un alt automat pentru care partiția considerată este închisă și al cărui automat redus funcționează la fel cu automatul dat, în sensul că plecînd de la o aceeași stare inițială și aplicînd un același cuvînt de intrare se obțin cuvinte de ieșire identice pentru toate pozițiile specificate ale cuvîntului de ieșire al automatului inițial.

Să considerăm un automat secvențial finit de tipul Mealy, $\mathfrak{A}(K, X, W, f, g)$, cu K mulțimea comenzilor, X mulțimea stărilor interne iar W mulțimea execuțiilor și funcțiile $f : K \times X \to X$; $g : K \times X \to W$.

În cazul cînd funcțiile f și g sînt parțial definite pe produsul cartezian $K \times X$, atunci se mai numesc și incomplet specificate.

În cadrul problemei sintezei automatelor secvențiale de acest tip intervine etapa reducerii acestor automate la automate homomorfe (cu aceeași funcționare) prin identificarea tuturor stărilor interne care pot fi egale (a stărilor interne compatibile).

Găsirea perechilor de stări interne care pot fi egale se face prin analiza funcțiilor f și g atît în cazul automatelor complet specificate, cît și în cazul automatelor incomplet specificate.

Într-o primă etapă se consideră perechile de stări diferite rezultate în urma analizei funcției de ieșire și anume dacă $g(K^s, X_i) \neq g(K^s, X_j)$, atunci se deduce $X_i \neq X_j$, notînd $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_p\}$ și $K = \{K^1, K^2, \ldots, K^q\}$.

Într-o a doua etapă se consideră toate lanțurile de implicații netautologice rezultate în urma analizei funcției de tranziție, de exemplu dacă

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 5, P. 763–770, BUCUREȘTI, 1968

$f(K^r, X_i) = X_k$ şi $f(K^r, X_j) = X_l$, atunci se deduce următoarea implicaţie : $(X_i = X_j) \Rightarrow (X_k = X_l)$. Pentru ca o asemenea implicaţie să nu reprezinte o tautologie, trebuie ca $(i \neq j) \,\&\, (k \neq l) \,\&\, (((i, j) \neq (k, l)) \,\&\, ((i, j) \neq (l, k)))$.

Dacă în prima etapă am obţinut $X_i \neq X_j$ iar egalitatea $X_i = X_j$ figurează într-un lanţ de implicaţii netautologice, atunci deducem că toate perechile de stări care figurează ca egale în antecedentele relaţiei $X_i = X_j$ sînt respectiv perechi de stări diferite.

În acest mod se determină toate perechile de stări interne diferite ale automatului, complementara acestei mulţimi faţă de produsul cartezian $X \times X$ dîndu-ne perechile de stări care pot fi egale.

Lungimea unui lanţ de implicaţii netautologice (adică numărul implicaţiilor conţinute în lanţ) poate atinge valoarea maximă şi anume $\binom{p}{2} - 1$.

Pentru automatul cu funcţia de tranziţie dată în figura 1 un astfel de lanţ de implicaţii de lungime maximă este următorul :

$$(X_1=X_2) \overset{K^1}{\Rightarrow} (X_2=X_3) \overset{K^1}{\Rightarrow} (X_3=X_4) \overset{K^1}{\Rightarrow} (X_4=X_5) \overset{K^1}{\Rightarrow} (X_5=X_6) \overset{K^2}{\Rightarrow} (X_1=X_3) \overset{K^1}{\Rightarrow}$$
$$(X_2=X_4) \overset{K^1}{\Rightarrow} (X_3=X_5) \overset{K^1}{\Rightarrow} (X_4=X_6) \overset{K^1}{\Rightarrow} (X_1=X_5) \overset{K^1}{\Rightarrow} (X_2=X_6) \overset{K^2}{\Rightarrow} (X_3=X_6) \overset{K^1}{\Rightarrow}$$
$$(X_1 = X_4) \overset{K^1}{\Rightarrow} (X_2 = X_5) \overset{K^2}{\Rightarrow} (X_1 = X_6).$$

f	K^1	K^2
X_1	X_2	–
X_2	X_3	X_6
X_3	X_4	–
X_4	X_5	–
X_5	X_6	X_1
X_6	X_1	X_3

Fig. 1

În cazul unei singure comenzi, obţinem următorul rezultat :

Propoziţie. *Dacă* $|K| = 1$, *atunci lungimea maximă a unui lanţ de implicaţii netautologice este egală cu* $|X| - 1$.

Demonstraţie. Dacă $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_q\}$, în cazul unei singure comenzi nu putem avea decît un lanţ de implicaţii netautologice de tipul :

$$(X_{i_1} = X_{i_2}) \Rightarrow (X_{i_3} = X_{i_4}) \Rightarrow \ldots \Rightarrow (X_{i_{k-1}} =$$
$$= X_{i_k}) \Rightarrow (X_j = X_{l_1}) \Rightarrow (X_j = X_{l_2}) \Rightarrow \ldots \Rightarrow (X_j = X_{l_n}),$$

unde numerele $i_1, i_2, \ldots, i_k, j, l_1, \ldots, l_n$ sînt diferite între ele şi lungimea lanţului este egală cu $k/2 + n$ pentru orice descompunere a lui q de forma $q = k + n + 1$ cu k par.

În aceste condiţii, lungimea maximă a lanţului se obţine pentru $k = 0$ şi anume egală cu $q - 1$, c.c.t.d.

Pentru determinarea tuturor perechilor de stări diferite atît în cazul automatelor complet specificate, cît şi în cazul automatelor incomplet specificate vom prezenta un algoritm matricial uşor mecanizabil, care porneşte de la perechile de stări diferite rezultate în urma analizei funcţiei de ieşire şi determină toate perechile de stări diferite rezultate în urma analizei tuturor lanţurilor de implicaţii netautologice deduse din comportarea funcţiei de tranziţie.

Să considerăm matricea $A_1 = \{a^{(1)}_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\ldots,p}$ definită astfel : $a^1_{\alpha\beta} = 0$ dacă $X_\alpha \neq X_\beta$ în urma analizei comportării funcției de ieșire $g : K \times X \to W$ și $a^1_{\gamma\beta} = 1$ în caz contrar $(a^1_{\alpha\alpha} = 1)$ și matricile $C_{(i)} = \{c^{(i)}_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\ldots,p} (1 \leqslant i \leqslant q)$ definite astfel : $c^{(i)}_{\alpha\beta} = 1$ dacă $f(K^i, X_\alpha) = X_\beta$ sau dacă f nu este definită pentru perechea (K^i, X_α) și $c^{(i)}_{\alpha\beta} = 0$ în caz contrar.

Vom defini produsele a două matrici booleene $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\ldots,p}$ și $B = \{b_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\ldots,p}$ notate $\times$ și & în modul următor :

$A \times B = \left\{\bigvee\limits_{k=1}^{p} a_{\alpha k} b_{k\beta}\right\}_{\alpha,\beta=1,\ldots,p}$ și $A \,\&\, B = \{a_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\ldots,p}$, unde $\bigvee$, respectiv $\cdot$ sînt operațiile „sau”, respectiv „și” din algebra booleană $L_2 = \{0, 1\}$ și vom defini următorul algoritm :

$$A_1^{(1)} = A_1 \,\&\, (C_{(1)} \times A_1 \times C^T_{(1)})\,;\ A_1^{(2)} = A_1^{(1)} \,\&\, (C_{(2)} \times A_1^{(1)} \times C^T_{(2)})\,; \ldots ; A_2 = A_1^{(q)} = A_1^{(q-1)} \,\&\, (C_{(q)} \times A_1^{(q-1)} \times C^T_{(q)})\,;$$

$$A_{s+1}^{(1)} = A_s \,\&\, (C_{(1)} \times A_s \times C^T_{(1)})\,; \ldots ; A_{s+1}^{(t+1)} = A_{s+1}^{(t)} \,\&\, (C_{(t+1)} \times A_{s+1}^{(t)} \times C^T_{(t+1)})\,; \ldots ; A_{s+2} = A_{s+1}^{(q)},$$

unde C^T este matricea transpusă matricii C.

TEOREMA 1. *Avem relația* $A_1 \geqslant A_2 \geqslant \ldots \geqslant A_n \geqslant A_{n+1} \geqslant \ldots$ *și există un indice* $r \leqslant \binom{p}{2}$ *(în cazul* $q = 1$, $r \leqslant p$*) așa ca* $A_r = A_{r+1}$ *și în acest caz se obține* $\{A_r\}_{\alpha\beta} = 0$ *dacă și numai dacă* $X_\alpha \neq X_\beta$ *(*X_α *și* X_β *sînt stări interne incompatibile) iar* $A \geqslant B$ *se definește prin* $a_{\alpha\beta} \geqslant b_{\alpha\beta}$ *pentru orice* $\alpha, \beta = 1, \ldots, p$.

Demonstrație. Să considerăm formula $A_{s+1}^{(t+1)} = A_{s+1}^{(t)} \,\&\, (C_{(t+1)} \times A_{s+1}^{(t)} \times C^T_{(t+1)})$ și să presupunem că $\{A_{s+1}^{(t)}\}_{i,j} = 1$ și $f(K^{t+1}, X_i) = X_k$; $f(K^{t+1}, X_j) = X_l$ deci avem implicația $(X_i = X_j) \overset{K^{t+1}}{\Longrightarrow} (X_k = X_l)$.

De aici trebuie să deducem că $\{A_{s+1}^{(t+1)}\}_{i,j} = 0$ dacă $\{A_{s+1}^{(t)}\}_{k,l} = 0$, adică $X_k \neq X_l$ (stările X_k și X_l sînt stări incompatibile) și $\{A_{s+1}^{(t+1)}\}_{i,j} = 1$ dacă $\{A_{s+1}^{(t)}\}_{k,l} = 1$, adică stările X_i și X_j sînt stări interne care pot fi egale.

Conform definiției, $\{A_{s+1}^{(t+1)}\}_{i,j} = \{A_{s+1}^{(t)}\}_{i,j} \left(\bigvee\limits_{m,n=1}^{p} \{C_{(t+1)}\}_{im} \{A_{s+1}^{(t)}\}_{mn} \{C^T_{(t+1)}\}_{nj}\right) = \{A_{s+1}^{(t)}\}_{k,l}$ deoarece $\{A_{s+1}^{(t)}\}_{i,j} = 1$ și $\{C_{(t+1)}\}_{ik} = 1$; $\{C_{(t+1)}\}_{im} = 0$ pentru $m \neq k$ și $\{C^T_{(t+1)}\}_{nj} = \{C_{(t+1)}\}_{jn} = 0$ pentru $n \neq l$; $\{C^T_{(t+1)}\}_{nj} = 1$ pentru $n = l$.

Dacă cel puțin una din stările $f(K^{t+1}, X_i)$ și $f(K^{t+1}, X_j)$ nu era definită, atunci $\{C_{(t+1)}\}_{im} = 1$ pentru orice $1 \leqslant m \leqslant p$, respectiv $\{C^T_{(t+1)}\}_{nj} = 1$ pentru orice $1 \leqslant n \leqslant p$ și deci $\{A_{s+1}^{(t+1)}\}_{i,j} = \{A_{s+1}^{(t)}\}_{i,j}$.

Într-adevăr, să presupunem că $f(K^{t+1}, X_i)$ nu este definită.

În acest caz $\bigvee\limits_{m,n=1}^{p} \{C_{(t+1)}\}_{im} \{A_{s+1}^{(t)}\}_{mn} \{C^T_{(t+1)}\}_{nj} \geqslant \{C_{(t+1)}\}_{il} \{A_{s+1}^{(t)}\}_{ll} \{C^T_{(t+1)}\}_{lj} = 1$ deoarece $\{A_{s+1}^{(t)}\}_{ll} = 1$ pentru orice $s \in N$ și orice $1 \leqslant t \leqslant q$. Dacă $\{A_{s+1}^{(t)}\}_{ij} = 0$, atunci și $\{A_{s+1}^{(t+1)}\}_{ij} = 0$.

Se observă deci că prin formarea matricilor A_2, A_3, ... analizăm toate lanţurile de implicaţii netautologice asociate funcţiei de tranziţie începînd cu ultima egalitate pe care o afirmăm sau o infirmăm pe baza rezultatelor obţinute prin studiul funcţiei de ieşire.

În fiecare etapă numărul implicaţiilor neexplorate scade cu cel puţin o unitate, deci numărul etapelor de calcul nu poate depăşi $\binom{p}{2} - 1$, respectiv $p - 1$.

În cazul în care $A_r = A_{r+1}$, procesul de calcul este încheiat, deoarece sub nici o comandă nu mai avem o implicaţie de tipul $(X_i = X_j) \Rightarrow (X_k = X_l)$ pentru care $\{A_r\}_{k,l} = 0$ şi $\{A_r\}_{i,j} = 1$, deci elementele nule ale matricei A_r corespund tuturor perechilor de stări interne incompatibile.

Relaţia $A_n \geqslant A_{n+1}$ pentru orice $n \in N$ rezultă din următorul lanţ de inegalităţi : $A_n = A_{n+1}^{(1)} \geqslant A_{n+1}^{(2)} \geqslant \ldots \geqslant A_{n+1}^{(t)} \geqslant A_{n+1}^{(t+1)} \geqslant \ldots \geqslant A_{n+1}^{(q)} = A_{n+1}$, c.c.t.d.

În cazul automatelor cu funcţiile f şi g complet specificate, relaţia de egalitate posibilă dintre stările interne este o relaţie de echivalenţă şi obţinem deci partiţia căutată a mulţimii X, două stări care aparţin unei aceleiaşi clase de echivalenţă putîndu-se identifica.

Pentru automatele incomplet specificate, relaţia R de egalitate posibilă dintre stările interne nu mai este tranzitivă şi se pune problema determinării unei relaţii de echivalenţă $R^* \subset R \subset X \times X$ cu un număr minim de clase (căreia îi corespunde un automat cu un număr minim de stări interne în cazul în care automatul şi partiţia găsită satisfac condiţiile teoremei 2) aşa ca fiecare clasă să fie închisă, adică dacă X_i şi X_j sînt în aceeaşi clasă, atunci şi $f(K^s, X_i)$ şi $f(K^s, X_j)$ să aparţină unei aceleiaşi clase pentru orice $1 \leqslant s \leqslant q$.

Cu alte cuvinte, relaţia R^* de egalitate dintre stările interne ale automatului trebuie să verifice toate lanţurile de implicaţii netautologice asociate funcţiei de tranziţie a automatului.

Pentru determinarea unei relaţii de echivalenţă $R^* \subset R \subset X \times X$, unde R este o relaţie simetrică şi reflexivă se poate proceda în două etape : 1) Determinarea compatibilelor maximale (a claselor maximale de elemente ce se găsesc în relaţia R), care sînt mulţimi intern stabile maximale ale grafului perechilor de stări incompatibile.

2) Determinarea unei partiţii a mulţimii X cu un număr minim de clase, ceea ce corespunde de exemplu în teoria grafurilor problemei colorării vîrfurilor grafului $G = (X, \Gamma)$ definit prin $X_\beta \in \Gamma(X_\alpha)$ dacă $(X_\alpha, X_\beta) \notin R$ cu un număr minim de culori aşa ca două vîrfuri ale grafului unite printr-un arc să nu fie colorate cu o aceeaşi culoare.

În cazul reducerii automatelor secvenţiale, se defineşte $(X_\alpha, X_\beta) \in R$ dacă X_α şi X_β sînt stări interne compatibile, adică dacă $\{A_r\}_{\alpha\beta} = I$, unde A_r este matricea din enunţul teoremei 1.

Fie un automat secvenţial finit de tipul Mealy $\mathfrak{A}(K, X, W, f_{\mathfrak{A}}, g_{\mathfrak{A}})$ cu funcţia de tranziţie $f_{\mathfrak{A}} : K \times X \to X$ şi funcţia de ieşire $g_{\mathfrak{A}} : K \times X \to W$ incomplet specificate. Din [11] rezultă construcţia unui automat $\mathfrak{A}_T(K, X_T, W, f_{\mathfrak{A}_T}, g_{\mathfrak{A}_T})$ echivalent cu automatul dat, cu $|X_T| = |X| + 1$ şi $f_{\mathfrak{A}_T}$ complet definită, în felul următor : Dacă $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_q\}$ atunci $X_T = \{X_1, X_2, \ldots, X_{q+1}\}$ şi dacă funcţia $f_{\mathfrak{A}}$ este definită pentru perechea

(K^i, X_j), atunci $f_{\mathfrak{A}_T}(K^i, X_j) = f_{\mathfrak{A}}(K^i, X_j)$, în caz contrar $f_{\mathfrak{A}_T}(K^i, X_j) = X_{q+1}$; $f_{\mathfrak{A}}(K^i, X_{q+1}) = X_{q+1}$ pentru orice $K^i \in K$; $g_{\mathfrak{A}_T}$ coincide cu $g_{\mathfrak{A}}$ pentru toate perechile (K^i, X_j) cu $j = 1, \ldots, q$ iar $g(K^i, X_{q+1})$ nu este definită pentru orice i.

Toate compatibilele maximale ale automatului $\mathfrak{A}_T$ se obțin din compatibilele maximale ale automatului $\mathfrak{A}$ prin adăugarea noii stări X_{q+1}.

Un cuvînt de ieșire Z de lungime n este un vector cu n componente $(Z)_i$ care aparțin mulțimii W sau nu sînt specificate. Pentru două cuvinte de ieșire de aceeași lungime Z_1 și Z_2, se definește o relație de ordine parțială $Z_1 \geqslant Z_2$ dacă, pentru orice componentă specificată $(Z_1)_i$, există relația $(Z_1)_i = (Z_2)_i$.

TEOREMA 2. *Pentru orice automat secvențial* $\mathfrak{A}(K, X, W, f_{\mathfrak{A}}, g_{\mathfrak{A}})$ *care are o partiție* $\Delta = \{X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_r}\}, \ldots, \{X_{k_1}, X_{k_2}, \ldots, X_{k_s}\}$ *a mulțimii* X *a stărilor interne cu un număr minim de clase formate din stări compatibile, cu proprietatea că orice mulțime a partiției conține cel puțin o stare stabilă cu ieșirile complet specificate sub orice comandă, există un automat* $\mathfrak{B}(K, X, W, f_{\mathfrak{B}}, g_{\mathfrak{B}})$ *care satisface condițiile* :

i) $\mathfrak{B}$ *are aceleași perechi de stări compatibile cu* $\mathfrak{A}_T$.

ii) Δ *este o partiție a lui* X *cu un număr minim de clase care sînt închise relativ la automatul* $\mathfrak{B}$.

iii) $(X_{i_1} = X_{i_2})\ \&\ (X_{i_1} = X_{i_3})\ \&\ \ldots\ \&\ (X_{ks_{-1}} = X_{k_s}) \Rightarrow$ *pentru un același cuvînt de intrare aplicabil automatului* $\mathfrak{A}$ (*în sensul lui* [11]), *plecînd de la o aceeași stare inițială se obțin cuvinte de ieșire* $Z_{\mathfrak{A}}$ *și* $Z_{\mathfrak{B}}$ *astfel ca* $Z_{\mathfrak{A}} \geqslant Z_{\mathfrak{B}}$.

Cu alte cuvinte, problema reducerii automatului $\mathfrak{B}$ este încheiată și automatul redus pe care îl obținem plecînd de la partiția Δ verifică programul de funcționare (relativ la intrări-ieșiri) pentru automatul $\mathfrak{A}$.

Demonstrație. Se construiește în mai multe etape funcția de tranziție a automatului $\mathfrak{B}$ plecînd de la funcția de tranziție a automatului $\mathfrak{A}_T$ astfel ca partiția Δ a mulțimii stărilor interne să fie închisă.

Fie $X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_t}$ toate stările din mulțimea $\{X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_r}\}$ cu proprietatea că stările $f_{\mathfrak{A}}(K^1, X_{j_1}), f_{\mathfrak{A}}(K^1, X_{j_2}), \ldots, f_{\mathfrak{A}}(K^1, X_{j_t})$ nu aparțin la o aceeași clasă a lui Δ ca și $f_{\mathfrak{A}}(K^1, X_{i_1}) = X_{i_1}$.

Se definește un automat secvențial $\mathfrak{B}_1(K, X, W, f_{\mathfrak{B}_1}; g_{\mathfrak{B}_1})$ astfel: $g_{\mathfrak{B}_1} = g_{\mathfrak{A}_T}$; $f_{\mathfrak{B}_1}(K^n, X_i) = f_{\mathfrak{A}_T}(K^n, X_i)$ pentru $n = 2, \ldots, q$ și $i = 1, \ldots, p$; $f_{\mathfrak{B}_1}(K^1, X_i) = f_{\mathfrak{A}_T}(K^1, X_i)$ pentru $i \neq j_1, j_2, \ldots, j_t$ și $f_{\mathfrak{B}_1}(K^1, X_i) = f_{\mathfrak{A}_T}(K^1, X_{i_1}) = X_{i_1}$ pentru $i = j_1, j_2, \ldots, j_t$.

Automatul $\mathfrak{B}_1$ satisface proprietățile (i) și (iii) și mulțimea $\{X_{i_1}, X_{j_1}, \ldots, X_{j_t}\}$ prin construcție este închisă relativ la comanda K^1 și la automatul $\mathfrak{B}_1$.

Într-adevăr, deoarece $X_{i_1}, X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_t}$ sînt stări interne compatibile, rezultă că și stările $f_{\mathfrak{A}_T}(K^1, X_{i_1}), f_{\mathfrak{A}_T}(K^1, X_{j_1}), \ldots, f_{\mathfrak{A}_T}(K^1, X_{j_t})$ sînt stări interne compatibile (pentru automatul $\mathfrak{A}_T$) și înlocuind pe $f_{\mathfrak{A}_T}(K^1, X_{j_1}), \ldots, f_{\mathfrak{A}_T}(K^1, X_{j_t})$ cu $f_{\mathfrak{A}_T}(K^1, X_{i_1})$, obținem pentru automatul $\mathfrak{B}_1$ aceleași perechi de stări compatibile, deoarece funcția de ieșire se conservă iar prin această înlocuire în lanțurile de implicații nu se introduc în plus și alte perechi de stări incompatibile și nici nu dispar anumite perechi de stări incompatibile.

În ceea ce privește punctul (iii), dacă pentru un același cuvînt de intrare, plecînd dintr-o aceeași stare inițială, am avea execuții diferite, atunci automatul $\mathfrak{B}_1$ trebuie să treacă neapărat prin unele din stările interne $X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_t}$. Scriind lanțurile de implicații ce caracterizează această evoluție a automatului $\mathfrak{B}_1$ care duce la execuții diferite față de $\mathfrak{A}_T$, obținem că o submulțime de stări din mulțimea $\{X_{i_1}, X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots$ $\ldots, X_{j_t}\}$ este formată de stări diferite două cîte două, ceea ce contrazice ipoteza de la punctul (iii).

Se continuă aplicarea acestui procedeu pentru celelalte clase ale partiției Δ care nu sînt închise relativ la comanda K^1 și la automatul $\mathfrak{B}_1$, apoi se consideră pe rînd clasele partiției Δ care nu sînt închise relativ la comanda $K^2, K^3, \ldots, K^q$ respectiv.

În final obținem un automat finit $\mathfrak{B}(K, X_T, W, f_{\mathfrak{B}}, g_{\mathfrak{A}_T})$ care verifică proprietățile (i), (ii) și (iii), c.c.t.d.

Teorema 2 rămîne valabilă cînd mulțimile partiției Δ care nu sînt închise conțin cel puțin cîte o stare cu ieșirile și stările interne specificate pentru orice secvență de intrare care verifică condiția tehnică de bună funcționare a butoanelor și releelor. Un caz particular important de astfel de automat este automatul pentru care $f(K^i, X_j)$ este definită dacă și numai dacă $g(K^i, X_j)$ este definită pentru orice $(K^i, X_j) \in K \times X$, singurele poziții nedefinite fiind cele inaccesibile datorită condiției tehnice de bună funcționare impusă secvenței de intrare.

Un alt caz particular de minimizare a unui automat secvențial parțial definit (pentru care stările interne sub o comandă dată sînt sau stabile sau devin stări stabile după o singură tranziție a automatului iar funcția f este definită pentru o pereche (K^i, X_j) dacă și numai dacă funcția g este definită pentru acea pereche) este prezentat în [5].

Acest caz de minimizare se poate de asemenea trata prin metoda propusă în acest articol și numărul minim de stări va coincide cu numărul cromatic al grafului perechilor de stări incompatibile.

Vom considera un exemplu de aplicare a teoremei 2 în cazul automatului secvențial definit în figura 2 care are numai funcția de ieșire

X \ K	K^1	K^2	K^3	K^4
X_1	$X_1, 0$	$X_1, 0$	$X_1, 1$	$X_1, 0$
X_2	$X_2, -$	$X_3, -$	$X_4, -$	$X_2, -$
X_3	$X_3, 0$	$X_2, -$	$X_4, -$	$X_3, -$
X_4	$X_2, 0$	$X_1, -$	$X_4, -$	$X_3, -$
X_5	$X_5, 0$	$X_5, 1$	$X_5, 1$	$X_5, 1$
X_6	$X_3, -$	$X_4, 1$	$X_6, 1$	$X_2, 1$
X_7	$X_2, -$	$X_1, 0$	$X_4, 1$	$X_7, -$

Fig. 2

parțial definită. Pentru acest automat obținem următoarele perechi de stări compatibile : (X_1, X_2), (X_1, X_3), (X_1, X_4), (X_1, X_7), (X_2, X_3), (X_2, X_4), (X_2, X_5), (X_2, X_6), (X_2, X_7), (X_3, X_4), (X_3, X_5), (X_3, X_6), (X_3, X_7), (X_4, X_5), (X_4, X_6), (X_4, X_7), (X_5, X_6).

Pentru acest automat putem determina o partiție a mulțimii stărilor interne cu un număr minim de clase formate din stări compatibile, de exemplu $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_7)$; (X_5, X_6).

Această partiție nu este închisă deoarece nu sînt verificate următoarele implicații : $(X_5 = X_6) \overset{K^1}{\Rightarrow} (X_3 = X_5)$; $(X_5 = X_6) \overset{K^2}{\Rightarrow} (X_4 = X_5)$; $(X_5 = X_6) \overset{K^4}{\Rightarrow} (X_2 = X_5)$.

Pentru ca această partiție să fie închisă, construim un alt automat (figura 3) al cărui automat redus este descris în figura 4, ținînd seama că stările stabile sînt X_1 și X_5. Acest automat redus are două stări interne și anume : $A \equiv (X_1, X_2, X_3, X_4, X_7)$; $B \equiv (X_5, X_6)$.

	K^1	K^2	K^3	K^4
X_1	$X_1, 0$	$X_1, 0$	$X_1, 1$	$X_1, 0$
X_2	$X_2, -$	$X_3, -$	$X_4, -$	$X_2, -$
X_3	$X_3, 0$	$X_2, -$	$X_4, -$	$X_5, -$
X_4	$X_2, 0$	$X_4, -$	$X_4, -$	$X_3, -$
X_5	$X_5, 0$	$X_5, 1$	$X_5, 1$	$X_5, 1$
X_6	$X_5, -$	$X_5, 1$	$X_6, 1$	$X_5, 1$
X_7	$X_2, -$	$X_1, 0$	$X_4, 1$	$X_7, -$

Fig. 3

	K^1	K^2	K^3	K^4
A	$A, 0$	$A, 0$	$A, 1$	$A, 0$
B	$B, 0$	$B, 1$	$B, 1$	$B, 1$

Fig. 4

Să considerăm cuvîntul de intrare $(K^1, K^1, K^2, K^3, K^4, K^4, K^3, K^3, K^2, K^1, K^1, K^1, K^2, K^1, K^3, K^1, K^4, K^4, K^2, K^2, K^2, K^1, K^3, K^3, K^4\ K^2, K^1, K^3, K^4, K^1, K^3, K^1)$ care se aplică automatului inițial din figura 1 începînd din starea X_7 și automatului redus începînd din starea A.

Se obțin respectiv cuvintele de ieșire : $Z_1 = (-, -, -, -, -, -, -, -, -, 0, -, -, -, 0, -, 0, -, -, -, -, -, 0, -, -, -, -, -, -, -, 0, -, 0)$ și $Z_2 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0)$ și se verifică relația $Z_1 \geqslant Z_2$, adică toate ieșirile specificate ale automatului inițial coincid cu ieșirile automatului redus cu două stări interne din figura 4.

Primită la redacție la 3 ianuarie 1968

Universitatea din București
Facultatea de matematică și mecanică
Str. Academiei nr. 14
București 22

SUR LE PROBLÈME DE LA SYNTHÈSE DES AUTOMATES SÉQUENTIELS DE TYPE MEALY

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail est présenté un algorithme matriciel pour la détermination de toutes les paires d'états internes incompatibles, et en partant d'une partition avec un nombre minimal de classes d'états compatibles de l'ensemble des états internes, on définit un automate fini pour lequel la partition considérée est fermée et dont l'automate réduit satisfait au programme de fonctionnement pour l'automate donné.

Cette construction est possible au cas où chaque ensemble de la partition qui n'est pas fermé contient au moins un état avec les sorties et les états internes spécifiées pour toute séquence d'entrée qui vérifie la condition technique de bon fonctionnement.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Bednarek, O. Taulbee, *On maximal chains.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **11**, *1* (1966).
2. C. Berge, *Théorie de graphes et ses applications.* Dunod, Paris, 1963.
3. A. Bouchet, *Méthode algébrique pour la réduction des automates incomplets,* C. R. Acad. Sci., Paris, **264**, 721–724.
4. J. Chinal, *Techniques booléennes et calculateurs arithmétiques.* Dunod, Paris, 1967.
5. E. J. McCluskey, Jr., *Minimum-State Sequential Circuits for a Restricted class of Incompletely Specified Flow Tables.* The Bell System Technical Journal **XLI**, *6*, 1759–1768 (1962).
6. P. Constantinescu, *The classification of a set of elements with respect to a set of properties.* The Computer Journal, **8**, *4*, January 1966.
7. В. М. Глушков, *Абстрактная теория автоматов.* Успехи мат. наук 16, 5, 1961.
8. A. Grasselli, *Minimal closed partitions for incompletely specified flow tables,* IEEE Trans. Electron. Comput., **15**, *2* (1966).
9. D. A. Huffman, *The synthesis of sequential switching circuits,* J. Franklin Inst., **257**, *3* și *4* (1954).
10. L. Livovschi, *Minimizarea automatelor asincrone.* St. cerc. mat., **17**, *8* (1965).
11. R. E. Miller, *Switching theory, II,* J. Wiley, New York-London-Syndney, 1966.
12. Gr. C. Moisil, *Teoria algebrică a schemelor cu contacte și relee.* Edit. tehnică, București, 1965.
13. Gr. C. Moisil, *Théorie structurelle des automates finis.* Gauthier-Villars, Paris, 1967.
14. I. Tomescu, *Asupra unor probleme combinatorii care intervin în teoria clasificării,* St. cerc. mat., **19**, *9* (1967).
15. I. Tomescu, *Sur un problème de partition avec un nombre minimal de classes.* C. R. Acad. Sci., Paris, **265**, *21*, 645–648 (20 nov. 1967).
16. S. Unger, M. Paull, *Minimizing the Number of States in Incompletely Specified Sequential Switching Functions.* IRE Transactions on Electronic Computers, EC-8, 3, Sept. 1959.
17. J. Weissman, *Boolean algebra, map coloring and interconnections,* Am. Math. Monthly, **69**, 608–613 (1962).

ASUPRA PROBLEMEI EXPANSIUNII OPTIMALE A UNEI ÎNTREPRINDERI

DE

CORNELIU ZIDĂROIU

În lucrare se consideră problema măririi capacității unei întreprinderi în sensul maximizării beneficiului obținut.

Se formulează varianta discretă a problemei și se indică posibilitatea rezolvării numerice cu ajutorul programării dinamice.

În continuare se obține o relație de recurență pentru calculul beneficiilor maxime și cîteva caracteristici ale dependenței acestora de capacitatea inițială, care este considerată peste tot ca un parametru. Se obține de asemenea strategia optimală sub forma unui șir de funcții de capacitatea inițială, ceea ce permite rezolvarea problemei propuse pentru orice capacitate inițială și orice număr de etape.

1. În [2] s-a formulat problema expansiunii optimale a unei întreprinderi în varianta continuă, făcîndu-se o serie de presupuneri relativ la proprietățile funcțiilor care intervin în model. Ni se pare mai legitimă o formulare discretă, formulare ce nu impune restricții artificiale în legătură cu proprietățile funcțiilor ce apar, cu atît mai mult cu cît problema se poate aborda în acest caz prin metoda programării dinamice, fapt care permite și o rezolvare numerică.

Să trecem acum la formularea variantei discrete a problemei. Fie $1, 2, \ldots, N$ perioadele luate în considerare pentru extinderea capacității unei întreprinderi. În fiecare perioadă $i (i = 1, 2, \ldots, N)$, cererile din produsul fabricat sînt ξ_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, cunoscute. Capacitățile de producție sînt y_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, necunoscute (capacitatea inițială $y_0 = c$ se consideră cunoscută).

Vom presupune că creșterea capacității de la o perioadă la următoarea perioadă nu poate fi mai mare decît o creștere maximă β și nu poate fi nici negativă :

$$0 \leqslant y_i - y_{i-1} \leqslant \beta, \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{1}$$

Beneficiul obținut în perioada i $(1 \leqslant i \leqslant N)$ va fi

$$\alpha_i \left[\min\left(\xi_i, y_i\right) - \gamma\left(y_i - y_{i-1}\right)\right],$$

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 5, P. 771–786, BUCUREȘTI. 1968

unde γ este costul marginal al creșterii capacității cu o unitate, iar α_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, sînt factori de actualizare a venitului (de obicei se ia $\alpha_i = e^{-ri}$, $1 \leqslant i \leqslant N$, unde $r > 0$ este o constantă dată; avem deci $0 < \alpha_N < \alpha_{N-1} < \ldots . < \alpha_1 < 1$).

Beneficiul total va fi

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left[\min(\xi_i, y_i) - \gamma(y_i - y_{i-1})\right]$$

iar problema pe care o avem de rezolvat este:

$$\max \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left[\min(\xi_i, y_i) - \gamma(y_i - y_{i-1})\right] \tag{2}$$

în condițiile

$$0 \leqslant y_i - y_{i-1} \leqslant \beta, \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \text{ unde } y_0 = c. \tag{3}$$

Pentru a aborda problema prin metodele programării dinamice, considerăm familia de probleme

$$\max \sum_{i=R}^{N} \alpha_i \left[\min(\xi_i, y_i) - \gamma(y_i - y_{i-1})\right] \tag{4}$$

în condițiile

$$0 \leqslant y_i - y_{i-1} \leqslant \beta, \qquad i = R, R+1, \ldots, N, \text{ unde } y_{R-1} = c, \tag{5}$$

pentru fiecare $R = 1, 2, \ldots, N$. Evident, pentru $R = 1$ problema (4), (5) coincide cu problema (2), (3).

Vom nota

$$f_R(c) = \max \sum_{i=R}^{N} \alpha_i \left[\min(\xi_i, y_i) - \gamma(y_i - y_{i-1})\right], \tag{6}$$

unde maximul se ia pe domeniul determinat de restricțiile (5).

Relația de recurență pentru funcțiile $f_R(c)$, $1 \leqslant R \leqslant N$, definite în (6) se obține imediat pe baza principiului de optimalitate al lui R. Bellman [3], [4]:

$$f_R(c) = \max_{0 \leqslant y_R - c \leqslant \beta} \{\alpha_R [\min(\xi_R, y_R), - \gamma(y_R - c)] + f_{R+1}(y_R)\}, \qquad 1 \leqslant R \leqslant N-1, \tag{7}$$

unde $f_N(c)$ este

$$f_N(c) = \alpha_N \max_{0 \leqslant y_N - c \leqslant \beta} [\min(\xi_N, y_N) - \gamma(y_N - c)] \tag{8}$$

deoarece $\alpha_N > 0$.

Pentru a obține o soluție numerică, relațiile (7), (8) sînt suficiente.

2. Vom obține în cele ce urmează o soluție analitică. Pentru aceasta dăm mai întîi cîteva leme.

LEMA. 1. *Oricare ar fi* γ *avem*

$$(9)\qquad \varphi(c) = \max_{c \leqslant x \leqslant c+\beta} [\min(\xi, x) - \gamma x] =$$

$$= \begin{cases} \max([1-\gamma)\, c, (1-\gamma)(c+\beta)] & \text{pentru } c \in [0, \delta] \\ \max[(1-\gamma)\, c, (1-\gamma)\xi, \xi - \gamma(c+\beta)] & \text{pentru } c \in [\delta, \xi] \\ \max[\xi - \gamma c, \xi - \gamma(c+\beta)] & \text{pentru } c \in [\xi, \infty), \end{cases}$$

unde ξ, β *sînt constante pozitive date iar* $\delta = \max(\xi - \beta, 0)$.

Demonstrație. Nu vom expune în detaliu demonstrația, calculele fiind destul de simple. Vom indica, ca exemplu, demonstrația unuia din multele cazuri posibile, și anume : $\gamma \geqslant 1$, $0 < \xi \leqslant \beta$.

Pentru $c \in [0, \xi]$ avem $c \leqslant \xi \leqslant c + \beta$ și deci

$$\max_{c \leqslant x \leqslant c+\beta} [\min(\xi, x) - \gamma x] =$$

$$= \max\{\max_{c \leqslant x \leqslant \xi} [\min(\xi, x) - \gamma x], \max_{\xi \leqslant x \leqslant c+\beta} [\min[\xi, x) - \gamma x]\}$$

și prin urmare

$$(10)\qquad \varphi(c) = \max[(1-\gamma)\, c, \xi(1-\gamma)] = c(1-\gamma) \geqslant \xi - \gamma(c+\beta).$$

În mod asemănător, pentru $c \in [\xi, \infty)$ avem $\xi \leqslant c$ și deci

$$(11)\qquad \varphi(c) = \max_{c \leqslant x \leqslant c+\beta} (\xi - \gamma x) = \xi - \gamma c \geqslant \xi - \gamma(c+\beta).$$

Din (10), (11) se obține imediat (9) în cazul considerat. În mod cu totul analog se studiază și celelalte cazuri posibile.

COROLAR. *Din lema de mai sus și din* (*8*) *rezultă că, oricare ar fi* $\gamma > 0$ *avem*

$$(12)\qquad f_N(c) = \begin{cases} \alpha_N \max[(1-\gamma)\, c + (1-\gamma)(c+\beta)] + \\ \qquad\qquad + \alpha_N \gamma c & \text{pentru } c \in [0, \delta_N] \\ \alpha_N \max[(1-\gamma)\, c, (1-\gamma)\, \xi_N] + \\ \qquad\qquad + \alpha_N \gamma c & \text{pentru } c \in [\delta_N, \xi_N] \\ \alpha_N \xi_N & \text{pentru } c \in [\xi_N, \infty), \end{cases}$$

unde $\delta_N = \max(\xi_N - \beta, 0)$, *iar politica optimală corespunzătoare este*

$$(13)\qquad y_N(c) = \begin{cases} c + \beta & \text{pentru } c \in [0, \delta_N] \\ \xi_N & \text{pentru } c \in [\delta_N, \xi_N] \\ c & \text{pentru } c \in [\xi_N, \infty) \end{cases}$$

cînd $0 < \gamma \leqslant 1$ *și*

$$(14)\qquad y_N(c) = c, \quad c \in [0, \infty)$$

cînd $r \geqslant 1$.

Rezultatul obținut aici sugerează faptul că funcțiile $f_R(c)$, $1 \leqslant R \leqslant N$, fac parte din clasa funcțiilor poligonale; vom demonstra în ultima secțiune a lucrării că afirmația este adevărată.

Dăm însă mai întîi cîteva rezultate utile relativ la funcțiile poligonale.

LEMA 2. *Orice funcție poligonală*

$$f(x) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} (a_i x + b_i), \quad x \in [0, \infty)$$

poate fi adusă la forma

$$f(x) = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} (a_i' x + b_i'),$$

unde $a_1' > a_2' > \ldots > a_m'$ *și* $b_1' < b_2' < \ldots < b_m'$.

Demonstrație. Putem presupune de la început $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$, schimbînd eventual ordinea.

Fie $b_{i_1} = \min\limits_{i_1 \leqslant i \leqslant n} b_i$. Atunci avem:

$$a_{i_1} x + b_{i_1} \leqslant a_i x + b_i, \ 1 \leqslant i \leqslant i_1, \ x \in [0, \infty).$$

Prin urmare

$$f(x) = \min_{i_1 \leqslant i \leqslant n} (a_i x + b_i).$$

Dacă notăm $a_{i_1} = a_1''$ și $b_{i_1} = b_1''$ avem deci

$$f(x) = \min_{i_1 + 1 \leqslant i \leqslant n} (a_1'' x + b_1'', \ a_i x + b_i).$$

Notăm din nou $b_{i_2} = \min\limits_{i_1 < i \leqslant n} b_i$ și avem, ca mai sus,

$$a_{i_2} x + b_{i_2} \leqslant a_i x + b_i, \ i_1 + 1 \leqslant i \leqslant i_2, \quad x \in [0, \infty)$$

și deci

$$f(x) = \min_{i_2 \leqslant i \leqslant n} (a_1'' x + b_1'', \ a_i x + b_i).$$

Notînd din nou $a_{i_2} = a_2''$ și $b_{i_2} = b_2''$ obținem

$$f(x) = \min_{i_2 \leqslant i \leqslant n} (a_1'' x + b_1'', \ a_2'' x + b_2'', \ a_i x + b_i).$$

Continuînd procedeul avem în $p \leqslant n$ pași;

$$f(x) = \min_{1 \leqslant i \leqslant p} (a_i'' x + b_i''). \tag{15}$$

Numerele a_i'', b_i'', $1 \leqslant i \leqslant p$, astfel determinate verifică relațiile

$$a_1'' \geqslant a_2'' \geqslant \ldots \geqslant a_p'' \text{ și } b_1'' \leqslant b_2'' \leqslant \ldots \leqslant b_p''.$$

Rezultatul poate fi încă îmbunătățit.

Dacă $a_1'' = a_2''$, atunci

$$a_1'' x + b_1'' \leqslant a_2'' x + b_2''$$

pentru orice $x \in [0, \infty)$ şi deci se poate renunţa la expresia $a_2'' x + b_2''$ în (15). Continuînd procedeul de eliminare vom obţine numerele

$$a_1''' > a_2''' > \ldots > a_s''' \text{ şi } b_1''' \leqslant b_2''' \leqslant \ldots \leqslant b_s''', \; s \leqslant p.$$

În sfîrşit, dacă, de exemplu, $b_1''' = b_2'''$, atunci

$$a_1''' x + b_1''' \geqslant a_2''' x + b_2'''$$

pentru orice $x \in [0, \infty)$ şi se poate renunţa la expresia $a_1''' x + b_1'''$ în (15). În final obţinem numerele a_i', b_i', $1 \leqslant i \leqslant m \leqslant s$, cu proprietăţile cerute.

În continuare vom presupune peste tot că funcţiile poligonale considerate sînt aduse la această formă.

Lema 3. *Condiţia necesară şi suficientă ca funcţia poligonală* $f(x) = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (a_i x + b_i)$, $x \in [0, \infty)$ *să fie crescătoare este ca* $a_i \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Demonstraţie. Fie $x_1 < x_2$. Avem

$$f(x_1) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} (a_i x_1 + b_i) = a_{i_1} x_1 + b_{i_1}.$$

$$f(x_2) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} (a_i x_2 + b_i) = a_{i_2} x_2 + b_{i_2}.$$

Evident,

$$f(x_1) \leqslant a_{i_2} x_1 + b_{i_2}$$

$$f(x_2) \leqslant a_{i_1} x_2 + b_{i_1}.$$

Vom avea deci

$$f(x_2) - f(x_1) \geqslant a_{i_2} x_2 + b_{i_2} - a_{i_2} x_1 - b_{i_2} = a_{i_2} (x_2 - x_1) \geqslant 0.$$

Necesitatea. Fie $x_1 \in [0, \infty)$ cu proprietatea [1])

$$f(x_1) = a_n x_1 + b_n$$

şi $x_2 > x_1$ iar

$$f(x_2) = a_{i_2} x_2 + b_{i_2} \leqslant a_n x_2 + b_n.$$

Vom avea

$$0 \leqslant f(x_2) - f(x_1) \leqslant a_n x_2 + b_n - a_n x_1 - b_n = a_n (x_2 - x_1)$$

de unde $a_n \geqslant 0$. Cum $a_i \geqslant a_n$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$, rezultă că

$$a_i \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Lema 4. *Fiind dată funcţia poligonală*

$$f(x) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} (a_i x + b_i), \quad x \in [0, \infty)$$

---

[1]) Dacă nu există nici un $x \in [0, \infty)$ cu proprietatea că minimul se atinge în ultima expresie, atunci

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} (a_i x + b_i) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n-1} (a_i x + b_i)$$

şi se pune din nou problema pentru expresia astfel obţinută.

există o mulțime de indici $A = \{1, i_1, i_2, \ldots, i_m\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ *și numerele*

$$0 < \rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_{m-1} < \rho_m < \infty, \quad m \leqslant n,$$

astfel încît

$$f(x) = \begin{cases} a_1 \, x + b_1 & \textit{pentru } x \in [0, \rho_1] \\ a_{i_1} \, x + b_{i_1} & \textit{pentru } x \in [\rho_1, \rho_2] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{i_m} \, x + b_{i_m} & \textit{pentru } x \in [\rho_m, \infty]. \end{cases}$$

Demonstrație. Conform lemei 1 putem presupune de la început că $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$, $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$.

Fie

$$\rho_{1i} = \frac{b_i - b_1}{a_1 - a_i} > 0, \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Notăm $\min\limits_{2 \leqslant i \leqslant n} \rho_{1i} = \rho_1$. În cazul că minimul se realizează pentru mai mulți i, notăm prin i_1 pe cel mai mare:

$$i_1 = \max_{i \mid \rho_{1i} = \rho_1} \{i\}.$$

Dacă $x \in [0, \rho_1]$ avem

$$x \leqslant \frac{b_i - b_1}{a_1 - a_i}, \quad i = 2, 3, \ldots, n \Rightarrow a_1 \, x + b_1 \leqslant a_i \, x + b_i, \; 2 \leqslant i \leqslant n$$

și prin urmare $f(x) = a_1 \, x + b_1$ pentru $x \in [0, \rho_1]$.

Pentru orice $1 \leqslant i \leqslant i_1$ avem

$$\frac{b_{i_1} - b_1}{a_1 - a_{i_1}} \geqslant \frac{b_{i_1} - b_i}{a_i - a_{i_1}}.$$

Într-adevăr, oricare ar fi i $(2 \leqslant i \leqslant n)$ avem

$$\frac{b_{i_1} - b_1}{a_1 - a_{i_1}} \leqslant \frac{b_i - b_1}{a_1 - a_i}$$

și deci

$$b_{i_1} a_1 - b_{i_1} a_i - a_1 b_1 + a_i b_1 \leqslant a_1 b_i - a_1 b_1 - a_{i_1} b_i + a_{i_1} b_1.$$

Suprimînd în ambii membri ai inegalității termenii $- a_1 \, b_1$ și înlocuindu-i cu $a_{i_1} \, b_{i_1}$ avem, grupînd convenabil,

$$(a_i - a_{i_1})(b_1 - b_{i_1}) \leqslant (a_{i_1} - a_1)(b_{i_1} - b_i).$$

Deoarece pentru $1 \leqslant i \leqslant i_1$ avem $a_1 > a_i > a_{i_1}$ și $b_1 < b_i < b_{i_1}$, relația precedentă devine

$$\frac{b_{i_1} - b_1}{a_1 - a_{i_1}} \geqslant \frac{b_{i_1} - b_i}{a_i - a_{i_1}}, \quad 1 \leqslant i \leqslant i_1.$$

Să observăm că pentru $x \in [\rho_1, \infty)$ avem

$$x \geqslant \frac{b_{i_1} - b_1}{a_1 - a_{i_1}} \geqslant \frac{b_{i_1} - b_i}{a_i - a_{i_1}}, \quad 1 \leqslant i \leqslant i_1$$

şi deci

$$a_{i_1} x + b_{i_1} \leqslant a_i x + b_i, \quad x \in [\rho_1, \infty), \quad 1 \leqslant i \leqslant i_1$$

ceea ce arată că pentru $x \in [\rho_1, \infty)$ avem

$$f(x) = \min_{i_1 \leqslant i \leqslant n} (a_i x + b_i).$$

Continuînd în mod analog obţinem numere $i_2, i_3, \ldots, i_m$ şi ρ_2 $\rho_3, \ldots \rho_m$, $m \leqslant n$ cu proprietăţile din enunţ.

LEMA 5. *Funcţia continuă*

$$f(x) = \begin{cases} a_1 x + b_1, & x \in [0, \rho_1] \\ a_2 x + b_2, & x \in [\rho_1, \rho_2] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_n x + b_n, & x \in [\rho_{n-1}, \infty), \end{cases}$$

unde $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$ *şi* $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$, *se poate scrie sub forma*

$$f(x) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} (a_i x + b_i).$$

Demonstraţie. Din condiţia de continuitate avem

$$a_i \rho_i + b_i = a_{i+1} \rho_i + b_{i+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n - 1,$$

de unde

$$\rho_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{a_i - a_{i+1}}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n - 1,$$

Deoarece $0 < \rho_i < \rho_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant n - 2$, vom avea pentru $x \in [\rho_i, \rho_{i+1}]$:

$$x \leqslant \rho_{i+1} = \frac{b_{i+2} - b_{i+1}}{a_{i+1} + a_{i+2}} < \frac{b_{i+3} - b_{i+2}}{a_{i+2} - a_{i+3}} < \ldots < \frac{b_n - b_{n-1}}{a_{n-1} - a_n} \tag{16}$$

şi

$$x \geqslant \rho_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{a_i - a_{i+1}} > \frac{b_i - b_{i-1}}{a_{i-1} - a_i} > \ldots > \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}. \tag{17}$$

Din (16) şi (17) avem deci, pentru $x \in [\rho_i, \rho_{i+1}]$:

$$a_{i+1} x + b_{i+1} \leqslant a_k x + b_k, \quad i + 2 \leqslant k \leqslant n \tag{18}$$

$$a_{i+1} x + b_{i+1} \leqslant a_k x + b_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant i. \tag{19}$$

Prin urmare, din (18) şi (19) rezultă

$$\min_{1\leqslant k\leqslant n}(a_k x + b_k) = a_{i+1} x + b_{i+1} \quad , \quad x \in [\rho_i , \rho_{i+1}]$$

şi deci rezultatul dorit.

3. Vom obţine în această secţiune o relaţie de recurenţă care permite calculul simplu al funcţiilor $f_R(c)$, $1 \leqslant R \leqslant N$.

Vom considera că funcţiile $f_R(c)$, $1 \leqslant R \leqslant N$, sînt poligonale (a se vedea corolarul teoremei 2) :

$$f_R(c) = \min_{1\leqslant i\leqslant n_R}(a_i^R c + b_i^R) \quad , \quad 1 \leqslant R \leqslant N \tag{20}$$

unde presupunem de la început, pe baza lemei 1, că

$$a_1^R > a_2^R > \ldots > a_{n_R}^R \quad , \quad 1 \leqslant R \leqslant N$$

$$b_1^R < b_2^R < \ldots < b_{n_R}^R \quad , \quad 1 \leqslant R \leqslant N.$$

Avem mai întîi

TEOREMA 1. *Funcţiile $f_R(c)$, $1 \leqslant R \leqslant N$, sînt crescătoare.*

Demonstraţie. Din corolarul lemei 1 afirmaţia este evidentă pentru $R = N$.

Presupunem că $f_{R+1}(c)$ este crescătoare şi arătăm că $f_R(c)$ are aceeaşi proprietate.

Fie $c_1 < c_2$. Atunci avem

$$f_{R+1}(y_R) \leqslant f_{R+1}(y_R + c_2 - c_1) \tag{21}$$

Observăm imediat că dacă $\xi_R \leqslant y_R$, atunci

$$\min(\xi_R , y_R) = \xi_R = \min(\xi_R , y_R + c_2 - c_1) \tag{22}$$

iar dacă $\xi_R \geqslant y_R$, atunci

$$\min(\xi_R , y_R) = y_R \leqslant \min(\xi_R , y_R + c_2 - c_1). \tag{23}$$

Din (21), (22), (23) avem

$$\begin{aligned}\min(\xi_R , y_R) - \gamma y_R + \frac{1}{\alpha_R} f_{R+1}(y_R) \leqslant \min(\xi_R , y_R + \\ + c_2 - c_1) - \gamma y_R + \frac{1}{\alpha_R} f_{R+1}(y_R + c_2 - c_1)\end{aligned} \tag{24}$$

şi deci

$$\begin{aligned}f_R(c_1) \leqslant \alpha_R \max_{c_1\leqslant y_R\leqslant c_1+\beta}\Big[\min(\xi_R , y_R + c_2 - c_1) - \gamma y_R + \\ + \frac{1}{\alpha_R} f_{R+1}(y_R + c_2 - c_1)\Big] + \alpha_R \gamma c_1\end{aligned}$$

sau

$$
\begin{aligned}
(25)\qquad f_R(c_1) \leqslant \alpha_R \max_{c_2 \leqslant z_R \leqslant c_2+\beta} \Big[& \min(\xi_R, z_R) - \gamma(z_R - c_2 + c_1) + \\
& + \frac{1}{\alpha_R} f_{R+1}(z_R) \Big] + \alpha_R \gamma c_1 = f_R(c_2)
\end{aligned}
$$

unde am notat $z_R = y_R + c_2 - c_1$.

Relația (25) arată că $f_R(c)$ este crescătoare.

Asociind presupunerea [2] (20) cu rezultatul teoremei precedente și cu lema 3, rezultă că putem presupune

$$(26)\qquad a_i^R \geqslant 0 \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant n_R \quad , \quad 1 \leqslant R \leqslant N.$$

Putem enunța acum

TEOREMA. 2. *Relația de recurență pentru funcțiile* $f_R(c)$, $1 \leqslant R \leqslant N$, *definite de* (*6*) *este*

$$
\begin{aligned}
f_R(c) = \alpha_R \gamma c + \alpha_R \min_{1 \leqslant i \leqslant n_{R+1}} \Big\{ & \max\Big[\Big(1 - \gamma + \\
& + \frac{a_i^{R+1}}{\alpha_R}\Big) c, \Big(1 - \gamma + \frac{a_i^{R+1}}{\alpha_R}\Big)(c+\beta)\Big] + \frac{b^{R+1}}{\alpha_R}; \\
(27)\qquad & \max\Big[\Big(1 - \gamma + \frac{a_i^{R+1}}{\alpha_R}\Big) c, \Big(1 - \gamma + \frac{a_i^{R+1}}{\alpha_R}\Big) \xi_R, \xi_R - \\
& - \Big(\gamma - \frac{a_i^{R+1}}{\alpha_R}\Big)(c+\beta)\Big] + \frac{b_i^{R+1}}{\alpha_R}; \\
& \max\Big[\xi_R - \Big(\gamma - \frac{a_i^{R+1}}{\alpha_R}\Big) c, \xi_R - \Big(\gamma - \frac{a^{R+1}}{\alpha_R}\Big)(c+\beta)\Big] + \\
& + \frac{b_i^{R+1}}{\alpha_R}\Big\}, \quad 1 \leqslant R \leqslant N-1,
\end{aligned}
$$

unde a_i^{R+1}, b_i^{R+1}, $1 \leqslant i \leqslant n_{R+1}$, *au semnificația din* (*20*) .

Demonstrație. Avem

$$
\begin{aligned}
f_R(c) &= \alpha_R \gamma c + \alpha_R \max_{c \leqslant y_R \leqslant c+\beta} \Big[\min(\xi_R, y_R) - \gamma y_R + \frac{1}{\alpha_R} f_{R+1}(y_R)\Big] = \\
&= \alpha_R \gamma c + \alpha_R \max_{c \leqslant y_R \leqslant c+\beta} \Big[\min(\xi_R, y_R) - \gamma y_R + \frac{1}{\alpha_R} \min_{1 \leqslant i \leqslant n_{R+1}} (a_i^{R+1} y_R + b_i^{R+1})\Big]
\end{aligned}
$$

conform cu (20).

---

[2] Vom demonstra mai departe că este adevărată.

Avem apoi

$$f_R(c) = \alpha_R \gamma c + \alpha_R \max_{c \leqslant y_R \leqslant c+\beta} \min_{1 \leqslant i \leqslant n_{R+1}} \Big[\min(\xi_R, y_R) - \gamma y_R + + \frac{a_i^{R+1}}{\alpha_R} y_R + \frac{b_i^{R+1}}{\alpha_R} \Big]. \tag{28}$$

Expresia a doua din membrul drept al relației (28) sugerează un joc; în condițiile de față există o soluție a acestui joc [3]).

Prin urmare avem

$$f_R(c) = \alpha_R \gamma c + \alpha_R \min_{1 \leqslant i \leqslant n_{R+1}} \max_{c \leqslant y_R \leqslant c+\beta} \Big[\min(\xi_R, y_R) - - \Big(\gamma - \frac{a_i^{R+1}}{\alpha_R}\Big) y_R + \frac{b_i^{R+1}}{\alpha_R} \Big]. \tag{29}$$

Folosind acum lemele 1 și 5 obținem din (29) afirmația (27).

Corolar. *Funcțiile* f_R (c), $1 \leqslant R \leqslant N$, *sînt poligonale.*

Demonstrație. Pentru $R = N$ afirmația este evidentă (lema 5) din corolarul lemei 1.

Presupunem că $f_{R+1}(c)$, $c \in [0, \infty)$ este poligonală, adică are forma (20). Conform teoremei 2, $f_R(c)$ are atunci forma (27), adică este o funcție poligonală.

4. Rezultatele obținute permit formularea următorului algoritm:

Pasul inițial. Se calculează $f_N(c)$ și $y_N(c)$ conform lemei.

Se determină a_i^N, b_i^N, $1 \leqslant i \leqslant n_N$ și $A^N = \{1, 2, \ldots, n_N\}$

Pasul 1. Se consideră determinată funcția

$$f_{R+1}(c) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n_{R+1}} (a_i^{R+1} c + b_i^{R+1})$$

conform lemei 4.

Se calculează atunci mulțimile

$$B_1^R = \left\{ i \,\middle|\, 0 < \gamma - \frac{a_i^{R+1}}{\alpha_R} < 1 \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant n_{R+1} \right\}$$

$$B_2^R = \left\{ i + n_{R+1} \,\middle|\, \gamma - \frac{a_i^{R+1}}{\alpha_R} \geqslant 1 \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant n_{R+1} \right\}$$

$$B_3^R = \left\{ i + 2n_{R+1} \,\middle|\, \gamma - \frac{a_i^{R+1}}{\alpha} \leqslant 0 \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant n_{R+1} \right\}.$$

Pasul 2. Se calculează $f_R(c)$ conform teoremei 2.

---

[3]) Se poate vedea, de exemplu, [5].

Pasul 3. Se calculează mulțimea A^R[4]) și numerele $0 < \rho_1 < \rho_2 < \, < \ldots . < \rho_{m-1} < \infty$ pentru funcția $f_R(c)$ conform lemei 4. Se notează $\rho_{k_1} = \delta_R = \max\ (\xi_R - \beta,\ 0)$ și $\rho_{k_2} = \xi_R$, introducîndu-se $\rho_{k_1} > 0$, ρ_{k_2} (eventual) printre numerele ρ_i, $1 \leqslant i \leqslant m-1$.

Pasul 4. Se determină mulțimile

$$C_l^R = A^R \cap B_l^R, \qquad\qquad l = 1, 2, 3.$$

și apoi

$$y_R(c) = \begin{cases} c + \beta & \text{pentru} \quad c \in [\rho_k\ ,\ \rho_{k+1}]^{5)},\ i_k \in C_3^R\ ,\ 0 \leqslant k \leqslant m-1 \\ c + \beta & \text{pentru} \quad c \in [\rho_k\ ,\ \rho_{k+1}]\ ,\ i_k \in C_1^R\ ,\ 0 \leqslant k < k_1 \\ \xi_R & \text{pentru} \quad c \in [\rho_k\ ,\ \rho_{k+1}]\ ,\ i_k \in C_1^R\ ,\ k_1 \leqslant k < k_2 \\ c & \text{pentru} \quad c \in [\rho_k\ ,\ \rho_{k+1}]^{5)},\ i_k \in C_2^R\ ,\ 0 \leqslant k \leqslant m-1 \\ c & \text{pentru} \quad c \in [\rho_k\ ,\ \rho_{k+1}]^{5)},\ i_k \in C_1^R\ ,\ k_2 \leqslant k \leqslant m-1, \end{cases}$$

unde am notat $\rho_0 = 0 \ ,\ \rho_m = \infty$.

Se începe apoi o nouă iterație (pașii 1—4).

5. *Exemplu.* Presupunem că ni se dau cererile ξ_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, după cum urmează : $\xi_1 = 10$, $\xi_2 = 20$, $\xi_3 = 15$.

Costul marginal este $\gamma = 2$, iar creșterea maximă de capacitate este $\beta = 2$. Valoarea constantei $\lambda = \ln \dfrac{5}{4}$ și deci

$$\alpha_1 = \frac{4}{5}, \quad \alpha_2 = \frac{16}{25}, \quad \alpha_3 = \frac{64}{125}.$$

Pasul inițial. Calculăm mai întîi $f_3(c)$:

$$f_3(c) = \begin{cases} \dfrac{64}{125}\, c & \text{pentru } c \in [0{,}15] \\ \dfrac{64}{125} \cdot 15 & \text{pentru } c \in [15, \infty) \end{cases} = \min\left(\frac{64}{125}\, c\, ;\ \frac{64}{125} \cdot 15 \right)$$

iar politica optimală este

$$y_3(c) = c \quad ,\quad c \in [0, \infty)$$

Avem

$$n_3 = 2\ ,\ a_i^3 = \begin{cases} \dfrac{64}{125} & \text{pentru } i = 1 \\ 0 & \text{pentru } i = 2 \end{cases}, \quad b_i^3 = \begin{cases} 0 & \text{pentru } i = 1 \\ \dfrac{64}{125} \cdot 15 & \text{pentru } i = 2 \end{cases}$$

---

[4]) Mulțimea A^R se determină conform lemei 4 ca parte a mulțimii $\{1, 2, \ldots, n_{R+1}, n_{R+1} + 1, \ldots, 2n_{R+1}, 2n_{R+1} + 1, \ldots, 3\, n_{R+1}\}$, aceasta din urmă fiind obținută prin numerotarea expresiilor din (27).

[5]) Intervalul $[\rho_k, \rho_{k+1}]$, pentru $k = m - 1$, se consideră deschis la dreapta.

şi

$$A^3 = \{1,2\}.$$

Iteraţia 1

Pasul 1. Avem :

$$\gamma - \frac{a_i^3}{\alpha_2} = 2 - \frac{25}{16} a_i^3 = \begin{cases} \frac{6}{5} \text{ pentru } i = 1 \\ 2 \text{ pentru } i = 2. \end{cases}$$

Prin urmare $B_1^2 = \varnothing$, $B_2^2 = \{3, 4\}$, $B_3^2 = \varnothing$.

Pasul 2. Avem

$$1 - \gamma + \frac{a_i^3}{\alpha_2} = \begin{cases} -\frac{1}{5} \text{ pentru } i = 1 \\ -1 \text{ pentru } i = 2 \end{cases}$$

şi

$$\frac{b_i^3}{\alpha_2} = \frac{25}{16} b_i^3 = \begin{cases} 0 \text{ pentru } i = 1 \\ 12 \text{ pentru } i = 2. \end{cases}$$

Prin urmare, pentru $c \in [0, \delta_2] = [0,18]$ avem

$$\max\left[\left(1 - \gamma + \frac{a_i^3}{\alpha_2}\right) c, \left(1 - \gamma + \frac{a_i^3}{\alpha_2}\right)(c + \beta)\right] + \frac{b_i^3}{\alpha_2} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{5} c \quad \text{pentru } i = 1 \\ -c + 12 \text{ pentru } i = 2. \end{cases}$$

Pentru $c \in [\delta_2, \xi_2] = [18,20]$ avem

$$\max\left[\left(1 - \gamma + \frac{a_i^3}{\alpha_2}\right) c, \left(1 - \gamma + \frac{a_i^3}{\alpha_2}\right) \xi_2, \xi_2 - \left(\gamma - \frac{a_i^3}{\alpha_2}\right)(c + \beta)\right] + \frac{b_i^3}{\alpha_2} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{5} c \quad \text{pentru } i = 1 \\ -c + 12 \text{ pentru } i = 2. \end{cases}$$

În sfîrşit, pentru $c \in [\xi_2, \infty) = [20, \infty)$ avem

$$\max\left[\xi_2 - \left(\gamma - \frac{a_i^3}{\alpha_2}\right) c, \ \xi_2 - \left(\gamma - \frac{a_i^3}{\alpha_2}\right)(c + \beta)\right] + \frac{b_i^3}{\alpha_2} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{6}{5} c + 20 \quad \text{pentru } i = 1 \\ -2c + 32 \quad \text{pentru } i = 2. \end{cases}$$

Prin urmare

$$f_2(c) = \frac{16}{25}\cdot 2\cdot c + \frac{16}{25}\min\left(-\frac{1}{5}c,\ -c+12,\ -\frac{6}{5}c+20,\ -2c+32\right) =$$

$$= \frac{16}{25}\min\left(\frac{9}{5}c;\ c+12;\ \frac{4}{5}c+20;\ 32\right).$$

Pasul 3. Avem

$$\rho_{12} = 15\ ,\ \rho_{13} = 20\ ,\ \rho_{14} = 17$$

şi deci

$$\rho_1 = \rho_{12}.$$

Apoi

$$\rho_{23} = 40\ ,\ \rho_{24} = 20\ \text{ şi deci }\ \rho_2 = \rho_{24} = 20.$$

Prin urmare

$$f_2(c) = \frac{16}{25}\begin{cases} \frac{9}{5}c & \text{pentru } c \in [0,15] \\ c+12 & \text{pentru } c \in [15,\ 20] \\ 32 & \text{pentru } c \in [20,\ \infty) \end{cases}$$

şi deci $A^2 = \{1,2,\ 3,\ 4,\ 6\}$.

Pasul 4. Avem $C_1^2 = C_3^2 = \varnothing$ şi $C_2^2 = \{3,\ 4\}$.

Deci

$$y_2(c) = c \text{ pentru } c \in [0,\ \infty)$$

Iteraţia 2

Pasul 1. Avem

$$a_i^2 = \begin{cases} \frac{9}{5}\cdot\frac{16}{25} & \text{pentru } i = 1 \\ \frac{16}{25} & \text{pentru } i = 2\ , \\ 0 & \text{pentru } i = 3 \end{cases} \qquad b_i^2 = \begin{cases} 0 & \text{pentru } i = 1 \\ \frac{16}{25}\cdot 12 & \text{pentru } i = 2 \\ \frac{16}{25}\cdot 32 & \text{pentru } i = 3. \end{cases}$$

Prin urmare

$$\gamma - \frac{a_i^2}{\alpha_1} = 2 - \frac{5}{4}a_i^2 = \begin{cases} \frac{14}{25} & \text{pentru } i = 1 \\ \frac{6}{5} & \text{pentru } i = 2 \\ 2 & \text{pentru } i = 3. \end{cases}$$

Deci $B_1^1 = \{1\}$; $B_2^1 = \{5,\ 6\}$, $B_3^1 = \varnothing$.

Pasul 2. Avem

$$1-\gamma+\frac{a_i^2}{\alpha_1}=\begin{cases}\dfrac{11}{25} & \text{pentru } i=1\\[2ex] -\dfrac{1}{5} & \text{pentru } i=2\\[2ex] -1 & \text{pentru } i=3\end{cases}\qquad \text{iar}\ \frac{b_i^2}{\alpha_1}=\begin{cases}0 & \text{pentru } i=1\\[2ex] \dfrac{48}{25} & \text{pentru } i=2\\[2ex] \dfrac{128}{25} & \text{pentru } i=3\end{cases}$$

Prin urmare, pentru $c \in [0,\ \delta_1] = [0, 8]$ avem

$$\max\left[\left(1-\gamma+\frac{a_i^2}{\alpha_1}\right)c, \left(1-\gamma+\frac{a_i^2}{\alpha_2}\right)(c+\beta)\right]+\frac{b_i^2}{\alpha_1}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{11}{25}(c+2) & \text{pentru } i=1\\[2ex] -\dfrac{1}{5}c+\dfrac{48}{25} & \text{pentru } i=2\\[2ex] -c+\dfrac{128}{25} & \text{pentru } i=3\end{cases}$$

Pentru $c \in [\delta_1,\ \xi_1] = [8, 10]$ avem

$$\max\left[\left(1-\gamma+\frac{a_i^2}{\alpha_1}\right)c, \left(1-\gamma+\frac{a_i^2}{\alpha_1}\right)\xi_1,\ \xi_1-\left(\gamma-\frac{a_i^2}{\alpha_1}\right)(c+\beta)\right]+$$

$$+\frac{b_i^2}{\alpha_1}=\begin{cases}\dfrac{11}{25}\cdot 10 & \text{pentru } i=1\\[2ex] -\dfrac{1}{5}c+\dfrac{48}{25} & \text{pentru } i=2\\[2ex] -c+\dfrac{128}{25} & \text{pentru } i=3\end{cases}$$

În sfîrşit, pentru $c \in [\xi_1, \infty) = [10, \infty)$ avem

$$\max\left[\xi_1-\left(\gamma-\frac{a_i^2}{\alpha_1}\right)c,\ \xi_1-\left(\gamma-\frac{a_i^2}{\alpha_1}\right)(c+\beta)\right]+\frac{b_i^2}{\alpha_1}=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{14}{25}c+10 & \text{pentru } i=1\\[2ex] -\dfrac{6}{5}c+\dfrac{98}{5} & \text{pentru } i=2\\[2ex] -2c+\dfrac{178}{5} & \text{pentru } i=3.\end{cases}$$

Prin urmare, avem

$$f_1(c) = \frac{4}{5}\cdot 2c + \frac{4}{5}\min\left\{\frac{11}{25}c + \frac{22}{25}\,;\ -\frac{1}{5}c + \frac{48}{25}\,;\ -c + \frac{128}{25}\,;\ -\right.$$

$$\left.-\frac{14}{25}c + 10\,;\ -\frac{6}{5}c + \frac{98}{25}\,;\ -2c + \frac{178}{25}\right\}$$

sau

$$f_1(c) = \frac{4}{125}\min\{61c + 22\,;\ 45c + 48\,;\ 25c + 128\,;\ 20c + 490\,;\ 890\}.$$

Pasul 3. Calculăm numerele ρ_i :

$$\rho_{12} = 1\,\frac{5}{8},\quad \rho_{13} = 2\,\frac{17}{18},\quad \rho_{14} = \frac{468}{41},\quad \rho_{15} = \frac{868}{61}$$

şi deci

$$\rho_1 = \min_{2\leqslant i\leqslant 5}\rho_{1i} = \rho_{12} = 1\,\frac{5}{8}\cdot$$

Apoi

$$\rho_{23} = 4,\quad \rho_{24} > 4,\quad \rho_{25} > 4$$

şi deci $\rho_2 = \min\limits_{3\leqslant i\leqslant 5}\rho_{2i} = \rho_{23} = 4$

De asemenea,

$$\rho_{34} > \rho_{35} = \rho_3 = 30\,\frac{12}{25}$$

Prin urmare

$$f_1(c) = \begin{cases} 61c + 22 & \text{pentru } c \in \left[0,\ 1\,\frac{5}{8}\right] \\[2ex] 45c + 22 & \text{pentru } c \in \left[1\,\frac{5}{8},\ 4\right] \\[2ex] 25c + 128 & \text{pentru } c \in \left[4{,}30\,\frac{12}{25}\right] \\[2ex] 890 & \text{pentru } c \in \left[30\,\frac{12}{25},\ \infty\right] \end{cases}$$

şi deci $A^1 = \{1,2,3,5,6,9\}$.

Pasul 4. Avem $C_1^1 = \{1\}$, $C_2^1 = \{5, 6\}$, $C_3^1 = \varnothing$ şi deci

$$y_1(c) = \begin{cases} c + 2 & \text{pentru } c \in \left[0, 1\,\frac{5}{8}\right] \\[2ex] c & \text{pentru } c \in \left[1\,\frac{5}{8},\ \infty\right) \end{cases}$$

Strategia optimală va fi deci

$$y_1(c) = \begin{cases} c + 2 & \text{pentru} \quad c \in \left[0,\ 1\dfrac{5}{8}\right] \\ c & \text{pentru} \quad c \in \left[1\dfrac{5}{8},\ \infty\right) \end{cases}$$

$$y_2(y_1(c)) = y_1(c) \quad \text{şi} \quad y_3\,(y_2(c)) = y_2(c) = y_1(c).$$

Primită la redacţie la 10 noiembrie 1967

Centrul de Statistică Matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

SUR LE PROBLÈME DU DÉVELOPPEMENT OPTIMAL D'UNE ENTREPRISE

(RÉSUMÉ)

Un problème analogue a été résolu dans [2]. On presentē ici une variante discrète de ce problème, ce qui permet de le resoudre sans aucune hypothèse portant sur les propriétés des fonctions qui y interviennent

Le problème est le suivant :

Soit 1, 2, ..., N les étapes de développement d'une entreprise et soit ξ_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, les demandes du produit qui y est fabriqué. Soit x_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, les capacités de production de l'entreprise. Nous supposons :

$$0 \leqslant x_i - x_{i-1} \leqslant \beta,\ 1 \leqslant i \leqslant N, \tag{1}$$

où $x_0 = c$ est la capacité de production initiale et β est, le développement maximal de la capacité entre deux périodes consécutives.

Le but est de maximiser le bénéfice total :

$$\max \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\,[\min(\xi_i,\ x_i) - \gamma\,(x_i - x_{i-1})], \tag{2}$$

où γ est le coût unitaire du développement de la capacité et α_i, $1 \leqslant i \leqslant N$ sont les « coefficients d'actualisation » $(0 < \alpha_i < 1)$.

On traite le problème (1), (2) par la programmation dynamique ; on cherche une solution analytique et on obtient un algorithme pour calculer la valeur optimale de (2) et aussi la stratégie optimale $\{x_i\,(c)\}_{1 \leqslant i \leqslant N}$.

BIBLIOGRAFIE

1. Arrow K., Karlin S., Scarf H., *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production.* Standford Univ. Press, California, 1958.
2. Arrow K., Beckmann M., Karlin S., *The. Optimal Expansion of the Capacity of a Firm.* cap. 7 în [1].
3. Bellman R., *Dynamic Programming.* Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1957.
4. Bellman R., Dreyfus S., *Applied Dynamic Programming.* Princeton Univ., Press, Princeton, New Jersey, 1962.
5. Karlin S., *The Theory of Infinite Games.* Annals of Mathematics, **LVI**, 371–401. (1952).

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date din text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale. Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, A. DELEANU, M. JURCHESCU, **Topologie, Categorii, Suprafețe reimanniene**, 1967, 394 p., 21,50 lei.

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcțiilor**, 1956, 311 p., 15 lei.

ROMULUS CRISTESCU și GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicații ale teoriei distribuțiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.

I. CUCULESCU, **Procese Markov și funcții excesive**, 1668, 356 p., 19 lei.

N. DINCULEANU, **Integrarea pe spații local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.

ȘT. I. GHEORGHIȚĂ, **Metode matematice în hidrogazodinamica subterană**, 1966, 582 p., 31 lei.

AL. GHIKA, **Analiza funcțională**, 1967, 594 p., 31 lei.

S. GUIAȘU și R. THEODORESCU, **Teoria matematică a informației**, 1966, 227 p., 8,25 lei.

M. IOSIFESCU și P. TĂUTU, **Procese stohastice și aplicații în biologie și medicină**, 1968, 345 p., 22 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici și automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferențială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systèmes alèatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticității**, vol. II, 1966, 669 p., 38 lei.

S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

IVAN SINGER, **Cea mai bună aproximare în spații vectoriale normate prin elemente din subspații vectoriale**, 1967, 386 p., 23 lei.

MARIUS I. STOKA, **Geometrie integrală**, 1967, 240 p., 9,75.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 5, P. 633–786, BUCUREȘTI, 1968

I. P. „Informația" – c. 5181

43831 **Lei 12.—**

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI
MATEMATICE

6

TOMUL 20

1968

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

COMITETUL DE REDACŢIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAŞ — secretar de redacţie.

La revue „STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE“ paraît 10 fois par an. Le prix d'un abonnement annuel est de $ 10 — ; F F 49.— ; D. M. 40. — .
Toute commande de l'étranger sera adressée a CARTIMEX, Boite postale 134—135, Roumanie, ou à ses représentants à l'étranger. En Roumanie, vous pourrez vous abonner par les bureaux de poste ou chez votre facteur.
În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondenţă, se trimit la Comitetul de redacţie al revistei pe adresa: Str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

TOM. 20, Nr. 6
1968

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

SUMAR

Pag.

M. BALÁZS, F. BÎRSAN, Asupra metodei hiperbolelor tangente aplicată la rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare. . . 789

M. BALÁZS, G. GOLDNER, Despre rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare prin metoda parabolelor tangente . . . 801

M. BALÁZS, B. JANKÓ, Asupra rezolvării ecuaţiilor operaţionale neliniare prin metoda hiperbolelor tangente 809

A. COŢIU, Asupra unor formule de cuadratură care se obţin din procedee de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale. . 819

MIRCEA CRAIOVEANU, Grupuri Lie-Banach de transformări ce lasă invariant un obiect geometric 833

I. CUCUREZEANU, O generalizare a teoremei lui Clement . . 841

A. D. LEMENY, Schiţă pentru o teorie aritmetică a sensului şi valorii 845

ALEXANDRU MIHAI, Conexiuni meromorfe 859

ŞERBAN STRĂTILĂ, Elemente de analiză armonică (IV). . . . 867

PETRU ŞANDRU, Metode topologice în studiul schemelor cu contacte m-poziţionale 927

C. TUDOR, Asupra unei algebre de convoluţie 933

F. H. VASILESCU, O relativizare a cvasinilpotenţei pe algebre Banach 939

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 6, P. 787 – 946, BUCUREŞTI, 1968

ASUPRA METODEI HIPERBOLELOR TANGENTE APLICATĂ LA REZOLVAREA ECUAȚIILOR OPERAȚIONALE NELINIARE

DE

M. BALÁZS și F. BÎRSAN

Se studiază rezolvarea ecuațiilor $P(x) = 0$, unde $P(x)$ este o operație neliniară definită într-un spațiu liniar normat X și cu valori în Y de același tip, făcînd precizări în legătură cu lucrarea [4].

Fie ecuația operațională

$$P(x) = 0, \tag{1}$$

unde $P(x)$ este o operație neliniară definită într-un domeniu S complet și convex al spațiului liniar normat, X avînd valori în spațiul Y de același tip. Despre $P(x)$ presupunem că este continuă și de două ori derivabilă în sensul lui Fréchet.

Pentru rezolvarea ecuației operaționale (1) folosim metoda hiperbolelor tangente dată prin algoritmul

$$x_{n+1} = x_n - Q_n \Gamma_n P(x_n), \tag{2}$$

unde

$$\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$$

$$Q_n = \left[I - \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) \Gamma_n P(x_n)\right]^{-1}$$

iar $P'(x)$ și $P''(x)$ sînt derivatele de ordinul întîi, respectiv doi în sens Fréchet ale lui $P(x)$.

Alegînd un element $x_0 \in X$, cu ajutorul formulei (2) se construiește un șir (x_n). Demonstrarea existenței soluției ecuației (1), în esență, se reduce la studiul convergenței acestui șir.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 6, P. 789–799, BUCUREȘTI, 1968

Metoda hiperbolelor tangente dată de G. S. Salehov în lucrarea [1] pentru ecuații reale a fost generalizată pentru ecuații de tip (1) de M.A. Mertvețova [2]. Condițiile puse de Mertvețova au fost îmbunătățite de B. Jankó în lucrarea [3] și B. Jankó și V. Pop în [4].

În această lucrare vom face cîteva observații în legătură cu condițiile date de autorii [4]. În acest sens, demonstrăm :

TEOREMA 1. *Dacă există un element* $x_0 \in X$ *pentru care sînt satisfăcute condițiile :*

1° *pentru derivata Fréchet* $P'(x_0)$ *există operația inversă* $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ *și are loc delimitarea* $\| \Gamma_0 \| \leqslant B_0$;

2° $\| Q_0 \Gamma_0 P(x_0) \| \leqslant \eta_0$ *și* $\| P''(x_0) \| \leqslant M$;

3° *în sfera* S *definită de inegalitatea* $\| x - x_0 \| \leqslant 2\eta_0$ *pentru orice pereche de elemente* (x', x'') *este satisfăcută condiția lui Lipschitz*

$$\| P''(x') - P''(x'') \| \leqslant L \| x' - x'' \|,$$

unde L *este o constantă* ;

4° $$h_0 = B_0 (M + 2\eta_0 L)\, \eta_0 \leqslant \frac{1}{2};$$

5° $$= \frac{1}{4 - 2h_0} + \frac{L}{2 \cdot 3 B_0 (M + 2\eta_0 L)^2} \leqslant \frac{4}{5},$$

atunci ecuația operațională (1) are o soluție $x^* \in S$ *către care tinde șirul* (x_n) *construit prin metoda hiperbolelor tangente și rapiditatea convergenței șirului este dată de inegalitatea :*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} (2h_0)^{3^n - 1} \eta_0 .$$

Demonstrație. Mai întîi observăm că din condiția 3° rezultă mărginirea uniformă a normei lui $P''(x)$ în sfera S. În adevăr, scriind condiția 3° pentru x_0 și un $x \in S$, avem

$$\| P''(x) - P''(x_0) \| \leqslant L \| x - x_0 \| \leqslant 2\eta_0 L$$

de unde

$$\| P''(x) \| \leqslant \| P''(x_0) \| + 2\eta_0 L \leqslant M + 2\eta_0 L.$$

În continuare, arătăm că trecînd de la x_0 la x_1, de la x_1 la x_2 etc., condițiile 1°—5° rămîn satisfăcute.

Folosind analoaga formulei lui Lagrange pe baza condițiilor 1°, 2°, 4° și a observației ce a rezultat din condiția 3°, se obține :

$$\| \Gamma_0 [P'(x_1) - P'(x_0)] \| \leqslant \| \Gamma_0 \| \sup \| P''(\bar{x}) \| \, \| x_1 - x_0 \| \leqslant$$
$$\leqslant B_0 (M + 2\eta_0 L)\, \eta_0 = h_0 < 1,$$

unde

$$\bar{x} = x_0 + \theta (x_1 - x_0).$$

De aici, conform teoremei lui Banach, rezultă existenţa operaţiei

$$H = \{I - \Gamma_0 [P'(x_1) - P'(x_0)]\}^{-1} \quad \text{şi} \quad \| H \| \leqslant \frac{1}{1 - h_0}.$$

Deoarece $\Gamma_1 = H \Gamma_0$, există Γ_1 şi avem

$$\| \Gamma_1 \| = \| H \Gamma_0 \| \leqslant \frac{B_0}{1 - h_0} = B_1. \tag{3}$$

Deci condiţia 1° este satisfăcută pentru elementul x_1.

Deoarece $\Gamma_0 P''(x)$ de asemenea satisface condiţia lui Lipschitz, are loc formula analoagă a lui Taylor [5].

$$\left\| \Gamma_0 P(x_1) - \Gamma_0 P(x_0) - (x_1 - x_0) - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0)(x_1 - x_0)^2 \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{LB_0}{2 \cdot 3} \| x_1 - x_0 \|^3.$$

Pe baza egalităţii

$$\Gamma_0 P(x_0) + (x_1 - x_0) + \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0)(x_1 - x_0)^2 = \tag{4}$$
$$= \frac{1}{4} \Gamma_0 P''(x_0) \{ \Gamma_0 P''(x_0)(\Gamma_0 P(x_0))(x_1 - x_0)\} (x_1 - x_0)$$

[3], din formula lui Taylor, se obţine

$$\| \Gamma_0 P(x_1) - \frac{1}{4} \Gamma_0 P''(x_0) \{ \Gamma_0 P''(x_0)(\Gamma_0 P(x_0))(x_1 - x_0)\} (x_1 - x_0) \| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{B_0 L}{2 \cdot 3} \| x_1 - x_0 \|^3.$$

Plecînd de la egalitatea

$$\left[I - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0)\, \Gamma_0 P(x_0) \right] (x_1 - x_0) = - \Gamma_0 P(x_0),$$

se arată că

$$\| \Gamma_0 P(x_0) \| \leqslant \frac{\eta_0}{1 - \frac{1}{2} h_0}. \tag{5}$$

Revenind la formula lui Taylor, pe baza inegalităţii precedente şi a condiţiilor teoremei, se obţine

$$\| \Gamma_0 P(x_1) \| \leqslant \frac{B_0^2 (M + 2\eta_0 L)^2 \eta_0^3}{4 - 2h_0} + \frac{B_0 L \eta_0^3}{2 \cdot 3} = \tag{6}$$
$$= B_0^2 (M + 2\eta_0 L)^2 \eta_0^3 \left[\frac{1}{4 - 2h_0} + \frac{L}{2 \cdot 3 B_0 (M + 2\eta_0 L)^2} \right]$$

de unde

$$\| \Gamma_1 P(x_1) \| \leqslant \frac{h_0^2 \eta_0}{1 - h_0} \left[\frac{1}{4 - 2h_0} + \frac{L}{2 \cdot 3B_0 (M + 2\eta_0 L)^2} \right] = D_1 .$$

Din condiţiile teoremei rezultă existenţa operaţiei Q_1. În adevăr,

$$\left\| \frac{1}{2} \Gamma_1 P''(x_1) \, \Gamma_1 P(x_1) \right\| \leqslant \frac{1}{2} \, \frac{B_0 M D_1}{1 - h_0} \leqslant \frac{8h_0^3}{5} < 1.$$

Deci

$$\| x_2 - x_1 \| = \| Q_1 \Gamma_1 P(x_1) \| \leqslant \frac{D_1}{1 - B_0 (M + 2\eta_0 L) D_1} = \eta_1 .$$

Astfel şi condiţia 2° este îndeplinită pentru x_1. Folosind condiţia 5° avem

$$\eta_1 = 2h_0^2 \eta_0 \leqslant \frac{\eta_0}{2} . \tag{7}$$

Se păstrează şi condiţia 3° deoarece sfera S_1 definită de inegalitatea $\| x - x_1 \| \leqslant 2\eta_1$ se află în S. În adevăr, fie $x \in S_1$,

$$\| x - x_0 \| \leqslant \| x - x_1 \| + \| x_1 - x_0 \| \leqslant 2\eta_1 + \eta_0 = 2\eta_0 ,$$

deci $S_1 \subset S$.

Pe baza definiţiei lui h_1 şi a relaţiei (7) se obţine

$$h_1 \leqslant 4h_0^3 \leqslant h_0 \leqslant \frac{1}{2}$$

ceea ce arată că şi condiţia 4° este îndeplinită pentru x_1.

Deoarece $B_1 > B_0$ şi $h_1 < h_0$, rezultă că $\rho_1 < \rho_0 \leqslant \frac{4}{5}$ ceea ce arată că şi condiţia 5° este satisfăcută pentru x_1.

Prin inducţie matematică se arată că, condiţiile 1°—5° sînt satisfăcute în punctul x_n şi au loc următoarele relaţii :

$$\begin{gathered} B_n \leqslant \frac{B_{n-1}}{1 - h_{n-1}} \leqslant 2B_{n-1} ; \quad h_n \leqslant 4h_{n-1}^3 \\ \eta_n \leqslant 2h_{n-1}^2 \, \eta_{n-1} ; \qquad \rho_n \leqslant \frac{1}{4 - 2h_n} + \frac{L}{2 \cdot 3B_n (M + 2\eta_0 L)^2} \leqslant \frac{4}{5} . \end{gathered} \tag{8}$$

Din relaţiile (8) se obţine

$$\eta_n \leqslant \frac{1}{2^n} (2h_0)^{3^n - 1} \, \eta_0 .$$

Avem deci

$$\| x_{n+p} - x_n \| \leqslant \eta_n + \eta_{n+1} + \ldots + \eta_{n+p-1} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} (2h_0)^{3^n - 1} \, \eta_0 \, (1 - 2^{-r})$$

de unde, deoarece sfera S este completă, rezultă existența $\lim x_n = x^*$, care în mod evident se află în sfera S. Trecînd la limită cînd $p \to \infty$, se obține inegalitatea

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} (2h_0)^{3^n - 1} \eta_0 .$$

care caracterizează rapiditatea convergenței șirului (x_n).

Arătăm în continuare că x^* este soluția ecuației (1). Considerăm în acest scop inegalitatea

$$\|P(x_n)\| \leqslant \frac{\eta_n h_n^2}{B_0} \left[\frac{1}{4 - 2h_0} + \frac{L}{2 \cdot 3\, B_0 (M + 2\eta_0 L)^2} \right].$$

De aici dacă $n \to \infty$, atunci $\lim P(x_n) = 0$. Pe baza continuității normei și a lui $P(x)$ rezultă $\lim P(x_n) = P(x^*) = 0$. Astfel teorema e complet demonstrată.

TEOREMA 2. *Dacă pentru un element $x_0 \in X$ sînt satisfăcute condițiile 1° și 2° de la teorema 1 iar în locul condițiilor 3°, 4° și 5°, de la aceeași teoremă, avem :*

3° *derivata Fréchet de ordinul doi, $P''(x)$, satisface condiția lui Hölder în sfera S definită de inegalitatea $\|x - x_0\| \leqslant 2\eta_0$*

$$\|P''(x') - P''(x'')\| \leqslant N \|x' - x''\|^\alpha ,$$

unde N este o constantă și $0 < \alpha < 1$;

4° $$h_0 = B_0 [M + (2\eta_0)^\alpha N] \eta_0 \leqslant \frac{1}{2}$$

5° $$\rho_0 = \frac{1}{4 - 2h_0} + \frac{N}{(1 + \alpha)(2 + \alpha) B_0^\alpha [M + (2\eta_0)^\alpha N]^{1+\alpha}} \leqslant \frac{2^{1+\alpha}}{5},$$

atunci ecuația operațională (1) are o soluție $x^* \in S$ către care tinde șirul (x_n) construit prin algoritmul (2) și rapiditatea convergenței este caracterizată de inegalitatea

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} (2h_0)^{(2+\alpha)^n - 1}.$$

Demonstrație. În mod analog ca în teorema 1, din condiția 3° rezultă mărginirea uniformă a normei lui $P''(x)$ în sfera S. În adevăr, condiția 3° pentru x_0 și un $x \in S$ ne dă

$$\|P''(x) - P''(x_0)\| \leqslant N \|x - x_0\|^\alpha \leqslant N (2\eta_0)^\alpha$$

de unde

$$\|P''(x)\| \leqslant M + (2\eta_0)^\alpha N.$$

Raționamentul în demonstrație este același ca în teorema 1.

Folosind analoaga formulei lui Lagrange, pe baza condițiilor 1°, 2° și 4° și a observației ce a rezultat din condiția 3°, se obține

$$\|\Gamma_0 [P'(x_0) - P'(x_1)]\| \leqslant \|\Gamma_0\| \sup \|P''(\bar{x})\| \, \|x_1 - x_0\| \leqslant$$
$$\leqslant B_0 [M + (2\eta_0)^\alpha N] \eta_0 = h_0 < 1,$$

unde

$$\bar{x} = x_0 + \theta (x_1 - x_0).$$

Conform teoremei lui Banach există operația H și are loc relația (3), deci condiția 1° e satisfăcută pentru x_1.

Deoarece $\Gamma_0 P''(x)$ satisface și el condiția lui Hölder, are loc formula analoagă a lui Taylor [5]:

$$\| \Gamma_0 P(x_1) - \Gamma_0 P(x_0) - (x_1 - x_0) - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0)(x_1 - x_0)^2 \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{N B_0 \| x_1 - x_0 \|^{2+\alpha}}{(1+\alpha)(2+\alpha)}.$$

Pe baza relațiilor (4) și (5) și a condițiilor teoremei, din formula lui Taylor, se obține

$$\| \Gamma_0 P(x_1) \| \leqslant \frac{B_0^2 [M + (2\eta_0)^\alpha N]^2 \eta_0^3}{4 - 2h_0} + \frac{B_0 N \eta_0^{2+\alpha}}{(1+\alpha)(2+\alpha)} \leqslant$$

$$\leqslant h_0^{1+\alpha} \eta_0 \left\{ \frac{1}{4 - 2h_0} + \frac{N}{(1+\alpha)(2+\alpha) B_0^\alpha [M + (2\eta_0)^\alpha N]^{(1+\alpha)}} \right\}$$

iar

$$\| \Gamma_1 P(x_1) \| \leqslant h_0^{1+\alpha} \eta_0 \frac{1}{1 - h_0} \left\{ \frac{1}{4 - 2h_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{N}{(1+\alpha)(2+\alpha) B_0^\alpha [M + (2\eta_0)^\alpha N]^{1+\alpha}} \right\} = D_1.$$

Deoarece există operația Q_1, avem

$$\| x_2 - x_1 \| = \| Q_1 \Gamma_1 P(x_1) \| \leqslant \frac{D_1}{1 - B_0 [M + (2\eta_0)^\alpha N] D_1} = \eta_1,$$

deci e îndeplinită și condiția 2°, iar pe baza condiției 5° avem

$$\eta_1 \leqslant 2^\alpha h_0^{1+\alpha} \eta_0 \leqslant \frac{\eta_0}{2}.$$

Condiția 3° este satisfăcută deoarece sfera $S_1 \subset S$.

Observăm că este îndeplinită și condiția 4° deoarece

$$h_1 = B_1 [M + (2\eta_0)^\alpha N] \eta_1 \leqslant \frac{B_0}{1 - h_0} [M + (2\eta_0)^\alpha N] 2^\alpha h_0^{1+\alpha} \eta_0 =$$

$$= 2^{1+\alpha} h_0^{2+\alpha} < h_0 \leqslant \frac{1}{2}.$$

Deoarece $B_1 > B_0$ și $h_1 < h_0$, rezultă că $\rho_1 < \rho_0 \leqslant \frac{2^{1+\alpha}}{5}$ ceea ce dovedește că și ultima condiție este îndeplinită pentru x_1.

Prin inducţie matematică găsim :

$$(9)\qquad \begin{aligned} &B_n \leqslant \frac{B_{n-1}}{1-h_{n-1}}\ ; \qquad \eta_n \leqslant 2^{\alpha} h_{n-1}^{1+\alpha}\eta_{n-1} \\ &h_n \leqslant 2^{1+\alpha} h_{n-1}^{2+\alpha}\ ; \qquad \rho_n \leqslant \frac{1}{4-2h_{n-1}} + \\ &+ \frac{N}{(1+\alpha)(2+\alpha)B_{n-1}^{\alpha}[M+(2\eta_0)^{\alpha}N]^{1+\alpha}} \leqslant \frac{2^{1-\alpha}}{5}. \end{aligned}$$

Din relaţiile (9) obţinem

$$\eta_n \leqslant \frac{\eta_0}{2^n}(2h_0)^{(2+\alpha)^n-1}.$$

Deoarece

$$\| x_{n+p} - x_n \| \leqslant \eta_n + \eta_{n+1} + \ldots + \eta_{n+p-1} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}(2h_0)^{(2+\alpha)^n-1}\eta_0\ (1-2^{-p}),$$

rezultă că șirul (x_n) are limita x^* și $x^* \in S$.

Din ultima inegalitate, dacă trecem la limită, obținem inegalitatea care caracterizează rapiditatea convergenței șirului (x_n).

Faptul că x^* este soluția ecuației (1) se arată ca și în teorema precedentă.

Se știe că mărginirea operației T_0 nu este necesară. În acest sens avem următoarele două teoreme :

TEOREMA 3. *Dacă pentru un element* $x_0 \in X$ *sînt îndeplinite următoarele condiții :*

1° *pentru derivata Fréchet* $P'(x_0)$ *există operația inversă* ;

2° $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ și $\|\Gamma_0 P''(x_0)\| \leqslant M$;

3° *în sfera* S *definită de inegalitatea* $\|x - x_0\| \leqslant 2\eta_0$ *pentru orice pereche de elemente* (x', x'') *este satisfăcută condiția lui Lipschitz*

$$\| \Gamma_0 P''(x') - \Gamma_0 P''(x'') \| \leqslant L \| x' - x'' \| ;$$

4° $$h_0 = [M + 2\eta_0 L]\,\eta_0 \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\rho_0 = \frac{1}{4-2h_0} + \frac{L}{2\cdot 3\,[M + 2\eta_0 L]^2} \leqslant \frac{4}{5},$$

atunci ecuația operațională (*1*) *are o soluție* $x^* \in S$ *către care tinde șirul* (x_n) *construit cu ajutorul algoritmului* (*2*) *și rapiditatea convergenței șirului este dată de inegalitatea*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}(2h_0)^{3^n-1}.$$

Demonstrație. Vom arăta că în cazul condiției acestei teoreme sînt satisfăcute condițiile teoremei 1 pentru ecuația de forma

$$(10)\qquad \overline{P}(x) = \Gamma_0 P(x) = 0$$

care este echivalentă cu ecuația (1).

În adevăr, avem

1° $\widetilde{\Gamma}_0 = [\widetilde{P}'(x_0)]^{-1} = [\Gamma_0 P'(x_0)]^{-1} = I$ deci $\widetilde{\Gamma}_0$ există şi $\| \widetilde{\Gamma}_0 \| = 1 = \widetilde{B}_0$;

2° $$\left\| \left[I - \frac{1}{2} \widetilde{\Gamma}_0 \widetilde{P}''(x_0) \widetilde{\Gamma}_0 \widetilde{P}(x_0) \right]^{-1} \widetilde{\Gamma}_0 \widetilde{P}(x_0) \right\| =$$

$$= \left\| \left[I - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) \right]^{-1} \Gamma_0 P(x_0) \right\| \leqslant \eta_0 \text{ şi } \| \widetilde{\Gamma}_0 \widetilde{P}''(x_0) \| =$$

$$= \| \Gamma_0 P''(x_0) \| \leqslant M;$$

3° $$\| \widetilde{\Gamma}_0 \widetilde{P}''(\widetilde{x}') - \widetilde{\Gamma}_0 \widetilde{P}''(x'') \| = \| \Gamma_0 P''(x') -$$
$$- \Gamma_0 P''(x'') \| \leqslant L \| x' - x'' \|$$

pentru orice două puncte x', x'' din sfera S;

4° $$\widetilde{h}_0 = \widetilde{B}_0 [M + 2\eta_0 L] \eta_0 = [M + 2\eta_0 L] \eta_0 = h_0 \leqslant \frac{1}{2};$$

5° $$\widetilde{\rho}_0 = \frac{1}{4 - 2h_0} + \frac{L}{2 \cdot 3 \widetilde{B}_0 (M + 2\eta_0 L)^2} = \rho_0 \leqslant \frac{4}{5}.$$

În consecinţă, conform teoremei 1 ecuaţia (10) are cel puţin o soluţie $x^* \in S$ şi $x^* = \lim \widetilde{x}_n$, unde şirul $(\widetilde{x}_n)$ este format pe baza formulei (2) folosind operaţia $\widetilde{P}(x)$. Însă se arată uşor că acest şir este acelaşi cu şirul format pe baza formulei (2) şi cu ajutorul operaţiei $P(x)$, adică $x^* = \lim x_n$. Din egalitatea $\widetilde{P(x^*)} = \Gamma_0 P(x^*) = 0$ rezultă că $P(x^*) = 0$ ceea ce era de demonstrat.

TEOREMA 4. *Dacă există un element* $x_0 \in X$ *astfel încît următoarele condiţii să fie satisfăcute:*

1° $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ *există*;

2° $\| Q_0 \Gamma_0 P(x_0) \| \leqslant \eta_0$ *şi* $\| \Gamma_0 P''(x_0) \| \leqslant M$;

3° *în sfera* S *definită de inegalitatea* $\| x - x_0 \| \leqslant 2\eta_0$ *este satisfăcută condiţia lui Hölder*

$$\| \Gamma_0 P''(x') - \Gamma_0 P''(x'') \| \leqslant N \| x' - x'' \|^{\alpha};$$

4° $$h_0 = [M + (2\eta_0)^{\alpha} N] \eta_0 \leqslant \frac{1}{2};$$

5° $$\rho_0 = \frac{1}{4 - 2h_0} + \frac{N}{(1 + \alpha)(2 + \alpha)[M + (2\eta)^{\alpha} N]^{1+\alpha}} \leqslant \frac{2^{1+\alpha}}{5}$$

atunci ecuaţia (1) are o soluţie $x^* \in S$ *către care tinde şirul* (x_n) *construit prin algoritmul (2) şi rapiditatea convergenţei se caracterizează prin inegalitatea*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} (2h_0)^{(2+\alpha)^n - 1}.$$

Demonstraţia teoremei se face analog cu teorema 3.

TEOREMA 5. *Dacă sînt îndeplinite următoarele condiții :*

1° $\Gamma(x) = [P'(x)]^{-1}$ *există și* $\|\Gamma(x)\| \leqslant B$ *pentru orice* $x \in S$, *unde* S *este sfera completă în* X *definită de inegalitatea*

$$\|x - x_0\| \leqslant K\eta \quad \text{și} \quad K = \sum_{i=0}^{\infty} (fh)^{3^i - 1};$$

2° $\|Q_0\Gamma_0 P(x_0)\| = \|x_1 - x_0\| \leqslant \eta$ *și* $\|P''(x_0)\| \leqslant M$;

3° *derivata Fréchet de ordinul doi,* $P''(x)$, *satisface condiția lui Hölder în sfera* S

$$\|P''(x') - P''(x'')\| \leqslant N\|x' - x''\|, \qquad 0 < \alpha \leqslant 1;$$

4° $$h = B[M + (K\eta)^\alpha N]\eta < 2 \quad \text{și} \quad hf < 1,$$

unde

$$f^2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}h}\left\{\frac{1}{4 - 2h} + \frac{N\eta^{\alpha-1}}{(1+\alpha)(2+\alpha)B[M + (K\eta)^\alpha N]^2}\right\},$$

atunci ecuația operațională (*1*) *admite cel puțin o soluție* $x^* \in S$ *către care tinde șirul* (x_n) *construit prin algoritmul* (*2*) *iar rapiditatea convergenței este dată de inegalitatea*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant K\eta(hf)^{3^n - 1}.$$

Demonstrație. Din condiția 3° rezultă $\|P''(x)\| \leqslant M + (K\eta)^\alpha N$ pentru orice $x \in S$. În condițiile teoremei din formula lui Taylor [5] obținem

$$\|\Gamma_1 P(x_1)\| \leqslant [M + (K\eta)^\alpha]^2 B^2 \left\{\frac{1}{4 - 2h} + \right.$$
$$\left. + \frac{N\eta^{\alpha-1}}{(1+\alpha)(2+\alpha)B[M + (K\eta)^\alpha N]^2}\right\}\eta^3 = h^2\eta\left\{\frac{1}{4 - 2h} + \right.$$
$$\left. + \frac{N\eta^{\alpha-1}}{(1+\alpha)(2+\alpha)B[M + (K\eta)^\alpha N]^2}\right\} = \Delta.$$

Se observă că $\Delta = h^2 f^2 \eta < \eta$. De aici rezultă că operația Q_1 există și are loc inegalitatea $\|Q_1\| = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}h}\cdot$ Deci avem

$$\|x_2 - x_1\| \leqslant \|Q_1\Gamma_1 P(x_1)\| \leqslant B^2[M + (K\eta)^\alpha N]^2 f^2 \|x_1 - x_0\|^3.$$

Prin inducție matematică se găsește că

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant B^2[M + (K\eta)^\alpha N]^2 f^2 \|x_n - x_{n-1}\|^3.$$

Dînd lui n valori de la 0 la n se obține

$$\|x_1 - x_0\| \leqslant \eta$$

$$\|x_2 - x_1\| \leqslant B^2[M + (K\eta)^\alpha N]^2 f^2\eta^3 + (hf)^{3^1 - 1}\eta$$

. . . .

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant (hf)^{3^n - 1}$$

Pe baza acestor inegalități avem

$$\|x_0 - x_n\| \leqslant \eta \sum_{i=0}^{n-1} (hf)^{3^i-1} \leqslant \eta K$$

ceea ce ne arată că șirul $(x_n) \subset S$.

Pe baza relațiilor de sus avem deci

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \eta_n + \eta_{n+1} + \dots + \eta_{n+p-1} \leqslant \eta \sum_{i=n}^{n+p-1} (hf)^{3^n-1}$$

de unde, deoarece sfera S este completă, rezultă că există $\lim x_n = x^*$. Dacă $p \to \infty$, în această relație se obține inegalitatea $\|x^* - x_n\| \leqslant \eta K (hf)^{3^n-1}$ care caracterizează rapiditatea convergenței șirului (x_n). Că x^* este soluția ecuației (1) se demonstrează ca și în teorema 1.

TEOREMA 6. *Dacă sînt satisfăcute următoarele condiții* :

1° *pentru derivata Fréchet* $P(x)$ *există operația inversă* $\Gamma_x = [P'(x)]^{-1}$ *pentru orice* $x \in S$, *unde* S *este o sferă în* X *definită de inegalitatea* $\|x - x_0\| \leqslant K\eta$ *și* $K = \sum_{i=0}^{\infty} (hf)^{3^i-1}$;

2° $\|Q_0 \Gamma_0 P(x_0)\| = \|x_1 - x_0\| \leqslant \eta$ *și* $\|\Gamma_x P''(x_0)\| \leqslant M$;

3° $\Gamma P''(x)$ *satisface condiția lui Hölder în sfera* S, *adică pentru orice* $x, x', x'' \in S$ *avem*

$$\|\Gamma_x P''(x') - \Gamma_x P''(x'')\| \leqslant N \|x' - x''\|^\alpha,$$

unde N *este o constantă iar* $0 < \alpha \leqslant 1$;

4° $h = [M + (K\eta)^\alpha N]\eta < 2$ *și* $(hf) < 1$, *unde*

$$f^2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}h} \left\{ \frac{1}{4 - 2h} + \frac{N\eta^{\alpha-1}}{(1+\alpha)(2+\alpha)[M + (K\eta)^\alpha N]^2} \right\}$$

atunci ecuația (*1*) *admite o soluție* $x^* \in S$ *către care tinde șirul* (x_n) *construit cu algoritmul* (*2*) *și rapiditatea convergenței șirului este dată de inegalitatea*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \eta K (hf)^{3^n-1}.$$

Demonstrația teoremei se face analog cu teorema 5.

Primită la redacție la 17 octombrie 1967

Institutul pedagogic Cluj

К МЕТОДУ КАСАТЕЛЬНЫХ ГИПЕРБОЛ ПРИ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(РЕЗЮМЕ)

В этой статье исследуется приближенное решение нелинейного операционального уравнения $P(x) = 0$ методом обобщенных касательных гипербол.

Устанавливаются теоремы существования решений и сходимости метода делая уточнения относительно условий, данных в работе [4].

Предлагается что: а) $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ существует и ограниченно;

б) $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ существует;

в) производная фреме второй степени $P''(x)$ удовлетворяет условиям Липшица

$$||P''(x') - P''(x'')|| \leqslant L||x' - x''||,$$

где L постоянная,
а также условиям Холдера

$$||P''(x') - P''(x'')|| \leqslant N||x' - x''||^{\alpha},$$

где N постоянная и $0 < \alpha < 1$.

Условия 1° и 5° теоремы изменяются (преобразуются) при использовании условий Липшица, а также условий Холдера. Например, для условия Холдера $\rho_0 \leqslant \frac{2^{1+\alpha}}{5}$, а для условия Липшица $\rho_0 \leqslant \frac{4}{5}$.

BIBLIOGRAFIE

1. Г. С. Соленов, *О сходимости процессов касательных гипербол*. ДАН СССР, **82**, *4*, (1952).
2. М. А. Мертвецова, *Аналог процесса касательных гипербол для общих функциональных уравнений*. ДАН ССР, 88—4, 611—614 (1953).
3. B. Jankó, *Despre rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare prin metoda hiperbolelor tangente generalizate. I.* St. cerc. de mat. (Cluj), **14**, 2, 265—271 (1963).
4. B. Jankó şi V. Pop, *Asupra metodei hiperbolelor tangente aplicată la rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare.* St. cerc. mat., **18**, *8* (1966).
5. Б. А. Вертхеим, *Об условиях применения метода Ньютона*. ДАН СССР, **110**, 5 (1960).

DESPRE REZOLVAREA ECUAȚIILOR OPERAȚIONALE NELINIARE PRIN METODA PARABOLELOR TANGENTE

DE

M. BALÁZS şi G. GOLDNER

(Cluj)

Sînt prezentate teoreme de existenţă a soluţiei ecuaţiei operaţionale $P(x) = 0$, derivatele $P''(x)$ fiind mărginite în normă şi satisfăcînd o condiţie de tip Hölder. Sînt precizate şi îmbunătăţite unele rezultate din [2] şi [3].

În această lucrare ne referim la existenţa soluţiei ecuaţiei operaţionale

$$P(x) = 0, \tag{0.1}$$

unde $P(x)$ este o operaţie neliniară definită într-un domeniu convex al spaţiului Banach X, cu valori în spaţiul Banach Y. Presupunem că $P(x)$ este continuă şi admite derivata Fréchet pînă la ordinul doi inclusiv. Metoda parabolelor tangente a fost deschisă de M. I. Necepurenko [1] şi studiată de B. Jankó şi A. Gaidici [2], precum şi R. A. Şafiev [3]. Noi vom preciza şi îmbunătăţi unele rezultate din [2] şi [3].

Metoda parabolelor tangente este dată de algoritmul

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n P(x_n) - \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) [\Gamma_n P(x_n)]^2, \tag{0.2}$$

unde $\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$.

1. Teorema 1. *Dacă pentru operaţia $P(x)$ există un punct $x_0 \in X$ astfel încît următoarele condiţii să fie satisfăcute :*

1° *Există operaţia* $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ *şi* $\|\Gamma_0\| \leqslant B_0$;

2° $\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leqslant \eta_0$;

3° $\|P''(x)\| \leqslant M$ *şi* $\|P''(x') - P''(x'')\| \leqslant N \|x' - x''\|^\alpha$, *unde* $0 < \alpha \leqslant 1$, *oricare ar fi* x, x', x'' *din sfera* S_0 *definită de inegalitatea* $\|x - x_0\| \leqslant \leqslant \frac{p_0}{1-(\omega_0 k_0)^{1+\alpha}}$, unde $p_0 = \tau_0\eta_0$, $\tau_0 = 1 + \frac{1}{2}h_0$, $h_0 = BM\eta_0$, $\omega_0^{1+\alpha} =$

$$= 1 - f(q_0),\ q_0 = h_0\tau_0,\ f(q_0) = q_0 + \frac{\varepsilon_0 q_0^{1+\alpha}}{1+\alpha},\ \varepsilon_0 = \frac{N}{B_0^{\alpha} M^{1+\alpha}};$$

4° $f(q_0) < 1$;

5° $k_0^{1+\alpha} = \frac{c_0^{1+\alpha}\cdot h_0^{1+\alpha}}{\omega_0^{1+\alpha}} \leqslant 1$, *unde* $c_0^{1+\alpha} = \frac{1}{\omega_0^{1+\alpha}}\left[\frac{1}{2} + \frac{h_0}{8} + \frac{\varepsilon_0\tau_0^{2+\alpha}}{(1+\alpha)(2+\alpha)}\right]$

atunci în sfera S_0 *există cel puțin o soluție* x^* *a ecuației (0.1), care este limita șirului* (x_n) *construit prin algoritmul (0.2) și rapiditatea convergenței șirului este caracterizată de inegalitatea*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{\omega_0^{n(1+\alpha)}\cdot k_0^{(2+\alpha)^n-1}\cdot p_0}{1-(\omega_0\cdot k_0)^{1+\alpha}}.$$

Demonstrație. Notații: $P^{(n)}(x_k) = P_k^{(n)}$ pentru $n = 0, 1, 2$; $k = = 0, 1, 2, \ldots$ Din (0.2) și condițiile 1°, 2° și 3° rezultă că

$$\|x_1 - x_0\| \leqslant p_0 \tag{1.1}$$

Se demonstrează că pentru x_1 obținut din (0.2) pentru $n = 0$, condițiile 1°—5° sînt verificate. În adevăr, aplicînd formula lui Taylor [4] pentru operația $\Gamma_0 P'(x)$ obținem

$$\|\Gamma_0 P'(x_1) - \Gamma_0 P'(x_0)\| \leqslant \|\Gamma_0 P_0''(x_1 - x_0)\| + \frac{N}{1+\alpha}\|x_1 - x_0\|^{1+\alpha}$$

de unde din (1.1) și condițiile teoremei rezultă

$$\|\Gamma_0 P_1' - \Gamma_0 P_0'\| \leqslant h_0\tau_0 + \frac{h_0^{1+\alpha}\tau_0^{1+\alpha}\cdot\varepsilon_0}{1+\alpha} = q_0 + \frac{\varepsilon_0 q_0^{1+\alpha}}{1+\alpha} = f(q_0) < 1.$$

Conform teoremei lui Banach, operația $H_0 = [I - \Gamma_0(P_0' - P_1')]$ are inversă și

$$\|H_0^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-f(q_0)}.$$

Cum $\Gamma_1 = H_0^{-1}\Gamma_0$, rezultă că Γ_1 există și

$$\|\Gamma_1\| \leqslant \frac{B_0}{1-f(q_0)} = B_1$$

deci condiția 1° e verificată și $B_1 > B_0$.

Aplicînd formula lui Taylor [4] la $P(x)$, utilizînd condițiile teoremei și algoritmul (0.2) obținem

$$\|P_1\| \leqslant B_0 M^2 \eta_0^3\left(\frac{1}{2} + \frac{h_0}{8}\right) + \frac{N\eta_0^{2+\alpha}}{(1+\alpha)(2+\alpha)}\left(1 + \frac{1}{2}h_0\right)^{2+\alpha}$$

de unde

$$\|\Gamma_1 P_1\| \leqslant \frac{1}{\omega_0^{1+\alpha}}\left[h_0^2 \eta_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{h_0}{8}\right) + \frac{\varepsilon_0 h_0^{1+\alpha}}{(1+\alpha)(2+\alpha)} \eta_0 \left(1 + \frac{1}{2} h_0\right)^{2+\alpha}\right]$$

şi ştiind din condiţia 4° că $h_0 < 1$ rezultă că

$$\|\Gamma_1 P_1\| \leqslant h_0^{1+\alpha} c_0^{1+\alpha} \eta_0 = \eta_1 \tag{1.2}$$

deci condiţia 2° e verificată.

Deoarece $h_0^{1+\alpha} c_0^{1+\alpha} < 1$, ceea ce rezultă din condiţiile 4° şi 5°,

$$\eta_1 \leqslant \eta_0$$

Din cele de mai sus rezultă că

$$h_1 = B_1 M \eta_1 \leqslant \frac{B_0}{1 - f(q_0)} M h_0^{1+\alpha} c_0^{1+\alpha} \eta_0 = \frac{h_0^{1+\alpha} c_0^{1+\alpha}}{\omega_0^{1+\alpha}} h_0 \leqslant h_0 \tag{1.3}$$

şi de aici

$$\tau_1 \leqslant \tau_0 \text{ şi } p_1 = \tau_1 \eta_1 \leqslant \tau_0 h_0^{1+\alpha} c_0^{1+\alpha} \eta_0 = h_0^{1+\alpha} c_0^{1+\alpha} p_0 \leqslant p_0. \tag{1.4}$$

Apoi avem : $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$, $q_1 \leqslant q_0$, $f(q_1) \leqslant f(q_0) < 1$, $c_1^{1+\alpha} \leqslant c_0^{1+\alpha}$ deci $k_1^{1+\alpha} \leqslant k_0^{1+\alpha} \leqslant 1$, deci condiţiile 4° şi 5° sînt satisfăcute.

Pentru a arăta că şi condiţiile 3° sînt verificate, este suficient să arătăm că sfera $S_1 \subseteq S_0$, unde S_1 este sfera definită de inegalitatea

$$\|x - x_1\| \leqslant \frac{p_1}{1 - (\omega_0 k_0)^{1+\alpha}}.$$

Dar $\|x - x_0\| \leqslant \dfrac{p_1}{1 - (\omega_0 k_0)^{1+\alpha}} + p_0 \leqslant \dfrac{p_0}{1 - (\omega_0 k_0)^{1+\alpha}}$ şi deci şi condiţiile 3° sînt satisfăcute.

Prin inducţie matematică se arată că şi pentru x_n condiţiile 1° — 5° sînt verificate şi avem

$$\begin{cases} h_n \leqslant \dfrac{c_0^{1+\alpha}}{\omega_0^{1+\alpha}} h_{n-1}^{2+\alpha} \\ p_n \leqslant c_0^{1+\alpha} h_{n-1}^{1+\alpha} p_{n-1} \end{cases} \tag{1.5}$$

de unde

$$p_n \leqslant \omega_0^{n(1+\alpha)} k_0^{(2+\alpha)^n - 1} p_0. \tag{1.6}$$

Din relaţia (1.6) rezultă

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \omega_0^{n(1+\alpha)} k_0^{(2+\alpha)^n - 1} p_0 \frac{1 - (\omega_0 k_0)^{p(1+\alpha)}}{1 - (\omega_0 k_0)^{1+\alpha}}. \tag{1.7}$$

Spaţiul X fiind complet, din (1.7) rezultă că există $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^*$, şi că rapiditatea convergenţei aproximaţiilor este cea dată în enunţul teoremei.

Pentru a demonstra că $P(x^*) = 0$, aplicăm formula lui Taylor [4] şi obţinem

$$(1.8) \quad \| P_{n+1} \| \leqslant \frac{h_0}{4} (M + N \rho_0^{\alpha}) \left(\frac{9}{8} + 1 \right) \eta_n^2 + \frac{N}{(1+\alpha)(2+\alpha)} \| x_{n+1} - x_n \|^2,$$

unde ρ_0 este raza sferei S_0. Din (1.8) rezultă $\lim\limits_{n \to \infty} P(x_n) = 0$ şi pe baza continuităţii operaţiei $P(x)$, $P(x^*) = 0$, ceea ce demonstrează în întregime teorema.

Observaţie În teoremă se poate renunţa la condiţia $\| \Gamma_0 \| \leqslant B_0$, fiind suficientă presupunerea existenţei lui Γ_0. În condiţia 3° se poate presupune $\| P''(x_0) \| \leqslant M_0$, deoarece de aici, pe baza condiţiei lui Hölder, rezultă $\| P''(x) \| \leqslant M$, pentru orice $x \in S_0$.

2. TEOREMA 2. *Dacă în cazul operaţiei $P(x)$ există un element $x_0 \in X$ astfel încît următoarele condiţii să fie satisfăcute :*

1° *operaţia* $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ *există ;*

2° *avem delimitările* $\| \Gamma_0 P(x_0) \| \leqslant \bar{\eta}_0$, $\| \Gamma_0 P''(x_0) \| \leqslant M_0$;

3° *operaţia* $\Gamma_0 P''(x)$ *satisface condiţia lui Hölder*

$$\| \Gamma_0 P''(x') - \Gamma_0 P''(x'') \| \leqslant N_0 \| x' - x'' |^{\alpha},$$

unde $0 < \alpha \leqslant 1$, *pentru orice* x', x'' *din sfera* S_0 *definită de inegalitatea* $\| x - x_0 \| \leqslant \eta_0 / 1 - c_0^{1+\alpha} h_0^{1+\alpha} = \rho_0$, *unde* $\eta_0 = \tau_0 \bar{\eta}_0$, $\tau_0 = 1 + \frac{1}{2} M_0 \bar{\eta}_0 =$

$$= 1 + \frac{1'}{2} h_0;$$

$$4° \quad f(p_0) = p_0 + \frac{1}{1+\alpha} \varepsilon_0 p_0^{1+\alpha} < 1, \text{ unde } p_0 = M_0 \eta_0, \ \varepsilon_0 = \frac{N_0}{M_0^{1+\alpha}};$$

$$5° \quad k_0^{1+\alpha} = \frac{f'(p_0)\, c_0^{1+\alpha} \cdot h_0^{1+\alpha}}{1 - f(p_0)} \leqslant 1, \ c_0^{1+\alpha} = \frac{\frac{1}{6} \varepsilon_0 \tau_0^{2+\alpha} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} h_0}{1 - f(p_0)},$$

atunci în sfera S_0 există cel puţin o soluţie x^* a ecuaţiei $P(x) = 0$ care este limita şirului (x_n) construit prin metoda parabolelor tangente şi rapiditatea convergenţei şirului este caracterizată de inegalitatea

$$(2.1) \qquad \| x^* - x_n \| \leqslant \left[\frac{1 - f(p_0)}{f'(p_0)} \right]^n \frac{k_0^{(2+\alpha)^n - 1} \eta_0}{1 - (c_0 h_0)^{1+\alpha}}$$

Demonstraţie. Din condiţia 2° rezultă că

$$(2.1') \qquad \| x_1 - x_0 \| \leqslant \tau_0 \bar{\eta}_0 = \eta_0$$

În continuare demonstrăm că prin trecerea de la elementul x_0 la elementul x_1, de la elementul x_1 la elementul x_2 etc., condiţiile 1°—5°

rămîn valabile. În adevăr, aplicînd formula lui Taylor [4] pentru operaţia $\Gamma_0 P'(x)$ obţinem

$$\| \Gamma_0 P'(x_1) - \Gamma_0 P'(x_0) \| \leqslant \| \Gamma_0 P''(x_0)(x_1 - x_0) \| + \frac{N_0}{1+\alpha} \| x_1 - x_0 \|^{1+\alpha}$$

de unde folosind formula (0.2) pentru $n = 0$ şi condiţiile teoremei rezultă

$$\| \Gamma_0 P'(x_1) - \Gamma_0 P'(x_0) \| \leqslant M_0 \eta_0 + \frac{N_0}{1+\alpha} \eta_0^{1+\alpha} = p_0 + \frac{\varepsilon_0}{1+\alpha} p_0^{1+\alpha} < 1.$$

Deci operaţia $H_0 = \Gamma_0 P'(x_1) = \{I - \Gamma_0 [P'(x_0) - P'(x_1)]\}$ are inversă şi

$$\| H_0^{-1} \| \leqslant \frac{1}{1 - f(p_0)}.$$

În consecinţă există operaţia $\Gamma_1 = [P'(x_1)]^{-1}$ deoarece în mod evident, avem $\Gamma_1 = H_0^{-1} \Gamma_0$. Deci condiţia 1° este satisfăcută pentru elementul x_1.

Folosind identitatea

$$\Gamma_0 P(x_0) + x_1 - x_0 + \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0)(x_1 - x_0)^2 = \frac{1}{4} \Gamma_0 P''(x_0) \Big\{ \Gamma_0 P(x_0) +$$
$$+ \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) [\Gamma_0 P(x_0)]^2 \Big\} \Gamma_0 P''(x_0) [\Gamma_0 P(x_0)]^2 +$$
$$+ \frac{1}{4} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P''(x_0) [\Gamma_0 P(x_0)]^2 \Gamma_0 P(x_0)$$

din formula lui Taylor [4] aplicată la operaţia $\Gamma_0 P(x)$, obţinem

$$\| \Gamma_0 P(x_1) \| \leqslant M_0^2 \bar{\eta}_0^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{h_0}{8} \right) + \frac{N_0}{(1+\alpha)(2+\alpha)} \bar{\eta}_0^{2+\alpha} \tau_0^{2+\alpha}$$

sau

$$\| \Gamma_0 P(x_1) \| \leqslant h_0^2 \bar{\eta}_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{h_0}{8} \right) + \frac{\varepsilon_0 \tau_0^{2+\alpha}}{(1+\alpha)(2+\alpha)} h_0^{1+\alpha} \bar{\eta}_0 \leqslant h_0^{1+\alpha} \bar{\eta}_0 \left[\frac{1}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{h_0}{8} + \frac{\varepsilon_0 \tau_0^{2+\alpha}}{(1+\alpha)(2+\alpha)} \right]$$

deoarece $h_0 < 1$.

De aici rezultă că

$$\| \Gamma_1 P(x_1) \| \leqslant h_0^{1+\alpha} c_0^{1+\alpha} \bar{\eta}_0 = \bar{\eta}_1. \tag{2.2}$$

Avînd în vedere că x_1 aparţine sferei S_0, din condiţia 3° obţinem

$$\| \Gamma_0 P''(x_1) \| \leqslant M_0 + N_0 \eta_0^{\alpha} = M_0 (1 + \varepsilon_0 p_0^{\alpha})$$

de unde

$$\| \Gamma_1 P''(x_1) \| \leqslant \frac{M_0 f'(p_0)}{1 - f(p_0)} = M_1 \tag{2.3}$$

deci şi condiţia 2° este verificată pentru x_1.

Avem mai departe

$$h_1 = M_1 \bar{\eta}_1 = \frac{f'(p_0) M_0 \bar{\eta}_0 h_0^{1+\alpha} c_0^{1+\alpha}}{1 - f(p_0)} = k_0^{1+\alpha} h_0 \leqslant h_0 \tag{2.4}$$

de unde rezultă că

$$\tau_1 = 1 + \frac{1}{2} h_1 \leqslant \tau_0 \text{ şi } \| x_2 - x_1 \| \leqslant \tau_1 \bar{\eta}_1 = \eta_1 \leqslant c_0^{1+\alpha} h_0^{1+\alpha} \eta_0 . \tag{2.5}$$

Din (2.1) şi (2.5) rezultă că sfera S_1, definită de inegalitatea $\| x - x_1 \| \leqslant \leqslant \frac{\eta_1}{1 - c_0^{1+\alpha} h_0^{1+\alpha}}$, se află în sfera S_0. În adevăr, fie x un element oarecare din sfera S_1. În acest caz avem

$$\| x - x_0 \| \leqslant \| x - x_1 \| + \| x_1 - x_0 \| \leqslant \frac{\eta_1}{1 - c_0^{1+\alpha} h_0^{1+\alpha}} + \eta_0 \leqslant \frac{\eta_0}{1 - c_0^{1+\alpha} h_0^{1+\alpha}} .$$

De aici rezultă că

$$\| \Gamma_1 P''(x') - \Gamma_1 P''(x'') \| \leqslant \frac{N_0}{1 - f(p_0)} \| \Gamma_0 P''(x') - \Gamma_0 P''(x'') \| \leqslant$$
$$\leqslant N_1 \, \| x' - x'' \|^{\alpha}$$

pentru oricare două puncte x', x'' din sfera S_1 deci şi condiţia 3° este satisfăcută pentru x_1.

Avînd în vedere că $p_1 = M_1 \eta_1 \leqslant M_0 \eta_0 = p_0$ şi $\varepsilon_1 = \frac{N_1}{M_1^{1+\alpha}} = = \frac{[1 - f(p_0)]^{\alpha}}{[f'(p_0)]^{1+\alpha}} \varepsilon_0 \leqslant \varepsilon_0$ rezultă că $f(p_1) \leqslant f(p_0) < 1$ şi $f'(p_1) \leqslant f'(p_0)$. Din aceste inegalităţi împreună cu (2.4) şi (2.5) rezultă că şi condiţiile 4° şi 5° sînt satisfăcute pentru x_1.

Am constatat deci că operaţia $P(x)$ în punctul x_1 satisface aceleaşi condiţii ca şi în x_0 dacă constantele $\bar{\eta}_0$, M_0, N_0, η_0, τ_0, h_0, p_0, ε_0, c_0, k_0 se înlocuiesc respectiv cu $\bar{\eta}_1$, M_1, N_1, η_1, τ_1, h_1, p_1, ε_1, c_1, k_1. Prin metoda inducţiei complete se demonstrează că în punctul x_n condiţiile 1°—5° ale teoremei sînt satisfăcute şi că au loc următoarele relaţii :

$$\bar{\eta}_n = c_{n-1}^{1+\alpha} h_{n-1}^{1+\alpha} \bar{\eta}_{n-1} \leqslant (c_0^{1+\alpha} h_0^{1+\alpha})^n \bar{\eta}_0 , \text{ unde } c_0^{1+\alpha} h_0^{1+\alpha} < 1$$

$$h_n = k_{n-1}^{1+\alpha} h_{n-1} \leqslant \frac{1}{\omega_0^{1+\alpha}} c_0^{1+\alpha} h_{n-1}^{2+\alpha} , \text{ unde } \omega_0^{1+\alpha} = \frac{1 - f(p_0)}{f'(p_0)} \tag{2.6}$$

$$\eta_n = c_{n-1}^{1+\alpha} h_{n-1}^{1+\alpha} \eta_{n-1} \leqslant c_0^{1+\alpha} h_{n-1}^{1+\alpha} \eta_{n-1}$$

de unde rezultă că

$$\eta_n \leqslant \omega_0^{n(1+\alpha)} k_0^{(2+\alpha)^n - 1} \eta_0 \tag{2.7}$$

Folosind relaţia (2.7) obţinem

$$\| x_{n+p} - x_n \| \leqslant \left[\frac{1 - f(p_0)}{f'(p_0)} \right]^n \frac{k_0^{(2+\alpha)^n - 1} \eta_0}{1 - c_0^{1+\alpha} h_0^{1+\alpha}} \left[1 - (c_0^{1+\alpha} h_0^{1+\alpha})^p \right].$$

Spațiul X fiind complet, din ultima inegalitate rezultă că există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$ și în mod evident $x^* \in X$. Dacă în ultima inegalitate trecem la limită cînd $p \to \infty$, obținem inegalitatea care caracterizează rapiditatea convergenței aproximațiilor.

A mai rămas să demonstrăm că x^* este soluția ecuației $P(x) = 0$. Din formula lui Taylor [4] scrisă pentru operația $\Gamma_0 P(x)$ obținem :

$$\| \Gamma_0 P(x_{n+1}) \| \leqslant (M_0 + N_0 \rho_0^{\alpha}) \left(\frac{1}{2} h_0 + \frac{1}{8} h_0^2 \right) \bar{\eta}_n^2 +$$

$$+ \frac{N_0}{(1+\alpha)(2+\alpha)} \| x_{n+1} - x_n \|^{2+\alpha}$$

de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \| \Gamma_0 P x_{n+1}) \| = 0$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} P(x_n) = 0$. Avînd în vedere că operația $P(x)$ este continuă, rezultă că $P(x^*) = 0$ și astfel teorema în întregime este demonstrată.

Primită la redacție la 17 octombrie 1967

Institutul pedagogic Cluj

ON THE SOLVING OF NONLINEAR OPERATIONAL EQUATIONS BY THE METHOD OF THE TANGENT PARABOLAS

(ABSTRACT)

This paper gives some existence theorem of the solution of operational equation (0.1), using the method of tangent parabolas (0.2). The Fréchet derivative $P''(x)$ is supposed as satisfying a Hölder type condition.

In theorem 1 are improved some results of [2]. The remark of theorem 1 permits to avoid the boundeness of $[P'(x_0)]^{-1}$. The theorem 2 improves the theorem 1, assuming the boundeness of $\Gamma_0 P''(x)$ only in the point x_0. Theorem 2 improves the results of [3] too.

BIBLIOGRAFIE

1. М. И. НЕЧЕПУРЕНКО, Усп. мат. наук, **9**, *2/60/* (1964).
2. B. JANKÓ și A. GAIDICI, *Despre rezolvarea ecuațiilor operaționale prin metoda lui Cebîșev.* St. cerc. mat., **18**, *8* (1966).
3. Р. А. ШАФИЕВ, Журн. выч. мат. и мат. физ., **4**, *1* (1964).
4. В. А. ВЕРТЕИМ, ДАН СССР, **110**, *5* (1956).

ASUPRA REZOLVĂRII ECUAȚIILOR OPERAȚIONALE NELINIARE PRIN METODA HIPERBOLELOR TANGENTE

DE

M. BALÁZS și B. JANKÓ

(Cluj)

Se studiază rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare $P(x) = 0$, unde $P(x)$ este o operaţie definită într-un spaţiu liniar normat cu metoda hiperbolelor tangente, dînd noi condiţii de existenţă a soluţiilor şi a convergenţei metodei.

Fie ecuaţia operaţională

$$P(x) = 0, \tag{1}$$

unde $P(x)$ este o operaţie neliniară definită într-o sferă S completă a spaţiului liniar normat X şi cu valori în X. Să presupunem că $P(x)$ admite în S derivate de tip Fréchet pînă la ordinul 3 inclusiv.

Metoda hiperbolelor tangente pentru rezolvarea ecuaţiei (1) este dată de algoritmul

$$x_{n+1} = x_n - \left[I - \frac{1}{2}\Gamma_n P''(x_n)\Gamma_n P(x_n)\right]^{-1}\Gamma_n P(x_n), \tag{2}$$

unde am folosit notaţia $\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$, iar $x_0 \in S$ este o aproximaţie iniţială a soluţiei ecuaţiei (1).

În lucrările noastre [3] şi [4] am stabilit cîteva teoreme relativ la soluţia ecuaţiei (1) precum şi la convergenţa şirului (x_n) definit prin formula (2). În lucrările citate, precum şi în lucrarea [2] se presupune că $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ este mărginit. L. W. Kantorovici [1] a arătat că mărginirea operaţiei Γ_0 nu este necesară în cazul metodei lui Newton.

În lucrarea de faţă vom stabili cîteva teoreme referitoare la existenţa soluţiei ecuaţiei (1), precum şi la convergenţa şirului (x_n) în cazul cînd despre Γ_0 nu se presupune că este mărginită.

TEOREMA 1. *Dacă pentru operaţia* $P(x)$ *există un element* $x_0 \in X$ *astfel încît următoarele condiţii să fie satisfăcute*:

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 6, P. 809–817, BUCUREȘTI, 1968

1° $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ *există*;

2° *are loc delimitarea* $\| x_1 - x_0 \| = \left\| \left[I - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) \right]^{-1} \times \right.$ $\left. \times\ \Gamma_0 P(x_0) \right\| s \eta_0$;

3° $\| \Gamma_0 P''(x) \| \leqslant M, \quad \| \Gamma_0 P'''(x) \| \leqslant N$ *pentru orice* x *din sfera* S *definită de inegalitatea* $\| x - x_0 \| \leqslant 2\eta_0$ *unde* M *și* N *sînt două constante date*;

4° $h_0 = M\eta_0 \leqslant \frac{1}{2}$;

5° $\rho_0 = \frac{5}{4 - 2h_0} + \frac{5N}{6M^2} \leqslant 4,$

atunci *există cel puțin o soluție* $x^* \in S$ *a ecuației* (*1*) *care este limita șirului* (x_n) *definit de relația* (*2*). *Rapiditatea convergenței este dată de delimitarea*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant 2^{1-n} (2h_0)^{3^n - 1} \eta_0 .$$

Demonstrație. Vom arăta că în cazul condițiilor teoremei noastre sînt satisfăcute și condițiile teoremei 1 din [3] pentru ecuația de forma

$$P(x) = \Gamma_0 P(x) = 0 \tag{3}$$

care este echivalentă cu ecuația dată (1). În adevăr, avem

1° $\overline{\Gamma}_0 = [\overline{P}'(x_0)]^{-1} = [\Gamma_0 P'(x_0)]^{-1} = I$, deci $\overline{\Gamma}_0$ există și $\| \overline{\Gamma}_0 \| = 1 = B_0$;

2° $\left\| \left[I - \frac{1}{2} \overline{\Gamma}_0 \overline{P}''(x_0) \Gamma_0 \overline{P}(x_0) \right]^{-1} \overline{\Gamma}_0 \overline{P}(x_0) \right\| = \left\| \left[I - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \times \right.\right.$ $\left.\left. \times\ \Gamma_0 P(x_0) \right]^{-1} \Gamma_0 P(x_0) \right\| \eta_0$;

3° $\| \overline{P}''(x) \| = \| \Gamma_0 P''(x) \| \leqslant M, \quad \| P'''(x) \| = \| \Gamma_0 P'''(x) \| \leqslant N$ pentru orice $x \in S$;

4° $h_0 = B_0 M \eta_0 = M \eta_0 \leqslant \frac{1}{2}$;

5° $\rho_0 = \frac{5}{4 - 2h_0} + \frac{5N}{6B_0 M^2} = \frac{5}{4 - 2h_0} + \frac{5N}{6M^2} \leqslant 4.$

În consecință conform teoremei 1 din [3], ecuația (3) are cel puțin o soluție $x^* \in S$ și $x^* = \lim x_n$, unde șirul (x_n) este construit pe baza (2) folosind operația $\overline{P}(x)$. Însă se arată ușor că acest șir este același cu șirul construit pe baza formulei (2) și cu ajutorul operației $P(x)$. Din egalitatea $P(x^*) = \Gamma_0 P(x^*) = 0$ obținem $P(x^*) = 0$, ceea ce era de demonstrat.

TEOREMA 2. *Dacă pentru operația* $P(x)$ *există un element* $x_0 \in X$ *astfel încît condițiile următoare să fie îndeplinite*:

1° $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ *există*;

2° *avem delimitarea* $\| \Gamma_0 P(x_0) \| \leqslant \bar{\eta}_0$;

3° $\| \Gamma_0 P''(x) \| \leqslant M$, $\| \Gamma_0 P''(x) \| \leqslant N$ *pentru orice* x *din sfera* S *definită de inegalitatea* $\| x - x_0 \| \leqslant \frac{16}{9} \overline{\eta}_0$, *unde* M *și* N *sînt constante;*

4° $\overline{h}_0 = M \overline{\eta}_0 \leqslant \frac{1}{2}$;

$$5° \quad \sigma_0 = \frac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{N}{3M^2\left(1 - \dfrac{1}{2}\overline{h}_0\right)}}{\left(1 - \dfrac{1}{2}\overline{h}_0\right)^2 \left(1 - \dfrac{3}{2}\overline{h}_0\right)} \leqslant 2,$$

atunci există cel puțin o soluție $x^* \in S$ *a ecuației (1) care este limita șirului* (x_n) *definit de relația (2). Rapiditatea convergenței șirului* (x_n) *este caracterizată de inegalitatea*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant 2^{1-2^n} (2\overline{h}_0)^{3^n - 1} \overline{\eta}_0 \left(1 - \frac{1}{2}\overline{h}_0\right)^{-1}.$$

Demonstrarea teoremei se bazează pe teorema 1 din lucrarea [4], urmînd un raționament analog celui folosit în cazul teoremei din prezenta lucrare.

TEOREMA 3. *Dacă sînt satisfăcute următoarele condiții:*

1° $\Gamma(u) = [P'(u)]^{-1}$ *există pentru orice punct* $u \in S$, *unde* S *este sfera completă din* X *definită de inegalitatea* $\| x - x_0 \| \leqslant K\eta$ *și* $K = \sum_{i=0}^{\infty} (hf)^{3^i - 1}$;

2° *avem delimitarea* $\| x_1 - x_0 \| \leqslant \eta < +\infty$;

3° *derivatele de ordinul doi și trei de tip Fréchet satisfac inegalitățile*

$$\| \Gamma(u) P''(x) \| \leqslant M, \quad \| \Gamma(u) P'''(x) \| \leqslant N$$

pentru orice u *și* x *din sfera* S;

4° $h = \eta M < 2$ *și* $hf < 1$, *unde am notat* $f^2 = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}h} \left(\dfrac{1}{4 - 2h} + \dfrac{N}{6M^2} \right)$.

atunci ecuația (1) are o soluție $x^* \in S$ *către care converge șirul dat de formula (2) și rapiditatea convergenței se caracterizează prin evaluarea*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant K\eta (hf)^{3^n - 1}.$$

Demonstrație. Aplicînd formula lui Taylor pentru operația $\Gamma_1 P(x)$ obținem

$$\left\| \Gamma_1 P(x_1) - \Gamma_1 P(x_0) + \Gamma_1 P'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2} \Gamma_1 P''(x_0)(x_1 - x_0)^2 \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{3!} \| \Gamma_1 P'''(x_0 + t_0(x_1 - x_0))(x_1 - x_0)^3 \|$$

sau luînd în considerare identitatea

$$\Gamma_0 P(x_0) + (x_1 - x_0) + \frac{1}{2}\Gamma_0 P''(x_0)(x_1 - x_0)^2 =$$

$$(4) \qquad = \frac{1}{4}\Gamma_0 P''(x_0)\{\Gamma_0 P''(x_0)(\Gamma_0 P(x_0))(x_1 - x_0)\}(x_1 - x_0)$$

demonstrată în lucrarea [3] şi scrisă sub forma

$$P(x_0) + P'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}P''(x_0)(x_1 - x_0)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}P''(x_0)\{\Gamma_0 P''(x_0)(\Gamma_0 P(x_0))(x_1 - x_0)\}(x_1 - x_0)$$

$$\left\| \Gamma_1 P(x_1) - \frac{1}{4}\Gamma_1 P''(x_0)\{\Gamma_0 P''(x_0)(\Gamma_0 P(x_0))(x_1 - x_0)\}(x_1 - x_0) \right\| \times$$

$$\times\, s\,\frac{1}{6}\| \Gamma_1 P'''(x_0 + t_0(x_1 - x_0))(x_1 - x_0)^3 \|$$

de unde

$$\| \Gamma_1 P(x_1) \| \leqslant \frac{1}{4} M^2 \frac{\eta^3}{1 - \frac{1}{2}h} + \frac{1}{6} N\eta^3 = h^2\eta\left(\frac{1}{4 - 2h} + \frac{N}{6M^2}\right) = \Delta$$

şi Δ este mai mic decît η. De aici

$$\| x_2 - x_1 \| \leqslant \frac{\| \Gamma_1 P(x_1) \|}{1 - \frac{1}{2}M\Delta} \leqslant \frac{\| \Gamma_1 P(x_1) \|}{1 - \frac{1}{2}h}$$

sau

$$\| x_2 - x_1 \| \leqslant \frac{M^2}{1 - \frac{1}{2}h}\left(\frac{1}{4 - 2h} + \frac{N}{6M^2}\right)\| x_1 - x_0 \|^3 = M^2 f^2 \| x_1 - x_0 \|^3.$$

Prin inducţie matematică obţinem

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant M^2 f^2 \| x_n - x_{n-1} \|^3$$

de unde ajungem uşor la delimitarea

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant (hf)^{3^n - 1}\,\eta.$$

Arătăm că x_n pentru orice n aparţine sferei S. În adevăr, avem

$$\| x_0 - x_n \| \leqslant \| x_0 - x_1 \| + \| x_1 - x_2 \| + \ldots + \| x_{n-1} - x_n \| \leqslant$$

$$\leqslant \eta \sum_{i=0}^{n-1} (hf)^{3^i - 1} \leqslant K\eta.$$

Deoarece S este complet, în baza inegalităților

$$\| x_{n+p} - x_n \| \leqslant \eta \sum_{i=n}^{n+p-1} (hf)^{3^i-1} < K\eta\,(hf)^{3^n-1}$$

rezultă că șirul (x_n) are o limită $x^* \in S$.

Avînd în vedere că operația $P(x)$ este continuă în punctul x^*, din inegalitatea

$$\| \Gamma(x^*)\, P(x_n) \| \leqslant M^2 \left(\frac{1}{4 - 2h} + \frac{N}{6M^2} \right) \| x_n - x_{n-1} \|^3$$

obținem că $\lim\limits_{n\to\infty} \| \Gamma(x^*)\, P(x_n) \| = \| \Gamma(x^*) P(x^*) = 0$, de unde $\Gamma(x^*) P(x^*) = 0$, deci $P(x^*) = 0$, ceea ce înseamnă că x^* este soluția ecuației (1).

În mod analog se demonstrează :

Teorema 4. *Fie îndeplinite următoarele condiții :*

1° $\Gamma(u) = [P'(u)]^{-1}$ *există pentru orice element* $u \in S$, *unde* S *este sfera completă din* X *definită de inegalitatea* $\| x - x_0 \| \leqslant K \dfrac{\overline{\eta}}{1 - \frac{1}{2}\overline{h}}$ *și* $K = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (\overline{h}\overline{f})^{3^i-1}$;

2° *avem delimitarea* $\| \Gamma_0 P(x_0) \| \leqslant \overline{\eta} < +\infty$;

3° *derivatele de ordinul doi și trei de tip Fréchet satisfac inegalitățile* $\| \Gamma(u) P''(x) \| \leqslant M$, $\| \Gamma(u) P'''(x) \| \leqslant N$ *pentru orice* u *și* x *din sfera* S;

4° $\overline{h} = \overline{\eta} M < 2$ *și* $\overline{h}\overline{f} < 1$, *unde am notat*

$$\overline{f}^2 = \frac{1}{2\left(1 - \frac{1}{2}\overline{h}\right)^3} \left(1 + \frac{N}{3BM^2}\right).$$

În acest caz ecuația operațională $P(x) = 0$ are o soluție $x^* \in S$ $x_n \to x^*$ și avem evaluarea

$$\| x^* - x_n \| < \frac{\overline{\eta}}{1 - \frac{1}{2}\overline{h}} K (\overline{h}\overline{f})^{3^n-1}.$$

Teorema 2 poate fi generalizată pentru cazul cînd $\| \Gamma_0 P''(x) \|$ nu este uniform mărginită într-o sferă, însă $\| \Gamma_0 P''(x_0) \|$ este mărginit. În acest sens demonstrăm următoarea teoremă :

Teorema 5. *Dacă pentru operația* $P(x)$ *există un element* $x_0 \in X$ *astfel încît condițiile următoare să fie satisfăcute :*

1° $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ *există*;

2° *avem delimitările* $\| \Gamma_0 P(x_0) \| \leqslant \overline{\eta}_0$, $\| \Gamma_0 P''(x_0) \| \leqslant M_0$ *și* $M_0 \overline{\eta}_0 < 2$;

3° *operația* $\Gamma_0 P''(x)$ *satisface condiția lui Hölder*

$$\| \Gamma_0 P''(x') - \Gamma_0 P''(x'') \| \leqslant N_0 \| x' - x'' \|^{\alpha},$$

unde 0 < $\alpha \leqslant$ *1, pentru orice* x', x'' *din sfera* S_0 *definită de inegalitatea* $\|x_0 - x\| \leqslant \dfrac{\eta_0}{1 - s_0^{1+\alpha} h_0^{1+\alpha}} = r_0$, *unde* $\eta_0 = \bar{\eta}_0 \sigma_0$, $\sigma_0 = \left(1 - \dfrac{1}{2} M_0 \eta_0\right)^{-1}$;

$$4^\circ \ f(h_0) = h_0 + \frac{1}{1+\alpha} \varepsilon_0 h_0^{1+\alpha} < 1, \text{ unde } h_0 = M_0 \bar{\eta}_0, \ \varepsilon_0 = \frac{N_0}{M_0^{1+\alpha}};$$

$$5^\circ \ t_0^{1+\alpha} = \frac{f'(h_0) s_0^{1+\alpha} h_0^{1+\alpha}}{1 - f(h_0)} \leqslant 1, \text{ unde } s_0^{1+\alpha} = \frac{\dfrac{1}{4} + \dfrac{\varepsilon_0 \sigma_0}{(1+\alpha)(2+\alpha)}}{1 - f(h_0)},$$

atunci există cel puțin o soluție $x^* \in S_0$ *a ecuației (1) care este limita șirului* (x_n) *definit de relația (2). Rapiditatea convergenței șirului este caracterizată de inegalitatea*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \left[\frac{1 - f(h_0)}{f'(h_0)}\right]^n \frac{t_0^{(2+\alpha)^n} \eta_0}{1 - s_0^{1+\alpha} h_0^{1+\alpha}}.$$

Demonstrație. Observăm în primul rînd că în condițiile puse inversa $J_0 = \left[I - \dfrac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0)\right]^{-1}$ există, deci pe baza formulei (2) putem construi elementul x_1 și are loc $\|x_1 - x_0\| \leqslant \eta_0$. În adevăr, din condiția 2° obținem

$$\left\|\frac{1}{2} \Gamma_0 P'(x_0) \Gamma_0 P(x_0)\right\| \leqslant \frac{1}{2} M_0 \bar{\eta}_0 < 1$$

de unde, conform teoremei lui Banach, rezultă existența operației J și inegalitatea

$$\|J_0\| \leqslant \frac{1}{1 - \dfrac{1}{2} M_0 \bar{\eta}_0} = \sigma_0$$

Din formula (2) rezultă

$$\|x_1 - x_0\| \leqslant \|J_0\| \, \|\Gamma_0 P(x_0)\| \leqslant \sigma_0 \bar{\eta}_0 = \eta_0$$

și astfel afirmația este demonstrată.

În continuare demonstrăm că trecînd de la elementul x_0 la elementul x_1, de la elementul x_1 la elementul x_2 etc. condițiile 1°—5° rămîn valabile.

Aplicînd formula lui Taylor [6] pentru operația $\Gamma_0 P'(x)$ obținem

$$\|\Gamma_0 [P'(x_1) - P'(x_0)]\| \leqslant \|\Gamma_0 P''(x_0)(x_1 - x_0)\| + \frac{N_0}{1+\alpha} \|x_1 - x_0\|^{1+\alpha}$$

de unde rezultă că

$$\|\Gamma_0 [P'(x_1) - P'(x_0)]\| < M_0 \eta_0 + \frac{N_0}{1+\alpha} \eta_0^{1+\alpha} = h_0 + \frac{1}{1+\alpha} \varepsilon_0 h_0^{1+\alpha} = f(h_0) < 1.$$

În consecință operația $H = \{I - \Gamma_0[P'(x_0) - P'(x_1)]\} = \Gamma_0 P'(x_1)$ are inversă și

$$\|H^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - f(h_0)}.$$

Din existența operației H^{-1} rezultă existența operației $\Gamma_1 = [P'(x_1)]^{-1}$, deoarece $\Gamma_1 = H^{-1}\Gamma_0$. Deci condiția 1° este satisfăcută pentru x_1.

Folosind relația (4), formula lui Taylor [6] aplicată la operația $\Gamma_0 P(x)$ se scrie

$$\left\| \Gamma_0 P(x_1) - \frac{1}{4} \Gamma_0 P''(x_0) \{\Gamma_0 P''(x_0) (\Gamma_0 P(x_0)) (x_1 - x_0)\} (x_1 - x_0) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{N_0}{(1+\alpha)(2+\alpha)} \| x_1 - x_0 \|^{2+\alpha}$$

de unde obținem că

$$\| \Gamma_0 P(x_1) \| \leqslant \frac{1}{4} M_0^2 \bar{\eta}_0 \eta_0^2 + \frac{N_0}{(1+\alpha)(2+\alpha)} \eta_0^{2+\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant h_0^{1+\alpha} \left(\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon_0 \sigma_0}{(1+\alpha)(2+\alpha)} \right) \bar{\eta}_0$$

și astfel avem

$$(5) \qquad \| \Gamma_1 P(x_1) \| \leqslant \frac{\dfrac{1}{4} + \dfrac{\varepsilon_0 \sigma_0}{(1+\alpha)(2+\alpha)}}{1 - f(h_0)} h_0^{1+\alpha} \bar{\eta}_0 = s_0^{1+\alpha} h_0^{1+\alpha} \bar{\eta}_0 = \bar{\eta}_1.$$

Din condiția 3°, avînd în vedere că x_1 aparține sferei S_0, obținem

$$\|\Gamma_0 P''(x_1)\| \leqslant M_0 + N_0 \eta_0^\alpha$$

de unde avem

$$(6) \qquad \| \Gamma_1 P''(x_1) \| \leqslant \frac{M_0 + N_0 \eta_0^\alpha}{1 - f(h_0)} = \frac{M_0 f'(h_0)}{1 - f(h_0)} = M_1.$$

Din (5) și (6) rezultă că

$$M_1 \bar{\eta}_1 = \frac{M_0 f' h_0) s_0^{1+\alpha} h_0^{1+\alpha} \bar{\eta}_0}{1 - f(h_0)} = t_0^{1+\alpha} M_0 \bar{\eta}_0 \leqslant M_0 \bar{\eta}_0 < 2$$

deci și condiția 2° este satisfăcută pentru x_1. De aici rezultă că operația $J_1 = \left[I - \frac{1}{2} \Gamma_1 P''(x_1) \Gamma_1 P(x_1) \right]$ există și

$$\| J_1 \| \leqslant \frac{1}{1 - \dfrac{1}{2} M_1 \bar{\eta}_1} = \sigma_1 \leqslant \sigma_0.$$

Din formula (2) obţinem deci că

$$\| x_2 - x_1 \| \leqslant \| J_1 \| \| \Gamma_1 P(x_1) \| \leqslant \sigma_1 \bar{\eta}_1 = \eta_1 \leqslant s_0^{1+\alpha} h_0^{1+\alpha} \eta_0 .$$

Acum arătăm că sfera S_1 definită de inegalitatea $\| x_1 - x \| \leqslant \leqslant \frac{\eta_1}{1 - (s_0 h_0)^{1+\alpha}}$ se află în întregime în sfera S_0. În adevăr, fie x un punct oarecare din sfera S_1. Atunci, deoarece avem $\| x_1 - x_0 \| \leqslant \eta_0$, obţinem că

$$\| x - x_0 \| \leqslant \| x - x_1 \| + \| x_1 - x_0 \| \leqslant \frac{\eta_1}{1 - s_0^{1+\alpha} h_0^{1+\alpha}} + \eta_0 = \frac{\eta_0}{1 - s_0^{1+\alpha} h_0^{1+\alpha}}$$

ceea ce era de demonstrat. Deci, pentru orice două puncte din S_1, avem

$$\| \Gamma_1 [P(x') - P(x'')] \| \leqslant \frac{N_0}{1 - f(h_0)} \| x' - x'' \|^\alpha = N_1 \| x' - x'' \|^\alpha$$

deci şi condiţia 3° este satisfăcută pentru x_1.

Avînd în vedere că $h_1 = M_1 \eta_1 \leqslant h_0$, $\varepsilon_1 = \frac{N_1}{M_1^{1+\alpha}} \leqslant \varepsilon_0$ rezultă că $(h_1) \leqslant f(h_0) < 1$. În mod analog, deoarece avem şi $\sigma_1 \leqslant \sigma_0$ rezultă că $s_1^{1+\alpha} \leqslant s_0^{1+\alpha}$ şi astfel $t_1^{1+\alpha} \leqslant t_0^{1+\alpha}$. Deci şi condiţiile 4° şi 5° sînt satisfăcute pentru x_1.

Am constatat deci că operaţia $P(x)$ în punctul x_1 satisface aceleaşi condiţii ca şi în punctul x_0. Prin metoda inducţiei matematice se demonstrează uşor că punctul x_n poate fi construit cu ajutorul formulei (2), operaţia $P(x)$ în acest punct satisface condiţiile 1°—5° şi au loc relaţiile

$$(7) \qquad \begin{cases} s_n^{1+\alpha} \leqslant s_{n-1}^{1+\alpha}, \quad t_n^{1+\alpha} \leqslant t_{n-1}^{1+\alpha}, \quad \bar{\eta}_n \leqslant s_{n-1}^{1+\alpha} h_{n-1}^{1+\alpha} \bar{\eta}_{n-1} \leqslant \bar{\eta}_0 \\ h_n \leqslant t_{n-1}^{1+\alpha} h_{n-1} \leqslant \frac{1}{a_0^{1+\alpha}} s_0^{1+\alpha} h_{n-1}^{2+\alpha}, \text{ unde } a_0^{1+\alpha} = \frac{1 - f(h_0)}{f'(h_0)} \\ \eta_n \leqslant s_{n-1}^{1+\alpha} h_{n-1}^{1+\alpha} \eta_{n-1} \leqslant s_0^{1+\alpha} h_{n-1}^{1+\alpha} \eta_{n-1} . \end{cases}$$

Din relaţiile (7) rezultă inegalitatea

$$\eta_n \leqslant a_0^{(1+\alpha)n} t_0^{(1+\alpha)^n - 1} \eta_0$$

de unde obţinem

$$\| x_{n+p} - x_n \| \leqslant \left[\frac{1 - f(h_0)}{f'(h_0)} \right]^n \frac{t_0^{(2+\alpha)^n - 1} \eta_0}{1 - s_0^{1+\alpha} h_0^{1+\alpha}} [1 - (s_0^{1+\alpha} h_0^{1+\alpha})^p].$$

Ultima inegalitate demonstrează existenţa limitei $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^*$ şi inegalitatea care caracterizează rapiditatea convergenţei şirului (x_n).

A mai rămas să demonstrăm că x^* este soluţia ecuaţiei (1). În acest scop să scriem formula lui Taylor [6] pentru operaţia $\Gamma_0 P(x)$:

$$\left\| \Gamma_0 P(x_{n+1}) - \frac{1}{4} \Gamma_0 P''(x_n) \{(\Gamma_n P(x_n))(x_{n+1} - x_n)\}(x_{n+1} - x_n) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{N_0}{(1+\alpha)(2+\alpha)} \| x_{n+1} - x_n \|^{2+\alpha}.$$

De aici, avînd în vedere că $\| \Gamma_0 P''(x_n) \| \leqslant M_0 + N_0 r_0^\alpha$, obținem

$$\| \Gamma_0 P(x_{n+1}) \| \leqslant \left[\frac{1}{4} (M_0 + N_0 r_0^\alpha) \bar{\eta}_0 + \frac{N_0 \eta_0^\alpha}{(1+\alpha)(2+\alpha)} \right] \| x_{n+1} - x_n \|^2$$

de unde avem $\lim\limits_{n \to \infty} \| \Gamma_0 P(x_{n+1}) \| = 0$ sau $\lim\limits_{n \to \infty} P(x_n) = 0$. Din continuitatea operației $P(x)$ rezultă că $P(x^*) = 0$, și astfel teorema în întregime este demonstrată.

Primită la redacție la 17 octombrie 1967

Institutul pedagogic Cluj
Institutul Pedagogic Baia Mare

ON THE SOLVING OF NONLINEAR OPERATIONAL EQUATIONS BY THE METHOD OF TANGENT HYPERBOLAS

(ABSTRACT)

The paper studies the method of the tangent hyperbolas, solving the nonlinear operational equations $P(x) = 0$, where $P(x)$ is an operator defined in a linear normed space; some new conditions are given for the existence of solutions and convergence of the method.

BIBLIOGRAFIE

1. L. W. Kantorowitsch, E. P. Akilow, *Funktionalanalysis in normierten Räumen*. Akad. Verlag, Berlin, 1964.
2. М. А. Мертвецова, *Аналог процесса касательных гипербол для общих функциональных уравнений*. ДАН СССР, **88**, *4*, 611—614 (1963).
3. B. Jankó, *Despre rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare prin metoda hiperbolelor tangente generalizate*. St. cerc. mat. (Cluj), **14**, *2*, 266—271 (1963).
4. B. Jankó și M. Balázs, *Despre rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare prin metoda hiperbolelor tangente generalizate*. St. cerc. mat., **18**, *6*, 817—828 (1966).
5. Р. А. Шафиев, *О некоторых итерационных процессах*. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., **4**, *1*, 139—143 (1964).
6. Б. А. Вертхейм, *Об условиях применения метода Ньютона*. ДАН СССР, **110**, *5* (1956).

ASUPRA UNOR FORMULE DE CUADRATURĂ, CARE SE OBȚIN DIN PROCEDEE DE INTEGRARE NUMERICĂ A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

DE

A. COŢIU

(Cluj)

În lucrare se dau formulele de cuadratură (26), (30), (50) şi (54), de gradele 3, 4 şi 5 de exactitate, pe un nod şi pe două noduri. Aceste formule se obţin din formule care se folosesc pentru aplicarea unor procedee de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale de ordinul întîi, în cazul particular cînd ecuaţiile diferenţiale sînt de forma $y' = f(x)$. Coeficienţii şi nodurile în formulele de cuadratură date în lucrare sînt raţionale.

Se dau, de asemenea, resturile în aceste formule. Resturile sînt date de relaţiile (27), (31), (51) şi (55).

Se mai arată modul în care se aplică fiecare din formulele de cuadratură date.

În lucrarea de faţă se dau formule de cuadratură de gradele 3, 4 şi 5 de exactitate, pe un nod şi pe două noduri. Formulele, pe care le avem în vedere, se obţin din formule care se folosesc pentru aplicarea unor procedee de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale de ordinul întîi [2], [3], [4], în cazul particular cînd ecuaţiile diferenţiale sînt de forma $y' = f(x)$. Coeficienţii şi nodurile formulelor de cuadratură sînt raţionale.

Se dau, de asemenea, resturile în aceste formule. Procedeul de obţinere a resturilor, aşa cum se va vedea, este strîns legat de observaţia pe care se bazează stabilirea acestor formule de cuadratură.

1. INTRODUCERE

Vom prezenta, în prealabil, cîteva consideraţii [9], care vor conduce în mod natural la observaţia pe care se bazează obţinerea formulelor de cuadratură, pe care le avem în vedere, ca şi a resturilor în aceste formule [5], [6].

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 6, P. 819–831, BUCUREŞTI, 1968

Să considerăm ecuaţia diferenţială de ordinul întîi

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

şi să presupunem că în dreptunghiul D, definit de inegalităţile

$$|x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b,$$

funcţia $f(x, y)$ este continuă şi are derivate parţiale în raport cu x şi y, care sînt continue în D. În acest caz, ecuaţia diferenţială (1) are o soluţie unică, care satisface la condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$ şi care este definită pe un interval de existenţă I inclus în intervalul $|x - x_0| \leqslant a$.

În analiza numerică, un loc de seamă îl ocupă integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale, în care se urmăreşte obţinerea unor formule de aproximare a soluţiilor. Soluţia unei ecuaţii diferenţiale, în analiza numerică, se dă sub forma unei formule de aproximare, formată din doi termeni, de forma

$$y = \tilde{y} + R, \tag{2}$$

unde primul termen al formulei, $\tilde{y}$, se obţine printr-un algoritm de calcul, şi el serveşte la aplicarea în practică a soluţiei y, iar al doilea termen, numit rest, arată în ce măsură numărul calculat $\tilde{y}$, aproximează pe y.

Fie $x = x_0 + h$ un punct din intervalul de existenţă I a soluţiei. Pentru integrarea numerică a ecuaţiei diferenţiale (1), cu condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$, este cunoscut următorul procedeu de ordinul 2 de exactitate [1], pentru aplicarea căruia se foloseşte formula [10]

$$\tilde{y}(x_0 + h) = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \tag{3}$$

unde

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_0, y_0), \\ k_2 &= hf(x_0 + h, \ y_0 + k_1). \end{aligned} \tag{4}$$

Este cunoscut, de asemenea, următorul procedeu de ordinul 3 de exactitate, datorit lui K. Heun [7], pentru aplicarea căruia se foloseşte formula

$$\tilde{y}(x_0 + h) = y_0 + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3), \tag{5}$$

unde

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_0, y_0), \\ k_2 &= hf\left(x_0 + \frac{1}{3}h, \ y_0 + \frac{1}{3}k_1\right), \\ k_3 &= hf\left(x_0 + \frac{2}{3}h, \ y_0 + \frac{2}{3}k_2\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Sînt bine cunoscute, de asemenea, următoarele două procedee de ordinul 4 de exactitate, datorite lui W. Kutta [11], pentru aplicarea cărora se folosesc formulele

$$\tilde{y}\,(x_0 + h) = y_0 + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \tag{7}$$

unde

$$\begin{aligned} k_1 &= hf\,(x_0\,,\, y_0), \\ k_2 &= hf\left(x_0 + \frac{1}{2}\,h,\, y_0 + \frac{1}{2}\,k_1\right), \\ k_3 &= hf\left(x_0 + \frac{1}{2}\,h,\; y_0 + \frac{1}{2}\,k_2\right), \\ k_4 &= hf\,(x_0 + h,\; y_0 + k_3), \end{aligned} \tag{8}$$

şi

$$\tilde{y}\,(x_0 + h) = y_0 + \frac{1}{8}\,(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4), \tag{9}$$

unde

$$\begin{aligned} k_1 &= hf\,(x_0,\, y_0), \\ k_2 &= hf\left(x_0 + \frac{1}{3}\,h,\; y_0 + \frac{1}{3}\,k_1\right), \\ k_3 &= h\,f\left(x_0 + \frac{2}{3}\,h,\; y_0 - \frac{1}{3}\,k_1 + k_2\right), \\ k_4 &= hf\,(x_0 + h,\; y_0 + k_1 - k_2 + k_3). \end{aligned} \tag{10}$$

În cazul particular cînd ecuaţia diferenţială (1) este de forma $y' = f(x)$, din formulele de mai sus se obţin următoarele formule de cuadratură :

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}\,[f(x_0) + f(x_0 + h)] + R, \tag{11}$$

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{4}\left[f(x_0) + 3f\left(x_0 + \frac{2}{3}\,h\right)\right] + R, \tag{12}$$

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{6}\left[f(x_0) + 4f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + f\,(x_0 + h)\right] + R, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{8}\biggl[f(x_0) &+ 3f\left(x_0 + \frac{h}{3}\right) + 3f\left(x_0 + \frac{2}{3}\,h\right) + \\ &+ f(x_0 + h)\biggr] + R. \end{aligned} \tag{14}$$

În teoria formulelor de cuadratură [8], formula (11) se zice formula trapezului şi are gradul de exactitate egal cu 1, formula (12) are gradul 2 de exactitate, iar formulele (13) şi (14) sînt formulele lui Simpson, respectiv ale lui Newton, avînd gradul de exactitate egal cu 3.

2. FORMULE DE CUADRATURĂ DE GRADELE 3 ŞI 4 DE EXACTITATE, PE UN NOD ŞI PE DOUĂ NODURI

Ţinînd seamă de observaţia de mai sus, care ne-a permis să obţinem formulele de cuadratură (11), (12), (13), (14), precum şi de rezultatele date în [6], care se referă la o formulă de cuadratură, ce se obţine din formulele care se folosesc pentru aplicarea procedeului de integrare numerică, de ordinul 6 de exactitate a lui E. Fehlberg [5], în cele ce urmează vom arăta cum se pot obţine formule de cuadratură de gradele 3 şi 4 de exactitate, pe 1 nod şi pe 2 noduri.

În [5] s-a arătat că integrarea ecuaţiei diferenţiale de ordinul întîi

$$z' = \varphi(x, z), \tag{15}$$

cu condiţia iniţială $z(x_0) = z_0$, se reduce, prin transformarea

$$\begin{aligned} z = \theta(x, y) = y + z_0'(x - x_0) + \frac{1}{2} z_0''(x - x_0)^2 + \\ + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_0 (x - x_0)(y - y_0), \end{aligned} \tag{16}$$

la integrarea ecuaţiei diferenţiale de ordinul întîi

$$y' = f(x, y), \tag{17}$$

cu condiţia iniţială $y(x_0) = y_0 = z(x_0) = z_0$. Se presupune că funcţia $\varphi(x, z)$ este continuă într-un anumit domeniu D şi are derivate parţiale în raport cu x şi z, pînă la ordinul 6 inclusiv, care sînt continue în D.

Funcţia $f(x, y)$ care figurează în membrul doi al relaţiei (17) este dată de egalitatea

$$\begin{aligned} f(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_0 (x - x_0)} \Big\{ \varphi[x, \theta(x, y)] - \\ - z_0' - z_0''(x - x_0) - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_0 (y - y_0) \Big\}. \end{aligned} \tag{18}$$

Presupunem că $x = x_0 + h$ este un punct din intervalul de existenţă a soluţiei şi

$$x \neq x_0 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_0^{-1}.$$

Soluția $y(x)$ și funcția $f(x, y)$ satisfac, pe nodul x_0, la condițiile

$$y_0' = 0,\quad y_0'' = 0,\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 0,\quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0. \tag{19}$$

Dacă se integrează numeric ecuația diferențială (17) și se obține soluția ei aproximativă $\tilde{y}(x)$, atunci soluția aproximativă $\tilde{z}(x)$, a ecuației diferențiale inițială (15), se obține înlocuind în egalitatea (16) pe $y(x)$, prin $\tilde{y}(x)$, adică

$$\begin{aligned}\tilde{z}(x) = \tilde{y}(x) + z_0'(x - x_0) + \frac{1}{2} z_0''(x - x_0)^2 + \\ + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0 (x - x_0)\,[\tilde{y}(x) - y_0].\end{aligned} \tag{20}$$

Pentru integrarea numerică a ecuației diferențiale transformată (17), ținînd seama de condițiile (19), în [3] s-a stabilit un procedeu de ordinul 4 de exactitate, pe un nod, pentru aplicarea căruia se folosește formula

$$\tilde{y}(x_0 + h) = y_0 + \frac{16}{27} h f\left(x_0 + \frac{3}{4} h,\ y_0\right). \tag{21}$$

Dacă se iau în considerare și termenii în h^5, atunci, potrivit formulei (2), avem

$$R = y(x_0 + h) - \tilde{y}(x_0 + h) = \frac{1}{120}\left(\frac{1}{16}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 4\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)h^5. \tag{22}$$

Derivatele care figurează în relația (22) sînt calculate într-un punct oarecare (ξ, η) din domeniul D, în care funcția $f(x, y)$ și derivatele sale parțiale în raport cu x și y, pînă la ordinul 4 inclusiv, sînt continue.

De asemenea, ținînd seama de condițiile (19), pentru integrarea numerică a ecuației diferențiale transformată (17), s-a stabilit un procedeu de ordinul 5 de exactitate, pe două noduri, pentru aplicarea căruia se folosește formula [3]

$$\tilde{y}(x_0 + h) = y_0 + \frac{1}{216}(125\,k_1 + 27\,k_2), \tag{23}$$

unde

$$\begin{aligned} k_1 &= hf\left(x_0 + \frac{3}{5} h,\ y_0\right), \\ k_2 &= hf\left(x_0 + h,\ y_0 + \frac{40}{27} k_1\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Se presupune acum că funcția $\varphi(x, z)$, care figurează în membrul doi al relației (15), are derivate parțiale în raport cu x și z, pînă la ordinul 7 inclusiv, continue în D.

Dacă şi aici se consideră şi termenii în h^6, atunci avem

$$R = y(x_0 + h) - \widetilde{y}(x_0 + h) =$$

$$= \frac{1}{720}\left(-\frac{1}{50}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5} + \frac{1}{5}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right)h^6, \tag{25}$$

unde derivatele, care figurează mai sus, sînt calculate într-un punct oarecare (ξ, η) din domeniul D, în care funcţia $f(x, y)$ şi derivatele sale parţiale în raport cu x şi y, pînă la ordinul 5 inclusiv, sînt continue.

În cazul particular cînd ecuaţia diferenţială transformată (17) este de forma $y' = f(x)$, din formulele (2), (21) şi (22), se obţine următoarea formulă de cuadratură, de gradul 3 de exactitate, pe un nod

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{16h}{27} f\left(x_0 + \frac{3}{4}h\right) + R, \tag{26}$$

în care restul R este dat de relaţia

$$R = \frac{h^5}{1920} f^{\mathrm{IV}}(\xi), \tag{27}$$

unde $\xi \in (x_0, x_0 + h)$.

Din formula (27) rezultă următoarea evaluare a valorii absolute a restului în formula de cuadratură (26)

$$|R| \leqslant \frac{h^5}{1920} M_4, \tag{28}$$

unde

$$M_4 = \sup_{x\in[x_0,\, x_0+h]} |f^{\mathrm{IV}}(x)|. \tag{29}$$

De asemenea, în mod analog, din formulele (2), (23), (24) şi (25), rezultă următoarea formulă de cuadratură de gradul 4 de exactitate, pe două noduri

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{216}\left[125 f\left(x_0 + \frac{3}{5}h\right) + 27 f(x_0 + h)\right] + R, \tag{30}$$

în care restul R este dat de egalitatea

$$R = -\frac{h^6}{36000} f^{(5)}(\xi), \tag{31}$$

unde $\xi \in (x_0, x_0 + h)$.

Din formula (31) se obţine următoarea evaluare a valorii absolute a restului în formula de cuadratură (30)

$$|R| \leqslant \frac{h^6}{36000} M_5, \tag{32}$$

unde

$$M_5 = \sup_{x \in [x_0,\, x_0+h]} |f^{(5)}(x)|. \tag{33}$$

Funcţia $f(x)$, care figurează în formulele de cuadratură (26) şi (30), satisface la condiţiile

$$f(x_0) = 0, \quad f'(x_0) = 0,$$

care se obţin imediat din condiţiile (19).

Pentru aplicarea formulelor de cuadratură (26) şi (30), în care evaluările valorilor absolute ale resturilor sînt date de formulele (28), respectiv (32), se procedează în felul următor :

Să presupunem că se cere să se calculeze integrala

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \varphi(x)\, \mathrm{d}x. \tag{34}$$

Cu ajutorul funcţiei $\varphi(x)$, care figurează sub semnul de integrare, se construieşte funcţia $f(x)$, dată de egalitatea

$$f(x) = \varphi(x) - \varphi(x_0) - \varphi'(x_0)(x - x_0), \tag{35}$$

care se obţine uşor din (18); s-a notat $x - x_0 = h$.

Se calculează apoi integrala

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\, \mathrm{d}x, \tag{36}$$

unde funcţia $f(x)$ este dată de egalitatea (35).

Pentru calculul integralei (36) se aplică formula de cuadratură (26) sau (30).

Formula de cuadratură (26), în care f este legat de φ prin (35), unde φ este o funcţie oarecare, este o formulă de cuadratură în φ, cu nodul x_0 dublu şi cu nodul gaussian $x_0 + \frac{3}{4}h$. Este important că formula de cuadratură obişnuită (34) cu nodurile x_0 (dublu) şi $x_0 + \frac{3}{4}h$ (gaussian) se scrie, potrivit ideilor dezvoltate în lucrările [5], [6], sub forma (26), în care restul se poate scrie sub forma

$$R = \int_{x_0}^{x_0+h} \psi(s)\, \varphi^{(4)}(s)\, \mathrm{d}s,$$

unde $\varphi^{(4)} = f^{(4)}$, iar $\psi(s)$ este o funcţie pozitivă pentru $s \in [x_0, x_0 + h]$.

Aceeaşi observaţie este valabilă pentru formula de cuadratură (30), în care $\varphi^{(5)} = f^{(5)}$, însă $\psi(s)$ este o funcţie negativă pe segmentul $[x_0, x_0 + h]$.

Pentru calculul integralei (34) se procedează, în continuare, în felul următor :

Să notăm cu F valoarea aproximativă a integralei (36), adică

$$F = \frac{16h}{27} f\left(x_0 + \frac{3}{4} h\right), \tag{37}$$

sau

$$F = \frac{h}{216}\left[125 f\left(x_0 + \frac{3}{5} h\right) + 27 f(x_0 + h)\right], \tag{38}$$

după cum se aplică formula (26), respectiv formula (30).

Dacă notăm cu Φ valoarea aproximativă a integralei (34), care de altfel ne interesează, atunci pentru calculul lui Φ se aplică următoarea formulă

$$\Phi = F + \varphi(x_0) h + \frac{1}{2} \varphi'(x_0) h^2, \tag{39}$$

care se obține cu ușurință din (20) ; s-a notat $h = x - x_0$.

3. FORMULE DE CUADRATURĂ DE GRADELE 4 ȘI 5 DE EXACTITATE, PE UN NOD ȘI PE DOUĂ NODURI

Procedînd în mod analog ca mai sus, vom arăta acum cum se pot obține formule de cuadratură de gradele 4 și 5 de exactitate, pe un nod și pe două noduri.

În lucrarea [2] s-a arătat că integrarea ecuației diferențiale de ordinul întîi (15), cu condiția inițială $z(x_0) = z_0$, se reduce prin transformarea

$$\begin{aligned} z = \theta_1(x, y) = y + z_0'(x - x_0) + \frac{1}{2} z_0''(x - x_0)^2 + \\ + \frac{1}{3!} z_0'''(x - x_0)^3 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0 (x - x_0)(y - y_0), \end{aligned} \tag{40}$$

la integrarea ecuației diferențiale de ordinul întîi

$$y' = f(x, y), \tag{41}$$

cu condiția inițială $y(x_0) = y_0 = z(x_0) = z_0$.

Funcția $\varphi(x, z)$ este presupusă continuă într-un anumit domeniu D și avînd derivate parțiale în raport cu x și z, pînă la ordinul 7 inclusiv, care sînt continue în D.

Funcţia $f(x, y)$, care figurează în membrul doi al relaţiei (41), este dată de egalitatea

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0 (x - x_0)} \Big\{ \varphi\,[x, \theta_1(x, y)] - z_0' - \tag{42}$$

$$- z_0''(x - x_0) - \frac{1}{2} z_0'''(x - x_0)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0 (y - y_0) \Big\}.$$

Soluţia $y(x)$ şi funcţia $f(x, y)$ satisfac, pe nodul x_0, la condiţiile

$$y_0' = 0\ ,\ y_0'' = 0\ ,\ y_0''' = 0,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 0,\quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 = 0,\quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0. \tag{43}$$

Dacă se integrează numeric ecuaţia diferenţială (41) şi se obţine soluţia ei aproximativă $\tilde{y}(x)$, atunci soluţia aproximativă $\tilde{z}(x)$, a ecuaţiei diferenţiale iniţială (15), se obţine înlocuind în egalitatea (40) pe $y(x)$ prin $\tilde{y}(x)$, adică

$$\tilde{z}(x) = \tilde{y}(x) + z_0'(x - x_0) + \frac{1}{2} z_0''(x - x_0)^2 + \tag{44}$$

$$+ \frac{1}{3!} z_0'''(x - x_0)^3 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0 (x - x_0)\,[\tilde{y}(x) - y_0].$$

Pentru integrarea numerică a ecuaţiei diferenţiale transformată (41), ţinînd seamă de condiţiile (43), în [4], s-a stabilit un procedeu de ordinul 5 de exactitate, pe un nod, pentru aplicarea căruia se foloseşte formula

$$\tilde{y}(x_0 + h) = y_0 + \frac{125}{256} h f\left(x_0 + \frac{4}{5} h,\ y_0\right). \tag{45}$$

Dacă se iau în considerare şi termenii în h^6, atunci, potrivit formulei (2), avem

$$R = y(x_0 + h) - \tilde{y}(x_0 + h) = \tag{46}$$

$$= \frac{1}{720}\left(\frac{1}{25}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5} + 5\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) h^6.$$

Derivatele parţiale care figurează în relaţia (46) sînt calculate într-un punct oarecare (ξ, η) din domeniul D, în care funcţia $f(x, y)$ şi derivatele sale parţiale în raport cu x şi y, pînă la ordinul 5 inclusiv, sînt continue.

De asemenea, ţinînd seamă de condiţiile (43), pentru integrarea numerică a ecuaţiei diferenţiale transformată (41), în aceeaşi lucrare [4] s-a stabilit un procedeu de ordinul 6 de exactitate, pe două noduri, pentru aplicarea căruia se foloseşte formula

$$\tilde{y}(x_0 + h) = y_0 + \frac{1}{160}(81 k_1 + 16 k_2), \tag{47}$$

unde

$$
(48)\qquad \begin{aligned} k_1 &= hf\left(x_0 + \frac{2}{3}h,\ y_0\right), \\ k_2 &= hf\left(x_0 + h,\ y_0 + \frac{45}{32}k_1\right). \end{aligned}
$$

Se presupune acum că funcţia $\varphi(x, z)$, care figurează în membrul doi al ecuaţiei (15), este continuă şi are derivate parţiale în raport cu x şi z, pînă la ordinul 8 inclusiv, continue în D.

Dacă şi aici se iau în considerare şi termenii în h^7, avem

$$
(49)\qquad \begin{aligned} R &= y(x_0 + h) - \tilde{y}(x_0 + h) = \\ &= \frac{1}{5040}\left(-\frac{1}{90}\frac{\partial^6 f}{\partial x^6} - \frac{5}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + \frac{1}{6}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)h^7, \end{aligned}
$$

unde derivatele parţiale, care figurează mai sus, sînt calculate într-un punct oarecare (ξ, η) din domeniul D, în care funcţia $f(x, y)$ şi derivatele sale parţiale în raport cu x şi y, pînă la ordinul 6 inclusiv, sînt continue.

În cazul particular cînd ecuaţia diferenţială transformată (41) este de forma $y' = f(x)$, din formulele (2), (45) şi (46) se obţine următoarea formulă de cuadratură de gradul 4 de exactitate, pe un nod

$$
(50)\qquad \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{125}{256}hf\left(x_0 + \frac{4}{5}h\right) + R,
$$

în care restul este dat de

$$
(51)\qquad R = \frac{h^6}{18000}f^5(\xi),
$$

unde $\xi \in (x_0, x_0 + h)$.

Din formula (51) rezultă următoarea evaluare a valorii absolute a restului în formula (50)

$$
(52)\qquad |R| \leqslant \frac{h^6}{18000}M_5,
$$

unde

$$
(53)\qquad M_5 = \sup_{x \in [x_0,\ x_0+h]} |f^{(5)}(x)|.
$$

De asemenea, din formulele (2), (47), (48) şi (49), în cazul special $y' = f(x)$, pe care-l avem în vedere, rezultă următoarea formulă de cuadratură, de gradul 5 de exactitate, pe două noduri

$$
(54)\qquad \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{160}\left[81 f\left(x_0 + \frac{2}{3}h\right) + 16 f(x_0 + h)\right] + R,
$$

în care restul R este dat de

$$R = -\frac{h^7}{453600} f^{(6)}(\xi), \tag{55}$$

unde $\xi \in (x_0, x_0 + h)$.

Din (55) se obține următoarea evaluare a valorii absolute a restului în formula de cuadratură (54)

$$|R| \leqslant \frac{h^7}{453600} M_6, \tag{56}$$

unde

$$M_6 = \sup_{x \in [x_0, x_0 + h]} |f^{(6)}(x)|. \tag{57}$$

Funcția $f(x)$, care figurează în formulele de cuadratură (50) și (54), satisface la condițiile

$$f(x_0) = 0 \quad , \quad f'(x_0) = 0 \quad , \quad f''(x_0) = 0,$$

care se obțin ușor din condițiile (43).

Pentru aplicarea formulelor de cuadratură (50) și (54), în care evaluările valorilor absolute ale resturilor sînt date de formulele (52) și (56), se procedează în felul următor :

Să presupunem că se cere să se calculeze integrala

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \varphi(x)\, \mathrm{d}x. \tag{58}$$

Cu ajutorul funcției $\varphi(x)$, care figurează sub semnul de integrare, se formează funcția $f(x)$, dată de relația

$$f(x) = \varphi(x) - \varphi(x_0) - \varphi'(x_0)(x - x_0) - \frac{1}{2}\varphi''(x_0)(x - x_0)^2, \tag{59}$$

care se obține imediat din (42).

Se calculează apoi integrala

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\, \mathrm{d}x, \tag{60}$$

unde funcția $f(x)$ este dată de relația (59).

Pentru calculul integralei (60) se aplică formula de cuadratură (50) sau (54).

Formula de cuadratură (50), în care f este legat de φ prin relația (59), unde φ este o funcție oarecare, este o formulă de cuadratură în φ, cu nodurile x_0 (triplu) și $x_0 + \frac{4}{5}h$. Este important să observăm că formula de cuadratură obișnuită pentru calculul integralei (58), cu nodurile

x_0 (triplu) și $x_0 + \frac{4}{5} h$ se scrie, dacă ținem seamă de lucrările [5], [6], sub forma (50). Restul în această formulă se poate scrie sub forma

$$R = \int_{x_0}^{x_0+h} \psi(s)\, \varphi^{(5)}(s)\, \mathrm{d}s,$$

unde $\varphi^{(5)} = f^{(5)}$, iar $\psi(s)$ este o funcție pozitivă pe segmentul $[x_0, x_0 + h]$.

O observație analoagă se poate face relativ la formula de cuadratură (54) avînd nodurile x_0 (triplu), $x_0 + \frac{2}{3} h$, $x_0 + h$, în care restul se poate scrie sub forma

$$R = \int_{x_0}^{x_0+h} \psi(s)\, \varphi^{(6)}(s)\, \mathrm{d}s,$$

unde $\varphi^{(6)} = f^{(6)}$, iar $\psi(s)$ este o funcție negativă pentru $s \in [x_0, x_0 + h]$.

Pentru calculul integralei (58) mai departe, se procedează în felul următor:

Notînd cu F valoarea aproximativă a integralei (60), avem

$$F = \frac{125}{256} hf\left(x_0 + \frac{4}{5} h\right), \tag{61}$$

sau

$$F = \frac{h}{160} \left[[81 f\left(x_0 + \frac{2}{3} h\right) + 16\, f(x_0 + h)\right], \tag{62}$$

după cum se aplică formula (50) sau (54).

Pentru a obține valoarea aproximativă a integralei (58), care ne interesează, și pe care s-o notăm cu Φ, se aplică formula

$$\Phi = F + \varphi(x_0) h + \frac{1}{2} \varphi'(x_0) h^2 + \frac{1}{6} \varphi''(x_0) h^3, \tag{63}$$

care se obține ușor din egalitatea (44); s-a notat $h = x - x_0$.

Primită la redacție la 27 octombrie 1967

Institutul politehnic Cluj
Catedra de matematici

SUR CERTAINES FORMULES DE QUADRATURE, QUE L'ON PEUT OBTENIR PAR DES PROCÉDÉS D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

(RÉSUMÉ)

On donne les formules de quadrature (26), (30), (50) et (54), sur un nœud et deux nœuds, ayant les degrés d'exactitude égaux à 3, 4 et 5. On peut obtenir ces formules à partir de formules utilisées à l'application de certains procédés d'intégration numérique des équations différentielles du premier ordre, dans le cas particulier où les équations différentielles se présentent sous la forme $y' = f(x)$. Les coefficients et les nœuds dans les formules de quadrature étudiées dans ce travail sont des nombres rationnels.

On donne, également, à l'aide des relations (27), (31), (51) et (55), les restes dans ces formules.

Pour l'application de la formule de quadrature (26) ou (30), on procède de la manière suivante : au moyen de la fonction $\varphi(x)$, dont l'intégrale doit être calculée sur l'intervalle $[x_0, x_0 + h]$, on construit la fonction $f(x)$ donné par la relation (35) ; la fonction $f(x)$ satisfait aux conditions $f'(x_0) = 0$; $f'(x_0) = 0$. En appliquant la formule de quadrature (26) ou (30), on calcule ensuite l'intégrale (36), dont la valeur proche F est donnée par l'égalité (37) ou (38). On obtient la valeur proche Φ, de l'intégrale (34), que nous avons en vue, en appliquant la formule (39), où $x - x_0 = h$.

Pour appliquer la formule de quadrature (50) ou (54), on procède d'une manière analogue : au moyen de la fonction $\varphi(x)$ on construit la fonction $f(x)$ donnée par la relation (58) ; la fonction $f(x)$ satisfait aux conditions $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$. Pour le calcul de l'intégrale (36) dont la valeur proche F est donnée par la relation (60) ou (61), on applique la formule de quadrature (50) ou (54) et ensuite on obtient la valeur proche Φ, de l'intégrale (34) que nous devons calculer, en appliquant la formule (62), ou $x - x_0 = h$.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Collatz, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen.* Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1951.
2. A. Coţiu, *Stabilirea unor procedee de ordin înalt de exactitate, de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale.* Analele ştiinţ. ale Univ. ,,Al. I. Cuza'' din Iaşi (serie nouă), Secţ. I (Matematică-fizică-chimie) (Supliment), **6**, *3*, 585—598 (1960).
3. A. Coţiu, Filia Coţiu, *Asupra unor procedee de tip Runge-Kutta, de integrare numerică a ecuaţiei diferenţiale $y' = f(x, y)$.* Studia Univ. Babeş-Bolyai (Cluj), Ser. I, Fasc. 1, Mathematica-Physica, 157—162 (1961).
4. A. Coţiu, *Asupra unor extinderi ale unei transformări a lui Fehlberg.* Bul. ştiinţ. Inst. politehnic Cluj, **4**, 45—54 (1961).
5. E. Fehlberg, *Eine Methode zur Fehlerverkleinerung beim Runge-Kutta-Verfahren.* Z. angew. Math. Mech., **38**, 421—426 (1958).
6. S. Filippi, *Eine einfache Integrationsformel hoher Genauigkeit.* Elemente der Mathematik (Basel), **18**, *3*, 61—63 (1963).
7. K. Heun, *Neue Methode zur approximativen Integration der Differentialgleichungen einer unabhängigen Veränderlichen.* Z. Math. u. Physik, **45**, 23—38 (1900).
8. D. V. Ionescu, *Cuadraturi numerice*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1957.
9. D. V. Ionescu, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, Ed. didactică şi pedagogică, 1964.
10. E. Kamke, *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen.* Vol. I, *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Leipzig, 1959.
11. W. Kutta, *Beitrag zur näherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen.* Z. Math. u. Physik, **46**, 435—453 (1901).

GRUPURI LIE-BANACH DE TRANSFORMĂRI CE LASĂ INVARIANT UN OBIECT GEOMETRIC

DE

MIRCEA CRAIOVEANU

(Iaşi)

În Nota de faţă ne propunem să dăm unele rezultate privind realizarea grupurilor Lie-Banach ca grupuri de transformări precum şi unele chestiuni legate de grupul de invarianţă al unui obiect geometric liniar [2] definit pe o varietate modelată de un spaţiu Banach.

1. Diverşi autori au creat o teorie locală satisfăcătoare privind grupurile Lie ce admit ca spaţiu al parametrilor spaţii Banach [1], [5], [6], [7]. Aici ne propunem să dăm cîteva rezultate privind realizarea acestora ca grupuri de transformări şi unele lucruri legate de grupul de invarianţă al unui obiect geometric liniar.

O varietate diferenţiabilă M de clasă C^{∞} modelată de spaţiul Banach B va fi notată cu M_B.

Un spaţiu topologic G, cu topologia $\mathcal{T}$, se numeşte un grup Lie de clasă C^k peste spaţiul Banach E, dacă sînt satisfăcute condiţiile [7]:

I. G este relativ la topologia $\mathcal{T}$ un grup topologic.

II. G este relativ la topologia $\mathcal{T}$ o varietate diferenţiabilă de clasă C^k modelată de spaţiul Banach E.

III. a) Aplicaţia $(p, q) \to pq$, $(p,q \in G)$ a lui $G \times G$ pe G este diferenţiabilă de clasă C^k.

b) Aplicaţia $p \to p^{-1}$, $(p \in G)$, a lui G pe G este diferenţiabilă de clasă C^k.

Proprietăţile date în această definiţie nu sînt independente între ele; definiţia cuprinde însă pe cele esenţiale [7]. Un astfel de grup va fi notat în cele ce urmează cu G_E. Pentru ca aplicaţiile definite de operaţiile grupale să fie analitice este suficient ca ele să fie uniform diferenţiabile de clasă C^3 [7].

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 6, P. 833-840, BUCUREŞTI, 1968

Adoptăm peste tot în această Notă „convenția de operație" introdusă de D. Laugwitz [5]. $L(B)$, $L(E, B)$ vor nota respectiv algebra operatorilor liniari continui definiți pe B și spațiul Banach al operatorilor liniari continui de la E în B.

2. Ne propunem acum să vedem în ce condiții grupul abstract G_E poate fi realizat ca grup de transformări pe M_B. Bineînțeles este vorba de un studiu local.

Fie G_E un grup de transformări ce acționează pe varietatea M_B. Aceasta înseamnă că fiecare element $T \in G_E$ face ca fiecărui punct $P \in M_B$ să-i corespundă un punct unic

$$\overline{P} = TP. \tag{2.1}$$

Elementul neutru al grupului este transformarea identică și deci lasă pe loc toate punctele lui M_B.

Produsul în G_E coincide cu produsul transformărilor

$$T_2(T_1P) = (T_2T_1)P. \tag{2.2}$$

Grupul G_E acționează efectiv pe M_B dacă singurul element din G_E căruia îi corespunde transformarea identică a lui M_B este elementul neutru.

Considerăm o vecinătate U a elementului neutru din G_E pe care definim o hartă și vecinătatea V a lui M_B pe care acționează G_E.

Elementele spațiului E, notate cu u, v, w etc. vor purta un indice superior din alfabetul mic grec, iar elementele spațiului B vor fi notate cu x, y, z etc. și vor purta un indice superior din alfabetul mic latin.

Presupunem că $T_w = T_u\, T_v$ este dată prin

$$w^\alpha = f^\alpha(u, v), \tag{2.3}$$

unde f sînt funcții analitice.

Relația (2.1) reprezentată analitic ne conduce la ecuațiile grupului de transformări

$$y^i = \varphi^i(x, u), \tag{2.4}$$

unde vom presupune că φ sînt analitice și că transformările (2.4) pot fi rezolvate în privința lui x.

Admitem că transformarea identică corespunde lui 0 (elementul neutru al lui E). Evident că în acest caz avem

$$\varphi^i(x, 0) = x^i. \tag{2.5}$$

Condiția (2.2) conduce la

$$\varphi^i(\varphi(x, v), u) = \varphi^i(x, f^\alpha(u, v)). \tag{2.6}$$

Să considerăm acum un punct $P' \in V$, vecin lui $P \in V$, căruia îi corespunde vectorul $x + \delta x$ și acceptăm că prin transformarea T_{u+du}, corespunzătoare parametrilor din vecinătatea U, este dus în același punct ca și P prin T_u:

$$T_{u+du}\,P' = T_u\,P,$$

ceea ce, reprezentat analitic, ne conduce la

$$\varphi^i(x + \delta x,\ u^\alpha + \mathrm{d}u^\alpha) = \varphi^i(x,\ u^\alpha). \tag{2.7}$$

Pe de altă parte, se știe că [6]

$$u^\alpha + \mathrm{d}u^\alpha = f^\alpha(r(u,\ \mathrm{d}u),\ u), \tag{2.8}$$

unde $r(u,\ \mathrm{d}u)$ sînt formele drept invariante ale lui G_E date de

$$r^\alpha(u,\ \mathrm{d}u) \simeq v^\alpha_\beta(u)\ \mathrm{d}u^\beta,$$

cu

$$v^\alpha_\beta(u) = \frac{\delta f^\alpha(u,\ u^*)}{\delta u^\beta},$$

u^* fiind parametrii transformării inverse lui $T_u \left(\frac{\delta}{\delta u}\right.$ este derivata parțială după primul argument). Funcțiile $v^\alpha_\beta(u) : E \to E^1_1$, numite funcții auxiliare, satisfac ecuația diferențială

$$\frac{\delta v^\alpha_\beta(u)}{\delta u^\gamma} - \frac{\delta v^\alpha_\gamma(u)}{\delta u^\beta} = c^\alpha_{\lambda\mu} v^\lambda_\gamma(u)\, v^\mu_\beta(u), \tag{2.9}$$

unde $c^\alpha_{\lambda\mu}$ este forma biliniară constantă de structură a germenului de grup G_E [6].

Printr-un calcul analog cu cel din cazul finit dimensional [3], în baza ipotezelor făcute se ajunge la

$$\delta x^h = A^h_\alpha(x)\, r^\alpha(u,\ \mathrm{d}u), \tag{2.10}$$

unde $A^h_\alpha(x) \in L(E,\ B)$ au expresia dată de

$$A^i_\alpha(x) = -\frac{\delta\varphi^i(x,\ 0)}{\delta u^\alpha}.$$

A^i_α se vor numi operatori de realizare. Din construcția precedentă urmează că (2.10) este complet integrabil în sensul definit în [6]. (2.10) arată că operatorii de realizare sînt vectori tangenți la varietatea diferențiabilă M_B.

În acest fel am stabilit partea directă a următoarei teoreme :

TEOREMA 2.1. *Condiția necesară și suficientă pentru ca grupul Lie G_E modelat de spațiul Banach E să determine o realizare a acestuia ca grup de transformări pe varietatea diferențiabilă M_B este ca :*

1° *Operatorii liniari $A^i_\alpha \in L(E,\ B)$ să nu depindă decît de punctul x.*

2° *(2.10) să fie complet integrabil în sensul definit în [6].*

Suficiența condiției se demonstrează analog ca în [3].

Observații. 1° În [7] se întîlnește o reprezentare a grupului G_E ca grup de transformări definită cu ajutorul operatorilor de transport. Este vorba de primul și al doilea grup al parametrilor.

2° Condiția de completă integrabilitate a lui (2.10) este echivalentă cu

$$\frac{\delta A^i_\alpha}{\delta x^j} A^j_\beta - \frac{\delta A^i_\beta}{\delta x^j} A^j_\alpha = C^\lambda_{\alpha\beta} A^i_\lambda, \tag{2.11}$$

unde $C^\lambda_{\alpha\beta} \in E^1_2$ este forma biliniară constantă de structură a grupului G_E.

3. Ne ocupăm acum pe scurt de realizările liniare ale unui grup (abstract.

Să presupunem că avem o asemenea realizare, ale cărei ecuații sînt date de

$$y^i = T^i_j(u)\, x^j + T^i(u), \tag{3.1}$$

unde $T^i_j(u)$ este o aplicație analitică a lui G_E în grupul Lie al operatorilor inversabili din $L(B)$. Dacă $T^i(u) = 0$, realizarea se numește omogenă.

Un calcul simplu ne conduce la

$$\delta x^h = \omega^h_j\, x^j + \omega^h, \tag{3.2}$$

în care

$$\begin{cases} \omega^h_j(u,\, \mathrm{d}u) = -\ T^{*h}_i\, \delta T^i_j, \\ \omega^h\,(u,\, \mathrm{d}u) = -\ T^{*h}_i\, \delta T^i, \end{cases} \tag{3.3}$$

T^{*h}_i fiind transformarea inversă a lui T^h_i.

Pe de altă parte, ținînd seama de (2.10) urmează existența funcționalelor multiliniare constante $M^h_{j\alpha}$ și N^h_α definite în $B_1 \times B \times E$, B_1 fiind spațiul funcționalelor mărginite pe B și respectiv în $B_1 \times E$, astfel ca

$$\begin{cases} \omega^h_j(u,\, \mathrm{d}u) = M^h_{j\alpha}\, r^\alpha(u,\, \mathrm{d}u), \\ \omega^h(u,\, \mathrm{d}u) = N^h_\alpha\ \ r^\alpha(u,\, \mathrm{d}u), \end{cases} \tag{3.4}$$

(3.2) devin atunci

$$\delta x^h = (M^h_{j\alpha}\, x^j + N^h_\alpha)\, r^\alpha(u,\, \mathrm{d}u). \tag{3.5}$$

Condițiile de completă integrabilitate (2.11) conduc la

$$\begin{cases} N^h_\alpha\, C^\alpha_{\lambda\mu} = N^i_\lambda\, M^h_{i\mu} - N^i_\mu\, M^h_{i\lambda}, \\ M^h_{j\alpha}\, C^\alpha_{\lambda\mu} = M^i_{j\lambda}\, M^h_{i\mu} - M^i_{j\mu}\, M^h_{i\lambda}. \end{cases} \tag{3.6}$$

Dacă realizarea este omogenă ($N^h_\alpha = 0$), prima relație (3.6) este identic satisfăcută.

Se poate demonstra și proprietatea reciprocă, anume dacă sistemul (3.5) este complet integrabil, unde M și N sînt funcționale multiliniare constante, atunci realizarea fundamentală a grupului G_E (adică (2.4) care îndeplinește condiția (2.5)) determinată de acest sistem este o realizare liniară.

Ca exemplu de realizare liniară a unui grup G_E putem considera reprezentarea adjunctă a lui G_E [6], [7]. Aceasta se obţine luînd $B = T_e$, unde T_e este spaţiul tangent la varietatea grupului în punctul unitate şi alegînd

$$M^{\alpha}_{\lambda\mu} = C^{\alpha}_{\lambda\mu}, \quad N^{\alpha}_{\beta} = 0.$$

În acest caz, a doua relaţie (3.6) se reduce la identitatea lui Iacobi.

4. Considerăm funcţionalele infinitezimale

$$\underset{\alpha}{\mathcal{L}} f = \frac{\delta f}{\delta x^h} A^h_\alpha, \tag{4.1}$$

unde f este o funcţie reală diferenţiabilă definită pe M_B, iar A^h_α sînt operatorii de realizare ai lui G_E pe M_B. (4.1) constituie expresia derivatei Lie a funcţiei reale f în raport cu cîmpul de vectori A^h_α [2]. Ţinînd seama de (2.11) şi formulele (3.13) din [2] obţinem

$$(\underset{\alpha}{\mathcal{L}}\underset{\beta}{\mathcal{L}}) f = C^{\gamma}_{\alpha\beta} \underset{\gamma}{\mathcal{L}} f, \tag{4.2}$$

sau

$$\underset{\alpha}{\mathcal{L}} A^h_\beta = C^{\gamma}_{\alpha\beta} A^h_\gamma, \tag{4.3}$$

unde $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ este forma biliniară constantă de structură a grupului G_E. Cu teorema 3.1 din [2] rezultă drept consecinţă:

Teorema 4.1. *Dacă* $\underset{\alpha}{\mathcal{L}} f$ *sînt funcţionalele infinitezimale ale unui grup* G_E *de transformări, atunci avem formula*

$$(\underset{\alpha}{\mathcal{L}}\underset{\beta}{\mathcal{L}})\, \Omega^\Lambda = C^{\gamma}_{\alpha\beta} \underset{\gamma}{\mathcal{L}} \Omega^\Lambda \tag{4.4}$$

pentru orice obiect geometric liniar Ω^Λ *definit pe* M_B.

Elementelor spaţiului $\mathfrak{B}$ [2] li s-au afectat ca indici superiori literele alfabetului mare grec.

Fie acum obiectul geometric $\Omega^\Lambda(x)$ în M_B de clasă C^k şi grupul G_E de transformări pe M_B

$$\overline{x}^i = \varphi^i(x^i, u^\alpha).$$

Cu notaţiile din [2], dacă grupul are proprietatea

$$'\Omega^\Lambda - \Omega^\Lambda = 0, \tag{4.5}$$

G_E se numeşte un grup de invarianţă al obiectului geometric Ω^Λ.

Să presupunem acum că spaţiul admite o transformare punctuală infinitezimală

$$\overline{x}^i = x^i + \xi^i(x)\,\varepsilon$$

pentru care derivata Lie a obiectului geometric liniar diferenţial Ω^Λ se anulează,

$$\underset{(\xi)}{\mathcal{L}} \Omega^\Lambda = \frac{\delta \Omega^\Lambda}{\delta x^i} \xi^i - \{F, \xi\}^{\Lambda}_{\Sigma} \Omega^\Sigma - \{G, \xi\}^\Lambda = 0. \tag{4.6}$$

În baza relațiilor (1.4) și (2.13) din [2], rezultă că ecuația

$$\underset{(\xi)}{\mathcal{L}}\Omega^\Lambda = 0 \tag{4.7}$$

are sens, căci ea nu depinde de alegerea sistemului de coordonate.

Considerăm acum următoarea problemă : Dat un grup G_E de transformări pe varietatea diferențiabilă M_B, există un obiect geometric liniar Ω^Λ cu legea de transformare dată astfel ca grupul dat să fie un grup de invarianță al obiectului? În acest sens putem enunța următorul rezultat :

TEOREMA 4.2. *Dacă este dat un grup Lie-Banach G_E de transformări pe varietatea diferențiabilă M_B astfel încît operatorii de realizare $A^i_\alpha(x)$ sînt surjectivi într-o vecinătate U a punctului x, grupul dat poate fi privit ca un grup de invarianță al unui obiect geometric liniar într-o vecinătate $V \subset U$.*

Demonstrația detaliată a acestei afirmații reia calculele efectuate în [9] și de aceea nu o dăm.

În particular, avem :

TEOREMA 4.3. *Fie dat un grup Lie-Banach de transformări G_E, cu E spațiu Banach reflexiv, pe varietatea diferențiabilă M_B cu operatorii de realizare $A^i_\alpha(x)$, care satisfac următoarea condiție : presupunem că într-o vecinătate convenabilă U a punctului x există operatorul liniar continuu $C_{i\alpha}(x) : B \to E_1$, E_1 fiind spațiul adjunct lui E, astfel ca*

$$(C_{i\alpha}A^i_\alpha e,\ e) \geqslant C(x)\|e\|^2,$$

oricare ar fi $e \in E$, $C(x)$ fiind o funcție reală în M_B strict pozitivă ($C(x) > 0$) oricare ar fi $x \in U$. Atunci, într-o vecinătate $V \subset U$ a punctului x, grupul G_E poate fi privit ca grup de invarianță al unui obiect geometric liniar.

Într-adevăr, în acest caz operatorii A^i_α sînt surjectivi [4].

5. Fie $\underset{\alpha}{\mathcal{L}}f$ funcționalele infinitezimale din secțiunea precedentă date de (4.1) și fie obiectul geometric liniar omogen $\underset{\alpha}{\Phi^\Lambda} = \underset{\alpha}{\mathcal{L}}\Omega^\Lambda$, unde Ω^Λ este un obiect geometric liniar. Relația (4.2) ne conduce atunci la

$$\underset{\alpha}{\mathcal{L}}\underset{\beta}{\Phi^\Lambda} - \underset{\beta}{\mathcal{L}}\underset{\alpha}{\Phi^\Lambda} = C^\gamma_{\alpha\beta}\underset{\gamma}{\Phi^\Lambda}. \tag{5.1}$$

Dacă obiectul geometric liniar omogen $\underset{\alpha}{\Phi^\Lambda}$ satisface (5.1), se spune că el este complet în raport cu grupul dat G_E. Considerăm acum următoarea generalizare a problemei precedente : dacă $A^i_\alpha(x)$ sînt operatori de realizare a grupului G_E ca grup de transformări pe M_B și dacă $\underset{\alpha}{\Phi^\Lambda}$ este un obiect geometric liniar omogen complet în raport cu grupul dat, ecuația diferențială

$$\underset{\alpha}{\mathcal{L}}\Phi^\Lambda = \frac{\delta\Omega^\Lambda}{\delta x^i}A^i_\alpha - \{F,\ A^i_\alpha\}^\Lambda_\Sigma\,\Omega^\Sigma - \{G,\ A^i_\alpha\}^\Lambda = \underset{\alpha}{\Phi^\Lambda} \tag{5.2}$$

este complet integrabilă?

Analog cu metodele utilizate în [9] putem stabili următoarele teoreme :

TEOREMA 5.1. *Dacă obiectul geometric liniar omogen* $\underset{\alpha}{\Phi}^{\Lambda}$ *este complet în raport cu grupul* G_E *de transformări pe varietatea diferențiabilă* M_B, *pentru care operatorii de realizare sînt surjectivi într-o vecinătate* U, *atunci* $\underset{\alpha}{\pounds}\Omega^{\Lambda} = \underset{\alpha}{\Phi}^{\Lambda}$, *unde* Ω^{Λ} *este un obiect geometric liniar, este complet integrabil într-o vecinătae* $V \subset U$.

TEOREMA 5.2. *Fie dat grupul Lie-Banach de transformări* G_E *ce satisface ipotezele teoremei 4.3 și obiectul* $\underset{\alpha}{\Phi}^{\Lambda}$ *ce satisface ipotezele din teorema 5.1. Atunci într-o vecinătate* $V \subset U$ *a punctului* x *(5.2) este complet integrabil.*

Cu alte cuvinte, atît în cazul teoremei 5.1 cît și în cazul teoremei 5.2, există un obiect geometric liniar Ω^{Λ} astfel încît în raport cu grupul dat să aibă loc (5.2).

TEOREMA 5.3. *Considerăm pe varietatea diferențiabilă* M_B *obiectul geometric liniar omogen* Ω^{Λ} *și presupunem că operatorii de realizare a unui grup* G_E *de transformări pe* M_B *sînt surjectivi și că*

$$\underset{\alpha}{\pounds}\Omega^{\Lambda} = \underset{\alpha}{\rho}\Omega^{\Lambda}$$

unde $\underset{\alpha}{\rho}$ *sînt funcționale reale pe* $E \times M_B$ *(liniare pe* E*). Atunci se poate găsi o funcție reală* f *pe* M_B *astfel ca grupul să fie grup de invarianță al obiectului geometric* $f\Omega^{\Lambda}$.

TEOREMA 5.4. *Considerăm o varietate diferențiabilă* M_B *pe care este definit obiectul geometric liniar* Ω^{Λ} *și presupunem că* M_B *admite un grup* G_E *de transformări astfel încît operatorii de realizare sînt surjectivi într-o vecinătate* U *a punctului* x *și că*

$$\underset{\alpha}{\pounds}\Omega^{\Lambda} = \underset{\alpha}{\Phi}^{\Lambda},$$

unde $\underset{\alpha}{\Phi}^{\Lambda}$ *este un obiect geometric liniar omogen. Atunci se poate găsi totdeauna un obiect geometric liniar omogen* Φ^{Λ} *astfel ca grupul să fie un grup de invarianță al obiectului geometric* $\Omega^{\Lambda} + \Phi^{\Lambda}$.

În sfîrșit, teoremele 5.3 și 5.4 au loc, în particular, în ipotezele teoremei 4.3.

Remarcăm de asemenea că se pot face și în cazul infinit dimensional considerații analoage cu cele din [8] referitoare la obiecte geometrice de tipul $\Omega^{\Lambda}(x, \bar{x})$.

Primită la redacție la 1 noiembrie 1967

Universitatea „Al. I. Cuza” Iași
Facultatea de matematică-mecanică

GROUPES DE LIE-BANACH DE TRANSFORMATIONS LAISSANT INVARIANT UN OBJET GÉOMÉTRIQUE

(RÉSUMÉ)

On donne quelques résultats sur la réalisation des groupes de Lie-Banach comme groupes de transformations ainsi que sur les groupes d'invariance d'un objet géométrique linéaire [2] défini sur une variété ayant pour base un espace de Banach.

BIBLIOGRAFIE

1. Birkhoff G., *Analytical groups.* Trans. Amer. Math. Soc., **43** (1938).
2. Craioveanu M., *Objets géométriques et la dérivée de Lie sur des variétés de dimension infinie.* Analele șt. Univ. Iași, 1967, fasc. 2.
3. Gheorghiev Gh., Miron R. și Papuc D., *Lecții de geometrie* (Sub tipar).
4. Kachurovski R. I., DAN SSSR, **163**, *3*, 559–562 (1965).
5. Laugwitz D., *Über unendliche kontinuierliche Gruppen. I. Grundlagen der Theorie. Untergruppen.* Math. Annalen, **130**, 337–350 (1955).
6. Laugwitz D., *Über unendliche kontinuierliche Gruppen. II. Strukturtheorie lokal-Banachscher Gruppen.* Sitzungsb. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Nat. Kl., 1956, 261–286.
7. Maissen B., *Lie-Gruppen mit Banachräumen als Parameterräume.* Acta Math., **108**, 229–269 (1962).
8. Miron R., *Sur la dérivée de Lie des objets géométriques* $\Omega^{\Lambda}(\xi, \dot{\xi})$. Tensor, N.S., **3** (**7**), 253–260 (1966).
9. Yano K., *The Theory of Lie Derivatives and its Applications.* North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1957, Chapter III.

O GENERALIZARE A TEOREMEI LUI CLEMENT

DE

ION CUCUREZEANU
(Constanța)

Se stabilește o condiție necesară și suficientă ca două numere naturale p și $p+k$ să fie simultan prime.

Vom avea nevoie de următorul rezultat datorat lui A. Simonov a cărei demonstrație o redăm.

Condiția necesară și suficientă ca numărul natural p să fie prim este ca pentru orice k întreg cu $0 \leqslant k \leqslant p-1$ să avem :

$$k!\,(p-k-1)! + (-1)^k \equiv 0 \pmod{p}. \tag{1}$$

Într-adevăr, să presupunem p prim. Din teorema lui Wilson rezultă

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}. \tag{2}$$

Pe de altă parte avem evident :

$$\left.\begin{array}{l} 1 \equiv -(p-1) \\ 2 \equiv -(p-2) \\ \dots\dots\dots \\ k \equiv -(p-k) \end{array}\right\} \pmod{p}. \tag{3}$$

Înmulțind membru cu membru congruențele (2) și (3) găsim :

$$k!\,(p-1)! \equiv (-1)^{k+1}(p-1)(p-2)\dots(p-k) \pmod{p}. \tag{4}$$

Cum p este prim, este prim și cu numerele $p-1, p-2, \dots, p-k$, deci și cu produsul lor și putem simplifica congruența (4) cu acest produs. Obținem :

$$k!\ (p-k-1)! \equiv (-1)^{k+1} \pmod{p}$$

adică relația (1).

Reciproc, dacă este satisfăcută relația (1) și dacă p nu ar fi prim, ar avea un divizor propriu d cu $2 \leqslant d \leqslant \sqrt{p}$. Dar atunci $d \leqslant k$ sau $d \leqslant p-k-1$ (fiindcă dacă $d > k$ și $d > p-k-1 \Rightarrow d \geqslant k+1$ și

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 6, P. 841 – 843, BUCUREȘTI, 1968

$d \geqslant p - k \Rightarrow 2\ d \geqslant p + 1 \Rightarrow 2\sqrt{p} \geqslant 2d \geqslant p + 1 \Rightarrow 4p \geqslant p^2 + 2p + 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow (p-1)^2 \leqslant 0$ şi $p \neq 1$, absurd).

Deci d divide produsul $k!\,(p - k - 1)!$ şi cum d divide $k!\,(p-k-1)! + (-1)^k$, obţinem o contradicţie. Deci p este prim.

Observaţie. Dacă în relaţia (1) facem $k = 0$, obţinem teorema lui Wilson. Luînd $k = 1$ obţinem teorema lui Leibniz. În fond relaţia (1) este o generalizare a teoremei lui Wilson.

Generalizarea teoremei lui Clement. Dacă p este prim cu numerele $2, 3, \ldots, k-1$, atunci condiţia necesară şi suficientă ca numerele p şi $p + k$ să fie simultan prime este ca :

$$k.k!\,[(p-1)! + 1] + (k! - (-1)^k]\,p \equiv 0 \pmod{p\,(p+k)}. \tag{5}$$

Pentru $k = 2$ obţinem teorema lui Clement în legătură cu numerele prime gemene :

Condiţia necesară şi suficientă ca p şi $p+2$ să fie simultan prime este ca

$$4\,[(p-1)! + 1] + p \equiv 0 \pmod{p\,(p+2)}. \tag{5'}$$

Demonstraţie. Necesitatea. Presupunem numerele p şi $p + k$ prime. Din teorema lui Wilson rezultă :

$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Amplificînd această congurenţă cu $k.k!$ şi ţinînd seamă că

$$[k! - (-1)^k]\,p \equiv 0 \pmod{p}$$

rezultă :

$$k.k!\,[(p-1)! + 1] + (k! - (-1)^k]\,p \equiv 0 \pmod{p}. \tag{6}$$

Pe de altă parte, numărul $p + k$ fiind prim, din relaţia (1) rezultă :

$$k!\,(p-1)! + (-1)^k \equiv 0 \pmod{p + k}.$$

De aici şi din egalitatea evidentă :

$$\begin{aligned} &k.k!\,[(p-1)! + 1] + [k! - (-1)^k]\,p = \\ &= k\,[k!\,(p-1)! + (-1)^k] + (p+k)\,[k! - (-1)^k] \end{aligned} \tag{7}$$

rezultă :

$$k.k!\,[(p-1)! + 1] + [k! - (-1)^k]\,p \equiv 0 \pmod{p + k}. \tag{8}$$

Din relaţiile (6) şi (8) şi ţinînd seamă că p şi $p+k$ sînt prime, rezultă relaţia (5) care trebuie demonstrată.

Suficienţa. Presupunem p prim cu $2, 3, \ldots, k-1$ şi relaţia (5) din enunţ verificată. Din (5) şi (7) rezultă $p + k | k\ [k!\,(p-1)! + (-1)^k]$ şi de aici rezultă $(p + k, k) \cong 1$. Într-adevăr, dacă $(p + k, k) \cong d (d \geqslant 2)$, atunci $p + k = d\rho$, $k = d\delta$ şi $(\rho, \delta) \cong 1$ şi cum $d\rho | d\delta\ [k!\,(p-1)! + (-1)^k] \Rightarrow \rho | k!\,(p-1)! + (-1)^k$ dar atunci $\rho \leqslant k$ sau $\rho \leqslant p - 1$, căci dacă $\rho > k$ şi $\rho > p - 1 \Rightarrow \rho > k$ şi $\rho \geqslant p \Rightarrow 2\rho > p + k$ ceea ce este fals fiindcă $p + k = d\rho$ cu $d \geqslant 2$ şi deci $p + k \geqslant 2\rho$. Deci $\rho / k!\,(p-1)!$ şi cum $\rho | k!\,(p-1)! + (-1)^k$, obţinem o contradicţie dacă $\rho \neq 1$.

Dacă însă $\rho = 1$, avem $p + k = d$, $k = d\delta$ o altă contradicție. Deci $d = 1$. Dar din faptul că $(p + k, k) \cong 1$ şi $p + k|k\ [k!\ (p-1)! + (-1)^k]$ rezultă că $p + k|k!\ (p-1)! + (-1)^k$. De aici şi din rezultatul obținut la început (unde în loc de p avem $p + k$) deducem că $p + k$ este prim.

Din raționamentul precedent a rezultat $(p + k, k) \cong 1$.

De aici rezultă imediat $(p, k) \cong 1$.

Din congruența (5) rezultă că $p|k.k!\ [(p-1)! + 1]$ şi cum $(p, k) \cong 1$ şi p e prim cu $2, 3, \ldots, k-1$, rezultă că $p|(p-1)! + 1$. De aici şi din reciproca teoremei lui Wilson rezultă că şi p este prim şi teorema este complet demonstrată.

Observație. Pentru suficiența condiției, adică pentru ca p şi $p + k$ să fie simultan prime, pe lîngă îndeplinirea relației (5) trebuie de asemenea ca p să fie prim cu $2, 3, \ldots, k-1$.

Într-adevăr, pentru $p = 6$ şi $k = 5$ deci pentru numerele 6 şi 11 avem :

$$\underbrace{5.5!\,(5! + 1) + (5! + 1)\,6}_{6A} = \underbrace{5\,(5!5! - 1) + 11\,(5! + 1)}_{11B} = 6.11.\ \text{c},$$

deci relația (5) este verificată şi totuşi numerele 6 şi 11 nu sînt amîndouă prime.

Primită la redacție la 2 februarie 1968

Institutul Pedagogic Constanța

UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE CLEMENT

(RÉSUMÉ)

On établit une condition nécessaire et suffisante pour que deux nombres naturels p et $p+k$ soient simultanément primes.

BIBLIOGRAFIE

1. I. Creangă, C. Cazacu, P. Minuț, Gh. Opaiț, C. Reischer, *Introducere în teoria numerelor*. Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1965.
2. C. P. Popovici, *Aritmetică şi teoria numerelor*. Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1963.
3. В. Грибанов, П. Тишов, *Сборник упражнений по теории чисел*. Москва, 1964.

SCHIȚĂ PENTRU O TEORIE ARITMETICĂ A SENSULUI ȘI VALORII

DE

A. D. LEMENY

În acest articol vom încerca să determinăm, cu ajutorul unor relații matematice simple, cele două elemente fundamentale de gîndire : sensul și valoarea. De aceea încercarea prezentă poate fi considerată ca o nouă metodă de axiomatizare, atît în privința modului procedural, cît și în ceea ce privește obiectul axiomatizat. Această metodă are ca principii ideile axiomatice de unu și de continuitate, idei care alcătuiesc două ansamble : U și C, formate fiecare din cîte patru elemente, ce corespund unor idei majore. Astfel, elementele ansamblului U corespund ideilor de unitate, univocitate, unicitate, universalitate, iar ale ansamblului C ideilor de convergență, consecvență, coerență, coeziune. Cu aceste două ansamble vom opera pe de o parte pentru definirea valorii, pe de altă parte pentru determinarea ecuației sensului și în sinteză vom stabili un criteriu de evaluare obiectivă, evaluare care este însăși rezultanta celor doi vectori ai cugetului : sensul și valoarea.

1. DEFINIREA VALORII

Orice sistem de gîndire, adică orice construcție a cugetului, presupune niște idei principiale. De ce? Fiindcă aceste principii sînt considerate a avea valoare superioară față de restul sistemului. Deci însăși principiile presupun ceva : valoarea, ceea ce ne îndreptățește să afirmăm că nu se poate gîndire fără valoare și că întreaga cugetare nu este decît un vast sistem de evaluare, mai sistematic sau mai puțin sistematic, va să zică mai mult sau mai puțin metodic sau ordonat. Numai în măsura în care un principiu are valoare poate fi socotit ca atare și luat drept temei unor elaborări ale gîndirii. Dar ce este valoarea? Sau, altfel exprimat : ce constituie valoarea? Valoarea o constituie relația cu Unul. Adevărul acestei afirmații îl putem verifica examinînd felul cum conceptul de principiu presupune ideea de valoare, deoarece pentru a fi valabil principiul, trebuie să fie :

1. Unitar, adică să aibă coeziune.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 6, P. 845–858, BUCUREȘTI, 1968

2. Univoc, ceea ce înseamnă că el trebuie să străbată întregul sistem, dîndu-i consecvență.
3. Unic, deci să nu poată fi dedus din alt concept.
4. Universal, prin urmare integral-comprehensiv.

Aceste predicate pe care trebuie să le întrunească principiul le vom nota cu u_1, u_2, u_3, u_4; ele alcătuiesc ansamblul Unului (U). Așadar, $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Fiecare din aceste elemente corespunde unei relații atributive de valoare, după cum urmează:

$u_1 \rightarrow [U \cdot x \subset U \vee \{u\} \cdot x \subset \{u\}]$ (unitatea), care se citește: produsul ansamblului U sau $\{u\}$ cu un element generic (arbitrar) x este inclus în U sau $\{u\}$.

$u_2 \rightarrow [U \rightarrow \mathfrak{P}(U)]$ (univocitatea), adică: ansamblul U corespunde univoc ansamblului subansamblelor sale.

$u_3 \rightarrow [\prod_u (u \in U) \Rightarrow (\{u\} \subset U)]$ (unicitatea), ceea ce înseamnă că: pentru fiecare element u aparținînd ansamblului U există un ansamblu care conține numai pe u, iar acest ansamblu $\{u\}$ este inclus în U.

$u_4 \rightarrow [\max \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \Leftrightarrow \bigcup_{u \in U} = A \in U]$ (universalitatea) care se citește: pentru ca ansamblul U să aibă un element maximum este necesar și suficient ca reuniunea elementelor lui U să aparțină lui U, maximul fiind chiar această reuniune.

Aceste relații sînt evidente, prin ele însele, adică își au evidența lor proprie și autonomă; de aceea le considerăm fundamentale. Din ele rezultă imediat:

$$u_1 = f(U \cdot x \subset U)$$

$$u_2 = f(U \rightarrow \mathfrak{P}(U))$$

$$u_3 = f(\prod_u (u \in U) \Rightarrow (\{u\} \subset U))$$

$$u_4 = f(\max \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \Leftrightarrow \bigcup_{u \in U} = A \in U).$$

Iar relațiile fundamentale de mai sus, fiind necesare și suficiente pentru atribuirea valorii, urmează că:

$$\prod_X (\tau_X \Leftrightarrow \{u_1, u_2, u_3, u_4\}_X) \vee \prod_X (\tau_X \Leftrightarrow X \Rightarrow [(U \cdot x \subset U) \wedge (U \rightarrow \mathfrak{P}(U)) \wedge$$

$$\wedge (\prod_u (u \in U) \Rightarrow (\{u\} \subset U)) \wedge (\max \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \Leftrightarrow \bigcup_{u \in U} = A \in U)]^{1)})$$

$$\prod_X (\tau_X \Leftrightarrow U - \{u_1, u_2, u_3, u_4\}_X \rightarrow \emptyset)$$

$$\tau_X > \tau_Y \Leftrightarrow \{u_1, u_2, u_3, u_4\}_X > \{u_1, u_2, u_3, u_4\}_Y \wedge X_U \supset Y_U,$$

unde X_U și Y_U sînt urmele lui X și Y pe U.

Este ușor de observat că orice elaborare a cugetului sau orice construcție a conștiinței gînditoare (notate cu X și Y, deoarece pot fi

---

1) În cele ce urmează, pentru ușurința exprimării, vom nota aceste patru relații fundamentale cu literele g, h, i, j, respectînd ordinea lor firească, așa cum a fost prezentată pînă acum.

reprezentate ca ansamble) sînt cu atît mai valoroase, cu cît satisfac mai complet condițiile ansamblului U, fiind compatibile cu mai multe elemente din U și implicînd mai multe relații atributive de valoare. În adevăr, dacă

$$nu_Y < nu_X,$$

atunci evident că

$$\tau_Y < \tau_X,$$

deoarece Y implică mai puține relații timetice 2) fundamentale decît X; în consecință este valabilă și expresia

$$U - (U \cap X) < U - (U \cap Y).$$

Așadar, Unul se manifestă pe această cale, întrucît poate să se manifeste pe cale analitică.

Dar trebuie să avem în vedere că pe de o parte

$$[g \subset h \subset i \subset j] \Rightarrow [(U - \{u_1\}) > (U - \{u_2\}) > (U - \{u_3\}) > (U - \{u_4\})],$$

adică unitatea, univocitatea, unicitatea și universalitatea fiind ordonate prin incluziune, înseamnă că elementele ansamblului U se află și ele într-o ordine corespunzătoare, iar pe de altă parte

$$u_1 = (u_{1a} < u_{1b} < u_{1c} < \ldots),$$
$$u_2 = (u_{2a} < u_{2b} < u_{2c} < \ldots),$$
$$u_3 = (u_{3a} < u_{3b} < u_{3c} < \ldots),$$
$$u_4 = (u_{4a} < u_{4b} < u_{4c} < \ldots),$$

deoarece $\prod_{u \in U} (u \Rightarrow (\max \wedge \min))$, deci fiecare element din U este gradat, avînd diferite trepte sau niveluri între un maxim și un minim, pe care este necesar să le afle calculul valorii, pentru a fi exact. Numai astfel vom putea stabili în cazuri individuale o ierarhie a valorii, adică vom putea recunoaște dacă o elaborare a cugetului (lucrare matematică, operă de artă etc.) este superioară alteia.

În adevăr, este evident că se poate ca

$$(u_1)_X \neq (u_1)_Y \wedge (u_2)_X \neq (u_2)_Y \wedge (u_3)_X \neq (u_3)_Y \wedge (u_4)_X \neq (u_4)_Y,$$

adică este posibil ca două asemenea elaborări (X și Y) să fie unitare, univoce, unice, universale și totuși ele să nu fie la fel de unitare, univoce, unice sau universale. Cum stabilim în acest caz nivelul fiecărui element sau atribut valoric și deci cum avem posibilitatea evaluării concrete?

Pentru aceasta trebuie să cunoaștem modul de structurare a domeniului cugetării sau — mai precis — modul de ordonare a elementelor sinetice 3) (sens, motiv, rost, noimă etc.), fiindcă în acest domeniu nimic nu poate să existe fără a avea sens, deci fără a fi adevărat, cele două expresii fiind sinonime, avînd în vedere că sensul este un exponent al

---

2) Termen derivat din τιμή, care înseamnă valoare în limba elenă.

3) Termen obținut din σύνεσις = sens în limba elenă.

adevărului ; de aceea non-sensul înseamnă non-existență pentru cugetarea adevărată, cel mai evident exemplu în această privință fiind însăşi cugetarea matematică, a cărei primă întrebare poartă asupra existenței, adică asupra condițiilor în care este posibilă existența, ceea ce — evident — revine la întrebarea asupra condițiilor în care este cu putință adevărul. Pe de altă parte, este cert că sfera cugetării stricte, adică a gîndirii riguros adevărate, implică în mod necesar ideea de ordine, în lipsa căreia totul se destramă, după cum cea mai frumoasă melodie se pierde într-un sgomot urît, enervant, dacă nu se respectă ordinea notelor, atunci cînd e cîntată ; prin urmare cunoaşterea ordonării este de primă importanță pentru orice evaluare corectă, deoarece trebuie să ştim ce întemeiază şi cum se orientează consecuția actelor cugetării. Iar o asemenea ordonare e determinată de o anumită relație, adică ea are loc printr-o formă care dispune, aranjează, grupează, deci stabileşte legături structurale, asigurînd un criteriu de judecare coerentă, prin constituirea unui mod fundamental de raportare reciprocă şi de conexiune existențială şi astfel compunînd întregul edificiu al cugetării. Dar este evident că această relație ordonatoare nu poate fi decît sau egalitatea, sau incluziunea, fiindcă ea trebuie să semnifice fie identitatea valorică, fie cuprinderea valorilor una într-alta şi dispunerea lor într-un nex continuu, în care superiorul să conțină inferiorul. Nu avem nevoie de un prea mare efort pentru a înțelege că prima alternativă — identitatea valorilor — nu poate să fie valabilă, deoarece pe de o parte actele cugetului sînt unice, pe de altă parte elementele şi structurile cugetării, în care se cristalizează aceste acte, sînt şi ele unice, avînd proprietăți individuale [4]), ceea ce desigur că impune şi diferențe valorice între ele, imposibil de redus la acelaşi plan, rang şi nivel (de exemplu diferența între teorie şi teoremă). De altfel, se ştie prea bine că stabilirea unicității este una din preocupările majore ale matematicilor, care demonstrează — atunci cînd este cazul — posibilitatea de a fi unic şi ar fi o indiferență prea grosolană să trecem cu vederea asemenea demonstrații, indiferență care fără îndoială că ne-ar induce în eroare. De aceea incluziunea este singura relație capabilă să exprime modul de asociere şi să semnifice modul de distribuire al existenților constituanți ai cugetării şi, în consecință, universalitatea reprezintă criteriul decisiv al rangului la care se situează elementele ansamblului U, considerate arbitrar (adică oricare ar fi ele). În adevăr, ori de cîte ori diferențele

$$\{u_1\}_X - \{u_1\}_Y \vee \{u_2\}_X - \{u_2\}_Y \vee \{u_3\}_X - \{u_3\}_Y$$

nu sînt evidente prin ele însele, trebuie să facem apel la universalitate pentru a hotărî care dintre posesorii (X sau Y) acelor atribute (u_1, u_2, u_3) este mai bogat şi mai îndreptățit în posesia lui şi, în definitiv,

$$(X \vee Y) \Rightarrow \overset{>}{t},$$

adică poziția căruia este mai valabilă sau mai adevărată (ştiind că valoarea e funcție de adevăr). Dar atunci este necesară soluționarea expresiei

$$f(\tau) \rightarrow (j \Rightarrow u_4),$$

---

[4]) În matematici, orice ansamblu este ,,a proper individual'', conf. [1], pag. 56.

va să zică este nevoie de o estimare sau evaluare, de unde să rezulte universalitatea și prin ea elementul universal ($u_4 \in U$), pentru a obține un mod de determinare a gradelor celorlalte elemente, ca și motivarea acestei determinări, și astfel să decidem asupra valorii, ceea ce înseamnă că o asemenea estimare reprezintă un auxiliar esențial în deciziunea timetică, avînd rolul unei leme sau teoreme ajutătoare în demonstrație. Prin urmare, vom avea

$$[f(\tau) \rightarrow (j \Rightarrow u_4)] \Rightarrow f(\tau) \, [(u_{1a} < u_{1b} < \ldots) \wedge (u_{2a} < u_{2b} < \ldots) \wedge \\ \wedge (u_{3a} < u_{3b} < \ldots)],$$

deci

$$f(\tau) \; u_4 \rightarrow \prod_{f(\tau)} (f(\tau)_X).$$

Iar calculul universalității, în cazuri concrete, va fi următorul:

$$X \supset Y \Leftrightarrow \sum_{\sigma} (X \ni \sigma \notin Y) \wedge \sigma_X \Rightarrow (e \wedge s)_Y \Rightarrow w(\sigma_Y),$$

adică ansamblul X (o lucrare concretă) este mai universal decît ansamblul Y (o altă lucrare concretă), dacă și numai dacă există cel puțin un sens care aparține lui X, dar nu aparține lui Y și acest sens (σ_X) implică evidența și semnificația lui Y, deci o înțelegere a sensului său. Exemple evidente, care să ateste definirea noțiunii de „mai universal”, așa cum am dat-o, găsim îndeosebi în matematici, unde sensul sintetizator al cugetării superioare ca universalitate aduce o înțelegere directă asupra cugetării inferioare din acest punct de vedere. Astfel, teoria ansamblelor transcende, teoria categoriilor și a grupurilor, care nu ar putea fi înțelese fără ea, după cum — la rîndul ei — teoria inelelor este, ca și teoria grupurilor, întrecută de teoria structurilor algebrice, al căror sens este indispensabil înțelegerii noțiunilor de inel și de grup. De asemenea, în filozofie, teoriile — oricare ar fi ele (a valorii, a cunoașterii, a culturii etc.) — au nevoie în primul rînd de teoria adevărului, care le include pe toate, constituind fundamentul necesar al inteligibilității lor.

Aceste exemple au arătat motivele pentru care am definit gradul universalității ca depinzînd de modul sinetic de care este capabilă opera (filozofică, poetică, matematică etc.), mod care permite o modalitate de concepere a altor opere, adică generează posibilitatea unor determinări mai mult sau mai puțin comprehensive. Iar delimitările sensurilor din care rezultă înțelegerile (și deci delimitările însăși a înțelegerilor corespunzătoare) se stabilesc fără dificultate, cu suficientă precizie, ținînd seama de un singur amănunt esențial: orientarea firesc-sinetică, în a cărei direcție converg atît sensul, cît și înțelegerea, ceea ce înseamnă că aceasta din urmă se lărgește cu cît primul pătrunde mai adînc, deoarece este evident că numai atunci cînd s-a ajuns la elemente fundamentale, se poate cugeta în libertate desăvîrșită.

Să introducem acum noțiunea de intensitate sau putere de unificare, a cărei importanță pentru gîndire o vom constata imediat. În adevăr

$$\prod_{\{u\} \subset U} \; \sum_{fu_3} \; [fu_3 (\{u\} \equiv\rightarrow U)], \text{ deci } \{u\}_U = \aleph,$$

ceea ce înseamnă că

$$\prod_{\{u\}\subset U} \sum_{\tau u_3} (\tau u_3 \Rightarrow \bigcup_{\tau} \{u\}_{\tau}),$$

care se traduce prin : pentru orice subansamblu $\{u\}$ al ansamblului U există o singură funcție care efectuează o aplicație biunivocă între U și o parte oarecare a lui ($\{u\}$), deci acest subansamblu sau parte are o putere transfinită ($\aleph$), adică este de puterea infinitului în act, ceea ce înseamnă că pentru orice subansamblu $\{u\}$ inclus în ansamblul U există o valoare și numai una, care unifică sau concentrează toate valorile lui $\{u\}$.

De asemenea, se poate spune că puterea de unificare este posibilitatea de integrare a tuturor valorilor ansamblului U, ca limită a acestora în sensul integralei Lebesgue, va să zică prin considerarea „înălțimii" lor (folosind aici termenii valoare și înălțime în loc de atribut valoric și superioritate valorică).

Așadar, intensitatea sau puterea de unificare (u_k) este o funcție care operează sinteza atributelor Unului (u_1, u_2, u_3, u_4) ; de aceea ea parcurge toate aceste atribute printr-un impuls continuu, valorificînd prin tensiunea intrinsecă ei valabilitatea fiecăruia :

$$u_k = f(u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow u_3 \rightarrow u_4)_U \Rightarrow (u_1 \subset u_2 \subset u_3 \subset u_4)_U,$$

de unde rezultă că

$$u_k \Rightarrow \overset{>}{\tau} (tu_1 \cup tu_2 \cup tu_3 \cup tu_4),$$

deoarece

$$u_k \Rightarrow U^{\aleph}.$$

În consecință,

$$f(u_k) \Rightarrow R \text{ transf } f(U) = \left[\frac{g}{h} = \frac{i}{j}\right] = 1.$$

Aceasta înseamnă că o asemenea funcție unificatoare poate să stabilească o relație de transformare a Unului (U) într-o proporție a atributelor sale, de unde să rezulte însăși forma lui simplă (1). Se observă că egalitatea rapoartelor este o proporție, deoarece există convergență firească pe de o parte între unitate și univocitate, pe de altă parte între unicitate și universalitate, termenii fiecărui raport fiind direct proporționali între ei, iar cuplarea lor datorindu-se tocmai acestei directe proporționalități. De asemenea este evident că ordinea termenilor în această proporție decide și justifică ordonarea atributelor (unitate, univocitate, unicitate, universalitate), desfășurate pe partea superioară a axei verticale a sistemului de coordonate rectangulare ce constituie criteriul valorii, pe care îl vom prezenta în paginile următoare.

Din cele arătate pînă acum, putem constata că un criteriu de evaluare ca acela pe care îl elaborăm cuprinde toate valorile posibile, adică și cele matematice, a căror omisiune din teoria valorii nu poate să fie decît o eliminare eronată, avînd la origine ideea preconcepută, admisă fără examinare prealabilă, deși foarte larg răspîndită, că domeniul valorilor se extinde numai asupra eticului și esteticului. Dar am văzut că însăși principiile, din orice domeniu ar fi (deci nu numai morale și artistice), nu pot să existe decît presupunînd ideea de valoare și de aceea am fi îndreptățiți să extindem această idee, considerînd principiile ca valori. Însă pe lîngă acest mod de evaluare, în matematici valoarea primește de obicei un sens numeric; de exemplu, o funcție ia în variațiile ei cutare și cutare valori exprimate în numere, sinusul sau tangenta unui arc în valoare de un anumit număr de grade are o anumită valoare, care e tot numerică etc. Care este înțelesul acestor judecăți de valoare sui generis? Ce justificare timetică are numărul, adică în ce măsură poate el să reprezinte valoarea? Criteriul valorii dă un răspuns precis acestor întrebări, lămurind totodată modul neortodox al matematicilor de a interpreta valoarea: numerele sînt expresii ale valorii, deoarece sînt implicații ale unității și univocității și deci, prin acestea din urmă, presupun Unul (adică tocmai ceea ce dă sau atribuie valoare). Astfel, acest criteriu este o metodă determinativă a valorii, valoarea fiind înțeleasă în cel mai larg sens cu putință.

2. ECUAȚIA SENSULUI

Pentru a obține ecuația sensului, adică o relație care să ne dea integral, riguros, exact structura sinetică fundamentală, cu alte cuvinte pentru a stabili însăși temeiurile de judecare strictă, este necesar să raționăm în modul următor:

$$\prod_{\sigma} (\sigma) \Leftrightarrow R \text{ ord } \tau(\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \ldots),$$

deci

$$\prod_{\sigma} |\sigma| \Leftrightarrow R \text{ ord } U(\sigma_{U_1 < U_2 < U_3 < \ldots}) \wedge \prod_{\sigma} [\sigma \Rightarrow \bigcup_{m \in \sigma} (m_1, m_2, m_3, \ldots)],$$

deoarece $\prod_{\sigma} (\sigma \supset \{m_1, m_2, m_3, \ldots\})$.

Dar $m \Rightarrow (e \wedge s)_{\sigma} \wedge m \rightarrow \sigma R m = \sigma \subset \mathfrak{Q}(m) \wedge \mathfrak{Q}(m) < \sigma$.

Deci $\prod_{\sigma} (\sigma \leftarrow \{m_1 \subset m_2 \subset m_3 \subset \ldots\})$, fiindcă

$\sigma \Rightarrow [(m' \top m'') \wedge (m' \perp m'')]_M$.

În consecință,

$$\prod_{m \in \sigma} (m \Leftarrow F_{\sigma}) \Rightarrow \sum_{\sigma} (\sigma \Rightarrow R \text{ ord } \{m_1 < m_2 < m_3 < \ldots\}).$$

Așadar, sensurile se ordonează conform valorii lor, deci conform relației cu Unul, fiecare sens fiind — la rîndul lui — un punct de acumulare a motivelor, vreau să spun a elementelor care îl promovează și explicitează cu un cuvînt îl motivează, ceea ce înseamnă că motivele presupun sensul ca temei, dar îi exprimă înțelesul, făcîndu-i evidentă semnificația; de aceea cunoașterea motivelor înlesnește cunoașterea sensului. Prin urmare, fiecărui sens îi corespunde univoc o structură de motive, fiindcă el implică legile de compoziție ale motivelor, care determină structurile.

Desigur că între motive și sensuri există directă proporționalitate, deoarece cu cît primele sînt mai puternice, cu atît secundele vor fi mai evidente, dar evidența lor nu atinge modalitatea lor creatoare, adică modul cum se creează și ceea ce le face să fie, va să zică fundamentele lor. Acestea depășesc puterea motivării, fiindcă motivele nu constituie sensurile, ci sînt constituite de ele și pe baza lor. Relația sens-motiv (motivare) este similară relației teoremă-demonstrație, deoarece în ambele, ultimul termen nu face decît să lămurească primul, fără să-i poată arăta originea sau cuprinde orizontul elaborării sau prevedea posibilitățile tendințelor (intențiilor), cu un cuvînt întreaga semnificație, asemenea legilor armoniei care nu pot să dea seama de muzicalitatea melodiilor, ci trebuie să se limiteze la prezentarea lor formală. De aceea se poate afirma că motivele reprezintă făptura sensului, adică faptul că el este, dar ele nu-i fundează firea, aceasta rămînînd în afara lor și ca atare nemotivată.

Dar cum putem recunoaște dacă motivele aparțin aceluiași sens, cu alte cuvinte, după ce criteriu ne dăm seama care este sensul presupus unor motive cunoscute (relația sens-motiv fiind — așa cum am arătat în expresiile de mai sus — tot una de presupunere-implicație)? Criteriul este dat de primele două condiții ale Unului : unitatea și univocitatea, care dacă sînt satisfăcute de mai multe motive, sensul se descopere de la sine.

În consecință, pentru cunoașterea sensului, trebuie să avem în vedere următoarele relații :

Dacă $\sum [g \wedge h]_{(m_1, m_2, \dots)}$, atunci $\{m_1, m_2, \dots\} \subset \sigma(u_3)$.

Dar $\{m_1, m_2, \dots\} = M$ și $N \subset M$, de unde rezultă că

$$(e)_\sigma = (g \cap h)_N \wedge (s)_\sigma = (g \cup h)_M,$$

deoarece

$$(e)_\sigma \Leftrightarrow [N_M \to (g \wedge h)] \wedge (s)_\sigma \Leftrightarrow [M \to (g \wedge h)].$$

Într-adevăr, se observă fără dificultate că evidența trebuie să fie dată de intersecția unității cu univocitatea, ea fiind partea lor comună, pe cînd unitatea și univocitatea numai reunite pot să dea semnificația, aceasta cerînd atît coeziunea cît și coherența motivelor, ceea ce implică o convergență și o consecvență riguroasă a lor.

În sfîrșit, este evident că

$$(g \top h) \supset \prod_{v \in m} (v_m = v'_m \cup v''_m) \Rightarrow (v'_m = F \to f(R) \vee v''_m = f(R)),$$

ceea ce înseamnă că prin compunerea unității cu univocitatea cuprindem întregul înțeles (adică nu numai cel rațional) al motivului, care poate fi atît temeiul unui act ($F \to f(R)$), deci justificarea lui, cît însuși actul ($f(R)$) în esența lui și prin urmare de asemenea făptura lui; primul înțeles al motivului îl întîlnim în toate elaborările gîndirii, secundul numai în artă.

Așadar, ecuația generală a sensului va fi de forma

$$(e \vee s)_\sigma = (g \top h)_M.$$

Acum putem încerca o definire a propoziției adevărate (α) :

$$\sum_\alpha (\alpha) \Leftrightarrow \alpha \in \Pi \; [s \subset f(\mathfrak{L}(\text{sub})) \wedge s \subset f(\mathfrak{L}(\text{pred}))],$$

ceea ce înseamnă că o propoziție oarecare α are valoare de adevăr, dacă și numai dacă poate să aparțină ca element tuturor semnificațiilor posibil de obținut din noțiunile de subiect și predicat, folosite în propoziție și considerate separat una de alta. Cu alte cuvinte, adevărul propoziției se revelă din consecințele ei; în toate acestea el trebuie să subziste, pentru ca propoziția să fie adevărată.

3. CRITERIUL VALORII

Modul matematic de cugetare generează și structurează un univers, o lume universală, definită printr-o ordine care adeseori este paradoxală pentru logica simțului comun, fiind comparabilă cu ontologia creată de arte. În ce constă această lume sui generis, care îi sînt pozițiile, atitudinile, situațiile specifice și care este modul cel mai potrivit de aflare și explicare a lor? Iată întrebări cărora numai o dialectică a sensului și valorii este capabilă să le răspundă, fiindcă o asemenea lume nu există decît prin aceste două elemente (sensul și valoarea), ceea ce se înțelege fără dificultate, avînd în vedere că ea este un domeniu de cugetare strictă și, în consecință, îi sînt necesare atît înțelesul (ca element explicativ), cît și valabilitatea (ca termen justificativ).

Astfel, întregul domeniu matematic este funcție de ordinea compatibilă sensului și valorii, adică $f(\mathrm{ord}) \rightarrow \sigma \wedge \tau$, dar pot fi aceste două elemente $(\sigma \wedge \tau)$ analizate mai adînc și unde ne-ar duce o asemenea analiză, acum după ce le-am definit, cel puțin în linii generale? Iată întrebări cărora vom încerca să le răspundem fără ocol, folosind ,,intentio recta'' matematică, iar pentru aceasta vom începe prin cîteva relații, care trebuie luate în considerare spre a evita un eventual echivoc, ce ar putea să planeze asupra constatărilor subsecvente, și spre a stabili exactitatea înțelesului fiecărui obiect al teoriei ce expunem. De aceea este necesar să formulăm:

$$\sigma = v \cap k$$

$$\tau = w \cap t$$

$$\sigma \equiv\rightarrow \tau$$

$$\sum_{s} (S) \Leftrightarrow S \Rightarrow (v, k) \in U \sim (x, y) \in X,$$

deoarece

$$(x, y) \rightarrow z \in (X \times X, X) \wedge (v, k) \rightarrow \tau \in (U \times C, U),$$

adică

$$\tau = f \cap (v, k),\ v = f(U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}) \wedge$$

$$k = f(C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\})\ ^{4)}.$$

Se observă desigur că sensul este intersecția înțelesului cu tendința, valoarea este intersecția înțelegerii cu valabilitatea, de unde se poate

---

4) Acest ultim ansamblu vom arăta imediat în ce constă.

infera că sensul este o aplicaţie biunivocă pe valoare, fiindcă înţelesul tinde spre înţelegere şi tendinţa spre valabilitate. De altfel, este evident că relaţia $\sigma \equiv\!\rightarrow \tau$ constituie de asemenea concluzia firească a celor două paragrafe anterioare : definirea valorii şi ecuaţia sensului. Iar analogia între orice sistem de gîndire şi legea de compoziţie internă (operaţie fundamentală în matematici) se justifică prin asemănarea perechii (înţeles, tendinţă), căreia îi corespunde valoarea, cu perechea elementelor algebrice (x, y), avînd drept corespondent elementul z. Mai mult încă, asemenea operaţiei algebrice care se defineşte în produsul ansamblelor $X \times X$ şi ia valori în acelaşi ansamblu X, sistemul gîndirii se defineşte în produsul a două ansamble similare $U \times C$, luîndu-şi valorile tot în U.

Am arătat în ce constă ansamblul U, precum şi relaţiile atributive de valoare cărora le corespund elementele lui ; să vedem acum din ce se compune ansamblul C şi care sînt clasele de corespondenţă ale elementelor sale. Aceste clase le vom numi relaţii contributive la evaluare, iar corespondenţa elementelor lui C cu ele se stabileşte în modul următor :

$c_1 \rightarrow [\sum\limits_{c \in C} (\bigcap f(C))]$ (convergenţa) : există cel puţin un element c aparţinînd ansamblului C şi avînd proprietatea a fi intersecţia tuturor funcţiilor (aplicaţiilor) lui C.

$c_2 \rightarrow [\cdot \prod\limits_{c \in C} (f(\mathfrak{P}(C))]$ (consecvenţa) : oricare element c din C are proprietatea de a putea fi extins la ansamblul subansamblelor lui C.

$c_3 \mapsto [C_1 \subset C \Rightarrow \prod\limits_{c \in C_1} (f(c) \in C)]$ (coherenţa) : relaţia de incluziune a unui subansamblu generic C_1 în ansamblul C implică proprietatea oricărui element c din C_1 de a fi o aplicaţie în C.

$c_4 \rightarrow [\rceil \prod\limits_{c \in C} (\bigcap f(c) = \emptyset)]$ (coeziunea) : nu există nici un element c din C pentru care intersecţia aplicaţiilor să fie nulă ; cu alte cuvinte aceste aplicaţii nu sînt disjuncte.

Astfel, gîndirea sensului şi valorii este o cugetare autentică, din moment ce operează cu factori principali şi structuri esenţiale pentru cuget şi din moment ce ea se constituie numai prin instituirea unor asemenea principii şi esenţe. Iar cugetarea matematică este evident că poate să reprezinte cel mai preţios auxiliar pentru stabilirea oricărui sens şi judecarea fiecărei valori, numai deoarece este ea însăşi o gîndire a sensului şi valorii, ceea ce atestă chiar operaţiile ei elementare, după cum constatăm din expresiile de mai sus.

Însă

$$\sum_{S}[f(\mathrm{ord}) \rightarrow (\sigma, \tau)]_S \Leftrightarrow S \Rightarrow R(\mathrm{pred}) = f(\tau)\ \sigma \vee \sum_{S}(S) \Leftrightarrow \sum_{\mathrm{Met}} \mathrm{Met}[s(\sigma) \wedge e(\tau)]$$

$$\mathrm{Met} \Rightarrow \prod_{xRy \in \mathrm{Met}} [(xR\,y) \Rightarrow \rceil \sum x' \wedge y'\,(xRx'Ry'Ry)]$$

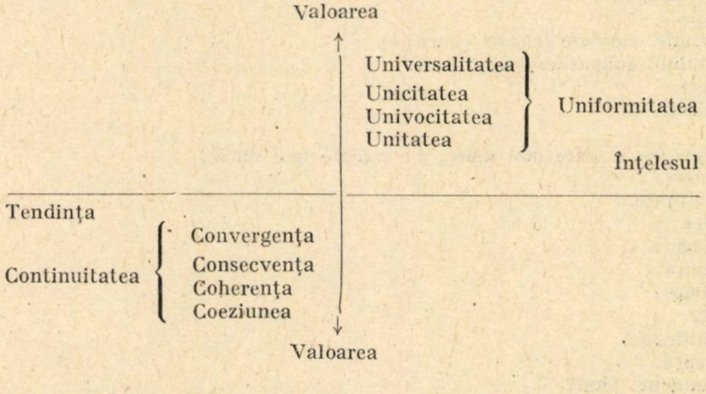
$$\mathrm{Met} \Rightarrow \prod (X,\ Y, \ldots) \subset \mathfrak{P}(\mathrm{Met}) \vee \complement\, P(\mathrm{Met}) = \emptyset.$$

Aceste trei relaţii ne arată că o gîndire a sensului şi valorii are nevoie de o metodă, cu ajutorul căreia sensurile şi valorile să poată fi obţinute în modul cel mai autentic, adică de maniera cea mai exactă, proprie, specifică ; mai mult încă, ea trebuie să fie această metodă însăşi, deoarece numai astfel reuşeşte să întrunească două calităţi constructive, la fel de importante : aceea de a fi directă, va să zică de a produce imediat, și aceea de a fi universală, deci a ființa comprehensiv, în toate direcțiile, și integral, deci cu toate resursele. În adevăr, construirea ontologiei cugetării fiind o elaborare perfectă, trebuie să țină seama în egală măsură atît de sens cît și de valoare, aceste două elemente fiind — așa cum am remarcat mai înainte — într-o relație biunivocă, deoarece nu pot fi definite decît una prin cealaltă, determinările sinetice depinzînd de atribute valorice, după cum — reciproc — acestea din urmă funcționează numai datorită celor dintîi. Cu alte cuvinte, sensul și valoarea sînt cele două coordonate necesare și suficiente, ale cugetării, contribuind în egală măsură la o expansiune circulară și totodată verticală, adică la o dezvoltare stabilă și superioară a cugetului, asemenea unor transformări topologice biunivoce și bicontinue, cugetul tinzînd în permanență spre un unic majorant comun atît sensului cît și valorii, perechea acestor elemente de gîndire universală (sens, valoare) comportîndu-se ca perechea unor elemente algebrice (x, y) într-o semilatice superioară. În adevăr,

$$(\sigma, \tau) \Rightarrow \mathfrak{L}(U)_U = \{U \mid U \in \mathfrak{L}(U), U > (\sigma, \tau)\} \Leftrightarrow [(x, y) \in X] \Rightarrow X_z =$$
$$= \{z \mid z \in X,\ z > (x, y) \in X\},$$

deci $$(\sigma, \tau) \Leftarrow \sum_{Uu_3} (U \supset (\sigma, \tau)),\ \text{deoarece}\ U \Rightarrow (\sigma, \tau).$$

Acest unic majorant comun vom demonstra în continuare că nu e decît însuși Unul, din care se deduc deopotrivă sensul și valoarea ca operatori principali de cugetare, iar deducția se va efectua cu ajutorul unei metode simple (nu însă simpliste), metoda coordonatelor carteziene, care pe de o parte permite desfășurarea integrală a sensului, prin întinderea pe abscisă a celor două ipostaze caracteristice, proprii lui : înțelesul și tendința, pe de altă parte dă posibilitate valorii să-și instituie pe ordonată toate atributele, estimînd orice predicat sinetic, fie că ar aparține aspectului inteligibil, fie că s-ar manifesta ca tendință. De aceea, această metodă va avea următoarea înfățișare schematică :



Așadar, sensul are două aspecte : aspectul înțelesului, de unde este posibil să rezulte o înțelegere superioară sub forma simplă a Unului, și aspectul tendinței, care poate să ducă la idealul continuității. Cu alte cuvinte, unitatea, univocitatea, unicitatea, universalitatea, sînt forme de unificare a înțelesului în forma Unului (uniformitate), iar convergența, consecvenţa, coherenţa, coeziunea sînt atribute de intensificare a tendinţei, pentru asigurarea continuităţii, adică tot în vederea edificării unei singure structuri simple. După cum se remarcă, intensitatea, care fusese prezentată mai sus printr-o singură expresie (ca putere de unificare), este acum analizată cu ajutorul unui ansamblu compus din patru elemente ($C = c_1, c_2, c_3, c_4$).

Este uşor de observat că prin intermediul sistemului de coordonare astfel definit, evaluarea sensurilor se face cu ajutorul trasării de curbe timetice (posibil a fi numite, cu aceeaşi exactitate, şi curbe sinetice), iar aceste curbe pot să fie continue sau să prezinte discontinuităţi (ceea ce desigur le-ar scădea din valoare), după cum îndeplinesc sau nu atributele valorice, va să zică după cum înţelesurile şi tendinţele sînt sau nu îndreptăţite să li se atribuie calităţile situate pe ordonată (axa valorii).

NOTAŢIA

$\wedge$	conjuncţie (şi).
$\vee$	disjuncţie (sau, ceea ce nu exclude posibilitatea de a avea simultan ambele părţi ale alternativei).
$\rceil$	negaţie.
R	relaţie (R ord : relaţie de ordine, R pred : relaţie predicativă).
$\Pi P(u)$	oricare ar fi u, avem $P(u)$, adică orice obiect u are proprietatea P.
$\sum\limits_{u} P(u)$	există un obiect u pentru care este adevărată proprietatea P.
$\top$	lege de compoziţie internă.
$\perp$	lege de compoziţie externă.
$\Leftrightarrow$	echivalenţă („dacă şi numai dacă”).
$\rightarrow$	corespondenţă univocă, compatibilitate.
$\equiv\!\rightarrow$	aplicaţie biunivocă.
$\Rightarrow$	implicaţie.
$\sim$	asemănare.
$\Vert$	limită, determinare ultimă.
$\subset$	incluziune.
$\in$	apartenenţă.
f	funcţie.
X, Y	ansamble oarecare (cazuri concrete).
$\mathfrak{P}(X)$	ansamblul subansamblelor lui X.
sub	subiect.
pred	predicat.
σ	sens
τ	valoare ($\overset{>}{\tau}$: valoare mai mare, $\overset{<}{\tau}$: valoare mai mică).
$f(\tau)$	evaluare.
t	valabilitate.
v	înţeles.
w	înţelegere.
k	tendinţă.
M	motivare.
m	motiv.
s	semnificaţie.
e	evidenţă.
F	fundament, temei.
S	sistem de gîndire.
Met	metodă.

Universitatea din Bucureşti
Facultatea de matematică şi mecanică,
Str. Academiei nr. 14

ESQUISSE D'UNE THÉORIE ARITHMÉTIQUE DU SENS ET DE LA VALEUR

(Esquisse d'une esquisse)

(RÉSUMÉ)

Dans cet article nous essaierons de déterminer, a l'aide de quelques relations mathématiques simples, les deux éléments fondamentaux de la pensée : le sens et la valeur. Commençons par cette dernière. Qu'est-ce qui constitue la valeur? Ce qui constitue la valeur c'est la relation avec l'Un. Nous pouvons vérifier la vérité de cette affirmation en examinant comment le concept de principe présuppose l'idée de la valeur, car pour qu'il soit valable, le principe doit être :

1. unitaire, c'est-à-dire qu'il doit avoir de la cohésion ;
2. univoque, c'est-à-dire qu'il doit parcourir tout le système et le rendre conséquent ;
3. unique, donc qu'il ne puisse être déduit d'un autre concept ;
4. universel, par conséquent intégralement compréhensif.

Ces prédicats que le principe doit réunir forment l'ensemble de l'Un, à savoir : $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

Il est facile d'observer que toute élaboration ou construction de la pensée (notée par X ou par Y, vu qu'elle peut être représentée comme un ensemble) a d'autant plus de valeur, qu'elle satisfait d'une manière plus complète aux conditions de l'ensemble U, étant compatible avec plusieurs de ses éléments. Donc en notant par X_U et Y_U les traces de X et de Y sur U, nous aurons

$$(X_U \supset Y_U) \Rightarrow \tau_X > \tau_Y ,$$

où τ : valeur.

Pour obtenir l'équation du sens, nous devons avoir en vue d'une part que le sens doit être évident et significatif, d'autre part que chaque sens est un point d'accumulation des motifs, c'est-à-dire des éléments qui le promuent et l'explicitent. Donc les relations seront les suivantes :

$$(e)_\sigma = (u_1 \cap u_2)_N \wedge (s)_\sigma = (u_1 \cup u_2)_M ,$$

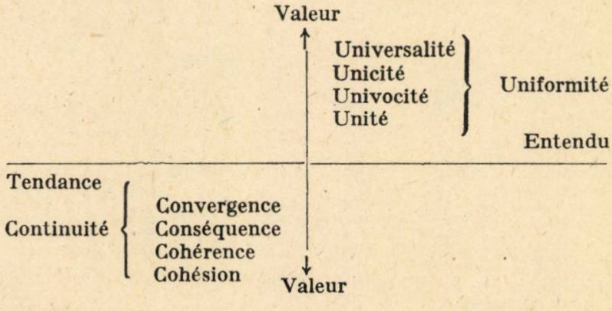
car

$$(e)_\sigma \Leftrightarrow [N_M \rightarrow (u_1 \wedge u_2)] \wedge (s)_\sigma \Leftrightarrow [M \rightarrow (u_1 \wedge u_2)],$$

où σ, sens ; e évidence ; s, signification ; M, motivation (ensemble de motifs) ; N, sous-ensemble de M. Certes, l'évidence doit être donnée par l'intersection de l'unité avec l'univocité, vu qu'elle est leur partie commune, alors que l'unité et l'univocité seulement réunies peuvent constituer la signification, celle-ci exigeant autant la cohésion que la cohérence des motifs.

Mais le sens étant l'intersection de la tendance avec l'entendu (c'est-à-dire tout contenu intelligible), il sera déterminé par la multiplication des deux ensembles : C et U, le premier ayant aussi quatre éléments : $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, qui signifient les idées de convergence, de conséquence, de cohérence, de cohésion.

En somme, la relation entre le sens et la valeur peut avoir la représentation schématique suivante :



C'est un critère qui nous permet d'évaluer avec une rigueur suffisante tout objet de la pensée, en traçant la courbe de sa valeur.

BIBLIOGRAFIE

1. Paul Bernays, *Axiomatic Set Theory. With a Historical Introduction by Abraham A. Fraenkel.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam ,1958.
2. W. Sierpinski, *Cardinal and Ordinal Numbers.* Warszawa, 1958.
3. D. Barbilian, *Teoria Aritmetică a Idealelor (în inele necomutative).* Editura Academiei R.P.R., Bucureşti, 1956.

CONEXIUNI MEROMORFE

DE

ALEXANDRU MIHAI

Se defineşte noţiunea de conexiune meromorfă într-o manieră analoagă celei lui Atiyah [1], ceea ce permite abordarea problemei existenţei. Se demonstrează că există conexiuni meromorfe pentru orice fibrare analitică complexă peste o varietate algebrică proiectivă.

A. Fie $E \xrightarrow{p} V$ o fibrare vectorială olomorfă peste varietatea analitică complexă compactă V.

După Atiyah, $E \xrightarrow{p} V$ admite o conexiune olomorfă, descrisă local prin forme olomorfe, dacă şi numai dacă scindează următorul şir exact

$$0 \to E \otimes T^* \to D(E) \to E \to 0, \tag{1}$$

unde T este spaţiul fibrat cotangent asociat varietăţii iar $D(\mathrm{E})$ se defineşte prin fasciculul germenilor de secţiuni olomorfe

$$D(\mathrm{E}) = \mathrm{E} \underset{C}{\oplus} \mathrm{E} \underset{C}{\otimes} \mathrm{T}^*$$

înzestrat cu o anumită structură de O-modul.

În cele ce urmează vom asocia fibrării date $E \to V$ un şir exact care diferă de şirul (1) prin aceea că în locul lui T^* vom pune $T_S^* = T \otimes \{S\}$, unde $\{S\}$ este fibrarea cu linii asociată unui divizor olomorf S. Şirului exact astfel construit îi asociem obstrucţia $b_S(E) \in H^1(V, \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{E} \otimes \mathrm{T}_S^*))$, existenţa unei conexiuni meromorfe fiind echivalentă cu $b_S(E) = 0$.

Aplicînd la o teoremă din [3], rezultă că $H^1(V, \mathrm{Hom}(\mathbf{E}, \mathbf{E} \otimes \mathbf{T}_S^*)) = 0$, atunci cînd V este o varietate algebrică proiectivă şi cînd fibrarea cu linii $\{S\}$ are proprietatea de a fi pozitivă în sensul lui Kodaira [6].

Conexiunile meromorfe au fost studiate pentru spaţiul fibrat tangent la o suprafaţă riemanniană de C. Teleman [8]. Autorul mulţumeşte tov. C. Teleman pentru îndrumarea de a studia această temă precum şi pentru fructuoasele discuţii.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 6, P. 859–865, BUCUREŞTI, 1968

B. În această secţiune dăm o parte din definiţiile şi propoziţiile necesare.

Fie E, E', E'' spaţii fibrate vectoriale peste varietatea analitică complexă V.

Se numeşte extindere a lui E'' prin E' şirul exact de spaţii fibrate vectoriale

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0.$$

Se spune că două extensii ale lui E'' prin E' sînt echivalente dacă putem scrie diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E' \arrow[r] \arrow[d, "I'"] & E_1 \arrow[r] \arrow[d] & E'' \arrow[r] \arrow[d, "I''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E' \arrow[r] & E_2 \arrow[r] & E'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

unde I' şi I'' sînt endomorfismele identitate ale lui E' respectiv E''.

În [1] se demonstrează că mulţimea claselor de echivalenţă ale extensiilor lui E'' prin E' este în corespondenţă bijectivă cu elementele din $H^1(X, \mathrm{Hom}\,(\mathbf{E}'', \mathbf{E}'))$, unde întrebuinţăm notaţia $\mathbf{E}$ pentru fasciculul germenilor de secţiuni asociat unei fibrări vectoriale $E \to V$.

Amintim, de asemenea, cum se asociază unei extensii a lui E'' prin E' un element ε din $H^1(X, \mathrm{Hom}\,(E'', E'))$.

Şirului exact de fibrări vectoriale $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ îi corespunde şirul exact de fascicule de O-module $0 \to \mathbf{E}' \to \mathbf{E} \to \mathbf{E}'' \to 0$, O este fasciculul germenilor de funcţii olomorfe.

Fasciculul $\mathbf{E}''$ este local liber, adică pentru orice $x \in V$ există o vecinătate deschisă U astfel încît $\mathbf{E}'' | U \cong O^r | U$, unde O^r este suma directă a r exemplare ale lui O, iar izomorfismul este un izomorfism de O-module; deci putem scrie şirul exact:

$$0 \to \mathrm{Hom}\,(\mathbf{E}'', \mathbf{E}') \to \mathrm{Hom}\,(\mathbf{E}'', \mathbf{E}) \to \mathrm{Hom}\,(\mathbf{E}'', \mathbf{E}'') \to 0.$$

Acestui şir exact îi corespunde şirul exact de coomologie

$0 \to H^0(V, \mathrm{Hom}\,(\mathbf{E}'', \mathbf{E}')) \to H^0\,(V, \mathrm{Hom}\,(\mathbf{E}'', \mathbf{E})) \to H^0\,(V, \mathrm{Hom}\,(\mathbf{E}'', \mathbf{E}'')) \xrightarrow{\delta} H^1\,(V, \mathrm{Hom}\,(\mathbf{E}'', \mathbf{E}')) \to$

$\delta(\mathbf{I}'') \in H^1(V, \mathrm{Hom}\,(\mathbf{E}'', \mathbf{E}'))$ este elementul ε asociat şirului exact $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$, unde $\mathbf{I}'' \in \Gamma\ \mathrm{End}\,\mathbf{E}'' = H^0(V, \mathrm{Hom}\,(\mathbf{E}'', \mathbf{E}''))$ este endomorfismul identitate al lui $\mathbf{E}''$.

Fie $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ o acoperire a lui V. Se spune că sistemul de funcţii meromorfe $\{f_i : U_i^c\}$ determină un divizor al lui V dacă pentru orice intersecţie nevidă $U_i \cap U_j$, funcţia f_i / f_j nu are nici zerouri nici poluri în $U_i \cap U_j$.

Oricărui divizor D i se asociază fibrarea vectorială unidimensională $\{D\}$, ale cărei funcţii de trecere sînt $f_{ij} = f_i / f_j$.

Dacă funcţiile $s_i : U_i$ care determină divizorul S sînt olomorfe, se spune că S este un divizor olomorf. În acest caz, sistemul de funcţii s_i, avînd proprietatea că $s_i = s_{ij} s_j$, defineşte o secţiune s a spaţiului fibrat $\{S\}$.

Fie $H^{1,1}(V, R)$ subgrupul lui $H^2(V, R)$ al elementelor reprezentabile prin forme de tipul (1,1), iar $H^{1,1}(V, Z)$ subgrupul corespunzător al lui $H^2\,(V, Z)$.

Pe $H^{1,1}(V,R)$ se introduce următoarea relaţie de ordine arhimediană: $x \in H^{1,1}(V,R)$ este pozitiv ($x > 0$) dacă şi numai dacă există o metrică kähleriană pe V a cărei clasă fundamentală este x. În [6], pag. 138, pentru V kähleriană, sînt enumerate proprietăţile:

(0) Cel puţin un element din $H^{1,1}(V,R)$ este pozitiv.

(1) Elementul zero al lui $H^{1,1}(V,R)$ nu este pozitiv.

(2) Dacă $x > 0$ şi $y > 0$, atunci $x + y > 0$.

(3) Dacă $x > 0$ şi $r > 0$ ($r \in R$), atunci $rx > 0$.

(4) Dacă $x, y \in H^{1,1}(V,R)$ şi $x > 0$, atunci există un întreg pozitiv g (care depinde de x şi y) astfel încît $gx - y > 0$.

Conform teoremei 15.9.1 [5], $a \in H^2(V, Z)$ este clasa Chern a unui spaţiu fibrat vectorial olomorf unidimensional peste varietatea kähleriană V dacă şi numai dacă este reprezentabil printr-o formă de tipul (1,1).

Se spune că un spaţiu fibrat vectorial olomorf unidimensional L este pozitiv cînd clasa sa Chern este pozitivă, dacă este considerată ca un element din $H^{1,1}(V,R)$.

Fibrările unidimensionale asociate intersecţiilor unei varietăţi algebrice proiective cu hiperplane sînt pozitive.

O varietate kähleriană V este o varietate Hodge dacă $H^{1,1}(V, Z)$ conţine cel puţin un element pozitiv, în acest caz V putînd fi dotat cu o metrică kähleriană a cărei clasă fundamentală are perioade întregi.

Rezultă că dacă peste varietatea kähleriană V există fibrări unidimensionale pozitive, atunci V este o varietate Hodge.

Orice varietate Hodge este o varietate algebrică ([6], teorema 18.12).

Dacă E este o fibrare olomorfă arbitrară peste varietatea algebrică proiectivă V, iar F o fibrare olomorfă unidimensională pozitivă, după Griffiths [4], rezultă existenţa unui număr întreg $\mu_0 = \mu_0(E)$ astfel încît

$$H^q(V, \mathbf{E} \otimes \mathbf{F}^{\mu}) = 0 \text{ pentru } q \geqslant 1 \text{ şi } \mu \geqslant \mu_0,$$

unde $\mathbf{F}^{\mu}$ este μ-puterea tensorială a fasciculului $\mathbf{F}$.

C. Fie S un divizor olomorf peste varietatea analitică complexă compactă V. Notăm cu $T^*_S = T \otimes \{S\}$.

Fie $D_S(\mathbf{E}) = \mathbf{E} \oplus \mathbf{E} \otimes \mathbf{T}^*_S$ în categoria fasciculelor de $\mathbf{C}$-module, $\mathbf{C}$ fiind fasciculul trivial asociat corpului numerelor complexe C peste varietatea V.

$D_S(\mathbf{E})_x$, $x \in V$, poate fi înzestrat cu o structură de O_x-modul după cum urmează:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha} \oplus \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{f}\boldsymbol{\alpha} \oplus (\mathbf{f}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{d}^S\mathbf{f} \otimes \boldsymbol{\alpha}), \text{ pentru } \mathbf{f} \in O_x \text{ şi}$$

$$\boldsymbol{\alpha} \oplus \boldsymbol{\beta} \in D_S(\mathbf{E})_x = \mathbf{E}_x \oplus \mathbf{E}_x \otimes \mathbf{T}^*_{Sx}, \text{ unde } \mathbf{d}^S\mathbf{f} = \mathbf{df} \otimes \mathbf{s}_x,\ \mathbf{s}_x \in \{\mathbf{S}\}_x$$

fiind germenul asociat secţiunii canonice s.

Putem scrie următorul şir exact de O-module

$$0 \longrightarrow \mathbf{E} \otimes \mathbf{T}^*_S \xrightarrow{i} D_S(\mathbf{E}) \xrightarrow{p} \mathbf{E} \longrightarrow 0, \tag{2}$$

unde $\mathbf{i} : \boldsymbol{\beta} \to \mathbf{0} \oplus \boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{p} : \boldsymbol{\alpha} \oplus \boldsymbol{\beta} \to \boldsymbol{\alpha}$.

Fasciculele $\mathbf{E} \otimes \mathbf{T}^*_S$ și $\mathbf{E}$ fiind local libere, rezultă că și $D_s(\mathbf{E})$ este local liber; notăm cu $D_s(\mathbf{E})$ spațiul fibrat corespunzător. Fie

$$0 \to E \otimes T^*_S \to D_s(E) \to E \to 0 \tag{3}$$

șirul exact de spații fibrate asociat șirului (2) de fascicule local libere.

DEFINIȚIE. Spunem că pe spațiul fibrat E s-a dat o conexiune meromorfă de polaritate S dacă s-a dat o scindare a șirului exact (3).

Ne propunem să vedem la ce revine în limbajul formelor diferențiale locale anularea obstrucției $b_s(E) \in H^1(V, \operatorname{Hom}(\mathbf{E}, \mathbf{E} \otimes \mathbf{T}^*_S))$ corespunzînd șirului exact (3).

Fie $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ o acoperire a varietății, relativ la care divizorul S este definit prin funcțiile s_i, iar $E \mid U = F \times U_i$, F fiind fibra tip pentru spațiul fibrat E.

Notăm cu $\mathbf{F}_i$ restricția fasciculului trivial asociat spațiului vectorial F peste varietatea V la U_i.

Fie $\mathbf{u}_i : \mathbf{F}_i \to \mathbf{E}_i$; corespunzînd trivializării $E \mid U_i = F \times U_i$, întrebuințăm aceeași notație pentru $\mathbf{u}_i \in \mathbf{F}_i \otimes \mathbf{T}^*_{Si} \to \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{T}^*_{Si}$.

Fie $\mathbf{d}^S_i\, \alpha = \mathbf{u}_i\, \mathbf{d}^S\, \mathbf{u}_i^{-1} \alpha$, pentru $\alpha \in \Gamma(U_i, \mathbf{E})$.

Din modul în care este definit $b_s(E) = \delta(\mathbf{I}_{\mathbf{E}})$ rezultă că cociclul $b_s(E)_{ij} = \mathbf{d}^S_i - \mathbf{d}^S_j \in C^1(\mathfrak{U}, \operatorname{Hom}(\mathbf{E}, \mathbf{E} \otimes \mathbf{T}^*_S))$ reprezintă clasa $b_s(E)$.

Dacă obstrucția $b_s(E)$ este nulă, există $f_i \in C^0(\mathfrak{U}, \operatorname{Hom}(\mathbf{E}, \mathbf{E} \otimes \mathbf{T}^*_S))$ astfel încît

$$\mathbf{d}^S_j - \mathbf{d}^S_i = \mathbf{f}_j - \mathbf{f}_i$$

Observație: $(\mathbf{d}^S_i) \notin C^0(\mathfrak{U}, \operatorname{Hom}(\mathbf{E}, \mathbf{E} \otimes \mathbf{T}^*_S))$.

Morfismele $\mathbf{f}_i$ sînt de forma

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{u}_i\, \boldsymbol{\theta}_i\, \mathbf{u}_i^{-1}, \text{ unde } \boldsymbol{\theta}_i \in \Gamma(U_i, \operatorname{Hom}(\mathbf{F}, \mathbf{F} \otimes \mathbf{T}^*_S)).$$

Pentru orice $\mathbf{v} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathbf{F})$,

$$\mathbf{u}_i^{-1}(\mathbf{d}^S_j - \mathbf{d}^S_i)\, \mathbf{u}_i\, \mathbf{v} = \mathbf{u}_i^{-1}(\mathbf{f}_j - \mathbf{f}_i)\, \mathbf{u}_i\, \mathbf{v},$$

$$\mathbf{g}_{ij}\, \mathbf{d}^S(\mathbf{g}_{ji}\, \mathbf{v}) - \mathbf{d}^S \mathbf{v} = \mathbf{g}_{ij}\, \boldsymbol{\theta}_j\, \mathbf{g}_{ji}\, \mathbf{v} - \boldsymbol{\theta}_i\, \mathbf{v}, \quad \mathbf{g}_{ij} = \mathbf{u}_i^{-1}\, \mathbf{u}_j,$$

deci

$$\mathbf{g}_{ij}\, \mathbf{d}^S\, \mathbf{g}_{ji} = \mathbf{g}_{ij}\, \boldsymbol{\theta}_j\, \mathbf{g}_{ji} - \boldsymbol{\theta}_i.$$

Matricilor $\mathbf{d}^S \mathbf{g}_{ji}$, $\boldsymbol{\theta}_i$ le corespund matricile de forme meromorfe $\mathrm{d}g_{ji}$, $-\omega_i$ prin izomorfismul care asociază secțiunilor spațiului fibrat $\{S\}$ funcții meromorfe de polaritate S.

Deci a da o conexiune meromorfă în sensul definiției de mai sus revine la a da matricile de forme meromorfe ω_i de polaritate S îndeplinind condițiile

$$g_{ij}\, \mathrm{d}g_{ji} = \omega_i - g_{ij}\, \omega_j\, g_{ji},$$

unde g_{ij} sînt funcțiile de trecere ale spațiului fibrat E.

D. TEOREMĂ. *Pentru orice spațiu fibrat vectorial olomorf E peste varietatea algebrică V și pentru orice divizor olomorf S, căruia îi corespunde un spațiu fibrat unidimensional $\{S\}$ pozitiv, există un număr întreg μ_0 astfel încît pentru $\mu \geqslant \mu_0$ E admite o conexiune meromorfă de polaritate S^μ.*

Demonstrație. Întrucît S este pozitiv, din rezultatele lui Griffiths citate în secțiunea B deducem existența unui număr întreg μ_0 astfel încît

$$H^1(V, \mathrm{Hom}\,(\mathbf{E}, \mathbf{E} \otimes \mathbf{T}^*_{S^\mu})) = H^1(V, (\mathrm{End}\,\mathbf{E} \otimes \mathbf{T}^*) \otimes \{\mathbf{S}\}^\mu) = 0,$$

deci șirul exact (3) scindează.

Grauert și Remert [3] demonstrează că orice varietate complexă conexă și omogenă V poate fi fibrată în mod canonic cu varietăți conexe complex-paralelizabile peste o bază W care este o varietate algebrică proiectivă omogenă.

Deducem următoarea :

PROPOZIȚIE. *Spațiile fibrate de tipul* ρ^*E, *unde* $\rho : V \to W$ *iar* ρ^*E *este spațiul fibrat indus de această aplicație asociat unui spațiu fibrat olomorf* $p : E \to W$, *admit conexiuni meromorfe.*

E. Pentru fibrările vectoriale peste varietăți algebrice, vom deduce, apelînd la rezultatele din [7], existența unor conexiuni canonice descrise local prin matrici de forme meromorfe. Pentru fibrarea canonică peste varietatea lui Grassmann complexă conexiunea canonică asociată este o conexiune în sensul definiției din secțiunea C.

Fie $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ o acoperire a varietății V. Se spune că sistemul de $m \times m$ matrici de funcții meromorfe $\{\Theta_i : U_i\}$, de determinant neidentic nul, determină un divizor de tipul m dacă pentru orice intersecție nevidă $U_i \cap U_j$ matricea $\Theta_i\, \Theta_j^{-1}$ este o matrice de funcții olomorfe al cărei determinant nu se anulează în nici un punct din $U_i \cap U_j$. Pentru $m = 1$ definiția coincide cu cea dată în secțiunea B.

Oricărui divizor de tipul m i se asociază fibrarea vectorială de dimensiune m ale cărei matrici de trecere sînt $\Theta = \Theta_i\, \Theta_j^{-1}$ pentru acoperirea dată $\mathfrak{U}$.

C. S. Seshadri [7] afirmă că pe o varietate algebrică orice fibrare vectorială este generată de un divizor de tip egal cu dimensiunea fibrării.

Fie Θ un divizor care generează o fibrare vectorială dată cu matricile de trecere Θ_{ij}. Matricile de forme diferențiale meromorfe $\Omega_i = \Theta_i^{-1}\, d\Theta_i$ determină o conexiune meromorfă, un simplu calcul punînd în evidență că

$$\Theta_{ji}\, d\Theta_{ij} = \Theta_j^{-1}\, d\Theta_j - \Theta_{ji}\, \Theta_i^{-1}\, d\Theta_i\, \Theta_{ij}.$$

Fie $G(m, n)$ varietatea lui Grassmann a m-subspațiilor ale spațiului vectorial complex C^{m+n}. Fie G_1, G_2 o bază a lui C^{m+n}, G_1 fiind matricea coloană a primilor m vectori, iar G_2 matricea coloană a ultimilor n vectori.

Dacă P este un m-subspațiu care se proiectează pe $\widetilde{G}_1$ paralel cu $\widetilde{G}_2$ fără degenerare, unde cu $\widetilde{G}_i$ am notat înfășurătoarea liniară a vectorilor din G_i, atunci el poate fi dat ca generat de vectorii-componente ale matricii

$$\Sigma = G_1 + XG_2,$$

X fiind $m \times n$ matricea coordonatelor Pontryaghin ale subspațiului P față de baza G_1, G_2 (vezi [5]).

Varietatea lui Grassmann poate fi acoperită cu $\binom{m+n}{n}$-vecinătăţi, fiecare vecinătate corespunzînd proiecţiei pe unul din subspaţiile generate de sistemele de vectori $e_{k_1}, \ldots, e_{k_m}$, $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_m \leqslant m+n$, $e_1, \ldots, e_{m+n}$ fiind baza G_1, G_2.

Dacă G_1', G_2' este o altă bază a spaţiului C^{m+n}, dată faţă de prima prin relaţiile

$$G_1' = AG_1 + BG_2$$

$$G_2' = CG_1 + DG_2,$$

unde A, B, C, D sînt respectiv $m \times m$, $m \times n$, $n \times m$, $n \times n$ matrici de numere complexe, şi dacă subspaţiul P admite coordonatele Pontryaghin X' faţă de baza G_1', G_2', reproducînd calculele din [5] obţinem

$$X' = (AX - B)\ (CX - D)^{-1}.$$

Fie $v = \xi\Sigma = \xi'\Sigma'$ un vector din subspaţiul P; deducem că

$$\xi = \xi'\ (A + X'C).$$

Matricea $A + X'C$ este invertibilă atunci şi numai atunci cînd subspaţiul definit de X' se proiectează paralel cu $\widetilde{G}_2$ fără degenerare pe $\widetilde{G}_1$.

Pentru G_1, G_2 fixaţi, G_1' parcurgînd mulţimea sistemelor $(e_{k_1}, \ldots, e_{k_m})$, $1 \leqslant k_1 < k_2, \ldots < k_m \leqslant m + n$, matricile de forma $A + X'C$ determină un divizor de tipul m, căruia îi corespunde fibrarea canonică peste varietatea lui Grassmann $G(m, n)$.

Deci matricile de forme meromorfe $(A + X'C)^{-1}\ \mathrm{d}(A + X'C)$ definesc o conexiune meromorfă pentru fibrarea canonică.

Componentele acestor matrici sînt forme meromorfe de polaritate $\det\ (A + X'C) = 0$.

În particular, pentru spaţiul proiectiv complex CP^n formele meromorfe $\omega_i = \mathrm{d} \ln z_i/z_1$ definesc o conexiune pe fibrarea canonică, $z_1, \ldots, z_{n+1}$ fiind coordonatele omogene pe CP^n.

Primită la redacţie la 23 noiembrie 1967

Universitatea din Bucureşti
Facultatea de matematică şi mecanică, Str. Academiei nr. 14

CONNEXIONS MÉROMORPHES

(RÉSUMÉ)

Soit $E \to V$ un fibré vectoriel holomorphe sur la variété analytique compacte V.

Pour un diviseur holomorphe S on note $\{S\}$ le fibré unidimensionnel associé.

Soit $T_S^* = T^* \otimes \{S\}$, T^* le fibré cotangent de V.

Sur le faisceau $D_S\ (\mathbf{E}) = \mathbf{E} \oplus \mathbf{E} \otimes \mathbf{T}_S^*$ des C-modules on définit une structure de O-module, ce qui permet d'écrire la suite exacte des faisceaux des O-modules localement libres :

$$0 \to \mathbf{E} \otimes \mathbf{T}_S^* \to D_S\ (\mathbf{E}) \to \mathbf{E} \to 0.$$

Une connexion méromorphe de polarité S de $E \to V$ est un scindement de la suite exacte des fibrés associés :

$$0 \to E \otimes T_S^* \to D_S(E) \to E \to 0.$$

On en déduit la définition avec des formes locales méromorphes de polarité S. Si le fibré $\{S\}$ est positif et si V est une variété projective complexe, il existe un entier μ_0, tel que pour $\mu \geqslant \mu_0$ $E \to V$ admet une connexion de polarité S^{μ}.

D'autre part on déduit l'existence d'une connexion décrite par des formes méromorphes du fait que les fibrés vectoriels sur le V projectif complexe sont engendrés par les diviseurs matriciels.

La connexion ainsi déduite pour le fibré canonique sur la variété de Grassmann est de polarité l'intersection avec un hyperplan.

BIBLIOGRAFIE

1. M. F. Atiyah, *Complex analytic connections in fibre bundles*. Trans. Amer. Math. Soc., **85**, 181–207 (1957).
2. S. S. Chern, *Complex manifolds*. Recife (1959).
3. H. Grauert, R. Remert, *Über kompakte homogene komplexe Mannigfaltigkeiten*. Archiv der Math., **XIII**, *6*, 498–507 (1962).
4. P. A. Griffiths, *Hermitian differential geometry and the theory of positive and ample vector bundles*. J. Math. Mech., **14**, 117–140 (1965).
5. Th. M. Hangan, *Pseudogrupal proiectiv grassmannian*. Analele ştiinţ. Univ. „Al. I. Cuza" din Iaşi, **11**, 349–356 (1965).
6. F. H. Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry*. Springer, 1966.
7. C. S. Seshadri, *Generalized multiplicative meromorphic functions on a complex analytic manifold*. J. Indian Math. Soc., **21**, 149–178 (1957).
8. C. Teleman, *Sur les espaces à connexion affine A_1 complexes*. Rev. Math. Pures et Appl., **1**, 151–165 (1956).

ELEMENTE DE ANALIZĂ ARMONICĂ (IV)

DE

ȘERBAN STRĂTILĂ

În § **20** se consideră problema unicității. În cazul seriilor trigonometrice ($\Gamma = \mathbf{T}$) se caracterizează mulțimile de unicitate cu ajutorul pseudofuncțiilor suportate de ele și se dau cîteva exemple : mulțimile de tip H, de tip $H^{(n)}$; apoi se enunță răspunsul la problema unicității pentru mulțimile de tip $\mathbf{E}_\xi$ și de tip $\mathbf{E}(\eta_1, \ldots, \eta_d; \xi)$ prin două teoreme ale lui Salem și Zygmund. Caracterizarea mulțimilor de unicitate pentru serii trigonometrice permite definirea problemei unicității în l.c.a.-grupuri. Se expun generalizările obținute de Varopoulos pentru două teoreme de existență ale mulțimilor de multiplicitate obținute anterior de Salem și Rudin.

În § **21** se consideră problema sintezei spectrale. După formularea problemei se dau cîteva exemple : exemplul lui Schwartz, exemplele lui Herz, mulțimi Ditkin (C-mulțimi), mulțimi Ditkin stricte, corpuri stelate. Se demonstrează teorema lui Malliavin prin metoda algebrelor tensoriale ale lui Varopoulos și se dau și alte aplicații ale acestei metode. Se expune problema sintezei spectrale pentru funcții mărginite (resp. pseudomăsuri), se demonstrează teorema lui Kahane și Salem de existență a mulțimilor perfecte care nu suportă adevărate pseudomăsuri și se descriu două topologii : topologia strictă (Buck) pe $\mathscr{C}(\mathbf{G})$ și topologia ,,narrow'' (Beurling) pe $\mathscr{C}(\mathbf{G})$. Se expune o proprietate de invarianță a sintezei spectrale după lucrările lui Reiter, Herz și de Leeuw și se face legătura între problema sintezei spectrale și problema unicității pe baza unor rezultate recente ale lui Malliavin și Filippi.

§ 20. PROBLEMA UNICITĂȚII

20.1. Introducere. Fie $\mathbf{G}$ un l.c.a. — grup și $\mathbf{\Gamma}$ dualul său. Se consideră mai întîi cazul particular $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{T}$ și se definesc mulțimile de unicitate și mulțimile de multiplicitate. Cu ajutorul noțiunilor introduse în § **15** se dă un criteriu folositor și simplu pentru a distinge printre mulțimile compacte pe cele de unicitate și pe cele de multiplicitate. Ca aplicație a acestui criteriu dăm cîteva exemple de mulțimi de unicitate și de multiplicitate și cîteva proprietăți ale acestor clase de mulțimi.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 6, P. 867–926, BUCUREȘTI, 1968

6 – 6. 5296

Pe de altă parte, acelaşi criteriu permite definirea naturală a mulţimilor închise de unicitate şi de multiplicitate în l.c.a. - grupuri. În încheiere trecem în revistă două rezultate recente ale lui Varopoulos care generalizează lucrările lui Salem şi Rudin.

Expunerea nu conţine întotdeauna demonstraţiile faptelor prezentate, deoarece în literatură există multe lucrări care tratează această problemă. Am urmărit numai să sistematizăm rezultatele şi să dăm un cadru natural problemei unicităţii în l.c.a.-grupuri.

Cititorul interesat de această problemă poate consulta lucrările [126], ch. IX, § 6, [4], cap. XIV, [54], ch. V—VI şi [3] după care ne-am condus şi în alcătuirea expunerii de faţă.

20.2. Seriile trigonometrice vor fi notate prin $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n \, e^{int}$ unde $t \in \mathbf{R} \,(\mathrm{mod}\ 2\pi) \equiv \mathbf{T}$; mulţimile **E**, **I**, ... considerate vor fi tot părţi din $\mathbf{R}(\mathrm{mod}\ 2\pi) \equiv \mathbf{T}$. Vom spune că o serie trigonometrică este *identic nulă* dacă toţi coeficienţii c_n sînt nuli. Vom spune că o serie trigonometrică *se anulează* într-un punct $t_0 \equiv e^{int_0}$ dacă seria $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n \, e^{int_0}$ este convergentă către zero.

(1) DEFINIŢIE. Vom spune că **E** este o *mulţime de unicitate* (sau *mulţime de tip U*) dacă orice serie trigonometrică care se anulează în afara lui **E** este identic nulă

(2) DEFINIŢIE. Vom spune că **E** este *o mulţime de multiplicitate* (sau *multime de tip M*) dacă există o serie trigonometrică neidentic nulă care se anulează în afara lui **E**.

Deci o mulţime *E* este sau de tip *U* sau de tip *M*. *Problema unicităţii constă în a decide pentru o mulţime dată dacă este de tip U sau de tip M.*

20.3. TEOREMĂ (i). *Mulţimea vidă, orice mulţime finită şi orice mulţime numărabilă sînt de tip U.* (ii) *Orice mulţime de măsură pozitivă* (> 0) *este de tip M.*

Primele două afirmaţii din (i) se datoresc lui Cantor (1870) iar a treia lui W. H. Young (1908). Afirmaţia (ii) este imediată. Pentru demonstraţii trimitem la [4], cap. I, § 70 şi la cap. XIV, §§ 4 şi 5.

Aşadar *problema unicităţii se reduce la mulţimile de măsură nulă.* Se impun două aspecte :

(a) *Să se dea exemplu de mulţime de tip M de măsură nulă.*

(b) *Să se dea exemplu de mulţime de tip U nenumărabilă.*

Problema (a) a fost rezolvată de Menşov (1916); construcţia mulţimii lui Menşov poate fi urmărită de exemplu în [4], cap. XIV, § 12. Problema (b) a fost rezolvată de Rajchman (1922) prin introducerea mulţimilor de tip *H* care au fost apoi generalizate de Piateţki-Şapiro. Asupra acestor fapte vom reveni după demonstrarea următorului criteriu foarte folositor.

20.4. TEOREMĂ. *Pentru ca o mulţime compactă* **E** *să fie o mulţime de tip M este necesar şi suficient ca* **E** *să suporte o pseudofuncţie* $S \neq 0$.

Enunţul şi demonstraţia acestei teoreme depind de § 15, iar teoria pseudofuncţiilor s-a dezvoltat în strînsă legătură cu problema unicităţii.

20.5. *Suficienţa* condiţiei din teorema 20.4 rezultă din următoarea :

LEMĂ. *Seria care reprezintă o pseudofuncţie S se anulează în afara suportului lui S.*

Fie $S \sim \sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$; fără a restrînge generalitatea putem presupune că $0 \notin \operatorname{supp} S$ şi să arătăm că în acest caz $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n$ converge la zero. Fie D_m nucleul Dirichlet, adică

$$D_m(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \ldots + \cos mt = \frac{1}{2} \sin mt \operatorname{ctg} \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cos mt;$$

se verifică uşor relaţia:

$$\frac{1}{\pi}\int SD_m = \sum_{-m}^{m} c_n .$$

Cum S este nulă în vecinătatea lui 0, din 15.18 rezultă că putem modifica pe D_m în vecinătatea lui 0 fără ca $\int SD_m$ să se schimbe. Există o funcţie $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbf{T})$ care să fie egală cu $\operatorname{ctg} \frac{t}{2}$ în afara unei vecinătăţi a lui 0 $\left(\text{de exemplu } \varphi \in \mathcal{C}^2 \text{ şi egală cu } \operatorname{ctg}\frac{t}{2} \text{ în afara unei vecinătăţi a lui } 0\right)$. Atunci, conform celor de mai sus avem:

$$2\int SD_m = \int S(t)\,(\varphi(t) \sin mt) + \int S(t) \cos mt =$$

$$= \int (S\cdot\varphi)\,(t) \sin mt + \int S(t) \cos mt$$

şi cum S şi $S\cdot\varphi$ sînt pseudofuncţii rezultă

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{-m}^{m} c_n = \frac{1}{\pi} \lim_{m\to\infty} \int SD_m = 0, \quad \text{q.e.d.}$$

20.6. *Necesitatea* condiţiei din teorema **20.4** rezultă din următoarea:

LEMĂ. *Dacă seria trigonometrică $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ se anulează pe un interval deschis* $\mathbf{I}$, *atunci $S \sim \sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ este o pseudofuncţie nulă pe* $\mathbf{I}$.

(I) Vom arăta mai întîi că S este *o pseudofuncţie*, adică $c_n = 0(1)$ pentru $|n| \to \infty$. Se vede uşor că pentru aceasta este suficient să arătăm că dacă seria $\sum\limits_{0}^{\infty} r_n \cos(nt + \varphi_n)$, cu $r_n \geqslant 0$, converge către zero pe $\mathbf{I}$, atunci $\lim r_n = 0$. În caz contrar ar exista $\varepsilon > 0$ şi un şir $\{n_k\}_{k\in N}$ astfel ca $r_{n_k} \geqslant \varepsilon$ pentru orice $k \in N$; extrăgînd eventual un subşir din $\{n_k\}$ putem presupune că lungimea lui $\mathbf{I}$ este $\geqslant \frac{4\pi}{n_1}$ şi că $\frac{2\pi}{3n_k} \geqslant \frac{4\pi}{n_{k+1}}$

pentru orice $k \in \mathbf{N}$. Un raționament ușor, bazat pe studiul comportării funcției cosinus ne arată că în acest caz **I** ar conține un subinterval $\mathbf{I}_1$ de lungime $\frac{2\pi}{3n_1}$ pe care $\cos(n_1 t + \varphi_1) \geqslant \frac{1}{2}$; apoi $\mathbf{I}_1$ ar conține un subinterval $\mathbf{I}_2$ de lungime $\frac{2\pi}{3n_2}$ pe care $\cos(n_2 t + \varphi_2) \geqslant \frac{1}{2}$ ș.a.m.d. În punctul (unic) de intersecție al intervalelor $\mathbf{I}_k$ am avea deci $r_{n_k} \cos(n_k t + \varphi_k) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $k \in N$, deci seria considerată nu ar fi convergentă către zero în acest punct din **I**, contrar ipotezei.

(II) Vom arăta acum că *pseudofuncția S este nulă pe* **I**. Pentru aceasta este suficient, conform **15.13**, să arătăm că funcția continuă

$$F(t) = c_0 \frac{t^2}{2} - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{n^2} e^{int} \text{ (suma evită indicele 0)}$$

este liniară pe **I**. Vom nota:

$$\Delta_2 F(t, h) = F(t + h) + F(t - h) - 2F(t)$$

$$w(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$S_n(t) = \sum_{-n}^{n} c_k e^{ikt}.$$

Se obțin succesiv egalitățile:

$$\frac{\Delta_2 F(t, 2h)}{4h^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n w(nh) e^{int} = S_0(t) + \sum_{1}^{\infty} (S_n(t) - S_{n-1}(t))\, w(nh) =$$

$$= \sum_{0}^{\infty} (w(nh) - w((n+1)h))\, S_n(t) = \sum_{n \leqslant N} + \sum_{n \geqslant N} \cdot$$

Dar:

$$\sum_{0}^{\infty} |w(nh) - w((n+1)h)| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_{nh}^{(n+1)h} w'(x)\, dx \right| \leqslant \int_{0}^{\infty} |w'(x)|\, dx = C < \infty$$

de unde:

$$\Big| \sum_{n \geqslant N} \Big| \leqslant C \sup_{n \geqslant N} |S_n(t)|$$

și deci pentru $t \in I$ și $\varepsilon > 0$ există un N așa ca $\Big| \sum_{n \geqslant N} \Big| \leqslant \varepsilon/2$.

Pe de altă parte, pentru h suficient de mic rezultă evident $\Big| \sum_{n \leqslant N} \Big| \leqslant \varepsilon/2$, deci $| \Delta_2 F(t, 2h)/4h^2 | \leqslant \varepsilon$.

Prin urmare

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_2 F(t, h)}{h^2} = 0 \quad \text{pentru } t \in \mathbf{I}.$$

Folosind numai inegalitatea $\geqslant 0$ vom arăta că F este *convexă* pe **I**. Fie $\varepsilon > 0$ şi $F_2(t) = F(t) + \varepsilon t^2$; pentru $t \in \mathbf{I}$ rezultă atunci

$$(^*) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\Delta_2 F_\varepsilon(t, h)}{h^2} \geqslant 2\varepsilon.$$

Dacă F nu ar fi convexă pe **I**, atunci cel puţin o funcţie de tipul $g(t) = F_\varepsilon(t) - \alpha t$ şi-ar atinge un maximum relativ într-un punct $t_0 \in \mathbf{I}$; pentru h suficient de mic ar rezulta că $\Delta_2 g(t, h) \leqslant 0$, ceea ce, avînd în vedere că $\Delta_2 g(t, nh) = \Delta_2 F_\varepsilon(t, h)$, ar contrazice relaţia $(^*)$.

Analog rezultă că şi $(-F)$ este convexă pe **I**, deci F este liniară pe **I**, q.e.d.

Teorema **20.4** este astfel complet demonstrată.

20.7. TEOREMĂ. *O condiţie suficientă ca o mulţime perfectă de translaţie* **E** *să fie o mulţime de tip M este ca L-măsura asociată lui* **E** *să fie o pseudofuncţie.*

Teorema este evidentă, dar dificultatea constă tocmai în a construi astfel de mulţimi perfecte de translaţie. De acest tip a fost exemplul lui Menşov [72].

20.8. TEOREMĂ. *Pentru ca o mulţime compactă* $\mathbf{E} \subset \mathbf{T}$ *să fie o mulţime de tip U este suficient să existe un şir* $\{f_k\} \subset \mathcal{A}(\mathbf{T})$ *cu proprietăţile:*

(i) $\operatorname{supp} f_k \cap \mathbf{E} = \emptyset$ *pentru orice* k.

(ii) *Există o constantă* C *aşa ca* $\|f_k\| \leqslant C$ *pentru orice* k.

(iii) *Dacă* $f_k(k) = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n^{(k)} e^{int}$, *atunci:*

$$\lim_{k \to \infty} \gamma_n^{(k)} = \begin{cases} 0 & \textit{dacă } n \neq 0 \\ l \neq 0 & \textit{dacă } n = 0. \end{cases}$$

Într-adevăr, fie $S \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ o pseudofuncţie suportată de **E**. Conform (i) rezultă:

$$(\alpha) \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \overline{\gamma}_n^{(k)} = \frac{1}{2\pi} \int S \overline{f}_k = 0.$$

Fie $\varepsilon > 0$; cum S este pseudofuncţie, există $n_0 \in N$ aşa ca:

$$(\beta) \quad \sup_{|n| \geqslant n_0} |c_n| < \varepsilon/3C.$$

Conform (iii), pentru k suficient de mare avem:

$$(\gamma) \quad \Big| \sum_{1 \leqslant |n| \leqslant n_0} c_n \gamma_n^{(k)} \Big| < \varepsilon/3,$$

şi

$$(\delta) \quad |c_0 \gamma_0^{(k)} - c_0 l| < \varepsilon/3.$$

Atunci din (α), (β), (γ), (δ) şi (ii) deducem:

$$0 \leqslant |c_0 l| \leqslant \varepsilon$$

şi, cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, rezultă $c_0 = 0$.

Pentru orice n, pseudofuncţia $S \cdot (e^{-int})$ este încă suportată de E şi are ca „termen constant" pe c_n; raţionamentul de mai sus se repetă şi ne dă $c_n = 0$. Deci $S = 0$. Cum S a fost o pseudofuncţie oarecare suportată de E, din teorema **20.4** rezultă că E este o mulţime de unicitate, q.e.d.

20.9. Mulţimi Rajchmann (*de tip H*). O mulţime E se numeşte *mulţime de tip H* dacă există un interval I şi un şir crescător de numere întregi n_k aşa ca toate mulţimile $n_k E$ să fie disjuncte de I. Mulţimile de tip H au fost considerate de Rajchmann. Mulţimea triadică a lui Cantor construită pe $[0, 2\pi]$ cu punctele

$$x = 2\pi\left(\frac{\varepsilon_1}{3} + \frac{\varepsilon_2}{3^2} + \cdots\right); \qquad \varepsilon_j = 0 \text{ sau } 1$$

este o mulţime de tip H, deoarece punctele $3^n x$ (mod 2π) nu se află niciodată în treimea mijlocie a segmentului $[0, 2\pi]$.

Teoremă. *Orice mulţime de tip H este o mulţime de tip U.*

Fie $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_m e^{imt}$ o funcţie din $\mathcal{A}(\mathrm{T})$ cu $\gamma_0 = l \neq 0$ şi $\operatorname{supp} f \subset \mathrm{I}$. Definim:

$$f_k(t) = f(n_k t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_m e^{imn_k t}$$

Se verifică uşor că şirul $\{f_k\}$ satisface condiţiile teoremei **20.8**.

Corolar. *Mulţimea triadică a lui Cantor este de tip U.*

20.10. Mulţimi de tip $H^{(n)}$. Să considerăm o familie numărabilă de vectori V_k cu n coordonate întregi:

$$V_k = (P_k^{(1)}, \ldots, P_k^{(n)}), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Vom spune că $\{V_k\}_k$ este o *familie normală* dacă pentru orice alegere a n întregi nu toţi nuli $a_1, \ldots, a_n$ are loc relaţia:

$$\lim_{k \to \infty} |a_1 P_k^{(1)} + \ldots + a_n P_k^{(n)}| = \infty.$$

Vom spune că o *mulţime* E este *de tip* $H^{(n)}$ dacă există un domeniu $\Delta \subset \mathrm{T}^n$ şi o familie normală $\{V_k\}_k$ cu proprietatea că toate mulţimile $V_k\mathrm{E}$ [1]) sînt disjuncte de Δ.

Aceste mulţimi au fost introduse de Piateţkii-Şapiro [79] care a demonstrat următoarea:

Teoremă. *Orice mulţime de tip $H^{(n)}$ este o mulţime de tip U.*

Pentru demonstraţie trimitem la [54], p. 59—60.

20.11. Teoremă. (i) *Orice parte a unei mulţimi de tip U este de tip U.*

(ii) *Orice reuniune numărabilă de mulţimi compacte de tip U este o mulţime de tip U.*

(iii) *Dacă două mulţimi compacte sînt omotetice, atunci ele sînt simultan de tip U sau de tip M.*

---

[1]) $V_k\mathrm{E}$ este partea lui T^n definită de punctele de forma: $(P_k^{(1)} x \pmod{2\pi}, \ldots, P_k^{(n)} x \pmod{2\pi})$; $x \in \mathrm{E}$.

Punctul (i) este trivial; pentru (ii) şi (iii) trimitem la [4], cap. XIV, § 6,9, [126], ch. IX (6.15) şi (6.18) şi la [54], ch. V. Pentru a arăta cum se aplică teorema **20.4** vom demonstra afirmaţia (ii) pentru cazul a două mulţimi compacte de tip U, E_1 şi E_2.

Dacă $E_1 \cup E_2$ ar fi de tip M, atunci $E_1 \cup E_2$ ar suporta o pseudofuncţie $S \neq 0$. Dacă S este suportată de $E_1 \cap E_1$, atunci este suportată şi de E_1, ceea ce contrazice faptul că E_1 este de tip U. Deci supp S conţine un punct $a \notin E_1 \cap E_2$ de exemplu $a \in E_1$, $a \notin E_2$. Fie $\varphi \in \mathcal{A}(T)$ o funcţie nulă în vecinătatea lui E_2 şi egală cu 1 în vecinătatea lui a; vom considera pseudofuncţiile $T = S \cdot \varphi$ şi $T - S = S \cdot (\varphi - 1)$. Conform **15.20**, $T - S$ este nulă în vecinătatea lui a iar T este nulă în afara lui E_1, şi cum $a \in \operatorname{supp} S$, rezultă că T nu este nulă în vecinătatea lui a (deci $T \neq 0$), dar supp $T \subset E_1$, ceea ce contrazice faptul că E_1 este de tip U şi demonstrează afirmaţia.

Aserţiunea (ii) a fost stabilită de Nina Bari [1] iar aserţiunea (iii) de Zygmund şi Marczinkiewicz [70] şi de Nina Bari [2] pentru mulţimi de tip H.

20.12. NOTE (1) Rezultatele din secţiunile **20.9**—**20.11** permit construirea unei *mulţimi perfecte de tip U a cărei urmă pe fiecare interval are puterea continuului.* Într-adevăr, se construieşte mulţimea lui Cantor pe $[0, 2\pi]$ şi apoi pe fiecare interval alb cîte o mulţime Cantor, ş.a.m.d. Reuniunea tuturor mulţimilor astfel construite are proprietăţile căutate.

(2) Transformarea prin omotetie conservă mulţimile de tip U. Se pune problema dacă nu cumva orice funcţie suficient de simplă are încă această proprietate. După cum a arătat Salem [98] însă, *funcţia*

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}\left(3x + \frac{1}{\pi} x^2 \operatorname{sgn} x\right)$$

care transformă intervalul $[-\pi, \pi]$ *în el însuşi, şi este monotonă, continuă şi cu derivată mărginită, poate transforma o mulţime de tip U din* $[-\pi, \pi]$ *într-o mulţime de tip M.*

(3) Se pune problema dacă nu cumva reuniunile mulţimilor de tip $H^{(n)}$ sînt singurele mulţimi de tip U. Răspunsul este *negativ* după cum a arătat Piateţki-Şapiro [79] (a se vedea şi [4], cap. XIV, § 16).

(4) Tot lui Piateţkii-Şapiro [79] i se datoreşte şi un exemplu care arată că *nu orice mulţime de multiplicitate este o mulţime de multiplicitate în sens strict* (vezi mai departe 20.16 (4)).

20.13. Problema unicităţii este complet rezolvată dacă ne referim la clase mai restrînse de mulţimi; de exemplu pentru clasa mulţimilor perfecte simetrice de raport constant. După teorema **20.11** (iii) răspunsul la problema unicităţii pentru o mulţime perfectă simetrică de raport constant — fie ea E_ξ — nu depinde decît de raportul ξ. Nina Bari [2] a demonstrat că dacă ξ este raţional, $\xi = \dfrac{p}{q}$ (fracţie ireductibilă), atunci E_ξ este de tip U dacă şi numai dacă $p = 1$; dar problema rămăsese deschisă pentru ξ iraţional. În general problema a fost rezolvată de Salem.

Să notăm prin **S** clasa acelor numere algebrice întregi cu proprietatea că toate conjugatele lor algebrice au modulul < 1; evident, numerele din S sînt reale şi au modulul $\geqslant 1$. Clasa S se mai numeşte şi *clasa Pisot* (sau *clasa Pisot-Vijayaraghavan*).

TEOREMĂ. (Salem). *O mulţime* E_ξ *este de tip U dacă şi numai dacă* $\frac{1}{\xi} \in S \left(\text{desigur}, \frac{1}{\xi} > 2\right)$.

Demonstraţia iniţială a lui Salem [99] avea o greşeală la partea „dacă". Abia în 1955 Salem şi Zygmund [100] au dat demonstraţia corectă, care se poate urmări şi în [54], ch. VI. Menţionăm că Salem şi Zygmund au demonstrat că dacă $\frac{1}{\xi} \in S$, atunci E_ξ este de tipul *H* sau $H^{(n)}$ cu *n* convenabil.

Observaţii. (1) În legătură cu clasa S, Pisot [80] şi Erdös [26] conjecturau că este densă în $[1, \infty)$ în timp ce Vijayaraghavan [123] conjectura contrariul. Salem [99'] a arătat că clasa S este *închisă!*

(2) Deci dacă E_ξ este de tip *M*, atunci $1/\xi$ aparţine unei mulţimi deschise; prin urmare dacă ξ' este suficient de apropiat de ξ, atunci $E_{\xi'}$ este încă de tip *M*. Deci mulţimile E_ξ de tip *M* prezintă o „*stabilitate*" pentru variaţii mici ale lui ξ.

20.14. Problema unicităţii este complet rezolvată, şi tot de Salem [99] şi Salem şi Zygmund [101], şi pentru mulţimile perfecte omogene construite pe [0, 1] notînd prin

$$\eta = 0, \quad \eta_1, \ldots, \eta_d \ (d \geqslant 1), \quad (\eta_d = 1 - \xi).$$

originile intervalelor închise de lungime ξ a căror disecţiune va fi omotetică cu cea a intervalului [0, 1].

Să notăm aceste mulţimi prin $E(\eta_1, \ldots, \eta_d; \xi)$.

TEOREMĂ. (Salem). $E(\eta_1, \ldots, \eta_d; \xi)$ *este o mulţime de unicitate dacă şi numai dacă sînt îndeplinite condiţiile*:

(i) $\frac{1}{\xi} \in S$.

(ii) *Abscisele* $\eta_1, \ldots, \eta_d$ *sînt numere algebrice aparţinînd corpului lui* $\frac{1}{\xi}$.[2]

Pentru demonstraţie trimitem la [54], ch. VI.

20.15. NOTĂ. Problema unicităţii se pune nu numai pentru convergenţa obişnuită, ci şi pentru diferite metode de sumare (vezi [4], cap. XIV, §§ 25—27, [126], ch. IX, § 8).

20.16. În cele ce urmează extindem problema unicităţii la l.c.a.-grupuri pe baza teoremei **20.4.** Fie Γ un l.c.a.-grup şi $E \subset \Gamma$ o mulţime închisă. Considerăm următoarele:

DEFINIŢII: (1) Se spune că E este o *mulţime de unicitate* dacă E nu suportă nici o pseudofuncţie $S \neq 0$.

(2) Se spune că E este o *mulţime de unicitate în sens larg* dacă E nu suportă nici o măsură — pseudofuncţie $S_\mu \neq 0$ (adică nu există nici o măsură μ concentrată pe E cu proprietatea că transformata ei Fourier se anulează la infinit).

---

[2] Se spune că α aparţine corpului numărului algebric β dacă $\alpha = P(\beta)/Q(\beta)$, unde *P* şi *Q* sînt polinoame cu coeficienţi raţionali.

(3) Se spune că E este o *mulțime de multiplicitate* dacă E suportă o pseudofuncție $S \neq 0$.

(4) Se spune că E este o *mulțime de multiplicitate* în *sens strict* dacă E suportă o măsură-pseudofuncție $S_\mu \neq 0$.

Definițiile (1), (3) pe de o parte și (2), (4) pe de altă parte sînt complementare.

20.17. Sînt evidente afirmațiile din următoarea :

(1) Propoziție. (i) *Orice parte închisă a unei mulțimi de unicitate (în sens larg) este o mulțime de unicitate (în sens larg).*

(ii) *Orice reuniune finită de mulțimi de unicitate (în sens larg) este o mulțime de unicitate (în sens larg).*

Pe de altă parte, din teorema **19.27** rezultă că :

(2) Teoremă. *Orice mulțime Helson este o mulțime de unicitate în sens larg.*

După cum rezultă din **19.7** (2), dacă o mulțime Helson E este și o mulțime de sinteză spectrală, atunci E nu suportă adevărate pseudomăsuri și deci, conf. (2), este o mulțime de unicitate.

20.18. Urmînd terminologia introdusă de Varopoulos [119] dăm următoarele :

Definiții. (1) O măsură $\mu \in \mathcal{M}^+(\Gamma)$, $\mu \neq 0$, se numește *măsură Salem* dacă

(i) $\mu \in \mathcal{M}_0(\Gamma)$.

(ii) supp μ este compact.

(iii) Măsura Haar a subgrupului generat de supp μ este nulă.

(2) O mulțime $E \subset \Gamma$ se numește *mulțime Rudin* dacă

(i) E este perfectă.

(ii) E este strict independentă.

(iii) Există $\mu \in \mathcal{M}_0^+(\Gamma)$, $\mu \neq 0$ așa ca supp $\mu \subset E$.

Deci o măsură Salem este o măsură-pseudofuncție cu suportul compact și cu subgrupul generat de suport de măsură Haar nulă ; existența măsurilor Salem ar pune deci în lumină existența unor mulțimi de multiplicitate în sens strict cu proprietatea că subgrupul generat de ele este de măsură Haar nulă.

Pe de altă parte, o mulțime Rudin este o mulțime de multiplicitate în sens strict cu proprietatea că este perfectă și strict independentă.

În plus, existența mulțimilor Rudin ar demonstra că *există mulțimi perfecte strict independente care nu sînt mulțimi Helson, deci cu atît mai puțin mulțimi Kronecker.*

20.19. (1) Teoremă. (Salem-Varopoulos). *Pe orice l.c.a.-grup nediscret există măsuri Salem.*

(2) Teoremă. (Rudin-Varopoulos). *În orice l.c.a.-grup metrizabil nediscret există mulțimi Rudin.*

Salem [97] a demonstrat teorema (1) pentru $\Gamma = \mathbf{R}$ iar Rudin [93′] a demonstrat teorema (2) pentru $\Gamma = \mathbf{R}$ cu ajutorul teoremei (1). Varopoulos [119] a demonstrat ambele teoreme în cazul general. Ipoteza de metrizabilitate din teorema (2) este esențială (a se vedea și [111], [112]).

Demonstrațiile acestor teoreme fiind foarte laborioase, le omitem. Menționăm numai că ele se bazează pe considerații de teoria probabilităților, pe teorema de structură a l.c.a.-grupurilor (**11.19**), precum și pe teoremele de structură ale grupurilor abeliene compacte.

20.20. NOTĂ. Cu ajutorul teoremei **20.19** (1) și pe baza unei teoreme de descompunere a lui $\mathcal{M}(\mathbf{G})$ datorată lui Raikov (vezi [44′] § 2), Varopoulos ([119], p. 152) arată că *dacă G este un l.c.a.-grup nediscret, atunci* $\mathcal{M}(\mathbf{G})$ *conține un ideal maximal simetric* $\mathcal{J}$ *cu proprietatea că* $\mathcal{J} \supset \mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ *dar* $\mathcal{J} \not\supset \mathcal{M}_0(\mathbf{G})$. (În cazul particular $\mathbf{G} = \mathbf{R}$, acest rezultat a fost obținut de Simon [106)]; din acest rezultat, cu notațiile din secțiunea **18.8**, se obține că $\mathbf{\Gamma} \neq \mathbf{S}_0$ și $\overline{\mathbf{\Gamma}} \neq \mathbf{S}$, adică primele incluziuni din **18.8** (2) și **188** (3) sînt stricte. Reamintim că și incluziunea $\mathbf{S}_0 \subset \mathbf{\Delta}_0$ este strictă, ceea ce înseamnă că algebra $\mathcal{M}_0(\mathbf{G})$ nu este simetrică, rezultat obținut tot de Varopoulos [109], [110]. De altfel, acest rezultat este imediat în cazul în care $\mathbf{G}$ este un l.c.a.-grup metrizabil nediscret; într-adevăr, în acest caz teorema **20.19** (2) dă posibilitatea demonstrării asimetriei algebrei $\mathcal{M}_0(\mathbf{G})$ exact ca în cazul algebrei $\mathcal{M}(\mathbf{G})$ (vezi 18.11).

20.21. Să considerăm o mulțime $\mathbf{E} \subset [0, 2\pi]$. Atunci putem considera $\mathbf{E} \subset \mathbf{R}$ sau $\mathbf{E} \subset \mathbf{T}$. Lui Zygmund [125] i se datorește următoarea :

TEOREMĂ. *O mulțime* $\mathbf{E} \subset [0, 2\pi]$ *este mulțime de unicitate în raport cu* $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{R}$ *dacă și numai dacă este mulțime de unicitate în raport cu* $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{T}$.

Această teoremă se mai exprimă și astfel ([4], ch. XIV, § 9) : „*E este mulțime de unicitate în raport cu serii trigonometrice dacă și numai dacă este mulțime de unicitate în raport cu integrale trigonometrice*”.

§ 21. SINTEZĂ SPECTRALĂ

21.1. Problema sintezei spectrale. Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach comutativă, iar $\mathbf{\Delta} = \mathbf{\Delta}\ (\mathcal{A})$ spectrul lui $\mathcal{A}$ înzestrat cu topologia Ghelfand. *Elementele lui* $\mathbf{\Delta}$ *vor fi considerate atît ca ideale maximale cît și ca homomorfisme complexe nenule.*

Dacă $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$ este un ideal, atunci *anvelopa lui* $\mathcal{J}$ este :

$$\mathbf{H}(\mathcal{J}) = \{\mathcal{M} \in \mathbf{\Delta}\ (\mathcal{A});\ \mathcal{M} \supset \mathcal{J}\} =$$
$$= \{h \in \mathbf{\Delta}\ (\mathcal{A});\ h(X) = 0 \text{ or } x \in \mathcal{J}\};$$

dacă $\mathcal{J}$ este un ideal regulat propriu, atunci $\mathbf{H}(\mathcal{J})$ este nevidă (teorema lui Krull). Dacă $\mathbf{H}(\mathcal{J})$ se reduce la un singur element, atunci $\mathcal{J}$ se numește *ideal primitiv*. Un ideal $\mathcal{J}$ și închiderea lui $\overline{\mathcal{J}}$ au aceeași anvelopă. Deoarece :

$$\mathbf{H}(\mathcal{J}) = \bigcap_{x \in \mathcal{J}} (x^\wedge)^{-1}\ (0),$$

rezultă că *orice anvelopă este închisă.*

Dacă $\mathbf{E} \subset \mathbf{\Delta}\ (\mathcal{A})$ este o parte oarecare, atunci *nucleul lui* $\mathbf{E}$ este :

$$\mathcal{K}(\mathbf{E}) = \bigcap_{\mathcal{N} \in \mathbf{E}} \mathcal{M} = \{x \in \mathcal{A};\ h(x) = 0 \text{ or } h \in \mathbf{E}\}.$$

Deoarece orice ideal maximal regulat din $\mathcal{A}$ este închis, rezultă că *orice nucleu este închis.*

Dacă $\mathcal{A}$ este o algebră regulată (adică pentru orice parte $\mathbf{E} \subset \mathbf{\Delta}$ închisă și orice $h \in \mathbf{\Delta}$, $h \notin \mathbf{E}$ există $x \in \mathcal{A}$ așa ca $x^\wedge(h) = 1$ și $x^\wedge(k) = 0$

pentru orice $k \in \mathbf{E}$), atunci pentru orice mulţime închisă $\mathbf{E} \subset \Delta$ avem $\mathbf{H}(\mathcal{K}(\mathbf{E})) = \mathbf{E}$ (aceasta este de fapt o proprietate echivalentă cu regularitatea algebrei).

Pe de altă parte, este evident că pentru orice ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ avem $\overline{\mathcal{I}} \subset \mathcal{K}(\mathbf{H}(\mathcal{I}))$. *Problema sintezei spectrale constă în a caracteriza acele ideale închise* $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ *pentru care* $\mathcal{I} = \mathcal{K}(\mathbf{H}(\mathcal{I}))$.

Dacă în algebra Banach comutativă $\mathcal{A}$ *orice ideal închis* $\mathcal{I}$ *verifică egalitatea* $\mathcal{I} = \mathcal{K}(\mathbf{H}(\mathcal{I}))$, *se spune că* $\mathcal{A}$ *satisface sinteza spectrală sau că în* $\mathcal{A}$ *este adevărată teorema idealului.*

Se poate verifica uşor că pentru orice ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ avem $\mathbf{H}(\mathcal{K}(\mathbf{H}(\mathcal{I})) = \mathbf{H}(\mathcal{I})$, deci problema sintezei spectrale revine la *a stabili dacă pot exista două ideale închise* $\mathcal{I}_1 \neq \mathcal{I}_2$ *din* $\mathcal{A}$ *aşa că* $\mathbf{H}(\mathcal{I}_1) = \mathbf{H}(\mathcal{I}_2)$; *altfel spus, dacă* $\mathbf{H}(\mathcal{I})$ *determină sau nu pe* $\mathcal{I}$.

O mulţime închisă $\mathbf{E} \subset \Delta(\mathcal{A})$ (*unde* $\mathcal{A}$ *este o algebră regulată*) *cu proprietatea :*

$$\mathbf{H}(\mathcal{I}) = \mathbf{E} \Rightarrow \overline{\mathcal{I}} = \mathcal{K}(\mathbf{E})$$

se numeşte mulţime de sinteză spectrală.

21.2. Exemple. (1) $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{X})$, *unde* $\mathbf{X}$ *este un spaţiu compact* (*separat*). În acest caz $\Delta(\mathcal{A}) \equiv \mathbf{X}$ în mod canonic; anume, fiecărui $\mathcal{M} \in \Delta(\mathcal{A})$ îi corespunde $x \in \mathbf{X}$ aşa ca $\mathcal{M} = \{f \in \mathcal{A}\,;\, f(x) = 0\}$. Prin această identificare $\mathcal{A}^{\wedge} \equiv \mathcal{C}(\mathbf{X})$ iar transformarea Ghelfand este transformarea identică. Evident, $\mathcal{A}$ este semisimplă, iar teorema lui Urîson arată că $\mathcal{A}$ este regulată. Mai mult, $\mathcal{A}$ *satisface sinteza spectrală.*

Într-adevăr, fie $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ *un ideal închis*; vom arăta mai întîi că $\mathcal{I}$ este *autoadjunct*, adică $f \in I \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{I}$; fie $f \in \mathcal{I}$, $\varepsilon > 0$ şi

$$g_{\varepsilon} = (\varepsilon + f\bar{f})^{-1} f(\bar{f})^2 \in \mathcal{I}\,;$$

se vede uşor că :

$$g_{\varepsilon} = (\varepsilon + f\bar{f})^{-1}(\varepsilon + f\bar{f})f - \varepsilon(\varepsilon + f\bar{f})^{-1}\bar{f} = \bar{f} - \varepsilon(\varepsilon + f\bar{f})^{-1}\bar{f},$$

deci

$$|g_{\varepsilon} - \bar{f}| = \varepsilon |f| (\varepsilon + |f|^2)^{-1} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}$$

de unde rezultă că $\|g_{\varepsilon} - \bar{f}\| \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}$, adică $\bar{f} \in \mathcal{I}$.

Fie acum $\mathbf{E} = \mathbf{H}(\mathcal{I})$; cum fiecare funcţie din $\mathcal{I}$ se anulează pe $\mathbf{E}$, putem privi pe $\mathcal{I}$ ca o algebră autoadjunctă de funcţii continue care se anulează la infinit pe spaţiul local compact $\mathbf{X} \setminus \mathbf{E}$. Se vede uşor că $\mathcal{I}$ separă punctele lui $\mathbf{X} \setminus \mathbf{E}$ de punctul de la infinit şi între ele. Într-adevăr, fie $x \notin \mathbf{E}$; există $f \in \mathcal{I}$ aşa ca $f(x) \neq 0$, deoarece $\mathbf{E} = \mathbf{H}(\mathcal{I})$; dacă $y \notin \mathbf{E}$, $y \neq x$, atunci există o funcţie continuă $g \in \mathcal{C}(\mathbf{X})$ aşa ca $g(x) = 1$, $g(y) = 0$; atunci $fg \in \mathcal{I}$ şi separă pe x de y. Teorema Weierstrass Stone ne arată atunci că $\mathcal{I} \equiv \mathcal{C}_0(\mathbf{X} \setminus \mathbf{E})$, deoarece $\mathcal{I}$ este închis. Adică :

$$\mathcal{I} = \{f \in \mathcal{A}\,;\, f(x) = 0 \text{ or } x \in \mathbf{E}\} = \mathcal{K}(\mathbf{E}) = \mathcal{K}(\mathbf{H}(\mathcal{I})), \text{ q.e.d.}$$

(2) $\mathcal{A} = \mathcal{D}_1(\mathrm{T})$ = *algebra funcţiilor continuu diferenţiabile* pe **T** cu norma $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$; $\mathcal{A}$ este o algebră Banach comutativă, semisimplă şi regulată, iar $\Delta(\mathcal{A}) \equiv \mathbf{T}$. *$\mathcal{A}$ nu satisface sinteza spectrală.*

Într-adevăr, fie:

$$\mathcal{I} = \{f \in \mathcal{A};\, f(0) = f'(0) = 0\};$$

atunci $\mathrm{H}(\mathcal{I}) = \{0\}$, adică $\mathcal{I}$ este un ideal primitiv şi:

$$\mathcal{K}(\mathrm{H}(\mathcal{I})) = \{f \in \mathcal{A};\, f(0) = 0\} \underset{\neq}{\supset} \mathcal{I}, \text{ q.e.d.}$$

21.3. TEOREMĂ. *Dacă $\mathcal{A}$ este o algebră Banach comutativă regulată, $\mathrm{E} \subset \Delta(\mathcal{A})$ o mulţime compactă şi $\mathrm{F} \subset \Delta(\mathcal{A})$ o mulţime închisă disjunctă de* E, *atunci orice ideal închis $\mathcal{I}$ cu $\mathrm{H}(\mathcal{I}) = \mathrm{F}$ conţine un element x aşa ca $x^\wedge = 1$ pe* E.

Pentru demonstraţie trimitem la Loomis, [64].

21.4. TEOREMĂ. *Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach comutativă semisimplă şi regulată, iar $\mathrm{E} \subset \Delta(\mathcal{A})$ o mulţime închisă. În familia tuturor idealelor închise $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ cu proprietatea că $\mathrm{H}(\mathcal{I}) = \mathrm{E}$ există un cel mai mare element — $\mathcal{K}(\mathrm{E})$ — şi un cel mai mic element — $\mathcal{J}(\mathrm{E})$ —*

Evident, $\mathcal{K}(\mathrm{E})$ este cel mai mare ideal închis cu proprietatea dorită.

Fie $\mathcal{I}_{00}(\mathrm{E}) = \{x \in \mathcal{A};\ \mathrm{supp}\ x^\wedge \cap E = \emptyset$ şi $\mathrm{supp}\ x^\wedge$ este compact$\}$ iar $\mathcal{J}(E)$ închiderea lui $\mathcal{I}_{00}(\mathrm{E})$ în $\mathcal{A}$.

Evident, $\mathcal{J}(\mathrm{E})$ este un ideal închis în $\mathcal{A}$ şi $\mathrm{E} \subset \mathrm{H}(\mathcal{J}(\mathrm{E}))$.

Dacă $h_0 \notin \mathrm{E}$, fie V o vecinătate deschisă şi relativ compactă a lui h_0 aşa ca $\overline{\mathrm{V}} \cap E = \emptyset$. Cum algebra $\mathcal{A}$ este regulată, există $x \in \mathcal{A}$ aşa ca $x^\wedge(h_0) \neq 0$ dar $x^\wedge \neq 0$ pe V′. Atunci $x \in I_{00}(\mathrm{E})$ dar $h_0(x) \neq 0$, deci $h_0 \notin \mathrm{H}(\mathcal{J}(\mathrm{E}))$. Am obţinut astfel egalitatea $\mathrm{E} = \mathrm{H}(\mathcal{J}(\mathrm{E}))$.

Fie acum $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ un ideal închis cu $\mathrm{H}(\mathcal{I}) = \mathrm{E}$ şi fie $x \ni \mathcal{I} I_{00}(\mathrm{E})$, adică $x^\wedge$ are suportul K compact şi disjunct de E; conf. teoremei **21.3** există $y \in \mathcal{I}$ aşa ca $y^\wedge = 1$ pe K. Dacă $z = xy$, atunci $z^\wedge = x^\wedge$, şi cum algebra $\mathcal{A}$ este semisimplă, rezultă $x = z \in \mathcal{I}$. Deci $\mathcal{I}_{00}(\mathrm{E}) \subset \mathcal{I}$, de unde $\mathcal{J}(\mathrm{E}) \subset \mathcal{I}$, q.e.d.

21.5. COROLAR. *Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach comutativă, semisimplă şi regulată. O mulţime închisă $\mathrm{E} \subset \Delta(\mathcal{A})$ este o mulţime de sinteză spectrală dacă şi numai dacă $\mathcal{K}(\mathrm{E}) = \mathcal{J}(\mathrm{E})$, adică dacă şi numai dacă orice element $x \in \mathcal{K}(\mathrm{E})$ se poate aproxima în norma lui $\mathcal{A}$ prin elemente din $\mathcal{I}_{00}(\mathrm{E})$.*

21.6. Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach comutativă care satisface *condiţia lui Ditkin la infinit.*

Să notăm, pentru $\mathrm{E} \subset \Delta(\mathcal{A})$ închisă:

$$\mathcal{I}_0(\mathrm{E}) = \{x \in \mathcal{A};\ \mathrm{supp}\ x^\wedge \cap \mathrm{E} = \emptyset\}.$$

Atunci $\mathcal{I}_{00}(\mathrm{E}) \subset \mathcal{I}_0(\mathrm{E})$ iar condiţia lui Ditkin la infinit ne asigură că $\mathcal{I}_0(\mathrm{E}) \subset \overline{\mathcal{I}_{00}(\mathrm{E})}$, deci $\overline{\mathcal{I}_0(\mathrm{E})} = \mathcal{J}(\mathrm{E})$. Obţinem astfel următorul:

COROLAR. *Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach comutativă, semisimplă, regulată şi care satisface condiţia lui Ditkin la infinit. O mulţime închisă $\mathrm{E} \subset \Delta(\mathcal{A})$ este o mulţime de sinteză spectrală dacă şi numai dacă orice element $x \in \mathcal{K}(E)$ se poate aproxima în norma lui $\mathcal{A}$ prin elemente din $\mathcal{I}_0(\mathrm{E})$.*

NOTĂ. Într-o algebră Banach comutativă regulată şi care satisface condiţia lui Ditkin la infinit, orice ideal închis se poate extinde la un ideal maximal (conf. Loomis [64]).

21.7. Pseudomăsuri. Din secţiunea **15.1** şi din cele precedente deducem că

$$\mathcal{PM}(\mathrm{E}) = \mathcal{I}_0(\mathrm{E})^{\perp} \text{ (subspaţiul ortogonal)}$$

iar dacă $\mathcal{A}$ este o algebră Banach comutativă semisimplă şi regulată, care verifică condiţia lui Ditkin la infinit, atunci

$$\mathcal{PM}(\mathrm{E}) = \mathcal{I}_{00}(\mathrm{E})^{\perp} = \mathcal{J}(\mathrm{E})^{\perp}.$$

În aceste condiţii, egalitatea $\mathcal{K}(\mathrm{E}) = \mathcal{J}(\mathrm{E})$, care caracterizează mulţimile de sinteză spectrală, este echivalentă, conf. teoremei Hahn-Banach, cu egalitatea $\mathcal{K}(\mathrm{E})^{\perp} = \mathcal{J}(\mathrm{E})^{\perp} = \mathcal{PM}(\mathrm{E})$.

Să considerăm aserţiunile:

(1) $S \in \mathcal{PM}(\mathrm{E})$

(2) $x \in \mathcal{K}(\mathrm{E})$

(3) $\langle S, x \rangle = 0$

unde $S \in \mathcal{PM}(\Delta)$, $x \in \mathcal{A}$ şi $\mathrm{E} = \bar{\mathrm{E}} \subset \Delta$, precum şi implicaţia:

$$(\mathrm{S}): (1) \text{ şi } (2) \Rightarrow (3).$$

Atunci

TEOREMĂ. *E este o mulţime de sinteză spectrală dacă şi numai dacă pentru orice S şi x are loc implicaţia* (S).

DEFINIŢIE. *S satisface sinteza spectrală* dacă pentru orice x şi E are loc implicaţia (S).

DEFINIŢIE. *x satisface sinteza spectrală* dacă pentru orice S şi E are loc implicaţia (S).

21.8. Mulţimi de rezoluţie spectrală. O mulţime $\mathrm{E} \subset \Delta$ se numeşte *mulţime de rezoluţie spectrală* dacă orice parte închisă a lui E este o mulţime de sinteză spectrală (conf. [68]).

În restul acestei secţiuni presupunem în plus că $A^{\wedge}$ este densă în $\mathcal{C}_0(\Delta)$.

O mulţime închisă $\mathrm{E} \subset \Delta$ se spune că *nu suportă adevărate pseudomăsuri*, dacă $\mathcal{PM}(\mathrm{E}) = \mathcal{M}(\mathrm{E})$.

Este evident că *orice măsură satisface sinteza spectrală şi că orice mulţime închisă care nu suportă adevărate pseudomăsuri este o mulţime de rezoluţie spectrală.*

Dacă E nu este o mulţime de rezoluţie spectrală, vom spune că E este o *mulţime de nonrezoluţie spectrală.*

21.9. (1). TEOREMĂ. *O pseudomăsură S satisface sinteza spectrală dacă şi numai dacă S aparţine subspaţiului liniar slab închis generat de măsurile punctuale concentrate pe suportul lui S.*

Fie μ_h măsura punctuală de masă 1 corespunzătoare punctului $h \in \Delta$. Pseudomăsura S aparţine subspaţiului liniar slab închis generat de familia $\{\mu_h\}_{h \in \operatorname{supp} S}$ dacă şi numai dacă orice funcţională liniară slab continuă pe $\mathcal{PM}(\Delta)$ care se anulează în fiecare μ_h se anulează şi în S. Aceasta revine însă la a spune că $\langle S, x \rangle = 0$ pentru orice $x \in \mathcal{A}$ cu proprietatea că $x^{\wedge} = 0$ pe supp S adică la a spune că S satisface sinteza spectrală.

(2) TEOREMĂ. *O mulţime închisă* $\mathbf{E} \subset \mathbf{\Delta}$ *este o mulţime de sinteză spectrală dacă şi numai dacă orice pseudomăsură suportată de* **E** *aparţine subspaţiului liniar slab închis generat de măsurile punctuale concentrate pe* **E**.

COROLAR. *Dacă* supp S *este o mulţime de sinteză spectrală, atunci* S *satisface sinteza spectrală.*

Pentru o mulţime $\mathbf{E} \subset \mathbf{\Delta}$ vom nota prin $\mathcal{PM}_0(\mathbf{E})$ *subspaţiul liniar slab închis generat în* $\mathcal{PM}(\mathbf{\Delta})$ *de măsurile punctuale concentrate pe* **E**. Evident, avem $\mathcal{PM}_0(\mathbf{E}) \subset \mathcal{PM}(\mathbf{E})$ şi teoremele (1) şi (2) devin respectiv :

(1′) S satisface sinteza spectrală $\Leftrightarrow S \in \mathcal{PM}_0$ (supp S).

(2′) $\mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} \subset \mathbf{\Delta}$ este mulţime de sinteză spectrală $\Leftrightarrow \mathcal{PM}_0(\mathbf{E}) = \mathcal{PM}(\mathbf{E})$.

Să mai notăm : $\mathcal{A}(\mathbf{E}) = \mathcal{A}^\wedge|_{\mathbf{E}} \equiv \mathcal{A}^\wedge/\mathcal{K}(\mathbf{E})$ şi $\mathcal{A}_0(\mathbf{E}) = \mathcal{A}^\wedge/\mathcal{J}(\mathbf{E})$. Atunci $\mathcal{A}(\mathbf{E})$ şi $\mathcal{A}_0(\mathbf{E})$ sînt în mod canonic algebre Banach cît ale lui $\mathcal{A}^\wedge$ şi se verifică uşor relaţiile :

(3) $[\mathcal{A}(E)]^* \equiv \mathcal{PM}_0(\mathbf{E})$

(4) $[\mathcal{A}_0(\mathbf{E})]^* \equiv \mathcal{PM}(\mathbf{E})$.

În sfîrşit :

(5) TEOREMĂ. *Un element* $x \in \mathcal{A}$ *satisface sinteza spectrală dacă şi numai dacă* x *aparţine idealului închis* $\mathcal{J}((x^\wedge)^{-1}(0))$.

Teorema rezultă imediat cu ajutorul teoremei Hahn-Banach.

21.10. NOTE. (1) Dacă $\mathbf{E} \subset \mathbf{\Delta}$ este o mulţime închisă, atunci $\mathcal{A}(\mathbf{E})$ este o algebră Banach cît a lui $\mathcal{A}^\wedge$ şi $[\mathcal{A}(\mathbf{E})]^* = \mathcal{K}(\mathbf{E})^\perp$. Deci *mulţimile de sinteză spectrală sînt caracterizate de egalitatea* :

$$[\mathcal{A}(\mathbf{E})]^* \equiv \mathcal{PM}(\mathbf{E}).$$

(2) Se pot defini şi *mulţimile Helson* prin egalitatea $\mathcal{A}(\mathbf{E}) = \mathcal{C}(\mathbf{E})$; în cazul că A *este dens* în $\mathcal{C}_0(\mathbf{\Delta})$, definiţia este echivalentă cu egalitatea :

$$[\mathcal{A}(\mathbf{E})]^* \equiv \mathcal{M}(\mathbf{E}).$$

(3) Cum mulţimile fără adevărate pseudomăsuri sînt caracterizate de egalitatea

$$\mathcal{M}(\mathbf{E}) = \mathcal{PM}(\mathbf{E}),$$

se regăseşte în condiţii mai generale corolarul 19.7 (2).

21.11. NOTĂ. Presupunem că algebrea $\mathcal{A}$ satisface, în afară de condiţiile de la 21.7 şi *condiţia lui Ditkin, în fiecare punct* $h \in \mathbf{\Delta}$: pentru orice $x \in \mathcal{A}$ cu $x^\wedge(h) = 0$ există un şir $\{u_n\} \subset \mathcal{A}$ şi un şir $\{\mathbf{V}_n\}$ de vecinătăţi ale lui h aşa ca :

(i) supp $u_n^\wedge \subset \mathbf{V}_n'$, pentru orice $n \in N$;

(ii) $xu_n \to x$ pentru $n \to \infty$.

Se demonstrează atunci că *orice mulţime* $\mathbf{E} \subset \mathbf{\Delta}(\mathcal{A})$ *cu proprietatea de frontiera* $\partial\mathbf{E}$ *nu conţine nici o mulţime perfectă nevidă este o mulţime de sinteză spectrală*. În particular, *mulţimea vidă, orice mulţime finită şi orice mulţime simultan închisă şi deschisă sînt mulţimi de sinteză spectrală* (vezi Loomis, [64]).

21.12. Algebra $\mathcal{L}^1(\mathbf{G})$. Dacă **G** este un l.c.a.-grup, atunci $\mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ este o algebră Banach comutativă, semisimplă, regulată, complet simetrică.

şi care verifică condiţia lui Ditkin în orice punct al spectrului şi la infinit (conf. **1.11**, **5.4**, **8.1**–**8.8**).

Prin urmare *toate rezultatele obţinute în cadrul mai general de pînă acum rămîn valabile.* Notăm că unele dintre aceste rezultate au fost obţinute direct pentru $\mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ în § **8**.

Deoarece $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{G}^\wedge$ este spectrul lui $\mathcal{L}^1(\mathbf{G})$, vom nota spaţiul pseudomăsurilor prin $\mathcal{PM}(\mathbf{\Gamma})$. De fapt $\mathcal{PM}(\mathbf{\Gamma})$ *este izometric izomorf cu* $\mathcal{L}^\infty(\mathbf{G})$; lui $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbf{G})$ i se asociază $S_\varphi \in \mathcal{PM}(\mathbf{\Gamma})$ prin egalitatea :

$$\langle S_\varphi, f \rangle = \int_{\mathbf{G}} f(y)\, \varphi(-y)\, \mathrm{d}y,\ f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{G}).$$

Reamintim că în $\mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ subspaţiile închise invariante la translaţii coincid cu idealele închise şi că, dacă $\mathcal{J}$ este un subspaţiu invariant la translaţii, atunci $S_\varphi \perp \mathcal{J} \Leftrightarrow f \ast \varphi = 0$ pentru orice $f \in \mathcal{J}$ (conf. **8.9**). Prin urmare, $\mathbf{E} = \overline{\mathbf{E}} \subset \mathbf{\Gamma}$ *este o mulţime de sinteză spectrală* $\Leftrightarrow$ ($f \ast \varphi = 0$ *pentru orice* $f \in \mathcal{J}_0(E) \Rightarrow f \ast \varphi = 0$ *pentru orice* $f \in \mathcal{K}(\mathbf{E})$).

Problema sintezei spectrale este complet rezolvată dacă G este *compact*. Atunci, conf. **21.11**, *orice mulţime din* $\mathbf{\Gamma}$ *este o mulţime de sinteză spectrală, deci* $\mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ *satisface sinteza spectrală.*

În cele ce urmează considerăm un şir de exemple de mulţimi de sinteză spectrală şi de nonsinteză spectrală în $\mathbf{\Gamma}$.

21.13. Exemplul lui L. Schwartz. [102]. Fie $\mathbf{G} = \mathbf{\Gamma} = \mathbf{R}^3$ iar $\mathbf{E} = \{y \in \mathbf{R}^3;\ |y| = 1\} \subset \mathbf{\Gamma}$. Fie $\mathbf{D}_\infty(\mathbf{\Gamma})$ mulţimea funcţiilor indefinit diferenţiabile şi cu suport compact pe $\mathbf{\Gamma}$. Evident, $\mathbf{D}_\infty(\mathbf{\Gamma}) \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbf{\Gamma})$. Mai mult :

(1) LEMĂ. $\mathbf{D}_\infty(\mathbf{\Gamma}) \subset \mathcal{A}(\mathbf{\Gamma})$.

Într-adevăr, fie $\varphi \in \mathbf{D}_2(\mathbf{\Gamma})$ iar f transformata Fourier inversă a lui φ; atunci

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}^3} \varphi(y)\ \mathrm{e}^{ix \cdot y}\, \mathrm{d}y,$$

unde $x \cdot y = \sum_{k=1}^{3} x_k y_k$. Prin urmare, transformarea Fourier inversă a lui $\frac{\partial \varphi}{\partial y_k}$ este $(-ix_k f(x))$ etc. Rezultă că, pentru $p = 2$ şi $p = 4$, funcţia $|x|^p f(x)$ este în $\mathcal{C}_0(G)$; prin urmare există $M > 0$ cu :

$$|f(x)|\,(|x|^2 + |x|^4) \leqslant M, \text{ or. } x \in \mathbf{G}$$

deci

$$|f(x)| \leqslant \frac{M}{|x|^2 + |x|^2}.$$

Cum însă $\int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{|x|^2 + |x|^4}\, \mathrm{d}x = 2\pi^2 < \infty$, rezultă că $f \in \mathcal{L}^1(G)$. Prin urmare, conf. teoremei de inversiune rezultă că $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbf{\Gamma})$, ceea ce demonstrează lema.

(2) TEOREMĂ. $\mathbf{E}$ *este o mulţime de nonsinteză spectrală.*

Să considerăm

$$\mathcal{G} = \{f \in \mathcal{L}^1(G)\,;\ f^\wedge \in \mathcal{D}_\infty(\Gamma),\ f^\wedge = 0 \text{ pe } \mathbf{E}\}.$$

$$\mathcal{I} = \{f \in \mathcal{L}^1(G)\,;\ f^\wedge \in \mathcal{D}_\infty(\Gamma),\ f^\wedge = 0 \text{ pe } \mathbf{E},\ \partial f^\wedge / \partial y_1 = 0 \text{ pe } \mathbf{E}\}$$

Avem :

(i) $\mathcal{I} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{K}(\mathbf{E})$,

(ii) $\mathcal{I}$, $\mathcal{G}$ sînt subspaţii invariante la translaţie,

(iii) $\mathbf{H}(\bar{\mathcal{I}}) = \mathbf{H}(\bar{\mathcal{G}}) = \mathbf{E}$;

într-adevăr, (i) şi (ii) sînt evidente; deci, conf. 21.12, $\bar{\mathcal{I}}$ şi $\bar{\mathcal{G}}$ sînt ideale închise, aşa încît (iii) are sens; $\mathbf{H}(\bar{\mathcal{G}}) \supset \mathbf{E}$, iar dacă $\gamma \notin \mathbf{E}$, există $f^\wedge \in \mathbf{D}_\infty(\Gamma)$ aşa ca $f^\wedge = 0$ pe $\mathbf{E}$ şi $f^\wedge(\gamma) \neq 0$ (conf. lemei şi unei proprietăţi cunoscute de regularitate), deci $\mathbf{H}(\bar{\mathcal{G}}) = \mathbf{E}$; analog se arată şi că $\mathbf{H}(\bar{\mathcal{I}}) = \mathbf{E}$.

Vom mai arăta că :

(iv) $\bar{\mathcal{I}} \neq \bar{\mathcal{G}}$

construind o funcţională liniară şi continuă pe $\mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ care este ortogonală pe $\mathcal{I}$ dar nu este ortogonală pe $\mathcal{G}$.

Fie μ masa unitate uniform distribuită pe E; transformarea inversă a lui μ este :

$$\mu^\wedge(x) = \int_{\mathbf{E}} e^{ix \cdot y}\, d\mu(y), \quad x \in \mathbf{G}$$

adică

$$\mu^\wedge(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathbf{E}} e^{ix \cdot y}\, dS(y),$$

unde integrala se interpretează ca o integrală de suprafaţă pe *suprafaţa* E. Să punem $x = (0, 0, r)$; atunci, cum parametrizarea suprafeţei E este :

$$\begin{cases} y_1(\varphi, \theta) = \sin \cos \theta \\ y_2(\varphi, \theta) = \sin \varphi \sin \theta \\ y_3(\varphi, \theta) = \cos \varphi, \end{cases}$$

rezultă

$$\mu^\wedge(x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} e^{ir \cos \varphi} \sin \varphi \, d\varphi = \frac{\sin r}{r},\ r = |x|.$$

O schimbare convenabilă de coordonate ne reduce cazul general $x = (x_1, x_2, x_3)$ la acest caz, aşa încît, pentru orice $x \in \mathbf{G}$ avem

$$\mu^\wedge(x) = \frac{\sin r}{r}, \text{ unde } r = |x|.$$

Prin urmare $|x_1 \mu^\wedge(x)| \leqslant 1$ pentru orice $x \in \mathbf{G}$ şi deci obţinem o funcţională liniară şi continuă Ψ pe $\mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ prin

$$\Psi f = \int_{\mathbf{G}} f(x)\, x_1\, \mu^\wedge(-x)\, dx, \quad f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{G}).$$

Fie acum $f\in\mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ cu $f\in\mathbf{D}_\infty(\Gamma)$; atunci, după cum am văzut (lemă), $x_1 f(x)\in\mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ şi este transformarea inversă a funcţiei $i\,\partial f^\wedge/\partial y_1$. Prin urmare, avînd în vedere teorema lui Fubini şi teorema de inversiune, avem :

$$\Psi f=\int_{\mathbf{G}} x_1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_{\mathbf{E}} \mathrm{e}^{-ix\cdot y}\,\mathrm{d}\mu(x)=$$

$$=\int_{\mathbf{E}}\mathrm{d}\mu(x)\int_{\mathbf{G}} x_1 f(x)\,\mathrm{e}^{-ix\cdot y}\,\mathrm{d}x=i(2\pi)^3\int_{\mathbf{E}}\frac{\partial f^\wedge}{\partial y_1}\,\mathrm{d}\mu.$$

Aşadar, dacă $f\in\mathcal{J}$, atunci $\Psi f=0$; dar, în mod evident, există funcţii din $\mathcal{J}$ pentru care ultima integrală nu se anulează.

Teorema este demonstrată.

Observaţii. (1) Analogul teoremei de mai sus are loc în $\mathbf{G}=\mathbf{R}^n$, $n\geqslant 3$ (conf. [102]) dar nu are loc în $\mathbf{G}=\mathbf{R}$ (conf. 21.11) şi nici în $\mathbf{G}=\mathbf{R}^2$ (după cum a demonstrat Herz [40], cercul unitate este o mulţime de sinteză spectrală în $\Gamma=\mathbf{R}^2$).

(2) Teorema rămîne adevărată şi pentru $\Gamma=\mathbf{T}^3$.

(3) Un studiu amănunţit al sintezei spectrale pe sferele euclidiene a fost făcut de Varopoulos [120] care a găsit, în cazuri particulare, toate idealele care au ca anvelopă sfera S_n. Altă referinţă : Rudin [96].

21.14. În cele ce urmează vom dezvolta *alte exemple ale lui Herz* ([38], [41]) din care va rezulta că mulţimea triadică a lui Cantor este o mulţime de sinteză spectrală. Aceasta a fost primul exemplu de mulţime perfectă şi total discontinuă care satisface sinteza spectrală. Vom considera, pentru simplificare, Γ compact; de altfel, după cum vom vedea (**21.25**), acesta este cazul cel mai important. Expunerea urmează pe cea din Rudin [95].

LEMĂ. *Fie* $\mathbf{\Gamma}$ *un grup abelian compact,* $\mathbf{G}$ *dualul său,* $\mathbf{\Lambda}\subset\mathbf{\Gamma}$ *un subgrup finit cu* n *elemente, iar* $\mathbf{m}$ *măsura Haar pe* $\mathbf{\Gamma}$. *Atunci există o mulţime boreliană* $\mathbf{Y}\subset\mathbf{\Gamma}$ *aşa ca*

(i) $\mathbf{m}(\mathbf{Y})=1/n$.

(ii) $\mathbf{V}=\mathbf{Y}-\mathbf{Y}$ *deschisă.*

(iii) $\mathbf{V}\cap\mathbf{\Lambda}=\{0\}$.

După cum se ştie ([45], A 27), orice grup abelian finit este o sumă directă de grupuri ciclice finite, deci $\mathbf{\Lambda}$ este generat de elementele independente $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$ de ordine respectiv $q_1,\ldots,q_k$, iar $n=q_1\ldots q_k$. Cu ajutorul teoremei de prelungire a caracterelor (**9.10**) deducem că există punctele $x_1,\ldots,x_k\in\mathbf{G}$ aşa ca :

$$(x_r,\gamma_s)=\begin{cases}\exp\,(2\pi/iq_r) & \text{dacă } s=r\\ 1 & \text{dacă } s\neq r\end{cases}\tag{1}$$

pentru $r,\ s=1,\ldots,k$.

Fie acum $\gamma\in\mathbf{\Lambda}$, deci $\gamma=\sum_{s=1}^{k}a_s\gamma_s$, cu coeficienţii a_s întregi ; avem pentru $1\leqslant r\leqslant k$:

$$(x_r,\gamma)=\prod_{s=1}^{k}(x_r,\gamma_s)^{a_s}=(x_r,\gamma_r)^{a_r}=\exp\,(2\pi i a_r/q_r).\tag{2}$$

Fie acum

$$\mathbf{Y}_r = \{\gamma \in \Gamma ;\ 0 \leqslant \arg\,(x,\ \gamma_r) \leqslant 2\pi/q_r\}.$$

iar

$$\mathbf{Y} = \bigcap_{r=1}^{k} \mathbf{Y}_r.$$

Atunci $\mathbf{Y}$ este o mulţime boreliană, iar

$$\mathrm{m}(\mathbf{Y}) = 1/n. \tag{3}$$

Într-adevăr, să considerăm familia de translate ale lui $\mathbf{Y}$:

$$\{\mathbf{Y} + \alpha_1\gamma_1 + \dots + \alpha_r\gamma_r\}$$

unde α_r sînt numere întregi şi $0 \leqslant \alpha_r \leqslant q_r$. Aceste mulţimi sînt disjuncte două cîte două şi acoperă pe Γ, după cum se verifică uşor, ţinînd seama că :

$$\mathbf{Y} + \alpha_1\gamma_1 + \dots + \alpha_r\gamma_r =$$
$$= \left\{\gamma \in \boldsymbol{\Gamma};\ \frac{2\pi\alpha_r}{q_r} \leqslant \arg\,(x_r,\, y) < \frac{2\pi\,(\alpha_r + 1)}{q_r},\ r = 1, \dots,\ k\right\}.$$

Cum numărul acestor mulţimi este n, iar măsura Haar este invariantă la translaţii, rezultă relaţia (3).

Se vede uşor că :

$$\mathbf{V} = \left\{\gamma \in \Gamma;\ -\frac{2\pi}{q_r} < \arg(x_r,\, \gamma) < \frac{2\pi}{q_r},\ r = 1, \dots, k\right\}$$

deci $\mathbf{V}$ este deschisă iar relaţia (2) ne arată că $\mathbf{V} \cap \boldsymbol{\Lambda} = 0$.

Lema este complet demonstrată.

21.15. Să presupunem acum că $\{\boldsymbol{\Lambda}_i\}$ este o familie numărabilă de subgrupuri finite ale lui $\boldsymbol{\Gamma}$ iar $\mathbf{Y}_i$ şi $\mathbf{V}_i$ asociate lui $\boldsymbol{\Lambda}_i$ ca la **21.14**.

Presupunem în plus că :

(i) $\{\mathbf{V}_i\}$ formează un sistem fundamental de vecinătăţi ale originii;

(ii) $\mathbf{E} \subset \boldsymbol{\Gamma}$ este o mulţime închisă cu proprietatea că pentru orice $i \in N$:

$$(\mathbf{E} + \mathbf{V}_i) \cap \boldsymbol{\Lambda}_i \subset \mathbf{E};$$

această ultimă condiţie înseamnă că dacă $\gamma \in \boldsymbol{\Lambda}_i$, atunci or $\gamma \in \mathbf{E}$, or $(\gamma + \mathbf{V}_i) \cap \mathbf{E} = \emptyset$.

TEOREMĂ. **E** *este o mulţime de sinteză spectrală.*

Fie n_i numărul elementelor lui $\boldsymbol{\Lambda}$, $g_i = \chi_{\mathbf{Y}_i}$ iar $k_i \in \mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ definit prin :

$$k_i^{\wedge} = n_i^2 (g_i * \tilde{g}_i),\ i \in N;$$

cu teorema de inversiune se obţine uşor că :

$$k_i(x) = n_i^2 \left(\int_Y (x, \gamma)\,\mathrm{d}\gamma\right) \left(\int_{-Y_i} (x, \gamma)\,\mathrm{d}\gamma\right).$$

Mai notăm că:

(a) $k_i^{\wedge}$ este continuă şi pozitiv definită (**3.3**).

(b) $k_i \geqslant 0$ (**3.7**).

(c) $k_i(0) = 1$.

(d) $k_i^{\wedge}(0) = n_i$.

(e) $k_i^{\wedge}(\gamma) = 0$ pentru $\gamma \notin V_i$.

Pentru $\varphi \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathbf{G})$ să punem:

(1) $$\Phi_i(\gamma) = \sum_{y \in \mathbf{G}} \varphi(y)\, k_i(-y)\, (-y, \gamma),\ \gamma \in \mathbf{\Gamma}$$

şi

(2) $$\varphi_i(x) = \frac{1}{n_i} \sum_{\gamma \in \Lambda_i} \Phi_i(\gamma)\, (x, \gamma),\ x \in \mathbf{G}$$

Dacă $\mathbf{H}_i = \mathbf{A}(\mathbf{G}, \mathbf{\Lambda}_i)$, atunci avem următoarele relaţii

(3) $$\varphi_i(x) = \sum_{y \in \mathbf{G}} \varphi(y)\, k_i(-y) \cdot \frac{1}{n_i} \sum_{\gamma \in \Lambda_i} (x - y, \gamma) =$$
$$= \sum_{y - x \in \mathbf{H}_i} \varphi(y)\, k_i(-y) = \sum_{y \in \mathbf{H}_i} \varphi(x + y)\, k_i(-x - y);$$

a doua egalitate se datoreşte relaţiilor de ortogonalitate pe $\mathbf{\Lambda}_i$ (vezi **2.5**). În particular, dacă $\varphi = 1$, atunci $\Phi_i(\gamma) = k_i^{\wedge}(-\gamma)$; cum $k_i^{\wedge} = 0$ în afara lui $\mathbf{V}_i$ şi cum $\mathbf{V}_i \cap \mathbf{\Lambda}_i = \{0\}$, din (2) rezultă că $\varphi_i = 1$ şi deci din (3) rezultă

(4) $$\sum_{y \in \mathbf{H}_i} k_i(-x - y) = 1;\quad x \in \mathbf{G},\quad i \in N$$

şi deoarece $k_i \geqslant 0$, din (3) şi (4) deducem:

(5) $$\|\varphi_i\|_{\infty} \leqslant \|\varphi\|_{\infty},\quad i \in N,\quad \varphi \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathbf{G}).$$

Pe de altă parte, pentru fiecare $x \in \mathbf{G}$ avem:

(6) $$\lim_{i \to \infty} k_i(x) = 1.$$

Într-adevăr, să notăm:

$$A(x) = n_i \int_{\mathbf{Y}_i} (x, \gamma)\, \mathrm{d}\gamma$$

$$B(x) = n_i \int_{\mathbf{Y}_i} (x, \gamma)\, \mathrm{d}\gamma,$$

atunci

$$|k_i(x) - 1| = |A(x)\, B(x) - A(0)\, B(0)| \leqslant |A(x) - A(0)| +$$
$$+ |B(x) - B(0)| \leqslant 2n_i \int_{\mathbf{Y}_i} |1 - (x, \gamma)|\, \mathrm{d}\gamma.$$

Dacă $\mathbf{V}_\varepsilon = \left\{\gamma;\ |1-(x,\gamma)| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$, atunci, conf. (i), există $i(\varepsilon)\in N$ aşa ca pentru $i \geqslant i(\varepsilon)$ să avem $\mathbf{V}_i \subset \mathbf{V}_\varepsilon$, şi, à fortiori, $\mathbf{Y}_i \subset \mathbf{V}_\varepsilon$; deci pentru $i \geqslant i(\varepsilon)$ vom avea:

$$|k_i(x) - 1| \leqslant 2n_i \frac{\varepsilon}{2} m(\mathbf{Y}_i) = \varepsilon$$

ceea ce demonstrează relaţia (6).

Din (4) şi (6) rezultă

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{\substack{y\in \mathbf{H}_i \\ y\neq 0}} k_i(-x-y) = 0,\quad x\in \mathbf{G} \tag{7}$$

iar din (3) şi (7) obţinem

$$\lim_{i\to\infty} \varphi_i(x) = \varphi(x),\quad x\in \mathbf{G}. \tag{8}$$

Fie acum o funcţie $\varphi\in\mathcal{L}^\infty(\mathbf{G})$ aşa ca $g\ast\varphi = 0$ pentru orice $g\in\mathcal{J}_0(\mathbf{E})$ şi fie $f\in\mathcal{K}(\mathbf{E})$; conf. **21.12** avem de arătat că $f\ast\varphi = 0$.

Să punem $h_i(x) = k_i(x)(x,\gamma)$. Atunci $\hat{h}_i = 0$ în afara lui $\mathbf{V}_i + \gamma$; deci, dacă aderenţa lui $\mathbf{V}_i+\gamma$ nu intersectează pe $\mathbf{E}$, avem $h_i\ast\varphi = 0$; prin urmare, dacă $\gamma\notin \mathbf{E} + \bar{\mathbf{V}}_i$, atunci $\Phi_i(\gamma) = 0$ (conf. (1)), şi cum Φ_i este continuă rezultă că

$$\gamma\notin \mathbf{E} + \mathbf{V}_i \Rightarrow \Phi_i(\gamma) = 0. \tag{9}$$

Pe de altă parte, conf. (2), avem:

$$(f\ast\varphi_i)(x) = \frac{1}{n_i}\sum_{\gamma\in\Lambda_i} \Phi_i(\gamma) f^\wedge(\gamma)(x,\gamma).$$

Din (ii), (9) şi $f\in\mathcal{K}(\mathbf{E})$ rezultă că fiecare termen din suma de mai sus, este nul, deci $f\ast\varphi_i = 0$ pentru orice $i\in N$.

În sfîrşit, din (5) şi (8) deducem cu ajutorul teoremei lui Lebesgue că $f\ast\varphi = 0$, q.e.d.

21.16. Exemple. Fie $\mathbf{G} = \mathbf{Z}$, $\Gamma = \mathbf{T}$; vom privi pe $\mathbf{T}$ ca $\mathbf{R}$ (mod 2π). Fie $\{p_i\}_{i\in N}$ un şir de numere naturale mai mari ca 2 şi

$$n_i = p_1 p_2 \ldots p_i,\quad i\in N.$$

Fie apoi

$$\Lambda_i \equiv \mathbf{Z}_{n_i} \equiv \{2\pi/n_i;\ j = 1,\ldots, n_i\}$$

$$\mathbf{Y}_i = [0, 2\pi/n_i)$$

$$\mathbf{V}_i = (-2\pi/n_i,\ 2\pi/n_i)$$

şi

$$\mathbf{E} = \left\{x = 2\sum_1^\infty a_i/n_i;\ a_i = 0 \quad \text{sau} \quad a_i = p_i - 1\right\}.$$

Atunci $\mathbf{E}$ este o mulţime perfectă simetrică (§ **16**) construită pe intervalul $[0, 2\pi]$ cu şirul de rapoarte de disecţie $\zeta_i = 1/p_i$; mulţimea triadică a lui Cantor se obține în cazul $p_i = 3$ (or $i \in N$). Deci **E** este o mulțime perfectă și total discontinuă. Se vede că șirul $\{\mathbf{V}_i\}$ verifică condiția (i) de la **21.15**; să arătăm că **E** verifică condiția (ii) de la **21.15**. Pentru aceasta, fie x un punct din Λ_i care nu este în **E**; atunci $x = 2\pi j/n_i$ cu $1 \leqslant j \leqslant n_i$ și deci $d(x, E) \geqslant 2\pi/n_i$ și deci $(x + \mathbf{V}_i) \cap \mathbf{E} = \emptyset$.

În concluzie:

(1) TEOREMĂ. *Orice mulțime perfectă simetrică care are proprietatea că inversele rapoartelor de disecție sînt numere naturale* > 2 *este o mulțime de sinteză spectrală.*

Observație. Din această teoremă și din **19.21** rezultă că, *în cazul grupului* **T**, *există o întreagă clasă de mulțimi de sinteză spectrală care nu sînt mulțimi Helson.*

(2) TEOREMĂ. *Oricărei mulțimi compacte* $\mathbf{E} \subset \mathbf{T}$ *i se poate adăuga o mulțime cel mult numărabilă de puncte astfel încît noua mulțime să devină o mulțime de sinteză spectrală.*

Într-adevăr, se ia un șir $\{p_i\}$ ca mai înainte și se adaugă mulțimii **E** punctele de forma $2\pi j/n_i$ care nu-i aparțin.

21.17. DEFINIȚII. Fie **G** un l.c.a.-grup iar **Γ** dualul său. În această secțiune mulțimile de sinteză spectrală $\mathbf{E} \subset \mathbf{\Gamma}$ vor fi numite *mulțimi regulate*

Fie $\mathbf{E} \subset \mathbf{\Gamma}$ o mulțime închisă.

(1) Reamintim că **E** este o *mulțime regulată* ⇔ pentru orice $f \in \mathcal{K}(\mathbf{E})$ și orice $\varepsilon > 0$ există $f_\varepsilon \in \mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ așa ca:

(i) supp $\hat{f_\varepsilon}$ este compact și disjunct de **E**;

(ii) $\|f - f_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$.

(2) Spunem că **E** este o *mulțime strict regulată* ⇔ pentru orice $f \in \mathcal{K}(\mathbf{E})$ și orice $\varepsilon > 0$ există $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ așa ca:

(i) supp $\hat{f_\varepsilon}$ este compact și disjunct de **E**;

(ii) $\hat{f}(\gamma) = 0 \Rightarrow \hat{f_\varepsilon}(\gamma) = 0$;

(iii) $\|f - f_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$.

(3) Spunem că **E** este o *mulțime Ditkin* ⇔ pentru orice $f \in \mathcal{K}(\mathbf{E})$ și orice $\varepsilon > 0$ există $u_\varepsilon \in \mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ așa ca:

(i) supp $\hat{u_n}$ este compact și disjunct de E;

(ii) $\|f - f * u_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$.

(4) Spunem că **E** este o *mulțime Ditkin strictă* ⇔ există un șir $\{u_n\} \subset \mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ cu proprietățile:

(i) supp $\hat{u_n}$ este compact și disjunct de **E**;

(ii) pentru orice $f \in \mathcal{K}(\mathbf{E})$, $\lim\limits_{n \to \infty} \|f - f * u_n\|_1 = 0$.

Deoarece $\mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ verifică condiția lui Ditkin la infinit și deci $\mathcal{J}_0(\mathbf{E}) = \overline{\mathcal{J}_{00}(\mathbf{E})}$, rezultă că *se obțin definiții echivalente dacă la punctele* (i) *nu cerem ca* supp u_n *să fie compact.* Evident, (4) ⇒ (3) ⇒ (2) ⇒ (1).

Un dezavantaj în teoria mulțimilor regulate îl constituie faptul că nu se știe dacă reuniunea a două mulțimi regulate este o mulțime regulată. Rezultatele care urmează justifică și din acest punct de vedere introducerea noțiunilor de mai sus.

21.18. Mulțimi Ditkin. Fie **G** un l.c.a.-grup iar **Γ** dualul său.

(1) PROPOZIȚIE. *Mulțimea vidă* $\emptyset$ *din* **Γ** *este o mulțime Ditkin.*

Într-adevăr, aceasta nu este altceva decît condiția Ditkin la infinit pe care $\mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ o verifică.

(2) Propoziție. *Orice punct din* $\mathbf{\Gamma}$ *este o mulțime Ditkin.*

Într-adevăr, deoarece $\mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ satisface condiția lui Ditkin la infinit, aceasta nu este altceva decît condiția lui Ditkin în punctul respectiv.

(3) Propoziție. *Orice translatată a unei mulțimi Ditkin din* $\mathbf{\Gamma}$ *este o mulțime Ditkin în* $\mathbf{\Gamma}$.

Evident, conf. invarianței la translații a lui $\mathcal{A}(\mathbf{\Gamma})$ și a normei $\|\cdot\|_1$.

(4) Propoziție. *Orice reuniune finită de mulțimi Ditkin este o mulțime Ditkin.*

Într-adevăr, fie $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \subset \mathbf{\Gamma}$ mulțimi Ditkin, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \cup \mathbf{E}_2$, $f \in \mathcal{K}(\mathbf{E})$ și $\varepsilon > 0$; există $u_1, u_2 \in \mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ cu proprietățile:

(i) supp $u_i^\wedge$ este compact și disjunct de $\mathbf{E}_i$, $i = 1, 2$;

(ii) $\|f - f \ast u_1\|_1 < \varepsilon/2$;

(iii) $\|g \ast u_1 - f \ast u_1 \ast u_2\| < \varepsilon/2$.

Deci dacă punem $u = u_1 \ast u_2$, atunci supp $u^\wedge$ este compact și disjunct de E și $\|f - f \ast u\|_1 < \varepsilon$, q.e.d.

(5) Propoziție. *Dacă* $\{\mathbf{E}_n\}$ *este un șir de mulțimi Ditkin, iar* $\mathbf{E} = \bigcup_n \mathbf{E}_n$ *este compactă, atunci* $\mathbf{E}$ *este o mulțime Ditkin.*

Într-adevăr, fie $f \in \mathcal{K}(\mathbf{E})$ și $\varepsilon > 0$. Se poate alege prin recurență un șir de funcții $u_n \in \mathcal{I}_{00}(\mathbf{E}_n)$ așa ca:

$$\|f \ast u_1 \ast \ldots \ast u_n - f \ast u_1 \ast \ldots \ast u_{n-1}\|_1 < \varepsilon/2^n.$$

Atunci $u_1 \ast \ldots \ast u_n \in \mathcal{I}_{00}(\mathbf{E}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{E}_n)$. Deoarece $\mathbf{E}$ este compact, există un număr natural k așa ca $u_1 \ast \ldots \ast u_k \in \mathcal{I}_{00}(\mathbf{E})$. Pe de altă parte, evident:

$$\|f \ast u_1 \ast \ldots \ast u_k - f\|_1 < \varepsilon, \text{ q.e.d.}$$

(6) Propoziție. *Dacă* $\mathbf{\Lambda}$ *este un subgrup închis din* $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{E}$ *este o parte închisă din* $\mathbf{\Lambda}$ *și* $\partial\mathbf{E}$ *este frontiera lui* $\mathbf{E}$ *relativ la* $\mathbf{\Lambda}$ *iar* $\partial\mathbf{E}$ *este o mulțime Ditkin în* $\mathbf{\Gamma}$, *atunci* $\mathbf{E}$ *este o mulțime Ditkin în* $\mathbf{\Gamma}$.

Fie $f \in \mathcal{K}(\mathbf{E})$ și $\varepsilon > 0$; există $w \in \mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ așa ca supp $w^\wedge$ să fie compact și disjunct de $\partial\mathbf{E}$ și ca $\|f - f \ast w\|_1 < \varepsilon/2$. Fie $\mathbf{E}' = \mathbf{\Lambda} \setminus \mathbf{E}$ și $\mathbf{K} =$ supp $w^\wedge$; deoarece $\mathbf{K} \cap \mathbf{E}$ este compact și disjunct de $\bar{\mathbf{E}}'$, rezultă că există $v \in \mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ așa ca $v^\wedge = 1$, pe o mulțime deschisă care conține pe $\mathbf{K} \cap \mathbf{E}$ și $v^\wedge = 0$ pe $\mathbf{E}'$ (conf. § **8**).

Apoi, conf. **10.6**, există $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{G})$ așa ca $\mu^\wedge = 1$ pe o mulțime deschisă care conține pe $\mathbf{\Lambda}$ și $\|f \ast w \ast v \ast \mu\|_1 < \varepsilon/2$, deoarece $(f \ast w \ast v)^\wedge = 0$ pe $\mathbf{\Lambda}$. Deoarece $w^\wedge = 0$ în afara lui $\mathbf{K}$ și $v^\wedge = 1$ pe o mulțime deschisă conținînd pe $\mathbf{K} \cap \mathbf{E}$, rezultă că supp $(w - w \ast v \ast \mu)^\wedge$ este compact și disjunct de E. Să notăm $u = w - w \ast v \ast \mu$; atunci $u \in \mathcal{L}^1(\mathbf{G})$, supp $u^\wedge$ este compact și disjunct de $\mathbf{E}$ și

$$\|f - f \ast u\|_1 \leqslant \|f - f \ast w\|_1 + \|f \ast w \ast v \ast \mu\|_1 < \varepsilon$$

q.e.d.

(7) Corolar. *Dacă* $\mathbf{E} \subset \mathbf{\Gamma}$ *este o mulțime închisă și frontiera ei* $\partial\mathbf{E}$ *este o mulțime Ditkin, atunci ea însăși este o mulțime Ditkin.*

(8) Corolar. *Orice subgrup închis* $\mathbf{\Lambda}$ *din* $\mathbf{\Gamma}$ *este o mulțime Ditkin.*

Într-adevăr, frontiera lui $\mathbf{\Lambda}$ în $\mathbf{\Lambda}$ este vidă.

(9) **Observații.** *Toate exemplele aici considerate sînt și exemple de mulțimi de sinteză spectrală.* Cu ajutorul lui (3) rezultă că (6) și (8) sînt încă adevărate dacă $\mathbf{\Lambda}$ este o clasă închisă.

21.19. Exemplu: Mulțimi Poliedrale în $\mathbf{R}^n$ (conf. Rudin, [95]).

Mulțimile poliedrale se definesc în $\mathbf{R}^n$ prin recurență, în felul următor: *orice parte a lui* $\mathbf{R}^0$ *este o mulțime poliedrală; o mulțime poliedrală în* $\mathbf{R}^n$ *este o mulțime închisă din* $\mathbf{R}^n$ *a cărei frontieră este o reuniune finită de translatate ale imaginilor mulțimilor poliedrale din* $\mathbf{R}^{n-1}$ *în* $\mathbf{R}^n$.

Cu ajutorul **22.18** (2), (4), (6) deducem următoarea:

(1) TEOREMĂ. *Orice mulțime poliedrală este o mulțime Ditkin, deci o mulțime de sinteză spectrală.*

Mai reținem:

(2) TEOREMĂ. (i) *Orice hiperplan de dimensiune* $\leqslant n-1$ *în* $\mathbf{R}^n$ *este o mulțime Ditkin.*

(ii) *Orice semispațiu este o mulțime Ditkin.*

(iii) *Orice cadran în plan este o mulțime Ditkin.*

21.20. Mulțimi Ditkin stricte. Aceste mulțimi au fost studiate de Wik [124], Rosenthal [92], Meyer și Rosenthal [78] și Meyer [74]. În cele ce urmează expunem principalele rezultate obținute în aceste lucrări.

(1) TEOREMĂ. *În cazul* $\mathbf{G}=\mathbf{Z}$, $\mathbf{\Gamma}=\mathbf{T}$ *avem*:

(i) *Orice punct din* $\mathbf{T}$ *este o mulțime Ditkin strictă.*

(ii) *Orice segment din* $\mathbf{T}$ *este o mulțime Ditkin strictă.*

(2) TEOREMĂ. *Fie* $\mathbf{G}$ *un l.c.a.-grup,* $\mathbf{\Gamma}$ *dualul său,* $\mathbf{E}\subset\mathbf{\Gamma}$ *o mulțime închisă iar* $\{v_n\}\subset\mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ *cu proprietățile*:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} v_n^{\wedge}(\gamma)=0$ *pentru orice* $\gamma\in\mathbf{E}$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} v_n^{\wedge}(\gamma)=1$ *pentru orice* $\gamma\notin\mathbf{E}$.

Atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n\|_1<\infty\Rightarrow\mathbf{E}\in\mathcal{R}(\mathbf{\Gamma}_d)\ \text{(v. § 12).}$$

Într-adevăr, să considerăm $v_n\in\mathcal{M}(\overline{\mathbf{G}})=[\mathcal{C}(\overline{\mathbf{G}})]^*$; conf. teoremei lui Alaoglu și ipotezei, șirul $\{v_n\}\subset\mathcal{M}(\overline{\mathbf{G}})$ admite un punct aderent slab $\mu\in\mathcal{M}(\overline{\mathbf{G}})$; rezultă că $\mu\in\mathcal{J}(\overline{\mathbf{G}})$ și $\mathbf{E}=\mathbf{S}(\mu)$ deci, conf. **12.4**, $\mathbf{E}\in\mathcal{R}(\mathbf{\Gamma}_a)$.

(3) Observînd acum că șirul $\{u_n\}$ din definiția mulțimilor Ditkin stricte — **21.17** (4) — verifică condiția din enunțul teoremei (2) și combinînd această teoremă cu un rezultat al lui Meyer [73], Rosenthal [92] demonstrează următoarea:

TEOREMĂ. *Dacă* $\mathbf{\Gamma}$ *este egal cu* $\mathbf{R}^n$ *sau* $\mathbf{T}^n$ *iar* $\mathbf{E}\subset\mathbf{\Gamma}$ *este o mulțime Ditkin strictă, atunci* $\mathbf{E}\in\mathcal{R}(\mathbf{\Gamma}_d)$

(4) Tot din teorema (2) se obține și următoarea:

PROPOZIȚIE. *Dacă* $\mathbf{E}=\overline{\mathbf{E}}\subset\mathbf{\Gamma}=\mathbf{T}$ *iar* $v_n\subset\mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ *verifică condițiile* (i), (ii) *din* (2), *atunci*:

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n\|_1<\infty\Rightarrow\mathbf{E}\ \textit{este finit sau}\ \mathbf{E}=\mathbf{T}.$$

Din această propoziție Wik [124] deduce, cu ajutorul a încă două leme simple, următoarea:

TEOREMĂ. *Dacă* $\mathbf{E}\subset\mathbf{\Gamma}=\mathbf{T}$ *este o mulțime Ditkin strictă de măsură nulă, atunci* $\mathbf{E}$ *este o mulțime finită.*

Din această teoremă rezultă că în cazul $\Gamma = \mathbf{T}$ *mulţimile Ditkin stricte formează o subclasă proprie a mulţimilor Ditkin.*

În continuare Wik [124] studiază *structura mulţimilor Ditkin stricte* $\mathbf{E} \subset \Gamma = \mathbf{T}$ *de măsură pozitivă,* arătînd că *o astfel de mulţime conţine cel puţin un segment.*

(5) Rosenthal, [92], consideră cazul în care Γ este un l.c.a.-grup *metrizabil* şi *separabil,* ceea ce revine la cazul în care atît $\mathbf{G}$ cît şi Γ sînt metrizabile extinzînd unele rezultate cunoscute :

TEOREMĂ. (i) *Reuniunea unui număr finit de mulţimi Ditkin stricte este o mulţime Ditkin strictă.*

(ii) *Dacă frontiera* $\partial\mathbf{E}$ *a unei mulţimi închise* $\mathbf{E} \subset \Gamma$ *este o mulţime Ditkin strictă, atunci* $\mathbf{E}$ *este o mulţime Ditkin strictă.*

(iii) *Orice subgrup închis* $\Lambda \subset \Gamma$ *este o mulţime Ditkin strictă.*

(iv) *Dacă* $\mathbf{E} \subset \Gamma$ *este o mulţime Ditkin strictă iar* $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$ *este o mulţime compactă aşa ca* $\mathbf{E} \cap \mathbf{F}'$ *să fie închisă, atunci* $\mathbf{E} \cap \mathbf{F}'$ *şi* $\mathbf{F}$ *sînt mulţimi Ditkin stricte.*

În [78], Meyer şi Rosenthal consideră cazul $\mathbf{G} = \Gamma = \mathbf{R}^n$ şi dau o condiţie necesară ca $\mathbf{E} \subset \mathbf{R}^n$ să fie o mulţime Ditkin strictă, de unde rezultă că un poliedru nu este niciodată o astfel de mulţime (pentru $n > 1$) şi că exteriorul unui poliedru este o mulţime Ditkin strictă dacă şi numai dacă poliedrul este convex. Într-o lucrare recentă, Meyer [74] demonstrează şi următorul rezultat :

„*Reuniunea intervalului* $[-\varepsilon, 0]$, $\varepsilon > 0$ *al lui* $\mathbf{T}$ *cu un şir* $\{x_n\}_{n\geq 0}$ *de puncte din* $\mathbf{T}$ *cu proprietatea că* :

$$0 < x_{n+1} \leqslant \alpha x_n ; \quad 0 < \alpha < 1$$

este o mulţime Ditkin strictă".

Pe de altă parte, reuniunea dintre $[-\varepsilon, 0]$ şi şirul $(2^{-m} + 2^{-n})$, $0 \leqslant n \leqslant m \leqslant 2n$, nu este o mulţime Ditkin strictă. Apare deci ca naturală problema :

„*Pentru ce şiruri* $\{x_n\}$ *de numere pozitive convergente la zero reuniunea* $[-\varepsilon, 0] \cup \{x_n\}$ *este o mulţime Ditkin strictă?*"

Observaţie. Nu orice reuniune numărabilă de mulţimi Ditkin stricte este o mulţime Ditkin strictă. De asemenea, nici analogul lui **21.18** (5) nu rămîne adevărat pentru mulţimi Ditkin stricte. Se dovedeşte astfel încă o dată că mulţimile Ditkin stricte formează o subclasă proprie a mulţimilor Ditkin.

21.21. NOTĂ. *Nu se ştie dacă definiţiile* (1), (2), (3) *de la* **21.17** *sînt sau nu sînt echivalente.* Exemplele obţinute pînă acum nu au permis acest lucru.

21.22. Corpuri convexe. (conf. Rudin [95]). În această secţiune vom arăta că orice corp convex închis din $\mathbf{R}^n$ este o mulţime de sinteză spectrală. Mai mult, *vom numi corp stelat orice mulţime închisă din* $\mathbf{R}^n$ *cu proprietatea că posedă un punct interior* p_0 *aşa ca orice linie dreaptă dusă prin* p_0 *să-i intersecteze frontiera în cel mult două puncte.* Evident, orice corp convex este un corp stelat; complementarea sferei unitate din $\mathbf{R}^n$ este tot un corp stelat.

(1) TEOREMĂ. *Orice corp stelat din* $\mathbf{R}^n$ *este o mulţime de sinteză spectrală.*

Fie $\mathbf{E} \subset \mathbf{R}^n$ un corp stelat; cum mulţimile de sinteză spectrală sînt invariate de translaţie, putem presupune că $p_0 = 0$. Fie $f \in \mathcal{K}(\mathbf{E})$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha\beta = 1$ şi $f_\beta(x) = f(\beta x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}^n$. Atunci $\hat{f_\beta}(y) = \alpha^n f^{\wedge}(\alpha y)$; cum $\alpha < 1$ şi $\mathbf{E}$ este un corp stelat cu centrul în origine, rezultă că $f_\beta \in \mathcal{J}_0(\mathbf{E})$; pe de altă parte, $\|f - f_\beta\|_1 \to 0$ cînd $\beta \to 1$.

Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$; există $g \in \mathcal{C}_{00}(\mathbf{G})$ aşa ca

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon/3\beta;$$

fie $\mathbf{K} = \operatorname{supp} g$; cum g este uniform continuă, există $\delta > 0$ aşa ca pentru $0 < \beta - 1 < \delta$ să avem:

$$\|g - g_\beta\|_\infty < \varepsilon/3\ \mathbf{m}(\mathbf{K} \cup \beta\mathbf{K});$$

atunci:

$$\|g - g_\beta\|_1 < \varepsilon/3$$

şi deci

$$\|f - f_\beta\|_1 \leqslant \|f - g\|_1 + \|g - g_\beta\|_1 + \|g_\beta - f_\beta\|_1 \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon/3\beta + \varepsilon/3 + \beta \cdot \varepsilon/3\beta < \varepsilon.$$

Teorema este complet demonstrată.

Această teoremă ne permite să construim următorul:

(2) **Contraexemplu.** Fie $\mathbf{S}$ sfera unitate închisă în $\mathbf{R}^3$, iar $\overline{\mathbf{S}'}$ închiderea complementarei ei în $\mathbf{S}^3$. Ambele mulţimi sînt mulţimi de sinteză spectrală conf. (1). Dar $\mathbf{S} \cap \overline{\mathbf{S}'} = \{x \in \mathbf{R}^3;\ |x| = 1\}$ nu este o mulţime de sinteză spectrală, conf. **21.13**.

Deci *intersecţia a două mulţimi de sinteză spectrală nu este în mod necesar o mulţime de sinteză spectrală.*

Aceleaşi consideraţii făcute în $\mathbf{R}^2$ în loc de $\mathbf{R}^3$ arată că *sînt cazuri cînd intersecţia a două mulţimi de sinteză spectrală este încă o astfel de mulţime.*

21.23. Semigrupuri (conf. Rudin, [95]). Fie $\mathbf{E} \subset \mathbf{\Gamma}$ un semigrup ($\mathbf{E} + \mathbf{E} \subset \mathbf{E}$) închis cu proprietatea că 0 aparţine aderenţei interiorului lui $\mathbf{E}$. Atunci $\mathbf{E}$ *este o mulţime de sinteză spectrală.*

Într-adevăr, să considerăm mai întîi $\gamma_0 \in \operatorname{int} \mathbf{E}$ şi $\mathbf{V}$ o vecinătate a originii aşa ca $\gamma_0 + \mathbf{V} \subset \mathbf{E}$; atunci $\mathbf{V} \subset \mathbf{E} - \gamma_0$, deci $\mathbf{E} + \mathbf{V} \subset \mathbf{E} - \gamma_0$ şi deci $\mathbf{E}$ se află în interiorul lui $\mathbf{E} - \gamma_0$.

Fie acum $f \in \mathcal{K}(\mathbf{E})$; atunci $f^{\wedge}(\gamma + \gamma_0) = 0$ dacă $\gamma \in \mathbf{E} - \gamma_0$ şi deci, dacă punem $f_{\gamma_0}(x) = f(x)\,(-x, \gamma_0)$, atunci $f_{\gamma_0} \in \mathcal{J}_0(\mathbf{E})$. Fie $\varepsilon > 0$, $h \in \mathcal{C}_{00}(\mathbf{G})$ aşa ca $\|f - h\|_1 < \varepsilon/3$, $\mathbf{K} = \operatorname{supp} h$; $\mathbf{V}$ vecinătate a originii în $\mathbf{\Gamma}$ aşa ca $|1 - (-x, \gamma)| < \varepsilon/3\|h\|_\infty\ \mathbf{m}(\mathbf{K})$ pentru orice $\gamma \in \mathbf{V}$ şi $x \in \mathbf{K}$ şi $\gamma_0 \in V \cap \operatorname{int} \mathbf{E}$; atunci, cu notaţiile stabilite, avem:

$$\|f - f_{\gamma_0}\|_1 \leqslant \|f - h\|_1 + \|h - h_{\gamma_0}\|_1 + \|h_{\gamma_0} - f_{\gamma_0}\|_1 <$$
$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

şi deci afirmaţia este complet demonstrată.

21.24. În cîteva din secţiunile care urmează sîntem preocupaţi de a demonstra următoarea:

TEOREMĂ. (**Malliavin**). *Dacă* Γ *este un l.c.a.-grup nediscret, atunci* Γ *conţine o mulţime de nonsinteză spectrală. Adică* $\mathcal{A}(\Gamma)$ *nu satisface sinteza spectrală.*

Începem cu cîteva rezultate pregătitoare (conf. Rudin [95]).

21.25. (1) LEMĂ. *Fie* Γ *un l.c.a.-grup nediscret iar* $\Lambda \subset \Gamma$ *un subgrup închis. Dacă* $E \subset \Lambda$ *este o mulţime închisă de nonsinteză spectrală în* Λ, *atunci* E *este o mulţime închisă de nonsinteză spectrală în* Γ.

Conform **10.3**, $\mathcal{A}(\Lambda)$ coincide cu restricţia la Λ a lui $\mathcal{A}(\Gamma)$. Fie $\varphi : \mathcal{A}(\Gamma) \to \mathcal{A}(\Lambda)$ operaţia de restricţie. Cum $\mathcal{A}(\Lambda)$ este o algebră Banach semisimplă (5.4), homomorfismul φ este continuu. Din ipoteză rezultă că există două ideale închise distincte $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subset \mathcal{A}(\Lambda)$ aşa ca $H(\mathcal{I}_1) = H(\mathcal{I}_2) = E$. Să considerăm $\mathcal{J}_k = \varphi^{-1}(\mathcal{I}_k)$; $k = 1, 2$; evident $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ sînt ideale închise distincte din $\mathcal{A}(\Gamma)$. Vom mai arăta că :

$$H(\mathcal{J}_k) = E, \; k = 1, 2.$$

Într-adevăr, dacă $\hat{f} \in \mathcal{J}_k$, atunci $\hat{f}|_\Lambda \in \mathcal{I}_k$ şi deci $\hat{f}(\gamma) = 0$ pentru orice $\gamma \in E$, aşadar $E \subset H(\mathcal{I}_k)$; reciproc, fie $\gamma \notin E$; dacă $\gamma \in \Lambda$, atunci există $\hat{f}|_\Lambda \in \mathcal{A}(\Lambda)$, aşa ca $\hat{f}(\gamma) \neq 0$, deci $\gamma \notin H(\mathcal{I}_k)$; dacă $\gamma \notin \Lambda$, atunci conf. § 8, există $\hat{f} \in \mathcal{A}(\Gamma)$ aşa ca $\hat{f}(\gamma') = 0$ oricare ar fi $\gamma' \in \Lambda$ dar $\hat{f}(\gamma) \neq 0$; deoarece însă $\hat{f}|_\Lambda \equiv 0$, rezultă că $\hat{f}|_\Lambda \in \mathcal{I}_k$, deci $\hat{f} \in \mathcal{J}_k$ şi lema este complet demonstrată.

COROLAR. *Dacă* $E = \bar{E} \subset \Gamma$ *şi dacă* $\mathcal{A}(E)$ *nu satisface sinteza spectrală, atunci* $\mathcal{A}(\Gamma)$ *nu satisface sinteza spectrală şi* E *este o mulţime de nonrezoluţie spectrală.*

(2) LEMĂ. *Dacă* T *conţine o mulţime închisă de nonsinteză spectrală, atunci şi* R *conţine o mulţime închisă de nonsinteză spectrală.*

Fie $E_1 \subset T$ o mulţime închisă iar E_2 un *arc* disjunct de E_1; putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că $-1 = e^{i\pi} \in E_2$.

Fie apoi :

$$K_1 = \{y \in (-\pi, \pi);\ e^{iy} \in E_1\}$$

$$K_2 = \{y \in (-\pi, \pi);\ e^{iy} \in E_2\} \cup \{y \in R;\ |y| \geqslant \pi\}$$

şi

$$E = E_1 \cup E_2$$

$$K = K_1 \cup K_2.$$

Fie $f \in \mathcal{K}(E)$, adică $\hat{f} \in \mathcal{A}(T)$ şi $\hat{f} = 0$ pe E; să considerăm mulţimea :

$Q(f) = \{e^{iy} \in T;\ \hat{f}$ nu aparţine local lui $\hat{\mathcal{J}}(E)$ în $e^{iy}\}$; conf. **8.13.**(3), aceasta este o submulţime perfectă a frontierei ∂E a lui E sau este vidă. Dar $\partial E = \partial E_1 \cup \partial E_2$ iar ∂E_2 se reduce la două puncte (extremităţile lui E_2) deci mulţimea Q este inclusă în ∂E_1; deci coincide cu mulţimea :

$Q_1(f) = \{e^{iy} \in T;\ \hat{f}$ nu aparţine local lui $\hat{\mathcal{J}}(E_1)$ în $e^{iy}\}$.

Dacă E_1 este o mulţime de sinteză spectrală, atunci $f \in \mathcal{J}(E_1)$ deci $Q(f) = \emptyset$, deci $Q_1(f) = \emptyset$, şi, conf. **8.13.** (1), rezultă $f \in \mathcal{J}(E)$. Deci şi E este o mulţime de sinteză spectrală. Reciproc, să presupunem că **E** este o mulţime, de sinteză spectrală şi fie $g \in \mathcal{K}(\mathbf{E}_1)$; există $h^{\wedge} \in \mathcal{A}(\mathrm{T})$ aşa ca $h^{\wedge} = 0$ pe $\mathbf{E}_2$ şi $h^{\wedge} = 1$ pe o vecinătate a lui $\mathbf{E}_1$; atunci $f^{\wedge} h^{\wedge} \in \mathcal{K}(\mathbf{E})$ deci $\mathbf{Q}(f * h) = \varnothing$ şi deci $\mathbf{Q}_1(f \ast h) = \varnothing$. Dar se verifică uşor că $\mathbf{Q}_1(f \ast h) = \mathbf{Q}_1(f)$ deci $\mathbf{Q}_1(f) = \varnothing$ şi, conf. **8.13** (1), rezultă $f \in \mathcal{J}(\mathbf{E}_1)$.

Aşadar $\mathbf{E}_1$ este o mulţime de sinteză spectrală dacă şi numai dacă **E** este o mulţime de sinteză spectrală.

Analog se demonstrează că $\mathbf{K}_1$ este o mulţime de sinteză spectrală dacă şi numai dacă **K** este o astfel de mulţime.

Vom arăta acum că **E** este o mulţime de sinteză spectrală dacă şi numai dacă **K** este o mulţime de sinteză spectrală. Să presupunem **K** mulţime de sinteză spectrală şi fie $f \in \mathcal{K}(\mathbf{E})$; definim o funcţie $g^{\wedge}$ pe **R** prin:

$$g^{\wedge}(y) = \begin{cases} f^{\wedge}(e^{iy}) & \text{dacă } |y| \leqslant \pi \\ 0 & \text{dacă } |y| > \pi. \end{cases}$$

Cum $f^{\wedge} \in \mathcal{A}(\mathbf{T})$, din **10.8** rezultă că $g^{\wedge} \in \mathcal{A}(\mathbf{R})$ şi evident $g \in \mathcal{K}(\mathbf{K})$. Există deci un şir $g_n \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ aşa ca $\|g_n - g\|_1 \to 0$ pentru $n \to \infty$ şi $\hat{g_n} = 0$ pe o mulţime deschisă $\mathbf{V}_n$ care conţine pe **K**; din acest şir deducem un şir $f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbf{Z})$ aşa ca $f_n \in \mathcal{J}_0(\mathbf{E})$ şi $\|f_n - f\|_1 \to 0$ pentru $n \to \infty$ (conf. **10.8**), deci **E** este o mulţime de sinteză spectrală. Pentru reciprocă se raţionează analog.

Deci dacă $\mathbf{E}_1$ este o mulţime de nonsinteză spectrală, atunci şi $\mathbf{K}_1$ este o mulţime de nonsinteză spectrală, ceea ce demonstrează lema.

(3) LEMĂ. *Dacă orice grup* Γ *compact infinit conţine o mulţime de nonsinteză spectrală, atunci orice grup* Γ *nediscret conţine o mulţime de nonsinteză spectrală.*

Dacă Γ este nediscret, atunci teorema principală de structură (**11.19**) arată că Γ sau conţine un subgrup compact infinit — şi atunci lema rezultă din (1) — sau conţine un subgrup închis R — în care caz lema rezultă din (2) şi (1).

Observaţii. (a) Construcţia din lema (2) ne arată *o situaţie în care reuniunea a două mulţimi de sinteză spectrală este încă o astfel de mulţime*; într-adevăr, $\mathbf{E}_2$ este o mulţime Ditkin şi dacă presupunem că $\mathbf{E}_1$ este o mulţime de sinteză spectrală, acelaşi lucru rezultă şi pentru $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \cup \mathbf{E}_2$.

(b) Din (1) şi **9.27** rezultă că în demonstraţia teoremei **21.24** *putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că* Γ *este un grup abelian compact metrizabil şi infinit.*

Pentru a demonstra teorema lui Malliavin în acest caz vom folosi „*metoda ridicării şi etalării*" a lui Varopoulos. În acest scop dăm cîteva pregătiri [3]).

21.26. Produse tensoriale topologice de spaţii Banach (conf. [35], [103]).

---

[3]) În cele ce urmează rolurile lui **G** şi Γ se inversează.

Fie $\mathcal{X}$ şi $\mathcal{Y}$ două spaţii Banach şi fie $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ produsul lor tensorial ca spaţii vectoriale. Un element $w \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ admite o reprezentare de forma

$$w = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k ; \quad x_k \in \mathcal{X}, \ y_k \in \mathcal{Y}$$

dar această reprezentare nu este unic determinată de w; însă orice element $0 \neq w \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ admite o reprezentare de forma anterioară în care familiile $\{x_k\}$ şi $\{y_k\}$ sînt *liniar independente* în $\mathcal{X}$ şi respectiv $\mathcal{Y}$.

Vom spune că o normă $\|\cdot\|$ pe $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ este o *crossnormă* dacă pentru orice $x \in \mathcal{X}$ şi orice $y \in \mathcal{Y}$ avem:

$$\|x \otimes y\| = \|x\| \cdot \|y\|.$$

Pentru orice element $w \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ vom defini

$$\|w\|^{\wedge} = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| \cdot \|y_k\| ; \quad w = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k \right\}.$$

(1) LEMĂ. *Aplicaţia* $w \to \|w\|^{\wedge}$ *este o crossnormă pe* $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ *şi anume cea mai mare crossnormă pe* $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$.

Pentru demonstraţie vom observa că pentru orice $x^* \in \mathcal{X}^*$ aplicaţia

$$(x, y) \to \langle x, x^* \rangle y$$

este o aplicaţie biliniară a lui $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ în $\mathcal{Y}$, deci defineşte aplicaţia liniară:

$$w = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k \to \sum_{k=1}^{n} \langle x_k, x^* \rangle y_k$$

a lui $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ în $\mathcal{Y}$. Reţinem de aici că suma din dreapta depinde numai de w şi nu de reprezentarea sa particulară.

Astfel fiecărui $w = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ îi putem asocia aplicaţia liniară:

$$T_w : \mathcal{X}^* \to \mathcal{Y}$$

definită prin:

$$T_w x^* = \sum_{k=1}^{n} \langle x_k, x^* \rangle y_k .$$

Dacă $w \neq 0$, atunci $T_w \neq 0$, după cum se vede uşor scriind pe w sub forma $\sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k$ cu $\{x_k\}$ şi $\{y_k\}$ liniar independente.

Se verifică uşor că aplicaţia $w \to \|w\|^{\wedge}$ este o seminormă. Dacă $w \neq 0$, atunci $T_w \neq 0$, deci există $x^* \in \mathcal{X}^*$ cu $\|x^*\| \leqslant 1$ astfel încît $T_w x^* \neq 0$; atunci pentru orice reprezentare $w = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k$, avem:

$$0 < \|T_w x^*\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \langle x_k, x^* \rangle y_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| \, \|y_k\|$$

de unde

$$0 < \| T_w \, x^* \| \leqslant \| w \|^{\wedge}$$

deci aplicaţia $w \to \| w \|^{\wedge}$ este o normă.

Dacă $w = x \otimes y$, fie $x^* \in \mathscr{X}^*$ aşa ca $\| x^* \| \leqslant 1$ şi $\langle x, x^* \rangle = \| x \|$; pe de o parte:

$$\| T_w \, x^* \| = | \langle x, x^* \rangle | \, \| y \| = \| x \| \, \| y \|$$

iar pe de altă parte, dacă $w = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k$ este o altă reprezentare, atunci:

$$\| T_w \, x^* \| \leqslant \sum_{k=1}^{n} | \langle x_k, x^* \rangle | \, \| y_k \| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \| x_k \| \, \| y_k \|.$$

Deci $\| x \| \cdot \| y \| \leqslant \| w \|^{\wedge}$ ceea ce este echivalent cu $\| x \| \, \| y \| = \| w \|^{\wedge}$, deci aplicaţia $w \to \| w \|^{\wedge}$ este o crossnormă pe $\mathscr{X} \otimes \mathscr{Y}$. Faptul că este cea mai mare crossnormă este evident.

(2) DEFINIŢII. Aplicaţia $w \to \| w \|^{\wedge}$ se numeşte *norma proiectivă* pe $\mathscr{X} \otimes \mathscr{Y}$ iar completatul lui $\mathscr{X} \otimes \mathscr{Y}$ cu această normă se numeşte *produsul tensorial proiectiv* al spaţiilor Banach $\mathscr{X}$ şi $\mathscr{Y}$ şi se notează cu $\mathscr{X} \hat{\otimes} \mathscr{Y}$; norma se notează încă prin $\| \cdot \|^{\wedge}$.

Evident, $\mathscr{X} \hat{\otimes} \mathscr{Y}$ este un spaţiu Banach cu structura canonică.

(3) LEMĂ. *Orice* $w \in \mathscr{X} \hat{\otimes} \mathscr{Y}$ *admite o reprezentare de forma*

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \otimes y_k, \text{ unde } \sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \| \cdot \| y_k \| < \infty$$

şi

$$\| w \|^{\wedge} = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \| \cdot \| y_k \| < \infty ; \; w = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \otimes y_k \right\}.$$

Există un şir $\{ w_n \} \subset \mathscr{X} \otimes \mathscr{Y}$ aşa ca $w_n \to w$ în $\mathscr{X} \hat{\otimes} \mathscr{Y}$; evident, putem presupune că

$$\| w_{n+1} - w_n \| \leqslant 1/2^{n+1}$$

Conform definiţiei normei proiective putem considera că:

$$w_{n+1} - w_n = \sum_{k=1}^{j_n} x_{n,k} \otimes y_{n,k} \text{ cu } \sum_{k=1}^{j_n} \| x_{n,k} \| \, \| y_{n,k} \| \leqslant 1/2^n$$

deci

$$w = w_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} x_{n,k} \otimes y_{n,k} \text{ cu } \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \| x_{n,k} \| \, \| y_{n,k} \| < \infty$$

ceea ce demonstrează prima parte a lemei

Fie acum

$$w=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\otimes y_k \text{ cu } \sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|\,\|y_k\|<\infty.$$

Atunci pentru orice n vom avea:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}x_k\otimes y_k\right\|^{\wedge}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|\,\|y_k\|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|\,\|y_k\|$$

deci

$$\|w\|^{\wedge}=\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}x_k\otimes y_k\right\|^{\wedge}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|\,\|y_k\|$$

Cum inegalitatea inversă este evidentă pentru $w\in\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}$, lema este complet demonstrată.

În limbajul operatorilor, $\mathcal{X}\hat{\otimes}\mathcal{Y}$ este spațiul Banach al tuturor operatorilor liniari: $T:\mathcal{X}^*\to\mathcal{Y}$ care se pot scrie sub forma

$$Tx^*=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x_k,\ x^*\rangle\, y_k \text{ cu } \sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|\cdot\|y_k\|<\infty$$

cu norma

$$\|T\|^{\wedge}=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|\,\|y_k\|<\infty,\ T=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x_k,\ \cdot\rangle\, y_k\right\}.$$

Acești operatori se numesc *operatori nucleari*.

(4) Propoziție. *Spațiul* $\mathcal{X}\hat{\otimes}\mathcal{Y}$ *împreună cu aplicația canonică* $\varphi:(x,y)\to x\otimes y$ *constituie singura pereche formată dintr-un spațiu Banach* $\mathcal{B}$ *și o aplicație biliniară și continuă* $b:\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\to\mathcal{B}$ *care satisface condițiile*:

(i) *Pentru orice aplicație biliniară continuă* $f:\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\to\mathcal{G}$, *unde* $\mathcal{G}$ *este un spațiu Banach, există o aplicație liniară și continuă* $\bar{f}:\mathcal{B}\to\mathcal{G}$ *așa ca* $f=\bar{f}\circ b$ *și* $\|f\|=\|\bar{f}\|$.

(ii) $b(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})$ *este o parte totală în* $\mathcal{B}$.

Demonstrația este trivială (Unicitatea se consideră în afara unui izomorfism izometric).

(5) *Dacă* $\mathcal{X}$ *și* $\mathcal{Y}$ *sînt algebre Banach, atunci* $\mathcal{X}\hat{\otimes}\mathcal{Y}$ *devine în mod canonic o algebră Banach.*

21.27. Algebrele tensoriale ale lui Varopoulos ([115], [116], [122], [49], [44]). Fie $\mathbf{K}_1$ și $\mathbf{K}_2$ spații topologice compacte iar $\mathbf{K}=\mathbf{K}_1\times\mathbf{K}_2$ cu topologia Tihonov (compactă).

Definiție. Se numește *algebra tensorială a lui Varopoulos* asociată lui $\mathbf{K}$ algebra Banach

$$\mathcal{V}(\mathbf{K})=\mathcal{C}(\mathbf{K}_1)\hat{\otimes}\mathcal{C}(\mathbf{K}_2).$$

(1) Lemă. *Algebra* $\mathcal{V}(\mathbf{K})$ *este izomorf izometrică cu algebra formată de acele funcții* $\varphi\in\mathcal{C}(\mathbf{K})$ *care sînt reprezentabile sub forma*

$$\varphi(x_1,\ x_2)=\sum_{k=1}\alpha_k f_k(x_1)\,g_k(x_2),$$

unde

(i) $f_k \in \mathcal{C}(\mathbf{K}_1)$ şi $\|f_k\|_\infty \leqslant 1$

(ii) $g_k \in \mathcal{C}(\mathbf{K}_2)$ şi $\|g_k\|_\infty \leqslant 1$

(iii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty.$

înzestrată cu norma

$$\|\varphi\|_{\mathcal{V}(\mathbf{K})} = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty ;\ \varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k g_k \right\}.$$

Demonstraţia este trivială.

(2) LEMĂ. $\Delta(\mathcal{V}(\mathbf{K})) = \mathbf{K}$.

Într-adevăr, $\mathcal{V}(\mathbf{K})$ este o subalgebră separatoare a lui $\mathcal{C}(\mathbf{K})$ şi $\|\varphi^\wedge\|_{\mathcal{C}(\mathbf{K})} \leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{V}(\mathbf{K})}$ pentru orice $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbf{K})$ deci $\mathbf{K}$ se scufundă în $\Delta(\mathcal{V}(\mathbf{K}))$; un punct $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{K}$ defineşte homomorfismul complex nenul $\varphi \to \varphi(x_1, x_2)$.

Reciproc, orice homomorfism complex nenul h al lui $\mathcal{V}(\mathbf{K})$ defineşte un homomorfism complex nenul pe subalgebra $\mathcal{C}(\mathbf{K}_i) \hat{\otimes} 1$ care este izometric izomorfă cu $\mathcal{C}(\mathbf{K}_i)$, deci defineşte un punct $x_i \in \mathbf{K}_i$ $(i = 1, 2)$. Pentru $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k g_k \in \mathcal{V}(\mathbf{K})$ vom avea deci :

$$h(\varphi) = h\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k g_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k h(f_k) h(g_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k(x_1)\, g_k(x_2) = \varphi(x_1, x_2), \text{ q.e.d.}$$

Notă. Pentru o proprietate mai generală trimitem la Gelbaum [29], Tomiyama [108], Mallios [69].

(3) LEMĂ. *$\mathcal{V}(\mathbf{K})$ este o algebră Banach semisimplă şi regulată.*

Evident, $\mathcal{V}(\mathbf{K})$ este semisimplă. Fie acum $\mathbf{C}$ un compact din $\mathbf{K}$ iar $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{C}'$ şi $V = V_1 \times V_2$ o vecinătate a lui x disjunctă de $\mathbf{C}$.

Există $f_i \in \mathcal{C}(\mathbf{K}_i)$ egală cu 1 în x_i şi nulă în afara lui $\mathbf{V}_i$ $(i = 1, 2)$. Funcţia $\varphi = f_1 \otimes f_2 \in \mathcal{V}(\mathbf{K})$ este egală cu 1 în x şi este nulă pe $\mathbf{C}$, q.e.d.

21.28. Algebra tensorială a unui grup abelian compact. Fie $\mathbf{G}$ un grup abelian compact şi metrizabil iar Γ dualul său (discret şi numărabil); ca de obicei, $\mathcal{A}(\mathbf{G}) = [\mathcal{L}^1(\Gamma)]^\wedge$. Dacă $f \in \mathcal{A}(\mathbf{G})$, atunci f admite o reprezentare de forma

$$f(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} a(\gamma)\ (x, \gamma),\ x \in \mathbf{G}, \tag{1}$$

unde

$$\|f\|_{\mathcal{A}(\mathbf{G})} = \sum_{\gamma \in \Gamma} |a(\gamma)| < \infty. \tag{2}$$

Vom prefera uneori să scriem pe f sub forma

$$(1') \qquad f(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} a(\gamma)\,\gamma(x),\ x\in\mathbf{G}.$$

considerînd pe γ ca funcție continuă pe $\mathbf{G}$.

Pe de altă parte, vom nota prin abuz :

$$\mathcal{V}(\mathbf{G}) = \mathcal{C}(\mathbf{G}) \hat{\otimes} \mathcal{C}(\mathbf{G}).$$

Dacă $\varphi\in\mathcal{V}(\mathbf{G})$, atunci φ admite o reprezentare de forma :

$$(3) \qquad \varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k(x)\, g_k(y),\ x,\ y\in\mathbf{G},$$

unde $f_k,\ g_k\in\mathcal{C}(\mathbf{G})$, $\|f_k\|_\infty \leqslant 1$, $\|g_k\|_\infty \leqslant 1$ și $\sum_{k=1} |\alpha_k| < \infty$, iar :

$$(4) \qquad \|\varphi\|_{\mathcal{V}(\mathbf{G})} = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty;\ \varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k \otimes g_k, \dots\right\}.$$

Spectrul lui $\mathcal{A}(\mathbf{G})$ *este* $\mathbf{G}$ *iar spectrul lui* $\mathcal{V}(\mathbf{G})$ *este* $\mathbf{G}\times\mathbf{G}$.

21.29. Operatorii „M" și „P". Pentru un grup abelian compact metrizabil $\mathbf{G}$ se definesc două operații liniare :

$$\mathcal{C}(\mathbf{G}) \xrightarrow{\widetilde{M}} \mathcal{C}(\mathbf{G}\times\mathbf{G}) \xrightarrow{\widetilde{P}} \mathcal{C}(\mathbf{G})$$

prin relațiile :

$$(\widetilde{M}f)(x, y) = f(x+y),\ f\in\mathcal{C}(\mathbf{G}),\ x,\ y\in\mathbf{G}.$$

$$(\widetilde{P}\varphi)(x) = \int_{\mathbf{G}} \varphi(x-y,\ y)\,\mathrm{d}y,\ \varphi\in\mathcal{C}(\mathbf{G}\times\mathbf{G}),\ x\in\mathbf{G}.$$

(1) LEMĂ. $\widetilde{M}$ și $\widetilde{P}$ *sînt corect definite și* $\widetilde{P}\widetilde{M}$ *este identitatea lui* $\mathcal{C}(\mathbf{G})$; *în particular,* $\widetilde{P}$ *este surjectivă.*

Într-adevăr, pentru $f\in\mathcal{C}(\mathbf{G})$ avem :

$$(\widetilde{P}\widetilde{M}f)(x) = \int_{\mathbf{G}} (\widetilde{M}f)(x-y,\ y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{G}} f(x)\,\mathrm{d}y = f(x).$$

Vom mai nota $M = \widetilde{M}|_{\mathcal{A}(\mathbf{G})}$ și $P = \widetilde{P}|_{\mathcal{V}(\mathbf{G})}$.

(2) LEMĂ. M *aplică continuu pe* $\mathcal{A}(\mathbf{G})$ *în* $\mathcal{V}(\mathbf{G})$ *iar* $\|M\| \leqslant 1$.

Într-adevăr, pentru $f\in\mathcal{A}(\mathbf{G})$ de forma **21.28** (1′) vom avea

$$(Mf)(x, y) = \sum_{\Gamma\in\Gamma} a(\gamma)\,\gamma(x+y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} a(\gamma)\,\gamma(x)\,\gamma(y).$$

Cum Γ este numărabil, rezultă că $Mf\in\mathcal{V}(\mathbf{G})$ și

$$\|Mf\|_{\mathcal{V}(\mathbf{G})} \leqslant \sum_{\gamma\in\Gamma} |a(\gamma)| = \|f\|_{\mathcal{A}(\mathbf{G})}.$$

(3) LEMĂ. *P aplică continuu și surjectiv pe $\mathcal{V}(\mathbf{G})$ în $\mathcal{A}(\mathbf{G})$ iar* $\|P\| \leqslant 1$.

Într-adevăr, pentru $\varphi \in \mathcal{V}(G)$ de forma **21.28** (3) vom avea :

$$(P\varphi)(x) = \int_{\mathbf{G}} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k(x-y)\, g_k(y) \right] \mathrm{d}y = \sum_{k=1} \alpha_k (f_k \ast g_k)(x).$$

Cum $f_k,\ g_k \in \mathcal{C}(\mathbf{G}) \subset \mathcal{L}^2(\mathbf{G})$, rezultă (conf. § 4) că $f_k \ast g_k \in \mathcal{A}(\mathbf{G})$ și

$$\|f_k \ast g_k\|_{\mathcal{A}(\mathbf{G})} \leqslant \|f_k\|_{\mathcal{L}^2(\mathbf{G})} \cdot \|g_k\|_{\mathcal{L}^2(\mathbf{G})} \leqslant \|f_k\|_\infty \cdot \|g_k\|_\infty \leqslant 1.$$

Prin urmare $P\varphi \in \mathcal{A}(\mathbf{G})$ și

$$\|P\varphi\|_{\mathcal{A}(\mathbf{G})} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|\ \|f_k \ast g_k\|_{\mathcal{A}(\mathbf{G})} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$$

$$\text{deci } \|P\varphi\|_{\mathcal{A}(\mathbf{G})} \leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{V}(\mathbf{G})}.$$

Dacă $f \in \mathcal{A}(\mathbf{G})$, atunci $Mf \in \mathcal{V}(\mathbf{G})$ și $PMf = f$ ceea ce demonstrează surjectivitatea lui P.

Observații. (I) Din cele de mai sus rezultă aplicațiile liniare și continue de normă $\leqslant 1$:

$$\mathcal{A}(\mathbf{G}) \xrightarrow{M} \mathcal{V}(\mathbf{G}) \xrightarrow{P} \mathcal{A}(\mathbf{G})$$

Cum PM = identitatea lui $\mathcal{A}(\mathbf{G})$, rezultă că PM este o izometrie deci pentru $f \in \mathcal{A}(\mathbf{G})$:

$$\|f\|_{\mathcal{A}(\mathbf{G})} = \|PMf\|_{\mathcal{A}(\mathbf{G})} \leqslant \|Mf\|_{\mathcal{V}(\mathbf{G})} \leqslant \|f\|_{\mathcal{A}(\mathbf{G})}$$

adică și *M este o izometrie.*

Se vede ușor că *$M(\mathcal{A}(\mathbf{G}))$ este mulțimea tuturor funcțiilor din $\mathcal{V}(\mathbf{G})$ care nu depind decît de $x + y$.*

(II) *$\mathcal{V}(\mathbf{G})$ este strict inclus în* $\mathcal{C}(\mathbf{G} \times \mathbf{G})$ deoarece $P(\mathcal{V}(\mathbf{G})) = \mathcal{A}(\mathbf{G})$, $P(\mathcal{C}(\mathbf{G} \times \mathbf{G})) = \mathcal{C}(\mathbf{G})$ și $\mathcal{A}(\mathbf{G}) \neq \mathcal{C}(\mathbf{G})$ dacă $\mathbf{G}$ este infinit (conf. **14.9** bis).

Se pune în mod natural problema de a deduce proprietăți ale lui $\mathcal{A}(\mathbf{G})$ din proprietăți ale lui $\mathcal{V}(\mathbf{G})$ și invers.

(4) PROPOZIȚA. *Dacă o mulțime închisă $\mathbf{E} \subset \mathbf{G}$ este o mulțime de nonsinteză spectrală pentru $\mathcal{A}(\mathbf{G})$, atunci mulțimea închisă* $\mathbf{E}^* = \mathbf{E}_2$ (vezi **1.14**) *este o mulțime de nonsinteză spectrală pentru $\mathcal{V}(\mathbf{G})$.*

Cum $\mathbf{E}$ este o mulțime de non sinteză spectrală, din **21.5** rezultă că există $\varepsilon > 0$ și $f \in \mathcal{K}(\mathbf{E}) \subset \mathcal{A}(\mathbf{G})$ așa ca pentru orice $g \in \mathcal{J}_0(\mathbf{E})$ să avem

$$\|f - g\|_{\mathcal{A}(\mathbf{G})} \geqslant \varepsilon.$$

Dar $Mf \in \mathcal{K}(\mathbf{E}^*) \subset \mathcal{V}(\mathbf{G})$ iar dacă $\psi \in \mathcal{J}_0(\mathbf{E}^*)$, atunci $P\psi \in \mathcal{J}_0(\mathbf{E})$ deoarece fiecare vecinătate a lui $\mathbf{E}^*$ conține — din motive de compacitate — o vecinătate de forma $\{(x, y) \in \mathbf{G}^2;\ x + y \in \mathbf{W}\}$, unde $\mathbf{W}$ este o vecinătate a lui $\mathbf{E}$. Prin urmare, pentru orice $\psi \in \mathcal{J}_0(\mathbf{E}^*)$ vom avea

$$\|Mf - \psi\|_{\mathcal{V}(\mathbf{G})} \geqslant \|PMf - P\psi\|_{\mathcal{A}(\mathbf{G})} = \|f - P\psi\|_{\mathcal{A}(\mathbf{G})} \geqslant \varepsilon$$

ceea ce demonstrează propoziția.

Observaţie. (III) Propoziţia (4) afirmă în particular că *dacă* $\mathcal{A}(\mathbf{G})$ *nu satisface sinteza spectrală, atunci nici* $\mathcal{V}(\mathbf{G})$ *nu satisface sinteza spectrală.* În cele ce urmează dăm o altă demonstraţie (C. S. Herz) a acestei afirmaţii :

(i) $f \in \mathcal{C}(\mathbf{G})$, $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbf{G} \times \mathbf{G}) \Rightarrow \widetilde{P}(\varphi \widetilde{M} f) = (\widetilde{P}\varphi) f$; verificare directă imediată.

(ii) *Dacă* $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}(\mathbf{G})$ *este un ideal iar* $\mathcal{J}^* \subset \mathcal{V}(\mathbf{G})$ *este idealul generat de* $M\mathcal{J}$, atunci $\mathcal{J} = P\mathcal{J}^*$; rezultă din (i) şi din $PM = \mathrm{Id}\ \mathcal{A}(\mathbf{G})$.

(iii) *În aceleaşi condiţii ca la* (ii) *avem* $\overline{\mathcal{J}} = P\overline{\mathcal{J}}^*$; într-adevăr, deoarece P este continuă, rezultă $P\overline{\mathcal{J}}^* \subset \overline{P\mathcal{J}^*} = \overline{\mathcal{J}}$ şi pe de altă parte, $\overline{\mathcal{J}}^* \supset \overline{M\mathcal{J}} \supset M\overline{\mathcal{J}}$ deoarece M este continuă ; rezultă $\overline{\mathcal{J}} \supset P\overline{\mathcal{J}}^* \supset PM\overline{\mathcal{J}} = \overline{\mathcal{J}}$, deci $P\overline{\mathcal{J}}^* = \overline{\mathcal{J}}$, q.e.d.

(iv) *Dacă două ideale închise şi diferite* $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \subset \mathcal{A}(\mathbf{G})$ *au aceeaşi anvelopă* $\mathbf{E}$, *atunci* $\overline{\mathcal{J}}_1^*$ *şi* $\overline{\mathcal{J}}_2^*$ *au aceeaşi anvelopă* $\mathbf{E}^*$ *şi sînt diferite*; trivial, conf. celor de mai sus.

21.30. Teoremă. (Varopoulos). *Fie* $\mathbf{G}$ *un grup abelian compact metrizabil. Dacă* $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2 \subset G$ *sînt două mulţimi compacte şi disjuncte cu proprietatea că reuniunea lor este o mulţime Kronecker* (*sau de tip* $\mathbf{K}_q$) *iar* $\mathbf{E} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2$ *şi* $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}_2$, *atunci are loc identificarea izometrică de algebre Banach* :

$$\mathcal{V}(\mathbf{K}) \equiv \mathcal{A}(\mathbf{E}).$$

Deoarece $\mathbf{K}_1 \cup \mathbf{K}_2$ este o mulţime Kronecker — deci strict independente conf. **17.7** —, există o bijecţie canonică $\mathbf{K} \to \mathbf{E}$ (suma) care permite să se identifice $\mathcal{A}(\mathbf{E})$ cu o subalgebră $\mathcal{A}'(\mathbf{K})$ a lui $\mathcal{C}(\mathbf{K})$, anume :

$$\mathcal{A}'(\mathbf{K}) = \{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbf{K});\ \varphi(x_1, x_2) = f(x_1 + x_2),\ f \in \mathcal{A}(\mathbf{E})\}$$

cu norma

$$\|\varphi\|_{\mathcal{A}'(\mathbf{K})} = \|f\|_{\mathcal{A}(\mathbf{E})}.$$

Demonstraţia revine la a arăta că $\mathcal{A}'(\mathbf{K})$ se identifică izometric cu $\mathcal{V}(\mathbf{K})$.

(1) $\mathcal{A}'(\mathbf{K}) \subset \mathcal{V}(\mathbf{K})$ *iar injecţia are norma descrescătoare.*

Într-adevăr, dacă $\varphi \in \mathcal{A}'(\mathbf{K})$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există o funcţie $f = \sum\limits_{\gamma \in \Gamma} a(\gamma)\ \gamma \in \mathcal{A}(\mathbf{G})$ aşa ca $\varphi(x_1, x_2) = f(x_1 + x_2)$ pentru orice $x_1 \in \mathbf{K}_1$, $x_2 \in \mathbf{K}_2$ şi $\sum\limits_{\gamma \in \Gamma} |a(\gamma)| \leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{A}'(\mathbf{K})} + \varepsilon$ (vezi **19.5**). Atunci :

$$\varphi(x_1, x_2) = \sum_{\gamma \in \Gamma} a(\gamma)\ \gamma(x_1 + x_2) = \sum_{\gamma \in \Gamma} a(\gamma)\ \gamma\ (x_1)\ \gamma(x_2)$$

deci $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbf{K})$ şi :

$$\|\varphi\|_{\mathcal{V}(\mathbf{K})} \leqslant \sum_{\gamma \in \Gamma} |a(\gamma)| \leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{A}'(\mathbf{K})} + \varepsilon, \text{ q.e.d.}$$

(2) $\mathcal{V}(\mathbf{K}) \subset \mathcal{A}'(\mathbf{K})$ *iar injecţia are norma descrescătoare.*

Dacă $\varphi\in\mathcal{V}(\mathbf{K})$, atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, φ admite o reprezentare de forma

$$\varphi(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k(x_1)\, g_k(x_2), \quad x_1\in\mathbf{K}_1,\ x_2\in\mathbf{K}_2,$$

unde $\|f_k\|_\infty \leqslant 1$, $\|g_k\|_\infty \leqslant 1$ şi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| \leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{V}(\mathbf{K})} + \varepsilon$.

Deoarece $\mathbf{K}_1 \cup \mathbf{K}_2$ este o mulţime Kronecker, rezultă că $\mathbf{K}_1$ şi $\mathbf{K}_2$ sînt de asemenea mulţimi Kronecker. Deci, conf. **19.17** $\mathcal{A}(\mathbf{K}_i)$ şi $\mathcal{C}(\mathbf{K}_i)$ sînt izometrice ($i = 1, 2$). Prin urmare pentru orice $k\in N$ există funcţii din $\mathcal{A}(\mathbf{G})$ egale respectiv cu f_k pe $\mathbf{K}_1$ şi cu g_k pe $\mathbf{K}_2$, anume aşa ca :

$$f_k(x_1) = \sum_{\gamma\in\Gamma} a_k(\gamma)\gamma(x_1), \quad x_1\in\mathbf{K}_1, \quad \sum_{\gamma\in\Gamma} |a_k(\gamma)| < 1 + \varepsilon,$$

$$g_k(x_2) = \sum_{\gamma\in\Gamma} b_k(\gamma)\gamma(x_2), \quad x_2\in\mathbf{K}_2, \quad \sum_{\gamma\in\Gamma} |b_k(\gamma)| < 1 + \varepsilon.$$

Atunci φ se scrie sub forma :

$$\varphi(x_1, x_2) = \sum_{\beta,\,\gamma\in\Gamma} c(\beta, \gamma)\ \beta(x_1)\,\gamma(x_2), \quad x_1\in\mathbf{K}_1,\ x_2\in\mathbf{K}_2,$$

unde

$$\sum_{\beta,\gamma\in\Gamma} |c(\beta, \gamma)| \leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{V}(\mathbf{K})} (1 + \varepsilon') + \varepsilon''.$$

cu $\varepsilon' = \varepsilon^2 + 2\varepsilon$ şi $\varepsilon'' = \varepsilon(1 + \varepsilon)^2$.

Fie acum $h(\beta, \gamma)$ funcţia continuă şi unimodulară pe $\mathbf{K}_1 \cup \mathbf{K}_2$ egală cu β pe $\mathbf{K}_1$ şi cu γ pe $\mathbf{K}_2$. Cum $\mathbf{K}_1 \cup \mathbf{K}_2$ este o mulţime Kronecker, rezultă că pentru orice $\delta > 0$ există $\theta(\beta, \gamma)\in\mathbf{\Gamma}$ aşa ca $\|h(\beta, \gamma) - \theta(\beta, \gamma)\|_\infty < \delta$. Prin urmare

$$\|\beta \otimes \gamma - \theta(\beta, \gamma) \otimes \theta(\beta, \gamma)\|_{\mathcal{V}(\mathbf{K})} < 2\delta.$$

Deci dacă notăm

$$\varphi_\delta = \sum_{\beta,\,\gamma\in\Gamma} c(\beta, \gamma)\, \theta(\beta, \gamma) \otimes \theta(\beta, \gamma),$$

atunci :

(i) $\varphi_\delta\in\mathcal{A}'(\mathbf{K})$.

(ii) $\|\varphi_\delta\|_{\mathcal{A}'(\mathbf{K})} \leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{V}(\mathbf{K})} (1 + \varepsilon') + \varepsilon''$.

(iii) $\|\varphi - \varphi_\delta\|_{\mathcal{V}(\mathbf{K})} \leqslant 2\delta\ \{\|\varphi\|_{\mathcal{V}(\mathbf{K})} (1 + \varepsilon') + \varepsilon''\}$.

În definitiv am demonstrat că pentru orice $\varphi\in\mathcal{V}(\mathbf{K})$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există o funcţie $\varphi_\varepsilon\in\mathcal{A}'(\mathbf{K})$ cu proprietăţile :

$$(\ast)\quad \|\varphi_\varepsilon\|_{\mathcal{A}'(\mathbf{K})} \leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{V}(\mathbf{K})} + \varepsilon$$

$$(\ast\ast)\quad \|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_{\mathcal{V}(\mathbf{K})} \leqslant \varepsilon.$$

Fie acum $\varphi\in\mathcal{V}(\mathbf{K})$ şi $\varepsilon_n = \varepsilon/4^n$, unde $\varepsilon > 0$ arbitrar, dar fixat.

Din cele de mai sus obţinem o funcţie $\varphi_1 \in \mathcal{A}'(\mathbf{K})$ cu proprietăţile :

$$(*)\ \|\varphi_1\|_{\mathcal{A}'(\mathbf{K})} \leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{V}(\mathbf{K})} + \varepsilon_1$$

$$(**)\ \|\varphi - \varphi_1\|_{\mathcal{V}(\mathbf{K})} \leqslant \varepsilon_1.$$

Considerînd apoi $\varphi - \varphi_1 \in \mathcal{V}(\mathbf{K})$ şi ε_2 obţinem o funcţie $\varphi_2 \in \mathcal{A}'(\mathbf{K})$ cu proprietăţile :

$$(*)\ \|\varphi_2\|_{\mathcal{A}'(\mathbf{K})} \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$(**)\ \|\varphi - \varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathcal{V}(\mathbf{K})} \leqslant \varepsilon_2$$

şi, prin inducţie, la pasul n obţinem o funcţie $\varphi_n \in \mathcal{A}'(\mathbf{K})$ cu proprietăţile :

$$(*)\ \|\varphi_n\|_{\mathcal{A}'(\mathbf{K})} \leqslant \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$$

$$(**)\ \Big\|\varphi - \sum_{k=1}^{n} \varphi k\Big\|_{\mathcal{V}(\mathbf{K})} \leqslant \varepsilon_n.$$

Cum evident, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|\varphi_k\|_{\mathcal{A}'(\mathbf{K})} \leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{V}(\mathbf{K})} + \varepsilon < \infty$, rezultă că seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ converge în $\mathcal{A}'(\mathbf{K})$ către o funcţie $\varphi_0 \in \mathcal{A}'(\mathbf{K})$; avînd în vedere (1), rezultă că $\varphi_0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ şi în $\mathcal{V}(\mathbf{K})$ şi atunci din (2) rezultă că $\varphi = \varphi_0 \in \mathcal{A}'(\mathbf{K})$.

În sfîrşit,

$$\|\varphi\|_{\mathcal{A}'(\mathbf{K})} = \Big\|\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k\Big\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_k\|_{\mathcal{A}'(\mathbf{K})} \leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{V}(\mathbf{K})} + \varepsilon$$

şi cum ε a fost arbitrar, rezultă $\|\varphi\|_{\mathcal{A}'(\mathbf{K})} \leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{V}(\mathbf{K})}$.

Teorema este complet demonstrată.

21.31. TEOREMĂ. (Varopoulos). *Algebra Banach* $\mathcal{V}(\mathbf{D}_2)$ *nu satisface sinteza spectrală.*

(I) Aici, conf. **9.17**, $\mathbf{D}_2$ este produsul direct al unei mulţimi numărabile de copii ale lui $\mathbf{Z}_2$. Reamintim că algebra Banach $\mathcal{A}(\mathbf{T}^3)$ nu satisface sinteza spectrală (conf. **21.13**. obs. (2)). Prin urmare, conf. observaţiei (III) de la **21.29**, rezultă că *algebra Banach* $\mathcal{V}(\mathbf{T}^3)$ *nu satisface sinteza spectrală.*

(II) Să considerăm aplicaţia :

$$s : \mathbf{D}_2 \to \mathbf{T}^3$$

dată de dezvoltarea binară :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots) \in \mathbf{D}_2 \xrightarrow{s} \mathbf{T}^3 \ni (\{0, \alpha_1, \alpha_4, \ldots\}, \{0, \alpha_2, \alpha_5, \ldots\}, \{0, \alpha_3, \alpha_6, \ldots\})$$

Această aplicaţie are proprietăţile :

— este continuă ;

— este surjectivă ;

— invariază măsura Haar;

— este injectivă a.p.t.

Ca urmare, obținem în mod canonic:

— un izomorfism izometric de spații Banach

$$\mathcal{L}^{\infty}(\mathbf{D}_2) \leftrightarrow \mathcal{L}^{\infty}(\mathbf{T}^3);$$

— un homomorfism izometric de algebre Banach:

$$\mathcal{C}(\mathbf{T}^3) \to \mathcal{C}(\mathbf{D}_2).$$

Mai considerăm și injecția canonică:

$$\mathcal{C}(\mathbf{D}_2) \to \mathcal{L}^{\infty}(\mathbf{D}_2).$$

Tensorizînd se obțin aplicațiile:

$$\mathcal{C}(\mathbf{T}^3) \hat{\otimes} \mathcal{C}(\mathbf{T}^3) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{C}(\mathbf{D}_2) \hat{\otimes} \mathcal{C}(\mathbf{D}_2) \xrightarrow{\sigma'} \mathcal{L}^{\infty}(\mathbf{D}_2) \hat{\otimes} \mathcal{L}^{\infty}(\mathbf{D}_2) \leftrightarrow \mathcal{L}^{\infty}(\mathbf{T}^3) \hat{\otimes} \mathcal{L}^{\infty}(\mathbf{T}^3)$$

adică

$$\mathcal{V}(\mathbf{T}^3) \to \mathcal{V}(\mathbf{D}_2) \to \mathcal{V}^{\infty}$$

unde am notat

$$\mathcal{V}^{\infty} = \mathcal{L}^{\infty}(\mathbf{D}_2) \hat{\otimes} \mathcal{L}^{\infty}(\mathbf{D}_2) \leftrightarrow \mathcal{L}^{\infty}(\mathbf{T}^3) \hat{\otimes} \mathcal{L}^{\infty}(\mathbf{T}^3).$$

Atunci σ' și $\sigma'\sigma$ sînt injecții canonice, iar σ și σ' sînt de norme $\leqslant 1$.

(III) Vom arăta că *σ' este o izometrie.*

Fie $\{u_n\}$ o unitate aproximativă pe D_2 (vezi **1.13**) și fie $P_n : \mathcal{L}^{\infty}(\mathbf{D}_2) \to \mathcal{C}(\mathbf{D}_2)$ operatori de regularizare ($P_n f = u_n \ast f$); atunci operatorul liniar:

$$P_n \hat{\otimes} P_n : \mathcal{V}^{\infty} \to \mathcal{V}(\mathbf{D}_2)$$

are proprietățile:

(1) $\|P_n \hat{\otimes} P_n\| \leqslant 1$.

(2) Pentru orice $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbf{D}_2)$, $(\mathrm{P}_n \hat{\otimes} \mathrm{P}_n)\,\sigma'\varphi \to \varphi$ în $\mathcal{V}(\mathbf{D}_2)$.

Dacă σ' nu ar fi o izometrie, ar rezulta că există o funcție $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbf{D}_2)$ așa ca $\|\sigma'\varphi\|_{\mathcal{V}_{\infty}} < \|\varphi\|_{\mathcal{V}(\mathbf{D}_2)}$; atunci din (1) ar rezulta:

$$\|(P_n \hat{\otimes} P_n)\,\sigma'\varphi\|_{\mathcal{V}(\mathbf{D}_2)} \leqslant \|\sigma'\varphi\|_{\mathcal{V}^{\infty}} < \|\varphi\|_{\mathcal{V}(\mathbf{D}_2)};$$

această relație trecută la limită cu (2), ne dă o contradicție evidentă, deci σ' este o izometrie.

Un raționament absolut analog pentru $\mathbf{T}^3$ în loc de $\mathbf{D}_2$ ne arată că $\sigma'\sigma$ este o izometrie, deci și *σ este o izometrie.*

În cele ce urmează vom folosi regularizarea de mai sus atît pentru $\mathbf{D}_2$ cît și pentru $\mathbf{T}^3$ fără a diferenția notațiile.

(IV) Cum $\sigma : \mathcal{V}(\mathbf{T}^3) \to \mathcal{V}(\mathbf{D}_2)$ este un homomorfism izometric de algebre Banach, rezultă că *există o bijecție continuă a spectrului lui $\mathcal{V}(\mathbf{D}_2)$ pe spectrul lui $\mathcal{V}(\mathbf{T}^3)$* și anume

$$\bar{\sigma} : \mathbf{D}_2 \times \mathbf{D}_2 \to \mathbf{T}^3 \times \mathbf{T}^3; \text{ de fapt } \bar{\sigma} = s \times s, \text{ a.p.t.}$$

(V) Deoarece $\mathcal{V}(\mathbf{T}^3)$ nu satisface sinteza spectrală (conf. I), există $\varepsilon>0$, $\mathbf{E}=\bar{\mathbf{E}}\subset\mathbf{T}^3\times\mathbf{T}^3$ şi $\varphi\in\mathcal{K}(\mathbf{E})\subset\mathcal{V}(\mathbf{T}^3)$ cu proprietatea că pentru orice $\psi\in\mathcal{J}_0(\mathbf{E})$ are loc relaţia :

$$\|\varphi-\psi\|_{\mathcal{V}(\mathbf{T}^3)}>\varepsilon.$$

Să considerăm mulţimea închisă $\mathbf{E}^*=\bar{\sigma}^{-1}(\mathbf{E})\subset\mathbf{D}_2\times\mathbf{D}_2$; atunci $\sigma\varphi\in\mathcal{K}(\mathbf{E}^*)\subset\mathcal{V}(\mathbf{D}_2)$; fie $\chi\in\mathcal{J}_0(\mathbf{E}^*)$. Cum σ' este o izometrie, rezultă că :

$$\|\sigma\varphi-\chi\|_{\mathcal{V}(\mathbf{D}_2)}=\|\sigma'\sigma\varphi-\sigma'\chi\|_{\mathcal{V}^\infty}.$$

Prin urmare :

$$\|(P_n\hat{\otimes}P_n)\sigma'\sigma\varphi-(P_n\hat{\otimes}P_n)\sigma'\chi\|_{\mathcal{V}(\mathbf{T}^3)}\leqslant\|\sigma\varphi-\chi\|_{\mathcal{V}(\mathbf{D}_2)}$$

Să notăm :

$$(P_n\hat{\otimes}P_n)\sigma'\sigma\varphi=\varphi_n\in\mathcal{V}(\mathbf{T}^3)$$

$$(P_n\hat{\otimes}P_n)\sigma'\chi=\chi_n\in\mathcal{V}(\mathbf{T}^3).$$

Atunci :

— pe de o parte $\|\varphi_n-\varphi\|_{\mathcal{V}(\mathbf{T}^3)}\to 0$, deci pentru n suficient de mare rezultă $\|\varphi_n-\varphi\|_{\mathcal{V}(\mathbf{T}^3)}<\varepsilon/2$.

— pe de altă parte suportul funcţiilor u_n care definesc operatorii P_n „tinde" către origine, deci pentru n suficient de mare $\chi_n\in\mathcal{J}_0(\mathbf{E})$ şi prin urmare $\|\varphi-\chi_n\|_{\mathcal{V}(\mathbf{T}^3)}\geqslant\varepsilon$.

În definitiv, pentru n suficient de mare avem :

$$\|\sigma\varphi-\chi\|_{\mathcal{V}(\mathbf{D}_2)}\geqslant\|\varphi_n-\chi_n\|_{\mathcal{V}(\mathbf{T}^3)}\geqslant\|\varphi-\chi_n\|_{\mathcal{V}(\mathbf{T}^3)}-$$

$$-\|\varphi_n-\varphi\|_{\mathcal{V}(\mathbf{T}^3)}\geqslant\varepsilon-\varepsilon/2=\varepsilon/2.$$

Deci $\mathbf{E}^*$ este o mulţime de nonsinteză spectrală şi ca urmare $\mathcal{V}(\mathbf{D}_2)$ *nu satisface sinteza spectrală*.

Teorema este complet demonstrată.

21.32. Demonstraţia teoremei lui Malliavin (21.24).

Fie **G** un grup abelian infinit, compact şi metrizabil. Conform teoremei **17.9** există o mulţime Cantor-Kronecker (sau de tip $\mathbf{K}_q$) $\mathbf{P}\subset\mathbf{G}$; cum $\mathbf{D}_2$ este o mulţime Cantor, rezultă că **P** şi $\mathbf{D}_2$ sînt homeomorfe şi că există o partiţie a lui **P** cu două mulţimi $\mathbf{K}_1$ şi $\mathbf{K}_2$ care sînt homeomorfe cu $\mathbf{D}_2$. Să notăm $\mathbf{K}=\mathbf{K}_1\times\mathbf{K}_2$, $\mathbf{E}=\mathbf{K}_1+\mathbf{K}_2$. Pentru a arăta că $\mathcal{A}(\mathbf{G})$ nu satisface sinteza spectrală, este suficient să arătăm că $\mathcal{A}(\mathbf{E})$ nu satisface sinteza spectrală. Dar, conform **21.30**, $\mathcal{A}(\mathbf{E})\equiv\mathcal{V}(\mathbf{K})\equiv\mathcal{V}(\mathbf{D}_2)$ şi, conform 21.31, $\mathcal{V}(\mathbf{D}_2)$ nu satisface sinteza spectrală.

Teorema lui Malliavin este astfel complet demonstrată (vezi obs. (b) de la **21.25**).

21.33. NOTE. (1) Structura grupală intervine în definiţia lui $\mathcal{A}(\mathbf{G})$ dar nu intervine în definiţia lui $\mathcal{V}(\mathbf{G})$. Interesul principal al algebrelor $\mathcal{V}(\mathbf{G})$ constă tocmai în aceea că putem introduce o structură grupală atunci cînd avem nevoie şi apoi să o eliminăm sau să o schimbăm ; acest procedeu este vizibil în demonstraţia teoremei **21.30** şi în secţiunea **21.32**.

(2) Metoda evidenţiată de teorema **21.30** a fost numită de J. P. Kahane ([49]) *„metoda ridicării şi etalării a lui Varopoulos”*. În secţiunea următoare arătăm cum această metodă permite găsirea de noi mulţimi de nonrezoluţie spectrală.

21.34. (1) LEMĂ. *Fie* **G** *un grup abelian compact infinit şi metrizabil. O mulţime închisă* $\mathbf{E} \subset \mathbf{G}$ *care conţine suma algebrică a două mulţimi perfecte va conţine şi suma algebrică a două mulţimi disjuncte, homeomorfe cu* $\mathbf{D}_2$ *şi a căror reuniune este o mulţime Kronecker* (Varopoulos, [116]).

(2). TEOREMĂ. *Orice mulţime închisă* **E** *dintr-un grup abelian infinit compact şi metrizabil* **G** *care conţine suma algebrică a două mulţimi perfecte este o mulţime de nonrezoluţie spectrală.*

Într-adevăr, atunci **E** conţine suma $\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2$ a două mulţimi disjuncte, homeomorfe cu $\mathbf{D}_2$ şi a căror reuniune este o mulţime Kronecker. Conform **21.3**, $\mathcal{A}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) = \mathcal{V}(\mathbf{D}_2)$ şi conf. **21.31**, $\mathcal{V}(\mathbf{D}_2)$ nu satisface sinteza spectrală, deci nici $\mathcal{A}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)$ şi nici $\mathcal{A}(\mathbf{E})$ nu o satisfac.

21.35. Din teorema **21.31** rezultă următoarea :

TEOREMĂ. *Dacă* $\mathbf{K}_1$ *şi* $\mathbf{K}_2$ *sînt spaţii metrice compacte nenumărabile, iar* $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}_2$, *atunci* $\mathcal{V}(\mathbf{K})$ *nu satisface sinteza spectrală.*

În schimb se vede uşor că *dacă* $\mathbf{K}_1$ *sau* $\mathbf{K}_2$ *este numărabil, iar* $\mathbf{K}_1$ *şi* $\mathbf{K}_2$ *sînt total discontinue, atunci* $\mathcal{V}(\mathbf{K})$ *satisface sinteza spectrală.* Într-adevăr, dacă $x_1 \in \mathbf{K}_1$ şi $\mathbf{E}_2 \subset \mathbf{K}_2$ este închisă, atunci $\{x_1\} \times \mathbf{E}_2$ este mulţime Ditkin ; dacă $\mathbf{K}_1$ este numărabilă, atunci orice mulţime închisă din **K** este o reuniune de astfel de mulţimi, deci (conf. **21.18** (5)) o mulţime Ditkin.

21.36. Pe de altă parte, Varopoulos [113], [114] obţine şi noi mulţimi de rezoluţie spectrală. Anume :

(1) TEOREMĂ. *Dacă* $\mathbf{K} \subset \mathbf{T}$ *este o mulţime Kroneker, atunci* **K** *nu suportă adevărate pseudomăsuri, deci este o mulţime de rezoluţie spectrală (şi de tip U)* (conjectura lui Rudin [95], p. 189).

Pentru demonstraţie trimitem la [113], unde se anunţă (fără demonstraţie) şi următorul rezultat general :

(2) TEOREMĂ. *Dacă* **G** *este un l.c.a.-grup iar* $\mathbf{K} \subset \mathbf{G}$ *este o mulţime Kronecker (sau de tip* $\mathbf{K}_q$*) compactă şi total discontinuă, atunci* **K** este *o mulţime de rezoluţie spectrală.*

Din această teoremă, Varopoulos (*loc. cit.*) obţine următorul :

COROLAR. *Există un l.c.a. grup* **G**, *o surjecţie continuă* $h : \mathbf{G} \to \mathbf{G}/\mathbf{H}$ *(unde* $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ *este un subgrup închis) şi o mulţime de rezoluţie spectrală* $\mathbf{K} \subset \mathbf{G}$, *aşa ca :*

(i) $h_{\mathbf{K}}$ *este injectivă.*

(ii) $h(\mathbf{K})$ *este o mulţime de nonrezoluţie spectrală în* $\mathbf{G}/\mathbf{H}$.

Există însă mulţimi de rezoluţie spectrală care nu sînt mulţimi Helson, după cum rezultă din următoarea :

(3) TEOREMĂ. *Fie* **G** *un l.c.a.-grup iar* $\mathbf{E} \subset \mathbf{G}$ *o mulţime Kronecker (sau de tip* $\mathbf{K}_q$*) perfectă şi total discontinuă care nu suportă adevărate pseudomăsuri. Dacă* $\mathbf{K} \subset \mathbf{E}$ *este o mulţime perfectă iar* $\mathbf{D} = \{d_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ *este un şir de puncte distincte din* **E** *aşa ca* $d_n \to d_0$ *şi* $\mathbf{K} \cap \mathbf{D} = \emptyset$, *atunci* $\mathbf{S} = \mathbf{D} + \mathbf{K}$ *este o mulţime perfectă de rezoluţie spectrală care nu este mulţime Helson.*

Pentru demonstraţie trimitem la [114]. Menţionăm că această teoremă dă un rezultat mai tare decît faptul că algebra $\mathcal{A}(\mathrm{S})$ satisface sinteza spectrală ; acest ultim fapt rezultă de altfel imediat din consideraţiile care urmează teoremei **21.35**.

21.37. Fie $\mathcal{X}$ o algebră Banach de funcţii ; vom spune (după Varopoulos [117], [122]) că *$\mathcal{X}$ satisface ipoteza* (H) dacă există un şir de operatori liniari de rang finit $T_n : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ aşa ca $T_n \to Id\,\mathcal{X}$, tare.

(1) TEOREMĂ. *Fie* G_1 *şi* G_2 *l.c.a.-grupuri şi* $\mathrm{E}_k \subset \mathrm{G}_k$ $(k = 1, 2)$ *mulţimi de sinteză spectrală pentru* $\mathcal{A}(\mathrm{G}_1)$, $\mathcal{A}(\mathrm{G}_2)$ *resp. Dacă* $\mathcal{A}(\mathrm{G}_1)$ *şi* $\mathcal{A}(\mathrm{G}_2)$ *satisfac ipoteza* (H), *atunci* $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ *este o mulţime de sinteză spectrală pentru* $\mathcal{A}(\mathrm{G}_1) \hat{\otimes} \mathcal{A}(\mathrm{G}_2)$ (*loc. cit.*).

Cu ajutorul acestei teoreme se demonstrează (*loc. cit.*) următoarea :

(2) TEOREMĂ. *Fie* G *un grup abelian compact. Dacă reuniunea a două mulţimi* K_1, $\mathrm{K}_2 \subset \mathrm{G}$ *disjuncte, compacte şi total discontinue este o mulţime Kronecker, atunci* $\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2$ *este o mulţime de sinteză spectrală.*

Dar, conform **21.34** (2), $\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2$ nu este în general o mulţime de rezoluţie spectrală.

(3) În sfîrşit, o problemă încă deschisă este următoarea :

,,*Reuniunea a două mulţimi de sinteză spectrală este sau nu o mulţime de sinteză spectrală*''*?* (conf. Rudin, [95], p. 172).

Cu ajutorul aceloraşi metode, Varopoulos [122] arată că *răspunsul la această problemă se poate da dacă se cunoaşte răspunsul în cazul unui grup particular.*

21.38. Alte demonstraţii ale teoremei lui Malliavin [4])

Prima demonstraţie a teoremei **21.24** a fost dată de Malliavin [65], [66], [67]. În cazul cînd Γ este compact infinit şi metrizabil (vezi secţiunea **21.25** şi precedentele), demonstraţia sa cuprinde în mod natural două părţi :

Prima parte conţine ideea principală. Anume, pentru o funcţie $g \in \mathcal{A}(\Gamma)$ să notăm :

$$|||g||| = \sup_{x \in \mathrm{G}} |g^\wedge(x)|.$$

Atunci are loc teorema următoare care este o extensie datorată lui Rudin ([94] sau [95], p. 174) pentru un rezultat al lui Malliavin ([67]).

(1) TEOREMĂ. *Dacă* $f \in \mathcal{A}(\Gamma)$ *este o funcţie reală şi dacă pentru orice* $n \geqslant 0$

$$|||\exp\,(itf)||| = 0\,[|t|^{-n}], \quad t \in \mathbf{R},$$

atunci există o constantă $a \in \mathbf{R}$ *aşa încît idealele închise generate în* $\mathcal{A}(\Gamma)$ *de* $(f - a)^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *să fie distincte două cîte două.*

Cum $\mathrm{H}((f - a)^n)$ sînt invariante în raport cu n (vezi **8.10**), această teoremă demonstrează teorema **21.24** cu condiţia să existe o astfel de funcţie $f \in \mathcal{A}(\Gamma)$. Demonstraţia teoremei (1) nu este dificilă ; o variantă elegantă se află în lucrarea lui Richards ([90]).

---

[4]) Inversăm din nou rolurile lui G şi Γ (vezi p. 44 subsol). Sinteza se consideră pe $\Gamma = \mathrm{G}^\wedge$.

A doua parte a demonstrației lui Malliavin, și cea mai dificilă, constă în *a arăta că există o funcție* $f \in \mathcal{A}(\Gamma)$ *care să satisfacă condițiile teoremei* (1). După apariția lucrărilor lui Malliavin au apărut mai multe variante care simplifică expunerea acestei demonstrații.

În cea mai mare parte din acestea se folosește o metodă bazată pe considerații probabilistice; astfel notăm Kahane [47], Rudin [95], Kahane și Salem [54], Kahane și Katznelson [51] și Katznelson [95]; se pare că cea mai simplă expunere în acest sens se află în cursul lui Katznelson [59] (nu am putut consulta această lucrare). De altă parte, în lucrarea lui Richards, se construiește funcția căutată folosind o metodă combinatorială elementară.

21.39. Folosind o metodă analoagă cu cea folosită de el pentru găsirea funcției f din secțiunea precedentă, Rudin ([95], 7.7) demonstrează că:

(1) TEOREMĂ. *Dacă* Γ *este un l.c.a.-grup nediscret, atunci* $\mathcal{A}(\Gamma)$ *conține un ideal închis* $\mathcal{J}$ *care nu este autoadjunct* (adică există $f \in \mathcal{J}$ cu $\bar{f} \notin \mathcal{J}$).

Mai notăm și următoarea teoremă datorată lui Helson [37]:

(2) TEOREMĂ. *Dacă* $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \subset \mathcal{L}^1(G)$ *sînt ideale închise diferite și* $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_2$ *iar* $H(\mathcal{J}_1) = H(\mathcal{J}_2)$, *atunci există un ideal închis* $\mathcal{J}$ *astfel ca* $\mathcal{J} \neq \mathcal{J}_1$, $\mathcal{J} \neq \mathcal{J}_2$ *și* $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J} \subset \mathcal{J}_2$.

21.40. NOTĂ. Teorema lui Malliavin exprimă unul din următoarele fapte echivalente, pentru Γ = l.c.a.-grup nediscret.

(1) *Există o mulțime închisă* $E \subset \Gamma$ *de nonsinteză spectrală.*

(2) *Există o funcție* $f \in \mathcal{A}(\Gamma)$ *care nu satisface sinteza spectrală* (vezi **21.7**).

(3) *Există o pseudomăsură* $S \in \mathcal{PM}(\Gamma)$ *care nu satisface sinteza spectrală* (vezi **21.7**).

În cele ce urmează ne vom ocupa de *problema sintezei spectrale pentru pseudomăsuri.* Vom reformula problema în alți termeni și anume vom folosi limbajul sugerat de identificarea $\mathcal{PM}(\Gamma) \equiv \mathcal{L}^\infty(G)$ (conf. **15.26**).

În sensul definițiilor generale, problema sintezei spectrale este o problemă în algebra $\mathcal{L}^1(G)$. Ca în multe alte probleme este folositor și posibil să înlocuim această problemă cu o problemă în dual, aici $\mathcal{L}^\infty(G) \equiv \mathcal{PM}(\Gamma)$. După cum vom vedea ulterior, *studiul idealelor închise din* $\mathcal{L}^1(G)$ *este echivalent cu studiul subspațiilor invariante la translații din* $\mathcal{L}^\infty(G)$ *care sînt închise în topologia slabă.*

Acest aspect al sintezei spectrale este sugerat de lucrările lui Beurling [5], [7] și este prezent în multe lucrări de analiză armonică: Segal [105], Godement [34], Buck [11], Pollard [82], Domar [18], [19], [22], Reiter [86], [88], Herz [41], Herz și de Leeuw [63], Rosenthal [91], Rudin [95] (§ 7.8), Kocsis [61], Kahane [50], Kinukawa [60], Helson [36].

21.41. DEFINIȚII. Fie G un l.c.a.-grup iar $\Gamma = G^\wedge$. În tot restul paragrafului stabilim următoarele notații (conf. Rudin [95]):

$\mathcal{J}$ = ideal închis din $\mathcal{L}^1(G)$.
$\mathcal{V}$ = subspațiu invariant la translații și slab închis din $\mathcal{L}^\infty(G)$.
$\alpha(\mathcal{J}) = \mathcal{J}^\perp$ = subspațiul ortogonal lui $\mathcal{J}$ în $\mathcal{L}^\infty(G)$.
$\beta(\mathcal{V}) = \mathcal{V}^\perp$ = subspațiul ortogonal lui $\mathcal{V}$ în $\mathcal{L}^1(G)$.
$\sigma(\mathcal{V})$ = mulțimea caracterelor continue pe G care aparțin lui $\mathcal{V}$.
$\mathcal{V}_0$ = subspațiul liniar slab închis generat în $\mathcal{L}^\infty(G)$ de $\sigma(\mathcal{V})$.

$\mathcal{V}(\varphi)$ = subspaţiul invariant la translaţii şi slab închis generat în $\mathcal{L}^\infty(\mathbf{G})$ de $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbf{G})$.

$\sigma(\varphi)$ = $\sigma(\mathcal{V}(\varphi))$ pentru $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbf{G})$.

Din secţiunea **8.9** rezultă imediat că :

(1) $\alpha(\mathcal{J}) = \{\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbf{G})\,;\ f \ast \varphi = 0, \text{ or } f \in \mathcal{J}\}$.

(2) $\beta(\mathcal{V}) = \{f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{G})\,;\ f \ast \varphi = 0, \text{ or } \varphi \in \mathcal{V}\}$.

Este evident că :

(3) $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ şi $\mathcal{V}_0$ este invariant la translaţii.

(4) $\sigma(\mathcal{V}_0) = \sigma(\mathcal{V})$ iar $\mathcal{V}_0$ este cel mai mic subspaţiu slab închis şi invariant la translaţii din $\mathcal{L}^\infty(\mathbf{G})$ cu acest spectru.

(5) $\mathcal{V}(\varphi)$ = închiderea slabă a subspaţiului liniar generat de translatatele lui φ.

Mulţimea $\sigma(\mathcal{V})$ va fi considerată în două situaţii : $\sigma(\mathcal{V}) \subset \mathcal{L}^\infty(\mathbf{G})$ şi $\sigma(\mathcal{V}) \subset \boldsymbol{\Gamma}$; în ultima situaţie $\sigma(\mathcal{V})$ va fi numit *spectrul lui* $\mathcal{V}$ şi $\sigma(\varphi)$ va fi numit *spectrul lui* φ.

Vom spune că $\mathcal{V}$ *satisface sinteza spectrală* dacă $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0$.

Vom spune că $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbf{G})$ *satisface sinteza spectrală* dacă $\varphi \in \mathcal{V}_0(\varphi)$.

Vom spune că o mulţime închisă $\mathbf{E} \subset \boldsymbol{\Gamma}$ este o *mulţime de sinteză armonică* dacă există un singur $\mathcal{V}$ cu proprietatea că $\sigma(\mathcal{V}) = \mathbf{E}$; atunci $\mathcal{V}$ satisface sinteza spectrală. Vom vedea imediat că *mulţimile de sinteză armonică coincid cu mulţimile de sinteză spectrală anterior definite* şi vom renunţa la noua terminologie.

Vom spune că $\mathcal{V}$ *satisface rezoluţia spectrală* dacă orice subspaţiu slab închis şi invariant la translaţii din $\mathcal{V}$ *satisface* sinteza spectrală.

Cum $\mathcal{L}^\infty(\mathbf{G}) \equiv \mathcal{PM}(\boldsymbol{\Gamma})$, vom căuta să punem de acord noţiunile introduse în limbajul lui $\mathcal{L}^\infty(\mathbf{G})$ cu cele anterior definite în limbajul lui $\mathcal{PM}(\boldsymbol{\Gamma})$; vom nota prin S_φ pseudomăsura care corespunde lui φ (vezi **15.26**).

21.42. TEOREMĂ. (i) *Pentru orice* $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbf{G})$ *are loc relaţia*

$$\sigma(\varphi) = \operatorname{supp} S_\varphi .$$

(ii) $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbf{G})$ *satisface sinteza spectrală dacă şi numai dacă* S_φ *satisface sinteza spectrală.*

(iii) *O mulţime închisă* $\mathbf{E} \subset \boldsymbol{\Gamma}$ *este o mulţime spectrală de sinteză dacă şi numai dacă* $\mathbf{E}$ *este o mulţime de sinteză armonică.*

(iv) *O mulţime închisă* $\mathbf{E} \subset \boldsymbol{\Gamma}$ *este o mulţime de rezoluţie spectrală dacă şi numai dacă există şi este unic* $\mathcal{V}$ *aşa ca* $\mathbf{E} = \sigma(\mathcal{V})$ *iar* $\mathcal{V}$ *satisface rezoluţia spectrală.*

(i) Fie $\gamma \in \boldsymbol{\Gamma}$; atunci (conf. teoremei Hahn-Banach) $\gamma \in \mathcal{V}(\varphi)$ dacă şi numai dacă pentru orice $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ are loc implicaţia

$$f \perp \varphi_x \text{ or. } x \in \mathbf{G} \Rightarrow f \perp \gamma$$

adică (conf. **15.26**)

$$S_\varphi \cdot f^\wedge = 0 \Rightarrow f^\wedge(\gamma) = 0.$$

Dar dacă $S_\varphi \cdot f^\wedge = 0$, atunci $f^\wedge$ se anulează pe $\operatorname{supp} S_\varphi$ deci $\operatorname{supp} S_\varphi \subset \sigma(\varphi)$. Invers, dacă $\gamma \notin \operatorname{supp} S_\varphi$, atunci (conf. **8.1**) există $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ aşa ca $f^\wedge(\gamma) \neq 0$ şi $\operatorname{supp} f^\wedge \cap \operatorname{supp} S_\varphi = \emptyset$, deci $S_\varphi \cdot f^\wedge = 0$ dar $f^\wedge(\gamma) \neq 0$, ceea ce arată că $\operatorname{supp} S_\varphi = \sigma(\varphi)$ (vezi **15.26**).

(ii) Rezultă imediat din (i), **21.9** (1) şi **5.9**.

(iii) Rezultă imediat din (i), **21.9** (2) şi **5.9**.

(iv) Trivial.

21.43. În această secţiune amintim cîteva fapte cunoscute şi reformulăm unele rezultate anterioare.

(1) LEMĂ. (i) *Orice* $\alpha(\mathcal{I})$ *este un* $\mathcal{V}$ *şi orice* $\beta(\mathcal{V})$ *este un* $\mathcal{I}$.

(ii) $\alpha(\beta(\mathcal{V})) = \mathcal{V}$ *şi* $\beta(\alpha(\mathcal{I})) = \mathcal{I}$.

(iii) *Dacă* $\mathcal{V} = \alpha(\mathcal{I})$, *atunci* $\sigma(\mathcal{V}) = \mathbf{H}(\mathcal{I})$.

(iv) $\sigma(\mathcal{V})$ *este mereu închis în* Γ *şi orice mulţime închisă* $\mathbf{E} \subset \Gamma$ *este de forma* $\sigma(\mathcal{V})$.

(v) *O mulţime închisă* $\mathbf{E} \subset \Gamma$ *este* $\sigma(\mathcal{V})$ *pentru un singur* $\mathcal{V}$ *dacă şi numai dacă este* $\mathbf{H}(\mathcal{I})$ *pentru un singur* $\mathcal{I}$ (a se compara cu **21.42** (iii)).

Punctul (i) rezultă din **8.9** şi din definiţia topologiei slabe; punctul (ii) rezultă din teorema Hahn-Banach. Dacă $\mathcal{V} = \alpha(\mathcal{I})$, atunci $\gamma \in \sigma(\mathcal{V}) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (f * \gamma = 0$ pentru orice $f \in \mathcal{I})$; dar $(f * \gamma)(x) = (x, \gamma) f^{\wedge}(\gamma)$ şi aceasta este nulă pentru orice $x \in \mathbf{G}$ şi orice $f \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \gamma \in \mathbf{H}(\mathcal{I})$; de aici rezultă (iii). Din (i) şi (ii) rezultă că *orice* $\mathcal{V}$ *este un* $\alpha(\mathrm{I})$; deci (iv) rezultă din (iii) şi din **8.10**. Cum $\sigma(\mathcal{V}) = \mathbf{H}(\beta(\mathcal{V}))$, conf. (iii), şi cum $\beta(\mathcal{V}_1) = \beta(\mathcal{V}_2) \Leftrightarrow \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$, rezultă (v).

(2) LEMĂ. *Dacă* $\mathbf{D}$ *este o mulţime deschisă care conţine* $\sigma(\mathcal{V})$ *iar* $\mathcal{V}_{\mathbf{D}}$ *este subspaţiul slab închis generat în* $\mathcal{L}^{\infty}(\mathbf{G})$ *de caracterele din* $\mathbf{D}$, *atunci* $\mathcal{V}_{\mathbf{D}} \supset \mathcal{V}$.

Într-adevăr, dacă $\mathcal{I} = \beta(\mathcal{V})$ iar $\mathcal{I}_{\mathbf{D}} = \beta(\mathcal{V}_{\mathbf{D}})$, atunci $\mathbf{H}(\mathcal{I}) \subset \operatorname{int} \mathbf{H}(\mathcal{I}_{\mathbf{D}})$, deci — conf. **8.15** — $\mathcal{I}_{\mathbf{D}} \subset \mathcal{I}$ şi prin urmare $\mathcal{V}_{\mathbf{D}} = \alpha(\mathcal{I}) \supset \alpha(\mathcal{I}) = \mathcal{V}$.

COROLAR. (i) *Dacă* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ *şi* $f^{\wedge} = 0$ *pe o mulţime deschisă conţinînd* $\sigma(\varphi)$, *atunci* $f * \varphi = 0$.

(ii) Dacă $S \in \mathcal{PM}(\Gamma)$ şi $\mathbf{D}$ *este o mulţime deschisă din* Γ *care conţine* supp S, *atunci* S *aparţine subspaţiului liniar slab închis generat de măsurile punctuale concentrate pe* $\mathbf{D}$, *adică* (**21.9**):

(ii′) $\mathbf{D} \subset \Gamma$ *deschisă* $\Rightarrow \mathcal{PM}(\mathbf{D}) = \mathcal{PM}_0(\mathbf{D})$.

(3) LEMĂ. *Dacă* $\mathcal{V}$ *conţine o funcţie nenulă, atunci* $\sigma(\mathcal{V}) \neq \emptyset$.

Prin ipoteză există o funcţie $\varphi \in \mathcal{V}$ aşa ca $\mathrm{m}(\{x \in \mathbf{G}\,;\ \varphi(x) \neq 0\}) \neq 0$. Atunci $\beta(\mathcal{V}) \neq \mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ şi deci — conf. **8.15** bis — $\mathbf{H}(\beta(\mathcal{V})) \neq \emptyset$. Dar $\mathbf{H}(\beta(\mathcal{V})) = \sigma(\mathcal{V})$ şi lema este demonstrată.

COROLAR. (i) *Dacă* $\varphi \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathbf{G})$ *şi* $\mathrm{m}(\{x \in \mathbf{G}\,;\ \varphi(x) \neq 0\}) \neq 0$, *atunci cel puţin un caracter continuu pe* $\mathbf{G}$ *poate fi aproximat în topologia slabă a lui* $\mathcal{L}^{\infty}(\mathbf{G})$ *prin combinaţii liniare de translatate ale lui* φ.

(ii) *Dacă* $0 \neq S \in \mathcal{PM}(\Gamma)$, *atunci* supp $S \neq \emptyset$ (a se compara cu **15.9**).

Subliniem faptul că aceste rezultate derivă dintr-unul din cele mai importante rezultate de analiză armonică (teorema tauberiană maximală). Lema (2) este numită uneori *teorema analizei spectrale* (conf. Koosis [61]) sau *teorema lui Beurling*; în fapt Beurling a demonstrat un rezultat mai puternic, asupra căruia vom reveni (**21.51**).

(4) LEMĂ. *Dacă* $\sigma(\mathcal{V}) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, *atunci orice* $\varphi \in \mathcal{V}$ *este un polinom trigonometric de forma*:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i (x, \gamma_i).$$

Într-adevăr, orice mulţime finită din Γ este o mulţime de sinteză spectrală (conf. **8.15**) deci $\sigma(\mathcal{V})$ este o mulţime de sinteză spectrală. Cum spaţiul tuturor polinoamelor de forma considerată are pe $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ ca spectru, lema rezultă.

Corolar. (i) *Dacă* $\sigma(\varphi)$ *este finit, atunci* φ *este un polinom trigonometric.*

(ii) *Orice pseudomăsură cu suport finit este o măsură punctuală* (rezultat anunţat la **15.26**).

(5) Lemă. *Dacă* $\mu \in \mathcal{M}(\Gamma)$ *şi dacă*

$$\varphi(x) = \int_\Gamma (x, \gamma)\, d\mu(\gamma), \qquad x \in G,$$

atunci φ *satisface sinteza spectrală.*

Corolar. (i) *Orice* $\varphi \in \mathcal{B}(G)$ *satisface sinteza spectrală.*

Evident, căci orice măsură satisface sinteza spectrală a pseudomăsurilor (**21.8**); şi demonstraţia directă este imediată (vezi Rudin [95], 7.8.5.).

Corolar. (ii) *Dacă* G *este discret, atunci orice* $\varphi \in \mathcal{L}^2(G)$ *satisface sinteza spectrală.*

Într-adevăr, dacă G este discret, atunci $\mathcal{L}^2(G) \subset \mathcal{L}^\infty(G)$ şi Γ este compact; conf. teoremei lui Plancherel (§ **4**) φ este transformata Fourier a unei funcţii din $\mathcal{L}^2(\Gamma) \subset \mathcal{L}^1(\Gamma) \subset \mathcal{M}(\Gamma)$.

Observaţii. Cu $q > 2$ în loc de 2, corolarul (ii) este fals. *Dacă* G *este discret şi infinit şi* $q > 2$, *atunci există* $\varphi \in \mathcal{L}^q(G) \subset \mathcal{L}^\infty(G)$ *care nu satisface sinteza spectrală* (vezi Rudin [95] 7.8.6 sau Kahane Salem [54], p. 121); demonstraţia se bazează pe tehnica folosită de autorii lucrărilor citate în demonstraţia teoremei lui Malliavin. Cu aceleaşi mijloace Rudin (*op. cit.*, 7.8.7) demonstrează o teoremă a lui Segal [104] care afirmă că *dacă* $p < 2$, *atunci există* $f \in \mathcal{L}^p(G)$ *cu* $f^\wedge \neq 0$ a.p.t. *dar translatatele lui* f *nu generează* pe $\mathcal{L}^p(G)$ (vezi **8.15** bis (1) şi observaţia).

21.44. Lemă. *Orice funcţie* $\varphi \in \mathcal{V}$ *poate fi aproximată în topologia slabă a lui* $\mathcal{L}^\infty(G)$ *prin funcţii mărginite şi uniform continue din* $\mathcal{V}$ *chiar dacă* $\mathcal{V}$ *nu satisface sinteza spectrală.*

Într-adevăr, dacă $\varphi \in \mathcal{V}$ şi $u \in \mathcal{L}^1(G)$, atunci $u \ast \varphi \in \mathcal{C}_u(G)$ şi:

(i) $u \ast \varphi \in \mathcal{V}$.

(ii) φ aparţine închiderii slabe a mulţimii $\{u \ast \varphi;\ u \in \mathcal{L}^1(G)\}$.

Pentru a demonstra (i) să luăm $f \in \beta(\mathcal{V})$; cum $\beta(\mathcal{V})$ este un ideal, $f \ast u \in \beta(\mathcal{V})$ pentru orice $u \in \mathcal{L}^1(G)$, deci $f \ast (u \ast \varphi) = 0$; deci $u \ast \varphi \in \alpha(\beta(\mathcal{V})) = \mathcal{V}$. Pentru a demonstra (ii), fie $f \in \mathcal{L}^1(G)$ cu proprietatea că $f \ast u \ast \varphi = 0$ pentru orice $u \in \mathcal{L}^1(G)$; fie $u_n \in \mathcal{L}^1(G)$ aşa ca $\|f - f \ast n_n\| 1 \to 0$ (conf. **1.13**); atunci $\|f \ast \varphi\|_1 \leqslant \|f \ast \varphi - f \ast n_n \ast \varphi\|_1 \leqslant \|\varphi\|_\infty \|f - f \ast u_n\|_1 \to 0$ deci $f \ast \varphi = 0$ ceea ce, conf. teoremei Hahn-Banach, demonstrează (ii).

Deci problema sintezei spectrale pentru $\mathcal{V}$ se reduce la problema sintezei spectrale pentru funcţii mărginite şi uniform continue.

21.45. Informaţii asupra relaţiilor între spectre (suporturi) se obţin din următoarele leme:

(1) Lemă. (i) *Dacă* $\varphi, \psi \in \mathcal{L}^\infty(G)$ *şi* $a, b \in C$, *atunci*:

$$\sigma(a\varphi + b\psi) \subset \sigma(\varphi) \cup \sigma(\psi).$$

(ii) *Dacă* $\varphi, \psi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbf{G})$ *şi* $\sigma(\psi)$ *este compact, atunci* :

$$\sigma(\varphi\psi) \subset \sigma(\varphi) + \sigma(\psi).$$

(2) LEMĂ. (i) *Dacă* $S, T \in \mathcal{PM}(\Gamma)$ *şi* $a, b \in \mathbf{C}$, *atunci* :

$$\operatorname{supp}\,(aS + bT) \subset \operatorname{supp}\, S \cup \operatorname{supp}\, T.$$

(ii) *Dacă* $S, T \in \mathcal{PM}(\Gamma)$ *şi* supp T *este compact, atunci* :

$$\operatorname{supp}\,(S \ast T) \subset \operatorname{supp}\, S + \operatorname{supp}\, \mathrm{T}.$$

Observaţie. Dacă $S \leftrightarrow \varphi$ şi $T \leftrightarrow \psi$, atunci, prin *definiţie*, $S \ast T \leftrightarrow \varphi\psi$ (a se compara cu **15.16** şi **15.26**).

Cele două leme sînt echivalente. Punctul (i) este trivial în lema 2. Punctul (ii) va fi demonstrat pentru lema 1. Fie $\mathbf{D} \subset \Gamma$ o mulţime deschisă conţinînd pe $\sigma(\psi)$; conf. **21.43** (2) ψ este atunci limita slabă în $\mathcal{L}^\infty(\mathbf{G})$ a unor polinoame trigonometrice de forma :

$$\sum_k c_k(\cdot, \gamma_k), \quad \gamma_k \in \mathbf{D}$$

Dar este evident că $\sigma(\varphi\gamma) = \sigma(\varphi) + \gamma$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$ (suma în Γ), de unde rezultă că $\sigma(\varphi \sum_k c_k(\cdot, \gamma_k)) \subset \sigma(\varphi) + \mathbf{D}$ şi deci $\sigma(\varphi\psi) \subset \sigma(\varphi) + \mathbf{D}$ (în general, *dacă* $\varphi_n \to \varphi$ *slab şi* $\sigma(\varphi_n) \subset E$, *atunci* $\sigma(\varphi) \subset E$; a se compara cu **15.25** (4)). Cum $\sigma(\psi)$ este *compact*, rezultă că $\sigma(\varphi) + \sigma(\psi) = \bigcap\, (\sigma(\varphi) + \mathbf{D})$ unde intersecţia se ia după toate mulţimile deschise $\mathbf{D}$ care conţin pe $\sigma(\psi)$. Deci lemele sînt complet demonstrate.

21.46. Fie Λ un subgrup închis al lui Γ ; dacă $\mathbf{H} = \mathbf{A}(\mathbf{G}, \Lambda)$, atunci $\Lambda \equiv (\mathbf{G}/\mathbf{H})^\wedge$ (conf. **9.4**). Deci notaţia $\mathcal{PM}(\Lambda)$ poate fi interpretată în două sensuri aparent diferite : ca mulţimea pseudomăsurilor din $\mathcal{PM}(\Gamma)$ cu suportul conţinut în Λ sau ca mulţimea pseudomăsurilor pe grupul $\Lambda \equiv (\mathbf{G}/\mathbf{H})^\wedge$. În această secţiune vom arăta că notaţia nu este echivocă ; mai precis, vom demonstra următoarele teoreme echivalente :

(1) TEOREMĂ. *Fie* $h : \mathbf{G} \to \mathbf{G}/\mathbf{H}$ *aplicaţia canonică.*

(i) *Dacă* $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbf{G}/\mathbf{H})$, *atunci funcţia*

$$\Phi(x) = \varphi(h(x)), \quad x \in \mathbf{G}$$

are proprietăţile :

(a) Φ *este constantă pe clasele lui* $\mathbf{H}$.

(b) $\Phi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbf{G})$.

(c) $\sigma_\Gamma(\Phi) = \sigma_\Lambda(\varphi) \subset \Lambda$.

(ii) *Dacă* $\Phi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbf{G})$ *şi* $\sigma_\Gamma(\Phi) \subset \Lambda$, *atunci* Φ *este constantă pe clasele lui* $\mathbf{H}$ *iar funcţia* :

$$\varphi(h(x)) = \Phi(x), \quad x \in \mathbf{G}$$

are proprietăţile :

(a) $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbf{G}/\mathbf{H})$.

(b) $\sigma_\Lambda(\varphi) = \sigma_\Gamma(\Phi)$.

(2) TEOREMĂ. Fie $T : \mathcal{L}^1(\mathbf{G}) \to \mathcal{L}^1(\mathbf{G}/\mathbf{H})$ *operatorul definit în secţiunea* **1.9**, *iar* T^* *adjunctul său. Atunci orice pseudomăsură* S *pe* Γ *cu*

supp $S \subset \mathbf{\Lambda}$ *se află în imaginea lui* T^* *care este injectiv și operează astfel*: *dacă* $s = s_\varphi \in \mathcal{PM}(\mathbf{\Lambda})$, *atunci* $T^* s = S = S_\Phi\, \mathcal{PM}(\mathbf{\Gamma})$, *unde*:

a) $\Phi(x) = \varphi(h(x))$, $x \in \mathbf{G}$.

b) supp $S =$ supp s.

Fie $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ şi $F = Tf \in \mathcal{L}^1(\mathbf{G}/\mathbf{H})$; cu notaţiile din teorema (2) avem:

$$[T(f\Phi)]([x]) = \int_{\mathbf{H}} f(x+y)\,\Phi(x+y)\,\mathrm{d}\mathbf{m}_{\mathbf{H}}(y) = \varphi([x]) \int_{\mathbf{H}} f(x+y)\,\mathrm{d}\mathbf{m}_{\mathbf{H}}(y) =$$

$$= F([x])\,\varphi([x]),\ [x] \in \mathbf{G}/\mathbf{H}$$

deci conform teoremei **1.9**:

$$\int_{\mathbf{G}/\mathbf{H}} F([x])\,\varphi([x])\,\mathrm{d}\mathbf{m}_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}([x]) = \int_{\mathbf{G}} f(x)\,\Phi(x)\,\mathrm{d}\mathbf{m}_{\mathbf{G}}(x)$$

de unde $T^* s_\varphi = S_\Phi$, ceea ce demonstrează punctul (a) din teorema (2). În plus, deoarece conform **1.9** T este surjectiv, T^* este injectiv.

Punctele (i) (a) şi (b) şi (ii) (a) din teorema (1) sînt triviale, iar relaţia $\sigma_{\mathbf{\Lambda}}(\varphi) = \sigma_{\mathbf{\Gamma}}(\Phi)$ este o consecinţă imediată a definiţiilor şi a teoremei **9.10** de prelungire a caracterelor.

Fie acum $S = S_\Phi$ o pseudomăsură pe $\mathbf{\Gamma}$ cu supp $S = \sigma_{\mathbf{\Gamma}}(\Phi) \subset \mathbf{\Lambda}$; avem de arătat că Φ este constantă pe clasele lui $\mathbf{H}$. Într-adevăr, fie $y \in \mathbf{H}$; atunci pentru orice $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ vom avea:

$$\int f(x)\,\Phi(x+y)\,\mathrm{d}\mathbf{m}_{\mathbf{G}}(x) \int f(x-y)\,\Phi(x)\,\mathrm{d}\mathbf{m}_{\mathbf{G}}(x) = \langle f_y, S \rangle.$$

Dar supp $(f - f_y)^\wedge(\cdot) =$ supp $[1 - (y, \cdot))f^\wedge(\cdot)]$ este disjunct de $\mathbf{\Lambda} \supset \supset$ supp S căci $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{A}(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{H})$; cum $\mathbf{\Lambda}$ este o mulţime de sinteză spectrală, rezultă că $\langle f_y, S \rangle = \langle f, S \rangle$ şi deci

$$\int_{\mathbf{G}} f(x)\,\Phi(x+y)\,\mathrm{d}\mathbf{m}_{\mathbf{G}}(x) = \int_{\mathbf{G}} f(x)\,\Phi(x)\,\mathrm{d}\mathbf{m}_{\mathbf{G}}(x).$$

Cum $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{G})$ şi $y \in \mathbf{H}$ au fost arbitrare, rezultă că Φ este constantă pe clasele lui $\mathbf{H}$, q.e.d.

Astfel cele două teoreme sînt complet demonstrate.

21.47. LEMĂ. *Dacă* $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbf{G}) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbf{G})$, *atunci*

$$\sigma(\varphi) = \operatorname{supp} \hat{\varphi} = \operatorname{supp} S_\varphi.$$

Demonstraţia este imediată. Această lemă ne sugerează că *pseudomăsurile pe* $\mathbf{\Gamma}$ *ar putea fi considerate ca „transformările Fourier" ale funcţiilor din* $\mathcal{L}^\infty(\mathbf{G})$. Pentru aceasta ar fi însă necesar să dăm un sens „integralei" $\int \varphi(x)\,(-x, \gamma)\,\mathrm{d}x$. Şi, într-adevăr, acest lucru a fost făcut posibil prin folosirea unei *metode de sumabilitate* convenabile. Beurling [6] a folosit metoda lui Abel de sumabilitate şi teoria funcţiilor complexe; Pollard [82] a arătat avantajele metodei lui Riemann de sumabilitate, iar Herz [39] a studiat aplicaţiile altor metode de sumabilitate. Toate lucrările la care ne referim mai sus se ocupă de cazul particular $G = R$;

o generalizare la l.c.a.-grupuri a metodei lui Riemann se datorește lui Reiter [86]. O expunere sumară a unor rezultate în acest sens se află în articolul lui Herz [41] (pp. 187—189).

21.48. Unei funcţii $\varphi \in \mathcal{L}^\infty$ (G) i se mai asociază uneori şi alte „spectre" şi anume *spectrul punctual*, *spectrul Bohr*, *spectrul Wiener* etc. Definiţia lor este intim legată de existenţa şi unicitatea mediilor invariante (vezi [45], §§ 17, 18). Expunerea sumară a definiţiilor şi a unor rezultate în acest sens se poate urmări în Herz [41] (pp. 193—197), unde se dau şi alte referinţe; într-o lucrare mai recentă, Meyer [75] se ocupă de spectrul Wiener.

21.49. O importantă clasă de mulţimi este, după cum am văzut, clasa acelor mulţimi perfecte care nu suportă adevărate pseudomăsuri. Această clasă nu este vidă, după cum arată următoarea:

TEOREMĂ. (Kahane-Salem-Rudin). *Orice grup abelian compact și infinit* Γ *conține o mulțime perfectă* E *care nu suportă adevărate pseudomăsuri.*

Vom demonstra teorema *construind* o mulţime perfectă E cu următoarea proprietate:

„dacă $\varphi \in \mathcal{L}^\infty$ (G) şi $\sigma(\varphi) \subset \mathbf{E}$, atunci $\varphi \in \mathcal{B}$ (G)".

Demonstraţia conţine mai multe etape (conf. Rudin [95], 7.8).

(I) *Este suficient să demonstrăm teorema pentru un subgrup închis* $\Lambda \subset \Gamma$.

Într-adevăr, fie $\mathbf{E} \subset \Lambda$ o mulţime perfectă cu proprietatea că dacă $\varphi \in \mathcal{L}^\infty$ (G/H) şi $\sigma_\Lambda(\varphi) \subset \mathbf{E}$, atunci $\varphi \in \mathcal{B}$ (G/H), şi fie $\Phi \in \mathcal{L}^\infty$ (G) cu $\sigma_\Gamma(\Phi) \subset \mathbf{E}$. Din secţiunea **21.46.** rezultă atunci că există o funcţie $\varphi \in \mathcal{L}^\infty$ (G/H) aşa ca $\Phi(x) = \varphi(h(x))$ $(x \in \mathbf{G})$ şi $\sigma_\Lambda(\varphi) = \sigma_\Gamma(\Phi) \subset \mathbf{E}$; prin urmare $\varphi \in \mathcal{B}$ (G/H) şi conform **10.5** rezultă că $\Phi \in \mathcal{B}$ (G), q.e.d.

(II) Conform (I) şi conform **9.27** *este suficient să demonstrăm teorema în două cazuri particulare*:

(A) Γ este un I-grup metrizabil şi compact.

(B) $\Gamma = \mathbf{D}_q$ cu $q \geqslant 2$.

(III). *Construcţia în cazul* (A). În acest caz $\mathbf{G} = \Gamma^\wedge$ este numărabil (conf. **9.18**): $\mathbf{G} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Vom demonstra prin inducţie următoarea afirmaţie:

Pentru orice $r = 1, 2, \ldots$ *există*:

1°) *un număr natural* $N_r > r$;

2°) 2^{r-1} *vecinătăţi compacte și disjuncte* $\mathbf{E}_j^{(r-1)} \subset \Gamma$, $(j = 1, \ldots, 2^{r-1})$;

3°) *o mulţime Kronecker* $\mathbf{K}_r$ *conţinînd* 2^r *puncte* $\gamma_k^{(r)}$, $(k = 1, \ldots, 2^r)$, *care are cîte două puncte* $\gamma_{2j-1}^{(r)}$, $\gamma_{2j}^{(r)}$ *în interiorul fiecărei mulţimi* $\mathbf{E}_j^{(r-1)}$, $(j = 1, \ldots, 2^{r-1})$;

4°) $f_k^{(r)} \in \mathcal{L}^1$ (G) *și* $\mathbf{V}_k^{(r)}$ *vecinătate compactă a lui* $\gamma_k^{(r)}$, $(k = 1, \ldots, 2^r)$;

5°) $g_n^{(r)} \in \mathcal{L}^1$ (G) *și* $\mathbf{W}_{k,n}^{(r)}$ *vecinătate compactă a lui* $\gamma_k^{(r)}$, $(k = 1, \ldots, 2^r$; $n = 1, \ldots, N_r)$;

cu proprietăţile:

a) *pentru orice măsură* $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{K}_r)$:

$$(1) \quad \sup_{1 \leqslant n \leqslant N_r} |\mu^\wedge(x_n)| \geqslant \frac{1}{2} \|\mu\|;\ ^{5)}$$

---

[5] Aici $\mu^\wedge(x) = \int_\Gamma (x, \gamma)\, d\mu(\gamma)$, $x \in \mathbf{G}$

b) *pentru fiecare* $k = 1, \ldots, 2^r$:

(2) $\|f_k^{(r)}\|_1 < 2$;

(3) $(f_k^{(r)})^\wedge = 1$ pe $\mathbf{V}_k^{(r)}$;

(4) supp $(f_k^{(r)})^\wedge \subset \bigcup_j \mathbf{E}_j^{(r-1)}$ *și sînt disjuncte*;

c) *pentru fiecare* $n = 1, \ldots, N_r$:

(5) $(g_n^{(r)})^\wedge\ (\gamma) = (x_n, \gamma_k^{(r)})$ pe $\mathbf{W}_{k,n}^{(r)}$; $k = 1, \ldots, 2^r$

(6) $|g_n(-x_n) - 1| + \sum_{x \neq x_n} |g_n(-x)| < 3^{-r}$;

d) *pentru fiecare* $k = 1, \ldots, 2^r$

(7) $\mathbf{E}_k^{(r)} = \mathbf{V}_k^{(r)} \cap \bigcap_{n=1}^{N_r} \mathbf{W}_{k,r}^{(r)}$.

Într-adevăr, să presupunem afirmația demonstrată pentru pasul $r - 1$; singurul obiect al inducției îl constituie mulțimile $\mathbf{E}_j^{(r-1)}$ $(j = 1, \ldots, 2^{r-1})$, care acum se presupun construite. Mulțimea K_r se obține imediat pe baza lemei **17.10.** Cu un raționament analog celui cu care am demonstrat existența mulțimii *finite* $\mathbf{F}_r$ în secțiunea **17.11.** găsim pe $N_r > r$ cu proprietatea următoare :

Dacă $|\alpha(\gamma)| = 1$ pentru orice $\gamma \in \mathbf{K}_r$, atunci există un $n \in \{1, \ldots, N_r\}$ așa ca :

$$|\alpha(\gamma) - (x_n, \gamma)| < \frac{1}{3},\ \gamma \in \mathbf{K}_r\ ^{6)}.$$

Deci dacă $|\alpha(\gamma)| = 1$ pentru orice $\gamma \in \mathbf{K}_r$, atunci există $1 \leqslant n \leqslant N_r$ așa ca :

$$(8)\ \inf_{\gamma \in K_r} \operatorname{Re}\ [\alpha(\gamma) - (x_n, \gamma)] \geqslant \frac{1}{2}.$$

Fie acum $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{K}_r)$; conform teoremei Radon-Nikodym rezultă $d\mu = \alpha\, d|\mu|$ cu $|\alpha| = 1$; atunci pentru n ales în relația (8) rezultă :

$$|\mu^\wedge(x_n)| = \left| \int_{K_r} (x_n, \gamma)\, \alpha(\gamma)\, d\, |\mu(\gamma)| \right| \geqslant$$

$$\geqslant \int_{K_r} \operatorname{Re}\ [(x_n, \gamma)\, \alpha(\gamma)\, d\, |\mu(\gamma)|] \geqslant \frac{1}{2} \|\mu\|$$

ceea ce demonstrează relația (1).

Existența elementelor de la 4°) care satisfac relațiile (2), (3), (4) rezultă imediat din lema **8.2.**

Pentru a demonstra existența elementelor de la 5°) care verifică relațiile (4) și (6) este necesară o precizare : anume, demonstrația lemei **8.4** se poate modifica astfel încît să se aplice la un număr finit de puncte (mai precis, se modifică mai întîi lema **8.2** și apoi se aplică această formă modi-

---

6) Se ține seamă de faptul că $\mathbf{K}_r$ este mulțime Kronecker.

ficată la demonstrarea variantei lemei **8.4**; conf. Rudin [95], pp. 49–51 şi p. 56). Se obţine astfel următoarea:

LEMĂ. Fie $f \in \mathcal{L}^1$ (G), $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \Gamma$, U o vecinătate a mulţimii $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ şi $\varepsilon > 0$. Există $h \in \mathcal{L}^1$ (G) aşa ca:

(i) $\|h\|_1 < \varepsilon$.

(ii) $h^\wedge$ se anulează în afara lui U.

(iii) $f^\wedge(\gamma) - h^\wedge(\gamma) = f^\wedge(\gamma_i)$ într-o vecinătate a lui γ_i, $i = 1, \ldots, m$.

În cazul de faţă aplicînd această lemă funcţiei

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } x \neq (-x_n) \\ 1 \text{ dacă } x = (-x_n) \end{cases}$$

pentru $\mathbf{K}_r \subset \Gamma$ şi $\varepsilon = 3^{-r}$ se obţine o funcţie $h_n^{(r)} \in \mathcal{L}^1$ (G) şi vecinătăţile $\mathbf{W}_{k,n}^{(r)}$ ale punctelor $\gamma_k^{(r)}$ respectiv. Funcţia $g_n^{(r)}$ căutată va fi cea definită prin egalitatea:

$$g_n^{(r)} = f_n - h_n^{(r)};$$

relaţia (5) va rezulta din (iii) (lemă) iar relaţia (6) din (i) (lemă).

În sfîrşit, mulţimile $\mathbf{E}_k^{(r)}$ se definesc prin egalitatea (7) şi sînt evident vecinătăţi compacte şi disjuncte. Inducţia este completă.

Vom defini:

$$(9)\ \mathbf{E}^{(r)} = \bigcup_{k=1}^{2^r} \mathbf{E}_k^{(r)},\ r = 1, 2, \ldots$$

(Este evident că mulţimea $\mathbf{E}^{(r)}$ se află în interiorul lui $\mathbf{E}^{(r-1)}$ ($r = 1, 2, \ldots$).

Mulţimea căutată va fi:

$$(10)\ \mathbf{E} = \bigcup_{r=1}^{\infty} \mathbf{E}^{(r)}.$$

(IV) *Verificare în cazul* (A). Fie $\varphi \in \mathcal{L}^\infty$ (G), $\|\varphi\|_\infty = 1$ şi $\sigma(\varphi) \subset \mathbf{E}$; vom folosi notaţiile de la (III) cu r fixat şi nu vom mai pune indicele r la $f_k^{(r)}$, $g_n^{(r)}$ şi $\gamma_k^{(r)}$. Fie apoi:

(11) $p_k = (f_k * \varphi)(0);\ 1 \leqslant k \leqslant 2^r$

şi fie μ_r măsura concentrată pe $\mathcal{K}_r$ definită prin:

(12) $\mu_r(\{\gamma_k\}) = p_k;\ 1 \leqslant k \leqslant 2^r$.

Atunci:

$$(13)\ \|\mu_r\| = \sum_k |p_k| = \sum_k |(f_k * \varphi)(0)| = \sum_k \left| \sum_n f(x_n)\, \varphi(-x_n) \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^r \sum_n |f(x_n)|\, |\varphi(-x_n)| \leqslant 2^r \|\varphi\|_\infty \sum_n |f(x_n)| = 2^r \|f\|_1 \|\varphi\|_\infty \leqslant 2^{r+1}$$

(conf. (2)).

şi:

$$(14)\qquad p_k = \int f_k^\wedge \, d\mu_r = (f_k * \mu_r^\wedge)(0),\ k = 1, \ldots, 2^r \text{ (conf. (3))}$$

deci, notînd $\psi_r = \varphi - \mu_r^\wedge$, avem, conform (11):

$$(15)\qquad f_k^\wedge * \psi_r = 0,\ \ k = 1, \ldots, 2^r.$$

Dar deoarece funcţiile $f_k^\wedge$ şi $g_n^\wedge$ sînt — conform (3), (5), (7) — constante pe $\mathbf{E}_k^{(r)}$, rezultă că $g_n^\wedge$ este — pe $\mathbf{E}^{(r)}$ — o combinaţie liniară de $f_k^\wedge$; cum $\mathbf{E} \supset \sigma(\varphi)$ şi $\mathbf{K}_r = \sigma(\mu_r^\wedge)$ se află în interiorul lui $\mathbf{E}^{(r)}$, din (15) rezultă :

$$(16) \qquad g_n^\wedge * \psi_r = 0, \; n = 1, \ldots, N_r$$

adică

$$(17) \qquad -\psi_r(x_n) = [g_n(-x_n) - 1]\, \psi_r(x_n) + \sum_{x \neq x_n} g_n(-x)\, \psi_r(x).$$

Prin urmare, conform (5), (13) şi (17), rezultă :

$$(18) \qquad |\psi_r(x_n)| \leqslant 3^{-r} \|\psi_r\|_\infty \leqslant 3^{-r}(1 + 2^{r+1}), \; n = 1, \ldots, N_r.$$

Din (18) rezultă atunci că $\lim\limits_{r\to\infty} \psi_r(x) = 0$ $(x \in \mathbf{G})$ adică :

$$(19) \qquad \lim_{r\to\infty} \mu_r^\wedge(x) = \varphi(x).$$

Pe de altă parte, deoarece $|\mu_r^\wedge| \leqslant 1 + |\psi_r|$, din (18) şi (1) rezultă :

$$(20) \qquad \|\mu_r\| \leqslant 2 \sup_{1\leqslant n\leqslant N_r} |\mu_r^\wedge(x_n)| \leqslant 2 \sup_{1\leqslant n\leqslant N_r} (1 + |\psi_r(x_n)|) \leqslant$$
$$\leqslant 2(1 + 3^{-r}(1 + 2^{r+1})), \; r = 1, 2, \ldots$$

Deci $\|\mu_r\|$ sînt mărginite. Conform teoremei lui Eberlein (**7.7**), din (19) rezultă atunci că $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbf{G})$, q.e.d.

(V) *Construcţia şi verificarea în cazul* (B) sînt absolut analoage; schimbările necesare se pot observa de exemplu în secţiunea **17.11**.

Notă. În cazul $\Gamma = \mathbf{T}$ teorema a fost demonstrată de Kahane şi Salem [53]; Herz [41], p. 228 o demonstrează pentru Γ σ-compact şi de rang finit; generalizarea la grupuri abeliene compacte este prezentată în Rudin [95], pp. 188—191.

21.50. Prima legătură netrivială între problema unicităţii şi problema sintezei spectrale a fost stabilită de Malliavin [68]; în această lucrare Malliavin a definit mulţimile de rezoluţie spectrală şi a arătat — în cazul $\Gamma = \mathbf{T}$ — că orice astfel de mulţime este o mulţime de unicitate. Ulterior Filippi [27], [28] a extins acest rezultat la cazul general al l.c.a.-grupurilor. Are loc astfel următoarea

(1) TEOREMĂ. *Într-un l.c.a.-grup* Γ *orice mulţime de rezoluţie spectrală este o mulţime de unicitate.*

În [28] Filippi demonstrează următoarea formă echivalentă a teoremei (1).

(1′) TEOREMĂ. *Fie* $\mathbf{G}$ *un l.c.a.-grup iar* $\mathcal{V}$ *un subspaţiu închis şi invariant la translaţii din* $\mathcal{L}^\infty(\mathbf{G})$ *aşa ca* $\mathcal{V} \cap \mathcal{L}_0^\infty(\mathbf{G}) \neq 0$. *Atunci* $\mathcal{V}$ *nu este o varietate de rezoluţie spectrală.*

Demonstraţia are un pronunţat caracter tehnic şi o omitem.

Pe de altă parte, Kahane şi Katznelson [51] şi Filippi [28] arată că nu orice mulţime de unicitate este o mulţime de rezoluţie spectrală, demonstrînd că :

(2) TEOREMĂ. ***Mulţimea triadică a lui Cantor construită pe*** $[0, 2\pi]$ ***este o mulţime de nonrezoluţie spectrală.***

După cum se ştie (**20.9.** şi **21.16.**), mulţimea triadică a lui Cantor este o mulţime de unicitate şi de sinteză spectrală.

21.51. Topologia lui Beurling pe $\mathcal{C}$ (G) („narrow topology") [7]. În [5], Beurling a introdus o nouă topologie pe $\mathcal{C}$ (**R**) pe care o vom descrie în cazul unui l.c.a.-grup **G**.

DEFINIŢIE. Fie $\{\varphi_n\}_{n=0,1,2,\dots} \subset \mathcal{C}(\mathbf{G})$. Vom spune că $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 1}$ converge către φ_0 *în sensul lui Beurling* dacă :

(i) $\|\varphi_n\|_\infty \to \|\varphi_0\|_\infty$ şi

(ii) $\varphi_n \to \varphi_0$, uniform pe orice compact $\mathbf{K} \subset \mathbf{G}$.

Rezultatul obţinut de Beurling şi despre care am amintit la **21.43** (3) se anunţă astfel :

(1) TEOREMĂ. *Fie φ o funcţie complexă mărginită şi uniform continuă pe* **G**. *Atunci există un caracter $\gamma \in \Gamma \subset \mathcal{C}$ (G) şi un şir $\{\varphi_n\}_{n=1,2,\dots}$ de combinaţii liniare de translatate ale lui φ astfel ca φ_n să conveargă în sensul lui Beurling către γ.*

Demonstraţia iniţială a lui Beurling se bazează pe teoria funcţiilor analitice. Însă, după cum au arătat Domar [19] şi Koosis [61], demonstraţia nu depinde de teoria funcţiilor analitice şi se poate face numai cu mijloacele analizei armonice. Pentru $\varphi \in \mathcal{C}$ (G) să notăm prin $\sigma''(\varphi)$ şi să numim *spectrul Beurling* al lui φ mulţimea caracterelor ce pot fi aproximate în topologia Beurling prin combinaţii liniare de translatate ale lui φ. Teorema (1) rezultă atunci din următoarea :

(2) TEOREMĂ. *Dacă $0 \neq \varphi \in \mathcal{C}$ (G) este uniform continuă, atunci*

$$\sigma''(\varphi) = \sigma(\varphi)$$

şi din **21.43** (3). Pentru demonstraţia teoremei (2) trimitem la Koosis [61] sau Domar [19]. În plus are loc şi următoarea întărire a lemei **21.43** (2) :

(3) TEOREMĂ. *Fie $\mathcal{V} \subset \mathcal{C}$ (G) un subspaţiu uniform închis şi invariant la translaţii iar* **D** *o mulţime deschisă care conţine $\sigma(\mathcal{V})$. Dacă $\mathcal{V}''_{\mathbf{D}}$ este subspaţiul închis în topologia Beurling generat de caracterele din* **D**, *atunci $\mathcal{V}''_{\mathbf{D}} \supset \mathcal{V}$* (conf. Herz [41], 1.3′, p. 187).

Pentru generalizări la algebre Banach comutative (în loc de $\mathcal{L}^1$ (**G**)) ale noţiunilor şi rezultatelor de mai sus trimitem la lucrările lui Domar [18], [22].

Observaţie. Uniform continuitatea lui φ intervine în mod esenţial în demonstraţia teoremelor (1) şi (2). Ceea ce se obţine în plus faţă de lema 21.43 (3) este mărginirea şirului de norme $\|\varphi_n\|$. Ar fi folositor să se obţină un rezultat analog pentru orice funcţie $\varphi \in \mathcal{L}^\infty$ (**G**), de exemplu(conf. Koosis [61], p. 123) :

„*Dacă $\varphi \in \mathcal{L}^\infty$ (G) şi $\gamma \in \sigma(\varphi)$, atunci există un şir de combinaţii liniare de translatate ale lui φ care converge* (în $\mathcal{L}^\infty$) *către γ şi este mărginit în normă*".

---

[7] **topologia strîmtă.**

Koosis arată (*loc. cit.*) că teorema lui Beurling ((1) sau (2)) nu se poate asimila cu lema **21.43** (3), dar că *enunţul de mai sus este fals*, deşi a fost afirmat în lucrarea lui Godement [34]. Un contraexemplu mai simplu decît cel al lui Koosis a fost construit de Kahane [50].

21.52. Topologia strictă pe $\mathcal{C}$ (G) (Buck). Această topologie introdusă de Beurling într-o lucrare nepublicată (conf. [41], p. 182) a fost considerată mai îndeaproape de Buck [11] (vezi şi [12], [13]). Ea se descrie astfel : să considerăm pe $\mathcal{C}$ (G) ca spaţiu de operatori pe $\mathcal{C}_0$ (G) acţionînd prin înmulţirea punctuală ; atunci *topologia strictă* pe $\mathcal{C}$ (G) este topologia operatorială tare. Vecinătăţile originii din $\mathcal{C}$ (G) se descriu astfel : se consideră un şir $\{K_n, p_n\}$ de perechi formate din mulţimi compacte $K_n \subset G$ şi numere pozitive p_n aşa ca $p_n \nearrow \infty$ şi $K_n \subset K_{n+1}$; o vecinătate a originii în $\mathcal{C}$ (G) este atunci mulţimea tuturor funcţiilor $\varphi \in \mathcal{C}$ (G) cu proprietatea că $|\varphi(x)| < p_n$ pentru $x \in K_n$.

Proprietăţile elementare ale topologiei stricte sînt descrise în următoarea :

(1) PROPOZIŢIE. (i) *$\mathcal{C}$ (G) cu topologia strictă este un spaţiu local convex separat şi complet, al cărui dual se identifică cu $\mathcal{M}$ (G).*

(ii) *Pe părţile lui $\mathcal{C}$ (G) mărginite în normă, topologia strictă coincide cu topologia convergenţei compacte.*

(iii) *O parte convexă, strict închisă şi invariantă la translaţii a lui $\mathcal{C}$(G) este închisă în topologia indusă pe $\mathcal{C}$ (G) de $\mathcal{L}^\infty$ (G).*

(iv) *Topologia strictă induce pe $\Gamma \subset \mathcal{C}$(G) topologia canonică* (**2.4**,**2.6**).

Pentru demonstraţii trimitem la Buck [13] şi Herz [41], p. 185. Importanţa topologiei stricte şi motivul pentru care am înserat-o în această expunere constau în faptul că *problema sintezei spectrale se poate formula în termenii acestei topologii într-un mod asemănător cu formularea ei în termenii topologiei slabe a lui $\mathcal{L}^\infty$ (G) $= \mathcal{PM}$ (Γ)*, iar unele lucrări de analiză armonică ([11], [12], [13], [32], [33], [34], [88], [41], [63], [107], [86], [105]) sînt prezentate în acest limbaj. În secţiunile următoare vom preciza un „*dicţionar*" între aceste două moduri de a pune problema sintezei spectrale şi vom indica o aplicaţie a metodei bazate pe folosirea topologiei stricte.

21.53. Notaţii :

(1) $\mathcal{V}'(\varphi) =$ subspaţiul strict închis şi invariant la translaţie generat de φ în $\mathcal{C}$ (G), $\varphi \in \mathcal{C}$ (G).

$$(2) \qquad \sigma'(\varphi) = \{\gamma \in \Gamma\,;\ \gamma \in \mathcal{V}'(\varphi)\},\quad \varphi \in \mathcal{C}(G).$$

(3) $\mathcal{F}$ (E) $=$ subspaţiul liniar strict închis generat în $\mathcal{C}$ (G) de $\{\varphi \in \mathcal{C}(G)\,;\ \sigma'(\varphi) \subset E\}$, $E \subset \Gamma$.

(4) $\mathcal{F}_0$ (E) $=$ subspaţiul liniar strict închis generat $\mathcal{C}$ (G) de caracterele din E privite ca funcţii din $\mathcal{C}$ (G), $E \subset \Gamma$.

21.54. Se verifică uşor (vezi [63], p. 221, [41], p. 208—209) că

(1) TEOREMĂ. $\sigma'(\varphi) = \sigma(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{C}$ (G).

(2) TEOREMĂ. *Au loc următoarele izomorfisme canonice de spaţii Banach* :

(i) $\mathcal{F}(E) \equiv \mathcal{PM}(E) \equiv [\mathcal{A}_0(E)]^*$

(ii) $\mathcal{F}_0(E) \equiv \mathcal{PM}_0(E) \equiv [\mathcal{A}(E)]^*$

unde $\mathbf{E} \subset \Gamma$ *este închisă iar* $\mathcal{F}(\mathbf{E})$ *şi* $\mathcal{F}_0(\mathbf{E})$ *se consideră cu norma uniformă.*

NOTĂ. În [63] şi [41], $\mathcal{A}, \mathcal{A}_0, \mathcal{F}, \mathcal{F}_0$ sînt notate A, B, B', A' şi respectiv $V, \cdot, E', E$.

COROLAR. $\mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} \subset \Gamma$ *este o mulţime de sinteză spectrală* $\Leftrightarrow \mathcal{F}(\mathbf{E}) = \mathcal{F}_0(\mathbf{E})$.

21.55. DEFINIŢII. (1) Fie Γ_1 şi Γ_2 două l.c.a.-grupuri iar $h : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ o *reprezentare*, adică un homomorfism algebric continuu. Vom spune că h este o *reprezentare exactă* dacă este injectivă. Vom spune că h este un *homomorfism topologic* dacă $h(\Gamma_1)$ este închis în Γ_2 şi $h(\mathbf{U})$ este relativ deschisă în $h(\Gamma_1)$ pentru fiecare mulţime deschisă $\mathbf{U} \subset \Gamma_1$.

Vom spune că h este un *monomorfism topologic* dacă este homomorfism topologic şi injectiv. Vom spune că h este *epimorfism topologic* dacă h este homomorfism topologic şi surjectiv.

(2) Fie $h : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ o reprezentare, $\mathbf{E}_1 \subset \Gamma_1$ compact, iar $\mathbf{E}_2 = h(\mathbf{E}_1) \subset \Gamma_2$. Se definesc aplicaţiile :

$$\mathcal{A}(\mathbf{E}_1) \xleftarrow{\alpha} \mathcal{A}(\mathbf{E}_2)$$

$$\mathcal{F}_0(\mathbf{E}_1) \xrightarrow{\alpha^*} \mathcal{F}_0(\mathbf{E}_2)$$

$$\mathcal{A}_0(\mathbf{E}_1) \xleftarrow{\beta} \mathcal{A}_0(\mathbf{E}_2)$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{E}_1) \xrightarrow{\beta^*} \mathcal{F}(\mathbf{E}_2)$$

în felul următor : reprezentarea duală (**9.6**) $h^\wedge : \mathbf{G}_2 \to \mathbf{G}_1$ induce în mod natural aplicaţiile $h_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}(\mathbf{G}_2) \to \mathcal{M}(\mathbf{G}_1)$ şi $h_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}(\mathbf{G}_1) \to \mathcal{C}(\mathbf{G}_2)$; atunci α şi β se obţin prin factorizarea transformatei Fourier $h_{\hat{\mathcal{M}}} : \mathcal{B}(\Gamma_2) \to \mathcal{B}(\Gamma_1)$ iar α^* şi β^* prin restricţionarea lui $h_{\mathcal{C}}$. Pentru verificările necesare trimitem la [63], p. 222 şi [41], p. 216. *Aplicaţiile astfel definite sînt contracţii liniare iar* α^* *şi* β^* *sînt transpusele aplicaţiilor* α *şi* β *respectiv.*

21.56. (1) TEOREMĂ. (de Leeuw-Herz). *Fie* $h : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ *o reprezentare,* $\mathbf{E}_1 \subset \Gamma_1$ *o parte compactă şi* $\mathbf{E}_2 = h(\mathbf{E}_1)$. *Dacă h este injectivă într-o vecinătate a lui* $\mathbf{E}_1$, *atunci* $\alpha, \alpha^*, \beta, \beta^*$ *sînt izomorfisme de spaţii Banach.*

(2) TEOREMĂ. *Fie* $h : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ *o reprezentare,* $\mathbf{E}_1 \subset \Gamma_1$ *parte compactă şi* $\mathbf{E}_2 = h(\mathbf{E}_1)$. *Dacă h este injectivă într-o vecinătate a lui* $\mathbf{E}_1$, *atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

(i) $\mathbf{E}_1$ *este mulţime de sinteză spectrală în* Γ_1

(ii) $\mathbf{E}_2$ *este mulţime de sinteză spectrală în* Γ_2.

Evident, (1) $\Rightarrow$ (2). Cele două teoreme au fost stabilite de Karel de Leeuw şi Carl. S. Herz [63]. Cazuri particulare au fost obţinute însă înaintea lucrării lor. De exemplu I. Glicksberg a obţinut implicaţia (ii) $\Rightarrow$ (i) din teorema (2) pentru cazul reprezentărilor exacte (conf. [63], p. 225), iar Reiter [88] a demonstrat teorema (2) pentru cazul homomorfismelor topologice. Teorema (1) a fost demonstrată de Reiter [88] pentru cazul monomorfismelor topologice şi de Herz [41] (Th. 5.9) în cazul epimorfismelor topologice. Am amintit aceste fapte deoarece demonstraţia teoremei (1) dată în [63] porneşte tocmai de la aceste cazuri particulare iar rezultatul general se obţine cu ajutorul compactificării Bohr şi al teoremelor de structură.

O altă consecinţă a teoremei (1) este următoarea :

(3) TEOREMĂ. *Fie* G *un l.c.a.-grup iar* G_d *acelaşi grup cu topologia discretă. Dacă* φ *este o funcţie mărginită pe* G_d *al cărui spectru conţine numai caractere continue, atunci* φ *este continuă.* ([63], Th. 5).

21.57. NOTĂ. Informaţii bibliografice au fost date pe parcursul expunerii. Cum însă aceasta nu epuizează toate problemele legate de sinteza spectrală, am considerat necesar ca în lista bibliografică să fie inserate şi lucrări al căror conţinut nu a fost expus.

Primită la redacţie la 3 iunie 1967

Institutul de matematică al Academiei Republicii
Socialiste România, Str. M. Eminescu
nr. 47, Bucureşti.

ÉLÉMENTS D'ANALYSE HARMONIQUE

(RÉSUMÉ)

Cet article représente la suite de trois articles précédemment parus. Tous les quatre contiennent les exposés faits par l'auteur dans le cadre du séminaire d'analyse harmonique dirigé par le professeur N. Dinculeanu, à l'Institut de Mathématiques de Bucarest, entre 1965 et 1967. Nous avons suivi dans ces exposés — parfois de très près — les excellents livres de Rudin [95], Kahane et Salem [54] et Hewitt and Ross [45], ainsi qu'un nombre d'articles parus plus récemment dans plusieurs revues.

Là où il a fallu détailler ou même changer les démonstrations, cela a été fait uniquement dans l'intérêt de l'auteur ou de l'auditeur, sans aucune prétention d'améliorer la théorie.

Le premier chapitre — *Les théorèmes fondamentaux de l'analyse harmonique* — contient les définitions et les résultats principaux, la construction de l'objet de la théorie étant pratiquement terminée au **§ 5**. Dans le **§ 1** on définit la mesure de Haar sur un groupe abélien localement compact G, les algèbres de convolution $\mathcal{L}^1(G)$ et $\mathcal{M}(G)$. Au **§ 2** on définit le dual $\Gamma = G^\wedge$ de G et la transformation de Fourier qui sont identifiées avec le spectre de $\mathcal{L}^1(G)$ et respectivement avec la représentation de Guelfand de $\mathcal{L}^1(G)$; en ce qui concerne les mesures on définit la transformation de Fourier-Stieltjes. On note par $f^\wedge$ la transformée de Fourier de $f \in \mathcal{L}^1(G)$ et par $\mu^\wedge$ la transformée de Fourier-Stieltjes de $\mu \in \mathcal{M}(G)$ et on pose $\mathcal{A}(\Gamma) = \{f^\wedge\,;\, f \in \mathcal{L}^1(G)\}$, $\mathcal{B}(\Gamma) = \{\mu^\wedge\,;\, \mu\mathcal{M}(G)\}$. Au **§ 3** on définit les fonctions définies — positives en les caractérisant par le théorème de Bochner, et on énonce le théorème d'inversion, ainsi que ses conséquences. Au **§ 4** on énonce le théorème de Plancherel et on note en tant que conséquence que $\mathcal{A}(\Gamma) = \mathcal{L}^2(\Gamma) * \mathcal{L}^2(\Gamma)$. Le **§ 5** achève la base de la théorie avec le théorème de dualité de Pontrjaguine. On obtient donc les théorèmes d'unicité, la caractérisation des mesures où *supp* $\mu^\wedge$ est compact (resp. $\mu^\wedge \in \mathcal{C}_0(\Gamma)$), etc. Dans le **§ 6** on considère l'inverse de la transformation de Fourier et au **§ 7** on s'occupe de la compactification de Bohr et du théorème d'Eberlein sur la caractérisation des fonctions de $\mathcal{B}(\Gamma)$; on caractérise les fonctions presque périodiques sur un groupe avec les théorèmes de Bohr de d'Anzai et Kakutani. Dans le **§ 8** on montre que $\mathcal{L}^\wedge(G)$ est une algèbre régulière et on énonce le théorème taubérien de N. Wiener ainsi que des résultats complémentaires. Dans le **§ 9** on obtient, à l'aide de la notion d'*annulateur*, le dual d'un sous-groupe fermé, d'un quotient, d'un produit direct, d'une somme directe ; on définit le morphisme dual d'un morphisme donné ; on étudie les propriétés topologiques de G à l'aide de celles algébriques de Γ et on s'occupe des I-groupes. Ensuite, dans le **§ 10** on considère la transformation de Fourier sur les sous-groupes, sur les quotients, etc. Le premier chapitre se termine — **§ 11** — par des théorèmes concernant la structure des groupes abéliens localement compacts.

Notons que les paragraphes **1—10** ne contiennent que des esquisses de démonstration, **tandis** que le **§ 11** et le reste contiennent presque toutes les preuves.

Le chapitre II — *Mesures idempotentes et homomorphismes d'algèbres de groupe* — contient l'exposé de deux théorèmes de Cohen. Dans le § **12** on prouve — premier théorème de Cohen — qu'une mesure $\mu\in\mathcal{M}(G)$ est idempotente $(\mu*\mu = \mu)$ si et seulement si $\mu^\wedge$ est la fonction caractéristique d'un ensemble appartenant au clan engendré par les classes conjuguées des sous-groupes ouverts de Γ. On commence par réduire le problème au cas des groupes compacts — d'après Rudin — et ensuite on achève la preuve par la méthode très simple de Itô et Amemyia.

Dans le § **13** on caractérise les homomorphismes $\psi : \mathcal{L}^1(G) \to \mathcal{M}(G)$ par le second théorème de Cohen. Dans la démonstration on a suivi l'ouvrage de Cohen et non pas celui de Rudin [95] car nous n'avons pas réussi à nous expliquer la relation (2) de la section 4.5.2 de ce livre ; il nous semble que le fait essentiel qui manque à la démonstration de [95] c'est la mesurabilité des classes conjuguées qu'on emploie. Les compléments et les cas spéciaux considérés dans le § **14** sont ceux de Rudin [95], § 4.6—4.7.

Le troisième chapitre — *Analyse harmonique sur des ensembles fines* — est consacré aux problèmes concernant les ensembles ayant des propriétés particulières. Dans le § **15** on définit et on étudie les pseudo-mesures et les pseudo-fonctions dont on fera usage dans les §§ **20—21** ; le cadre de l'étude est celui des groupes et parfois celui des algèbres de Banach, mais la source se trouve dans le cas classique de la circonférence unité (**T**) ou de la droite réelle (**R**) que l'on considère donc surtout en suivant le livre de Kahane et Salem. Dans le § **16** on s'occupe des ensembles parfaits linéaires et on donne une caractérisation de l'ensemble triadique de Cantor.

Dans le § **17** on définit les ensembles indépendants (parmi lesquels les ensembles de Kronecker ou du type K_q) et — suivant Rudin [95] — on montre l'existence d'un ensemble de Kronecker (resp. du type K_q) qui est également un ensemble de Cantor, dans tout groupe abélien localement compact.

On montre les propriétés des mesures portées par les ensembles de Kronecker (ou du type K_q) et on démontre le théorème de Hewitt et Kakutani sur le prolongement de certaines fonctionnelles linéaires sur des espaces de mesures jusqu'à des homomorphismes de $\mathcal{M}(G)$. Le § **18** traite de l'asymétrie de certaines algèbres de mesures et du phénomène de Wiener-Pitt ; l'exposé suit les résultats de Williamson et Varopoulos. Au § **19** on considère les ensembles de Helson ; on prouve d'abord les principales propriétés de ces ensembles et on montre — théorème de Wik — qu'ils sont les mêmes que les ensembles de Carleson dans le cas $G = \mathbf{T}$. Dans le même cas on donne une caractérisation arithmétique des ensembles de Helson par un théorème de Kahane et Salem. Enfin on prouve — théorème de Helson, généralisé par Rudin — que dans un groupe G un ensemble de Helson ne porte pas de mesures dont la transformée de Fourier-Stieltjes s'annulle à l'infini. Le § **20** traite du problème d'unicité pour les séries trigonométriques. Notre but ici est seulement d'informer le lecteur et de formuler ce problème à l'aide des pseudo-onctions (cf. Kahane et Salem [54] ch. V) de manière que l'on puisse étendre aussi le problème aux groupes. On énonce — sans preuves toutefois — deux théorèmes classiques de Salem et Zygmund et les généralisations aux groupes de deux théorèmes de Salem et resp. de Rudin, dues à Varopoulos.

Au § **21** on considère en détail le problème de la synthèse spectrale. On définit ce problème dans le cas des algèbres de Banach en le formulant de plusieurs manières. Et, revenant aux groupes, on expose le contre-exemple de Schwartz, les exemples de Herz ainsi que d'autres exemples (conf. Rudin). On s'occupe également des ensembles de Ditkin (considérés par Calderon et Rudin) et des ensembles de Ditkin forts (d'après les travaux de Wik, Rosenthal, Meyer). On démontre le théorème de Malliavin, suivant lequel tout groupe abélien localement compact et non compact contient un ensemble de non-synthèse spectrale, par la méthode des algèbres tensorielles de Varopoulos, tout en indiquant aussi d'autres méthodes de démonstration. D'après les travaux de Varopoulos on donne de nombreux exemples d'ensembles de résolution spectrale (entre autres les ensembles de Kronecker sur **T**), d'ensembles de non-résolution spectrale et d'ensembles de synthèse spectrale. Ensuite on passe au problème des sous-espaces faiblement fermés invariants aux translations de $\mathcal{L}^\infty(G)$, en définissant le spectre d'une fonction $\varphi\in\mathcal{L}^\infty(G)$ et en l'identifiant avec le support de la pseudo-mesure S_φ correspondante. Les mêmes considérations sont faites en $\mathcal{C}(G)$ avec la topologie étroite de Beurling (« narrow topology ») et avec la topologie stricte de Buck. On prouve le théorème de Kahane et Salem (généralisé par Rudin) de l'existence — dans tout groupe abélien compact d'un ensemble parfait ne portant pas de vraies pseudo-mesures, ensuite on écrit la relation établie par Malliavin et Filippi entre les ensembles de résolution spectrale et les ensembles d'unicité et enfin, on énonce deux théorèmes de Reiter, Herz et de Leeuw sur l'invariance de la synthèse spectrale par rapport à certains morphismes de groupe.

BIBLIOGRAFIE

1. Bari, N., *Sur l'unicité du développement trigonométrique.* C. R. Acad. Sci. Paris, **177**, 1195–1197;(1923). Fund. Math. **9**, 62–118 (1927).
2. Bari, N., *Sur le rôle des lois diophantiques dans le problème d'unicité du développement trigonométrique.* Mat. Sbornik, **2** (**44**), 699–722 (1937).
3. Бари, Н., *Проблема единственности изображения функции тригонометрических рядов.* Успехи Мат. наук **4**, *3* (*31*), 3–68 (1949); Дополнения ... **7**, *5* (*51*), 193–196 (1952).
4. Бари, Н., *Тригонометрические ряды.* Физматгиз, Москва, 1961.
5. Beurling A., *Un théorème sur les fonctions bornées et uniformément continues sur l'axe réel.* Acta Math., **77**, 127–136 (1945).
6. Beurling, A., *Sur les spectres des fonctions.* Colloques Int. de C.N.R.S., **XV**; *Analyse harmonique,* Nancy, 1947.
7. Beurling, A., *On the spectral synthesis of bounded functions.* Acta Math., **81**, 225–238 (1949).
8. Beurling, A., *On a closure problem.* Acta Math., **1**, 301–303 (1951).
9. Beurling, A., *Pseudomesures...* C. R. Acad. Sci. Paris, **258**, 406, 782, 1380, 1984, 2959 (1964).
10. Beurling, A., Malliavin, P., *On the closure of characters and the zeros of entire functions.* Acta Math., 79–93 (1967).

10′. Braconnier, J., *L'Analyse harmonique dans les groupes abéliens.* Enseignement Math., *2*, 12–41, 257–273 (1956).

11. Buck, R. C., *Generalized group algebras.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **36**, 747–749 (1950).
12. Buck, R. C., *Operator algebras and dual spaces.* Proc. Amer. Math. Soc., **3**, 681–687 (1952).
13. Buck, R. C., *Bounded continuous functions on a locally compact space.* Michigan Math. J., **5**, 95–104 (1958).
14. Calderon, A. P., *Ideals on Group Algebras. Symp. on Harmonic Analysis and Related Integral Transforms,* Cornell University (1956) (mimeografiat).
15. Carleson L., *Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle.* Acta Math., **87**, 325–345 (1952).
16. Cotlar, M., *On a theorem of Beurling and Kaplansky.* Pacific J. Math., **4**, 459–467 (1954).
17. Дыткин В., *Исследование строения идеалов в некоторых нормированных кольцах.* Ученые записки Моск. Гос. Унив., **30**, 83–130 (1939).
18. Domar, Y., *Harmonic analysis based on certain commutative Banach algebras.* Acta Math., **96**, 1–66 (1956).
19. Domar, Y., *On spectral analysis in the narrow topology.* Math. Scand., **4**, 328–332 (1956).
20. Domar, Y., *Closed primary ideals in a class of Banach algebras.* Math. Scand., **7**, **109**–125 (1959).
21. Domar, Y., *On the ideal structure of certain Banach algebras.* Math. Scand., **14**, *2*, 197–212 (1964).
22. Domar, Y., *Some results on narrow spectral synthesis.* Math. Scand., **20**, *1*, 5–18 (1967).
23. Edwards, R. E., *Supports and singular supports of pseudomeasures.* J. Austral. Math. Soc., **6**, 65–75 (1966).
24. Elliot R. J., *Some results in spectral synthesis.* Proc. Cambridge Phil. Soc., **61**, 395–424 (1965).
25. Elliot, R. J., *Two notes on spectral synthesis for discrete Abelian groups.* Proc. Cambridge Phil. Soc., **61**, 617–620 (1965).
26. Erdös, P., Amer. Journal of Math., **61**, 977–986 (1939).
27. Filippi, M., *Ensembles de non-synthèse spectrale. Thèse,* Paris, 1963.
28. Filippi, M., *Variété de non-synthèse spectrale sur un groupe abélien localement compact.* Israel Journal of Mathematics, **3**, *1*, 43–60 (1965).
29. Gelbaum, B. R., *Tensor products of Banach algebras.* Canad. J. Math., **11**, 297–310 (1959).
30. Гелфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г.Е., *Коммутативные нормированные кольца.* Москва, 1960.
31. Gilbert, J. E., *Spectral synthesis problems for invariant subspaces on groups* (I). Amer. J. Math., **88**, 626–635 (1966); (II) *Function Algebras.* Scott-Foresmann and Co., 257–264 (1966).

32. Glicksberg, I., *Uniform boundedness for groups*. Canad. J. Math., **14**, 269—276 (1962).
33. Glicksberg, I., *Bishop's generalized Stone-Weierstrass theorem for the strict topology*. Proc. Amer. Math. Soc., **14**, 329—333 (1963).
34. Godement, R., *Théorèmes Taubériens et théorie spectrale*. Ann. École Norm. Sup., **64**, 119—138 (1947).
35. Grothendieck, A., *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*. Memoirs of Amer. Math. Soc., **16** (1955).
36. Helson, H., *Spectral synthesis of bounded functions*. Ark. Mat., **1**, 497—502 (1951).
37. Helson, H., *On ideal structure of group algebras*. Ark. Mat., **2**, 83—86 (1952).
38. Herz, C. S., *Spectral synthesis for the Cantor set*. Proc. Nat. Acad. Sci. S.U.A., **42**, 42—43 (1956).
39. Herz, C. S., *A note on summability methods and spectral analysis*. Trans. Amer. Math. Soc., **86**, 506—510 (1957).
40. Herz, C. S., *Spectral synthesis for the circle*. Ann. Math., **68**, 709—712 (1958).
41. Herz, C. S., *The spectral theory of bounded functions*. Trans. Amer. Math. Soc., **94**, 181 — 232 (1960).
42. Herz, C. S., *Synthèse harmonique des distributions dans le plan*. C. R. Acad. Sci. Paris, **260**, 4887—4890 (1965).
43. Herz, C. S., *Remarques sur la note précédente de M. Varopoulos*. C. R. Acad. Sci. Paris, **260**, 6001—6004 (1965).
44. Herz, C. S., Math. Reviews, **31**., 2567 (1965).
44'. Hewitt, E., *The asymmetry of certain algebras of Fourier-Stieltjes transforms*. Michigan Math. J., **5**, 149—158 (1958).
45. Hewitt, E., Roos, K., *Abstract Harmonic Analysis*. Springer, Berlin, 1963.
46. Hoffman, K., *Fundamentals of Banach Algebras*. Curitiba, 1962.
46'. Kahane, J. P., *Sur quelques problèmes d'unicité*. Ann. Inst. Fourier, **5**, 39—130 (1954).
47. Kahane, J. P., *Sur un théorème de Paul Maliavin*. C. R. Acad. Sci. Paris., **248**, 2943—2944 (1959).
48. Kahane, J. P., *Sur la synthèse harmonique dans* l^{∞}. Acad. Brasil Ci., **32**, 179—189 (1960).
48'. Kahane. J. P., *Travaux de Beurling et Malliavin*. Séminaire Bourbaki, **14**, exposé 225 (1961—62).
49. Kahane, J. P., *Algèbres tensorielles et analyse harmonique*. Séminaire Bourbaki, **17**, *3*, exposé 291 (1964—1965).
50. Kahane, J. P., *On the construction of certain bounded continuous function*. Pacific Journal of Math., **16** (1966), *1*, 129—132.
51. Kahane, J. P., Katznelson, Y., *Contribution à deux problèmes, concernant les fonctions de la classe A*. Israel Journal of Math., **1**, 110—131 (1963).
52. Kahane, J. P., Mandelbroijt, B., *Ensembles de multiplicité aléatoires*. C. R. Acad. Sci. Paris, **261**, 3931—3933 (1965).
53. Kahane, J. P., Salem R., *Sur les ensembles linéaires ne portant pas de pseudomesures*. C. R. Acad. Sci. Paris, **243**, 1185—1187 (1956).
54. Kahane, J. P., Salem, R., *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*. Hermann, Paris, 1963.
55. Kahane, J. P., Salem, R., *Distributions modulo 1 and sets of uniqueness*. Bull. Amer. Math. Soc., **70**, 259—261 (1964).
56. Kaplansky, I., *Primary ideals in group algebras*. Proc. Nat. Acad. Sci. S.U.A., **35**, 133—136 (1949).
57. Katznelson, Y., *Sur un théorème de Kahane et Salem concernant les ensembles parfaits symétriques*. C. R. Acad. Sci. Paris, **254**, 2514—2514 (1962).
58. Katznelson, Y., *Sets of uniqueness for some classes of trigonometrical series*. Bull. Amer. Math. Soc., **70**, 722—723 (1964).
59. Katznelson, Y., *Introduction to Harmonic Analysis*. Stanford University Seminar Notes (1965).
60. Kinukawa, M., *On the spectral synthesis of bounded functions*. Proc. Amer. Math. Soc., **14**, 468—471 (1963).
61. Koosis, P., *On the spectral analysis of bounded functions*. Pacific Journal of Math., **16**, *1*, 121—128 (1966).
62. Korevaar, J., *Distribution proof of Wiener's Tauberian theorem*. Proc. Amer. Math. Soc., **16**, 353—357 (1965).
63. De Leeuw, K., Herz, C. S., *An invariance property of spectral synthesis*. Illinois J. of Math., **9**, 220—229 (1965).

64. Loomis, L. H., *An introduction to abstract harmonic analysis*. Van Nostrand, New York, 1953.

65. Malliavin, P., *Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale dans une algèbre de fonctions presque périodiques*. C. R. Acad. Sci. Paris, **248**, 1756—1759 (1959).

66. Malliavin, P., *Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale sur la droite*. C. R. Acad. Sci. Paris, **248**, 2155—2157 (1959).

67. Malliavin, P., *Impossibilité de la synthèse spectrale sur les groupes abéliens non compacts*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. Paris, 61—68 (1959).

68. Malliavin, P., *Ensembles d'unicité et synthèse spectrale*. Proc. Int. Math. Congress, Stockholm (1962); vezi şi Math. Reviews **31**, 3788 (1965).

69. Mallios, A., *On the Spectrum of a Topological Tensor Product of Locally Convex Algebras*. Math. Ann., **154**, 171—180 (1964).

70. Marcinkiewicz, J., Zygmund, A., *Two theorems on trigonometric series*. Math. Sbornik, **2** (**44**), 733—738 (1937).

71. McGehee, O. C., *Sets of uniqueness and sets of multiplicity*. Israel J. Math., **4**, 83—96 (1966).

72. Menşov, D. E., *Sur l'unicité du développement trigonométrique*. C. R. Acad. Sci. Paris, **163**, 433—436 (1916).

73. Meyer, Y., *Prolongement des multiplicateurs d'idéaux fermés de L^1 (R^n)*. C. R. Acad. Sci. Paris, **262**, 744—745 (1966).

74. Meyer, Y., *Idéaux fermés de L^1 dans lesquels une suite approche l'identité*. Math. Scand. **19**, *2*, 219—222 (1966).

75. Meyer, Y., *Le spectre de Wiener*. Stud. Math., **27**, 189—201 (1966).

76. Meyer, Y., *Isomorphismes entre certaines algèbres de restrictions*. C. R. Acad. Sci. Paris, **265**, 18—20 (1967).

77. Meyer, Y., *Endomorphismes des idéaux fermés de L^1 (G), classes de Hardy et séries de Fourier lacunaire*. Thèse Doct. Sci. math. Strasbourg (1967).

78. Meyer, Y., Rosenthal, H. P., *Convexité et ensembles de Ditkin forts*. C. R. Acad. Sci. Paris, **262**, 1404—1406 (1966).

79. Пятецкий-Шапиро И. И., *К проблеме единственности разложения функции в тригонометрический ряд*. Ученые записки Моск. Гос. Унив. выпуск 155, Математика, V, 54—72/1952/; *Дополнения*... Ученые записки Моск. Гос. Унив. выпуск 165, Математика. **VII**. 79—97 (1954).

80. Pisot, C., *La répartition modulo 1 et les nombres algébriques*. Annali di Pisa, **7**, 205—248 (1938).

81. Pisot, C., *Sur une famille remarquable d'entiers algébriques formant un ensemble fermé*. Colloque sur la théorie des nombres, Bruxelles, (1955).

82. Pollard, H., *The harmonic analysis of bounded functions*. Duke Math. Journal, **20**, 499—512 (1953).

83. Rajchman, A., *Sur l'unicité du développement trigonométrique*. Fund. Math., **3**, 287—301 (1922); Rectifications... **4**, 366—367 (1923).

84. Rajchman, A., *Sur la multiplication des séries trigonométriques et sur une classe d'ensembles fermés*. Math. Ann., **95**, 388—408 (1926).

85. Rajchman, A., *Sur une classe de séries trigonométriques qui convergent presque partout vers zéro*. Math. Ann., **101**, 686—700 (1929).

86. Reiter, H. J., *Investigations in harmonic analysis*. Trans. Amer. Math. Soc., **73**, 401—427 (1952).

87. Reiter, H. J., *On a certain class of ideals in the L^1-algebra of a locally compact Abelian group*. Trans. Amer. Math. Soc., **75**, 505—509, (1953).

88. Reiter, H. J., *Contributions to harmonic analysis*. (I). Acta Math., **96**, 253—263 (1956); (II) Math. Ann. **133**, 298—302 (1957); J. London Math. Soc. **32**, 477—483 (1957).

89. Richards, I., *On Malliavin's counter example to spectral synthesis*. Bull. Amer. Math. Soc., **72**, 698—700 (1966).

90. Richards, I., *On the disproof of spectral synthesis*. Journal of Combinatorial Theory, **2**, 61—70 (1967).

91. Rosenthal, H. P., *Projections onto translation-invariant subspaces of $L^p(G)$*. Memoirs of the Amer. Math. Soc., **63** (1966).

92. Rosenthal, H. P., *Sur les ensembles de Ditkin forts*. C. R. Acad. Sci. Paris, **262**, 873—876 (1966).

93. Rudin, W., *The closed ideals in an algebra of analytic functions.* Canadian Journal of Math., **9**, 426–434 (1957).

93′. Rudin, W., *Fourier-Stieltjes transforms of measures on independent sets.* Bull. Amer. Math. Soc., **66**, 199–200 (1960).

94. Rudin, W., *Closed ideals in group algebras.* Bull. Amer. Math. Soc., **66**, 81–83 (1960).

95. Rudin, W., *Fourier Analysis on Groups.* Interscience Publ., New York and London, (1962).

96. Rudin, W., *Harmonic analysis on spheres.* Not. Amer. Math. Soc., **12**, 312 (1965).

97. Salem, R., *On sets of multiplicity for trigonometrical series.* Amer. J. of Math., **64**, 531–538 (1942).

98. Salem, R., *On singular monotonic function of Cantor type.* Journal of Math. and Physics (Mass. Inst. of Technology) **21**, 69–82 (1942).

99. Salem, R., *Sets of uniqueness and sets of multiplicity.* (I) Trans. Amer. Math. Soc., **54**, 218–228 (1943); (II) Trans. Amer. Math. Soc., **56**, 32–49 (1944).

99′. Salem, R., *A remarkable class of algebraic integers. Proof of a conjecture of Vijayaraghavan*, Duke Math., J., **11**, 103–107 (1944).

100. Salem, R., Zygmund, A., *Sur un théorème de Piateţckii-Şapiro.* C. R. Acad. Sci. Paris, **240**, 2040–2042 (1955).

101. Salem, R., Zygmund, A., *Sur les ensembles parfaits dissymétriques à rapport constant.* C. R. Acad. Sci. Paris, **240**, 2281–2283 (1955).

102. Schwartz, L., *Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts.* C. R. Acad. Sci. Paris, **227**, 424–426 (1948).

102′. Schwartz, L., *Analyse et synthèse harmonique dans les espaces de distributions.* Canad. J. Math., **3**, 503–512 (1951).

103. Schwartz, L., *Séminaire sur les produits tensoriels topologiques.* Paris, 1956.

104. Segal, I. E., *The span of the translations of a function in a Lebesgue space.* Proc. Nat. Acad. Sci. S.U.A., **30**, 165–169 (1944).

105. Segal, I. E., *The group algebra of a locally compact group.* Trans. Amer. Math. Soc., **61**, 69–105 (1947).

106. Simon, A. B., *Symmetry in measure algebras.* Bull. Amer. Math. Soc., **66**, 399–400 (1960).

107. Todd, C., *Stone-Weierstrass theorems for the strict topology.* Proc. Amer. Math.Soc., **16**, 654 (1965).

108. Tomiyama, J., *Tensor products of commutative Banach algebras.* Tôhoku Math. J., **12**, 147–154 (1960).

109. Varopoulos, N. Th., *Sur les mesures de Radon d'un groupe localement compact abélien.* C. R. Acad. Sci. Paris, **258**, 3805–3808 (1964).

110. Varopoulos, N. Th., *Sur les mesures de Radon d'un groupe abélien localement compact.* C. R. Acad. Sci. Paris, **258**, 4896–4899 (1964).

111. Varopoulos, N. Th., *Sur les mesures de Radon d'un groupe localement compact abélien.* C. R. Acad. Sci. Paris, **260**, 1059–1062 (1965).

112. Varopoulos, N. Th., *Measure algebras of a locally compact Abelian group.* Séminaire Bourbaki, **17**, *1*, exposé 282 (1964–1965).

113. Varopoulos, N. Th., *Ensembles parfaits et séries trigonométriques.* C. R. Acad. Sci. Paris **260**, 3831–3834 (1965).

114. Varopoulos, N. Th., *Ensembles parfaits et séries trigonométriques.* C. R. Acad. Sci. Paris, **260**, 4668–4670 (1965).

115. Varopoulos, N. Th., *Ensembles parfaits et séries trigonométriques.* C. R. Acad. Sci. Paris, **260**, (1965).

116. Varopoulos, N. Th., *Ensembles parfaits et séries trigonométriques.* C. R. Acad.Sci. Paris, **260**, 5997–6000 (1965).

117. Varopoulos, N. Th., *Ensembles parfaits et séries trigonométriques.* C. R. Acad. Sci. Paris, **262**, 384–387 (1966).

118. Varopoulos N. Th., *A direct decomposition of the measure algebra of a locally compact Abelian group.* Ann. Inst. Fourier, **XVI**, *1*, 121–143 (1966).

119. Varopoulos, N. Th., *Sets of multiplicity in locally compact Abelian groups.* Ann. Inst. Fourier, **XVI** *2*, 123–159 (1966).

120. Varopoulos, N. Th., *Spectral Synthesis on Spheres*. Proc. Cambridge Phill. Soc., **62**, 378–389 (1966).

121. Varopoulos, N. Th., *Algèbres de Banach-Algèbres de Groupes*. Publ. Sém. Math., d'Orsay (1966).

122. Varopoulos, N. Th., *Algèbres tensorielles et analyse harmonique*. Bruges, 1966.

123. Vijayaraghavan, Proc. Cambridge Phil. Soc., **37**, 349–357 (1941).

124. Wik, I., *A strong form of spectral synthesis*. Ark. Mat., **6**, *1*, 55–64 (1965).

125. Zygmund, A., Math. Ann., **99**, 562–589 (1928).

126. Zygmund, A., *Trigonometric Series* I, II. Cambridge, University Press, 1959.

127. Varopoulos, N. Th., *Tensor algebras and harmonic analysis*. Acta Math., **119**, *1–2*, 51–112 (1967).

128. Guichardet, A., *Analyse harmonique commutative*. Dunod, Paris, 1968.

METODE TOPOLOGICE ÎN STUDIUL SCHEMELOR CU CONTACTE m-POZIŢIONALE

DE

PETRU ŞANDRU

(Baia-Mare)

Se aplică metode din [2] la simplificarea schemelor m-poziţionale [1], numind o schemă „simplă" o schemă cu un număr mai mic de contacte.

I

a) Fie f o aplicaţie a lui $L_3^n = \{0, 1, 2\}^n$ în $L_2 = \{0, 1\}$

$$f: L_3^n \to L_2.$$

Să considerăm acele elemente ale mulţimii L_3^n care prin f se transformă în 1, adică f^{-1} (1). Elementele mulţimii f^{-1} (1) sînt 0_{00}-cuburi şi formează spaţiul K_3^0 (f).

Trei 0_{00}-cuburi ce se obţin unul din celălalt schimbînd numai o coordonată definesc un 1_{10}-cub. De exemplu, 0_{00}-cuburile din spaţiul cu trei dimensiuni, 001, 011, 021, definesc un 1_{10}-cub în spaţiul cu trei dimensiuni pe care îl vom nota $0x1$. Variabila x care înlocuieşte coordonata ce se schimbă se numeşte componentă liberă, iar celelalte se numesc legate.

Sistemul tuturor 1_{10}-cuburilor ce se pot forma cu ajutorul cuburilor din spaţiul $K_3^0\,(f)$ defineşte spaţiul $K_3^{1,0}$ (f).

Două 0_{00}-cuburi ce se obţin unul din celălalt schimbînd numai o coordonată definesc un 1_{01}-cub. De exemplu 120 şi 100 definesc un 1_{01}-cub pe care îl vom nota $1\ x_{02}0$. Componenta x_{02} se numeşte semilegată şi ea nu poate lua numai valorile indicilor.

Sistemul tuturor 1_{01}-cuburilor ce se pot forma cu ajutorul cuburilor din spaţiul $K_3^0(f)$, care nu definesc un 1_{10}-cub, formează spaţiul $K_3^{0,1}$ (f).

Reuniunea mulţimilor $K_3^{1,0}$ (f) şi $K_3^{0,1}$ (f) formează spaţiul K_3^1 (f), adică

$$K_3^1\,(f) = K_3^{1,0}\,(f) \cup K_3^{0,1}\,(f).$$

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 6, 927–932, BUCUREŞTI, 1968

Trei 1_{10}-cuburi ce se obţin unul din celălalt schimbînd numai o coordonată legată definesc un 2_{20}-cub. De exemplu $1x20$, $1x21$, $1x22$ defineşc 2_{20}-cubul $1x2x$.

Sistemul tuturor 2_{20}-cuburilor ce se pot forma cu ajutorul cuburilor din spaţiul $K_3^{1,0}(f)$, formează spaţiul $K_3^{2,0}(f)$.

Două 1_{10}-cuburi ce se obţin unul din celălalt schimbînd numai o coordonată legată definesc un 2_{11}-cub. De exemplu, $0x21$ şi $0x22$ definesc 2_{11}-cubul $0x2x_{12}$.

Sistemul tuturor 2_{11}-cuburilor ce se pot forma cu ajutorul 1_{10}-cuburilor din spaţiul $K_3^{1,0}(f)$ ce nu definesc un 2_{20}-cub, formează spaţiul $K_3^{1,1}(f)$.

Două 1_{01}-cuburi ce se obţin unul din celălalt schimbînd numai o coordonată legată, definesc un 2_{02}-cub. De exemplu $0x_{02}21$ şi $0x_{02}20$ definesc 2_{02}-cubul $0x_{02}2x_{01}$.

Sistemul tuturor 2_{02}-cuburilor ce se pot forma cu ajutorul 1_{01}-cuburilor din spaţiul $K_3^{0,1}(f)$ formează spaţiul $K_3^{0,2}(f)$.

Vom nota

$$K_3^2(f) = K_3^{2,0}(f) \cup K_3^{1,1}(f) \cup K_3^{0,2}(f).$$

Observaţie. Trei 1_{01}-cuburi ce se obţin unul din celălalt schimbînd numai o coordonată legată definesc de asemenea un 2_{11}-cub. Deoarece însă spaţiul $K_3^{0,1}(f)$ conţine numai acele 1_{01}-cuburi, care sînt definite de 0_{00}-cuburile care nu definesc un 1_{10}-cub, rezultă că spaţiul $K_3^{0,1}(f)$ nu conţine trei 1_{01}-cuburi care se obţin unul din celălalt schimbînd numai o componentă legată.

Prin inducţie se defineşte spaţiul $K_3^r(f)$, ca fiind

$$K_3^r(f) = K_3^{r,0}(f) \cup K_3^{(r-1),1}(f) \cup \ldots \cup K_3^{(r-i),i}(f) \cup \ldots \cup K_3^{0,r}(f)$$

în care $K_3^{(r-i)i}(f)$ este spaţiul $r_{(r-i),i}$-cuburilor ($i = 0, 1, \ldots, r$).

În general trei $(r-1)_{(r-i-1),i}$-cuburi ce se obţin unul din celălalt schimbînd numai o coordonată legată definesc un $r_{(r-i),i}$-cub.

De exemplu 5_{32}-cuburile :

$$0\,x_{12}\,01\,xx\,2\,x_{01}\,x\,;\quad 0\,x_{12}\,11\,xx\,2\,x_{01}\,x\,;\quad 0\,x_{12}\,21\,xx\,2\,x_{01}\,x$$

definesc 6_{42}-cubul $0\,x_{12}\,x\,1\,xx\,2\,x_{01}\,x$.

Sistemul tuturor $r_{(r-i)i}$-cuburilor ce se pot forma cu ajutorul cuburilor din $K_3^{(r-i-1)i}(f)$ formează spaţiul $K_3^{(r-i),i}(f)$.

Două $(r-1)_{(r-i-1),i}$-cuburi ce se obţin unul din celălalt schimbînd numai o coordonată legată definesc un $r_{(r-i-1),(i+1)}$-cub.

Sistemul tuturor $r_{(r-i-1),(i+1)}$-cuburilor, ce se pot forma cu ajutorul cuburilor din $K_3^{(r-i-1),i}(f)$ care nu definesc un $r_{(r-i)i}$-cub, formează spaţiul $K_3^{(r-i-1),(i+1)}(f)$.

Operatori de frontieră. Fie $a = (a_1 a_2 \ldots a_n)$, unde $a_i = 0, 1, x_{\alpha\beta}$ sau x ($i = 1, \ldots, n$; $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2\}$ un $r_{(r-i)i}$-cub din spaţiul cu n dimensiuni.

Operatorii de frontieră se definesc în felul următor :

$$\delta_i^j(a) = \begin{cases} a_1 a_2 \ldots a_{i-1}\, j a_{i+1} \ldots a_n \text{ dacă } 1)\ a_i = x \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 2)\ a_i = x_{\alpha\beta} \text{ şi } \alpha = j \text{ sau } \beta = j \\ \varnothing \text{ dacă } a_i \neq x \text{ şi } a_i \neq x_{\alpha\beta} \\ \varnothing \text{ dacă } a_i \neq x \text{ şi } a_i = x_{\alpha\beta} \text{ dar } \alpha \neq j \text{ şi } \beta \neq j \end{cases}$$

$$(j = 0, 1, 2)$$

$\delta_i^0(a)$, $\delta_i^1(a)$ şi $\delta_i^2(a)$ sînt frontiere ale $r_{(r-i)i}$-cubului $a = (a_1 \ldots a_n)$ şi sînt elemente ale spaţiului $\mathcal{K}_3^{r-1}(f)$. Deci operatorii de frontieră definesc o transformare $\mathcal{K}_3^r(f) \to \mathcal{K}_3^{r-1}(f)$ unde $\mathcal{K}_3^i(f)$ este mulţimea tuturor cuburilor ce se pot forma cu ajutorul cuburilor din $K_3^{i-1}(f)$ $(i = 1, \ldots, r)$ (A se vedea observaţia de la exemplul de la sfîrşit.)

b) În general dacă considerăm o funcţie $f : L_{m+1}^n \to L_2$, unde $L_{m+1} = \{0, 1, \ldots, m\}$ şi $L_2 = \{0, 1\}$ elementele mulţimii $f^{-1}(1)$ sînt $0_{p_m . p_{m-1}, \ldots, p_2 p_1}$-cuburi $(p_1 = p_2 = \ldots = p_m = 0)$ şi formează spaţiul $K_{m+1}^0(f)$.

Un număr de $k + 1$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$

$$r_{p_m . p_{m-1}, \ldots, p_2 . p_1}\text{-cuburi } (p_1 + p_2 +, \ldots, + p_m = r)$$

ce se obţin unul din celălalt schimbînd numai o coordonată legată definesc un

$$(r + 1)_{p_m, \ldots, p_{k+1} . (p_k + 1) . p_{k-1}, \ldots, p_2 . p_1}\text{-cub}.$$

Vom nota prin x componentele libere şi prin $x_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_i}$ $(i = 2, \ldots, m)$ componentele semilegate.

De exemplu 4_{211}-cuburile

$$x\ 1\ 3\ x\ 1\ x_{03}\ x_{012}$$

$$x\ 2\ 3\ x\ 1\ x_{03}\ x_{012}$$

$$x\ 3\ 3\ x\ 1\ x_{03}\ x_{012}$$

definesc 5_{221}-cubul $x\ x_{123}\ 3\ x\ 1\ x_{03}\ x_{012}$.

La fel ca şi în I a) se definesc spaţiile $K_{m+1}^{p_m \ldots p_1}(f)$ şi spaţiul $K_{m+1}^r(f)$ pentru $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = r$.

Fie $a = (a_1\, a_2 \ldots a_n)$, unde

$a_i = 0, 1, \ldots, m, x_{\alpha_1^1 \alpha_2^1}, x_{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2}, \ldots, x_{\alpha_1^{m-2} \ldots \alpha_{m-1}^{m-2}}$ sau x un $r_{p_m \ldots p_1}$-cub, deci $(\alpha_i^j \in \{0, 1, \ldots, m\}$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, m-1)$ şi $\alpha_1^1 \neq \alpha_2^1, \ldots, \alpha_1^{m-2} \neq \ldots \neq \alpha_{m-1}^{m-2}$.

Operatorii de frontieră se definesc în felul următor :

$$\delta_i^j(a) = \begin{cases} a_1 a_2 \ldots a_{i-1}\, j\, a_{i+1} \ldots a_n & \text{dacă } 1)\ a_i = x \text{ sau} \\ & \quad\ \ 2)\ a_i = x_{\alpha_1 \ldots \alpha_i},\ \text{şi unul} \\ & \quad\ \ \text{din } \alpha_k = j\ (k = 2, \ldots, m) \\ \emptyset \text{ dacă } a_i \neq x \text{ şi } a_i \neq x_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} & \\ \emptyset \text{ dacă } a_i \neq x \text{ şi } a_i = x_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} \text{ dar } \alpha_1 \neq j, \ldots, \alpha_r \neq j & \end{cases}$$

$$(j = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

$\delta_i^j(a)$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$ sînt frontiere ale $r_{p_m \ldots p_1}$-cubului $a = (a_1 \ldots a_n)$. Operatorii de frontieră definesc o transformare $\mathcal{K}_{m+1}^r(f) \to \mathcal{K}_{m+1}^{r-1}(f)$, unde $\mathcal{K}_{m+1}^i(f)$ este mulţimea tuturor cuburilor ce se pot forma cu ajutorul cuburilor din $K_{m+1}^{i-1}(f)$.

DEFINIŢIE. Mulţimea cuburilor $K_m^0(f)$, $K_m^1(f), \ldots, K_m^r(f)$ şi operatorii pentru frontierele acestora, consideraţi mai sus, se numeşte complex cubic $K_m(f)$.

Fie C', C'', ..., $C^{(k)}$ cuburi ale complexului cubic $K_m(f)$, de dimensiuni diferite şi să notăm

$$G = \{C',\ C'',\ldots,\ C^{(k)}\}.$$

Vom spune că un sistem de cuburi G ale complexului cubic $K_m(f)$ generează spaţiul $K_m^0(f)$, dacă spaţiul $K_m^0(f)$ se obţine din sistemul G prin aplicarea repetată a operatorilor de frontieră.

Sistemul G care generează spaţiul $K_m^0(f)$ îl vom numi $K_m^0(f)$-sistem.

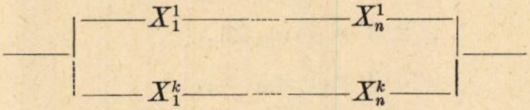
II

Fie $f: L_{m+1}^n \rightarrow L_2$ funcţia de lucru a unui dipol cu contacte $(m+1)$-poziţionale, pentru care avem

$$K_{m+1}^0(f) = \{a_1^1 \ldots a_n^1;\ \ldots;\ a_1^k \ldots a_n^k\}$$

unde $a_i^j \in \{0,\ 1,\ldots,\ m\}$ $(i=1,\ldots,\ n;\ j=1,\ldots,\ k)$ adică spaţiul $K_{m+1}^0(f)$ este format din k $\mathrm{o}_{p_m\ldots p_1}$-cuburi $(p_m = \ldots = p_1 = 0)$ din spaţiul cu n dimensiuni.

Să considerăm următoarea schemă

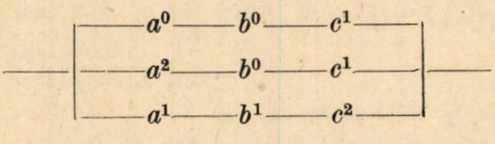
(1) 

unde

$$X_i^j = \begin{cases} c_i^0 \text{ dacă } a_i^j = 0 \\ c_i^1 \text{ dacă } a_i^j = 1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_i^m \text{ dacă } a_i^j = m \end{cases}$$

c_i^0, c_i^1, ..., c_i^m fiind contactele bipoziţionale ale contactului $(m+1)$-poziţional c_i. Dipolul astfel obţinut îl vom numi „dipol asociat spaţiului $K_{m+1}^0(f)$".

De exemplu dacă $K_3^0(f) = \{001,\ 201,\ 112\}$ obţinem dipolul



TEOREMA 1. *Dipolul asociat spaţiului $K_m^0(f)$ este funcţional echivalent cu dipolul care are funcţia de lucru f.*

Vom da demonstraţia pentru cazul în care $m = 3$ şi $n = 2$, generalizarea fiind imediată.

Într-adevăr, f fiind funcţia de lucru a unui dipol cu două contacte tripoziţionale, putem scrie

$$f(a, b) = a^0 b^0 f(0, 0) \cup a^0 b^1 f(0, 1) \cup a^0 b^2 f(0, 2) \cup$$
$$\cup\, a^1 b^0 f(1, 0) \cup a^1 b^1 f(1, 1) \cup a^1 b^2 f(1, 2) \cup$$
$$\cup\, a^2 b^0 f(2, 0) \cup a^2 b^1 f(2, 1) \cup a^2 b^2 f(2, 2),$$

unde dacă ţinem seama de valorile funcţiei f, obţinem formula de structură a dipolului asociat spaţiului $K_3^0(f)$.

Fie

$$K = \{a_1^1 \dots a_n^1; \dots, a_1^k \dots a_n^k\},$$

unde

$a_i^j \in \{0, 1, \dots, m, x_{\alpha_1^1 \alpha_2^1}, \dots, x_{\alpha_1^{m-1} \dots \alpha_{m-1}^{m-1}}, x\}$ $(i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, , \dots, k)$ un $K_{m+1}^0(f)$-sistem.

Să considerăm schema (1) în care:

$$X_i^j = c_i^s \text{ dacă } a_i^j = s \ (s = 0, 1, \dots, m)$$

$$X_i^j \text{ este } c_i^{\alpha_1} \cup c_i^{\alpha_2} \cup \dots \cup c_i^{\alpha_r} \text{ dacă } a_i^j = \varkappa_{\alpha_1 \dots \alpha_r}$$

$$(\alpha_1 \dots \alpha_r \in \{0, 1, \dots, m\}; r = 2, m \dots).$$

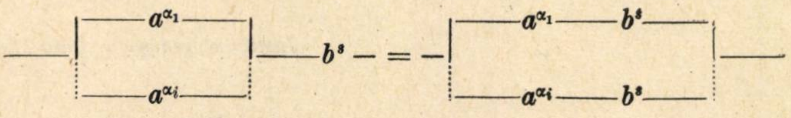
X_i^j este contact mereu închis dacă $a_i^j = x$, unde c_i^s sînt contactele bipoziţionale ale contactului $(m+1)$-poziţional c_i, iar prin „$\cup$" am notat legarea în paralel a respectivelor contacte bipoziţionale.

Dipolul astfel obţinut îl vom numi „dipol asociat $K_{m+1}^0(f)$-sistemului K".

Dacă ţinem seama că:

1) prin legarea în paralel a celor $m+1$ contacte bipoziţionale ale contactului $(m+1)$-poziţional, obţinem un dipol funcţional echivalent cu contactul mereu închis;

2) că dipolii



sînt funcţional echivalenţi;

3) că o schemă asociată unui $r_{p_m \dots p_1}$-cub este funcţional echivalentă cu schema asociată sistemului format din frontierele acestui cub (afirmaţie ce se demonstrează uşor prin identitatea de funcţionare a dipolilor) şi

4) că de la un K_{m+1}^0 (f)-sistem ajungem la spaţiul $K_{m+1}^0(f)$ prin aplicarea repetată a operatorilor de frontieră, rezultă următoarea

Teorema 2. *Unui K_m^0 (f)-sistem i se asociază o schemă funcţional echivalentă cu schema asociată spaţiului $K_m^0(f)$.*

Corolar. *Schemele asociate K_m^0 (f)-sistemelor sînt funcţional echivalente.*

Din teorema 2 rezultă că pentru a obţine o schemă mai simplă decît cea asociată spaţiului $K_m^0(f)$, trebuie să găsim un K_m^0 (f)-sistem cu un număr mai mic de cuburi decît spaţiul K_m^0 (f).

(Într-un alt articol vom trata minimizarea unor scheme cu contacte m-poziţionale.)

Exemplu. Fie f definită astfel încît

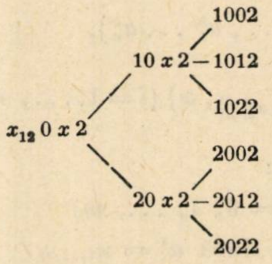
$$K_3^0(f) = \{1002, 1012, 1022, 2002, 2012, 2022\}.$$

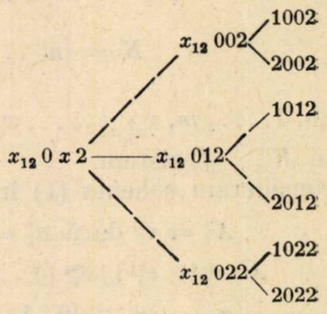
Avem

$$K_3^1(f) = \{10x2, 20x2\}$$

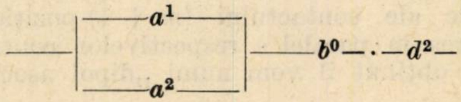
$$K_3^2(f) = \{x_{12}0x2\}.$$

Deoarece 2_{11}-cubul $x_{12}0x2$ generează spaţiul $K_3^0(f)$ şi acest lucru se poate reprezenta în următoarele moduri


1002
10 x 2 – 1012
1022
x_{12} 0 x 2
2002
20 x 2 – 2012
2022


1002
x_{12} 002
2002
1012
x_{12} 0 x 2
x_{12} 012
2012
1022
x_{12} 022
2022

rezultă că schema asociată 2_{11}-cubului $x_{12}0x2$, adică



are funcţia de lucru f.

Observaţie. În exemplul nostru,

$$\mathcal{K}_3^1(f) = \{10\,x\,2,\ 20\,x\,2,\ x_{12}002,\ x_{12}012,\ x_{12}022\} \supset K_3'(f).$$

Primită la redacţie la 17 august 1967

Institutul pedagogic Baia-Mare

MÉTHODES TOPOLOGIQUES DANS L'ÉTUDE DES SCHÉMAS À CONTACTS *m*-POSITIONNELS

(RÉSUMÉ)

On applique des méthodes de [2] pour la simplification des schémas *m*-positionnels [1], en soutenant qu'un schéma est simple si le nombre de ses contacts est plus petit.

BIBLIOGRAFIE

1. GR. MOISIL, *Teoria algebrică a mecanismeler automate.* Editura tehnică, Bucureşti, 1959.
2. J. P. ROTH, *Algebraic Topological Methods for the Synthesis of Switching Systems.* Trans. Amer. Math. Soc., **88**, 301–326 (1958).

ASUPRA UNEI ALGEBRE DE CONVOLUȚIE

DE

C. TUDOR

Folosind un rezultat din [2], prezentat aici sub forma lemei 2, precum şi lema 1, căreia i se dă o demonstrație elementară, se rezolvă o problemă din [1].

În cele ce urmează vom nota cu $\mathcal{D}$ spaţiul funcţiilor cu valori complexe definite pe R^1 indefinit derivabile şi cu suport compact, iar cu $\delta^{(m)}(n)$ derivata de ordinul m a distribuţiei $\delta(t-n)$.

LEMA 1. *Dacă p și q sînt numere întregi nenegative și*

$$\sum_{m=0}^{p} \sum_{n=-q}^{q} a_{m,n}\, \delta^{(m)}(n) = 0, \tag{1}$$

atunci $a_{mn} = 0$ $(0 \leqslant m \leqslant p,\ -q \leqslant n \leqslant q$.

Demonstrație. Fie $0 < \varepsilon < 1$ şi $\varphi_{ij} \in \mathcal{D}$, astfel încît spt $\varphi_{ij} \subset \subset \left(j - \frac{\varepsilon}{2},\ j + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ şi $\varphi_{ij}(t) = e^{(i+j+1)(t-j)}$ dacă $t \in \left[j - \frac{\varepsilon}{3},\ j + \frac{\varepsilon}{3}\right]$. Evident că

$$\varphi_{ij}^{(m)}(n) = \begin{cases} (i+j+1)^m, & \text{dacă } j = n \\ 0 & , \text{dacă } j \neq n. \end{cases} \tag{2}$$

Din (1) şi (2) obţinem:

$$0 = \left\langle \varphi_{ij},\ \sum_{m=0}^{p} \sum_{n=-q}^{q} a_{m,n}\, \delta^{(m)}(n) \right\rangle = \sum_{m=0}^{p} \sum_{n=-q}^{q} a_{m,n} (-1)^m \varphi_{ij}^{(m)}(n)$$

adică sistemul de ecuaţii

$$\sum_{m=0}^{p} (-1)^m (i+j+1)^m a_{m,j} = 0 \quad (0 \leqslant i \leqslant p,\ -q \leqslant j \leqslant q).$$

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 6, P. 933-937, BUCUREȘTI, 1968

Pentru fiecare j fixat obţinem un sistem omogen

$$\sum_{m=0}^{p} (-1)^m (i+j+1)^m a_{m,j} = 0, \quad (0 \leqslant i \leqslant p)$$

al cărui determinant (Vandermonde) este nenul. Urmează deci $a_{m,j} = 0$ $(0 \leqslant m \leqslant p, \; -q \leqslant j \leqslant q)$.

Să considerăm acum operatorul diferenţial cu coeficienţi constanţi

$$P(D) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} + a_1 \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + a_n \tag{3}$$

LEMA 2. *Dacă funcţia $E(t)$ definită pentru $t \neq t_0$ este soluţie în sens obişnuit a ecuaţiei omogene $P(D)E = 0$ pe intervalele $(-\infty, t_0)$, $(t_0, +\infty)$, atunci în sensul teoriei distribuţiilor*

$$P(D)E = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \delta^{(k)} (t - t_0), \tag{4}$$

unde

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \; a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \\ 1 \; a_1 \ldots a_{n-2} \\ 1 \ldots a_{n-3} \\ \ldots\ldots \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^{(n-1)}(t_0+0) - E^{(n-1)}(t_0-0) \\ E^{(n-2)}(t_0+0) - E^{(n-2)}(t_0-0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ \\ E^{(0)}(t_0+0) - E^{(0)}(t_0-0) \end{pmatrix} \tag{5}$$

elementele nescrise din matricea pătratică fiind toate nule.

Demonstraţie. Se ştie că, dacă notăm cu $[E^{(k)}]$ distribuţia dată de derivata funcţiei $E(t)$ pentru $t \neq t_0$ şi cu $E^{(k)}$ derivata distribuţiei dată de $E(t)$, avem :

$$E^{(k)} = [E^{(k)}] + \sum_{i=1}^{k} (E^{(k-i} (t_0+0) - E^{k-i)}(t_0-0))\, \delta^{(i-1)}(t - t_0) \tag{6}$$

aşa că

$$P(D)E = [P(D)E] + \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{n-k} (E^{(n-k-i)}(t_0+0) -$$
$$- E^{(n-k-i)}(t_0-0))\, \delta^{(i-1)} (t - t_0)$$

cu $a_0 = 1$. Prin urmare ordonînd după ordinul de derivare al lui $\delta\,(t - t_0)$,

$$P(D)E = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n-k-1} a_1 \left(E^{(n-k-i-1)}(t_0+0) - E^{(n-k-i-1)}(t_0-0) \right) \right) \delta^{(k)}(t - t_0)$$

adică pentru $k = 0, 1, \ldots, n-1$,

$$A_k = \sum_{i=0}^{n-k-1} a_i (E^{(n-k-i-1)}(t_0+0) - E^{(n-k-i-1)}(t_0-0)) \tag{7}$$

ceea ce se poate scrie şi sub forma matricială (5).

Fie acum $\mathcal{J}$ mulțimea distribuțiilor din $\mathcal{D}'(R^1)$ care se pot scrie sub forma unor sume finite

$$\sum_{m,n} a_{m,n}\delta^{(m)}(n), \tag{8}$$

unde

$$\sum_{n} a_{m,n} = 0 \tag{9}$$

cu m și n întregi, $m \geqslant 0$ și $a_{m,n}$ numere complexe.

Dacă se notează cu $\mathcal{J}_1$ mulțimea distribuțiilor de forma $S_1 = \delta + S$, unde $S \in \mathcal{J}$, e clar că distribuția $S_1 \in \mathcal{J}_1$ dacă și numai dacă ea are forma (8), cu condițiile:

$$\sum_{n} b_{mn} = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0. \end{cases} \tag{10}$$

Propoziția 1. *Mulțimea $\mathcal{J}$ formează algebră de convoluție fără element unitate.*

Demonstrație. Se vede imediat că $\mathcal{J}$ formează spațiu liniar față de adunarea și înmulțirea cu scalari a distribuțiilor. Din proprietățile produsului de convoluție

$$\left(\sum_{m,n} a_{m,n}\,\delta^{(m)}(n)\right) \times \left(\sum_{p,q} b_{p,q}\,\delta^{(p)}(q)\right) = \sum_{r,s} c_{r,s}\,\delta^{(r)}(s) \tag{11}$$

unde

$$c_{rs} = \sum_{\substack{m+p=r\\ n+q=s}} a_{m,n}\cdot b_{p,q}$$

iar

$$\sum_{s} c_{rs} = \left(\sum_{n} a_{m,n}\right)\cdot\left(\sum_{q} b_{p,q}\right) = 0.$$

Cu ajutorul relației (11) se poate deduce asociativitatea și comutativitatea produsului în $\mathcal{J}$. Rămîne să demonstrăm că $\mathcal{J}$ nu are element unitate. Aceasta se deduce din faptul că

$$\sum_{m=0}^{p}\sum_{n=-q}^{q} a_{m,n}\delta^{(m)}(n) = \sum_{m=0}^{p}\sum_{n=-q}^{q} b_{m,n}\delta^{(m)}(n)$$

dacă și numai dacă $a_{m,n} = b_{m,n}$ $(0 \leqslant m \leqslant p,\ -q \leqslant n \leqslant q)$ după cum rezultă din lema 1.

Propoziția 2. *Dacă $P(D)$ este operatorul diferențial (3), atunci funcția $E(t)$, egală cu zero pentru $t \notin [0, 1]$, soluție în sens obișnuit a ecuației omogene $P(D)E = 0$ pe intervalul $[0, 1]$, satisface în sensul teoriei distribuțiilor relația $P(D)E \in \mathcal{J}_1$ dacă și numai dacă*

$$\sigma_k = E^{(k)}(0) - E^{(k)}(1),\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{12}$$

satisface un anumit sistem de n ecuații liniare.

Demonstraţie. Conform lemei 2, avem, în sensul teoriei distribuţiilor,

$$P(D)E = \sum_{k=0}^{n-1} [A_k \delta^{(k)}(0) - B_k \delta^{(k)}(1)], \tag{13}$$

unde

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ & 1 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ & & 1 & \dots & a_{n-3} \\ & & & \cdot\cdot\cdot & \\ & & & \cdot\cdot\cdot & \\ & & & \cdot\cdot & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^{(n-1)}(0) \\ E^{(n-2)}(0) \\ E^{(n-3)}(0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ E^{(0)}(0) \end{pmatrix} \tag{14}$$

elementele nescrise în matricea pătratică fiind toate nule. Înlocuind în (14) în ultimul vector coloană $E^{(i)}(0)$ cu $E^{(i)}(1)$ obţinem vectorul B.

Prin urmare dacă

$$P(D)E = \sum_{k=0}^{n-1} [A_k \delta^{(k)}(0) - B_k \delta^{(k)}(1)] \in \mathcal{D}_1$$

rezultă

$$A_k - B_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \tag{15}$$

sau, ţinînd cont de expresiile lui A_k, B_k date de (14) şi cele analoage, obţinem sistemul de ecuaţii:

$$\begin{aligned} \sigma_{n-1} + a_1\sigma_{n-2} + a_2\sigma_{n-3} + \dots + a_{n-1}\sigma_0 &= 1 \\ \sigma_{n-2} + a_1\sigma_{n-3} + \dots + a_{n-2}\sigma_0 &= 0 \\ \sigma_{n-3} + \dots + a_{n-3}\sigma_0 &= 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \\ \sigma_0 &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

cu soluţia $(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}, \sigma_{n-1}) = (0, 0, \dots, 0, 1)$.

Reciproc, dacă condiţiile (16) sînt îndeplinite, rezultă că sînt îndeplinite şi condiţiile (15), adică $P(D)E \in \mathcal{D}_1$.

Primită la redacţie la 17 august 1967

Universitatea din Bucureşti
Facultatea de matematică şi mecanică,
Str. Academiei nr. 14

SUR UNE ALGÈBRE DE CONVOLUTION

(RÉSUMÉ)

On montre que l'ensemble des distributions d'une variable réelle de la forme $\sum\limits_{m,n} a_{mn}\delta^{(m)}(n)$, ou $\sum\limits_{n} a_{mn} = 0$ forme une algèbre de convolution qui n'a pas d'élément unité.

BIBLIOGRAFIE

1. Schwartz, L., *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.* Hermann, Paris, 1961.
2. Tudor, C., *Probleme la limită bilocale pentru ecuaţii diferenţiale liniare.* St. cerc. mat., **16**, *5*, 793–801 (1965).

O RELATIVIZARE A CVASINILPOTENŢEI PE ALGEBRE BANACH

DE

F. H. VASILESCU

În lucrarea de faţă se va defini o cvasinilpotenţă în raport cu un element al unei algebre Banach şi se vor studia cîteva proprietăţi ale ei.

1. În cele ce urmează vom nota cu $\mathfrak{A}$ o algebră Banach complexă arbitrară. Reamintim că un element $q \in \mathfrak{A}$ se numeşte *cvasinilpotent* dacă :

$$\lim_{n \to \infty} \| q^n \|^{\frac{1}{n}} = 0. \tag{1.1}$$

Mai general, vom nota pentru $a \in \mathfrak{A}$

$$r(a) = \lim_{n \to \infty} \| a^n \|^{\frac{1}{n}}, \tag{1.2}$$

mărimea fiind cunoscută sub numele de *raza spectrală* a elementului corespunzător. Scopul acestei lucrări e înfăţişarea posibilităţii de a relativiza noţiunea de cvasinilpotenţă şi anume de a o raporta la un element al algebrei.

Exemplele pe care le posedăm pînă în prezent, deşi sînt netriviale, nu sînt pe deplin proprii acestei relativizări ; sînt însă şanse ca noţiunea să apară în studiul algebrelor de operatori pe spaţii infinit dimensionale.

În algebrele Banach fără unitate vom nota cu $\delta(a)$, $\alpha(a)$ şi $D(\lambda, a)$ respectiv *mulţimea dizolvantă*, *spectrul* şi *dizolvanta elementului* $a \in \mathfrak{A}$.

În algebrele Banach cu unitate e vom folosi notaţiile $\rho(a)$, $\sigma(a)$ şi $R(\lambda, a)$ respectiv pentru *mulţimea rezolvantă*, *spectru* şi *rezolvantă*.

Fie acum $a, q \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ fiind o algebră Banach fără unitate.

Vom spune că q e *a-cvasinilpotent* dacă :

$$\alpha(a + tq) \cup \{0\} \subseteq \alpha(a) \cup \{0\} \text{ pentru orice } t \in \mathbf{C}. \tag{1.3}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 6, P. 939–945, BUCUREŞTI, 1968

În caz că algebra $\mathfrak{A}$ are unitate, vom spune că q e *a-cvasinilpotent* dacă

$$\sigma(a + tq) \subseteq \sigma(a) \text{ pentru orice } t \in C. \tag{1.4}$$

Ne vom opri mai întîi asupra cazului comutativ.

PROPOZIȚIA 1.1. *Fie $\mathfrak{A}$ o algebră Banach cu unitate și fie a, $q \in \mathfrak{A}$ cu $aq = qa$. Atunci q este a-cvasinilpotent dacă și numai dacă* este *cvasinilpotent.* În plus, $\sigma(a + tq) = \sigma(a)$ *pentru orice* $t \in C$.

Demonstrație. Fie mai întîi q *a-cvasinilpotent.* Să reamintim că dacă b, $c \in \mathfrak{A}$ și $bc = cb$, atunci [1, Ch. VII, § 5)] :

$$r(b + c) \leqq r(b) + r(c). \tag{1.5}$$

Aplicînd (1.5) pentru $b = a + tq$ și $c = -a$, obținem :

$$|t|\, r(q) - r(a) = r(tq) - r(-a) \leqq r(a + tq) \leqq r(a),$$

ultima egalitate avînd loc datorită relației $\sigma(a + tq) \subseteq \sigma(a)$. Dacă presupunem $r(q) \neq 0$, atunci făcînd $t \to \infty$ obținem o contradicție ; așa dar q e cvasinilpotent.

Reciproc, să presupunem că q (deci tq) e cvasinilpotent. Să reamintim că are loc relația [1, Ch. VII, § 6]

$$R(\lambda;\, a + tq) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n R(\lambda;\, a)^{n+1} q^n \tag{1.6}$$

pentru orice $\lambda \in \rho(a)$, deci $\sigma(a + tq) \subseteq \sigma(a)$.

Întrucît are loc și relația :

$$R(\lambda,\, a) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n R(\lambda;\, a + tq)^{n+1} q^n \tag{1.6'}$$

rezultă și cealaltă incluziune, deci are loc egalitatea $\sigma(a + tq) = \sigma(a)$ pentru orice $t \in C$ și propoziția e complet demonstrată.

2. Pentru cele ce urmează vom avea nevoie de următorul rezultat din teoria algebrelor Banach :

LEMA 2.1. *Dacă a, $b \in \mathfrak{A}$ și dacă*

$$\|(b - a) - (b - a) D(\lambda;\, a)\|\, |\lambda|^{-1} < 1 \quad (\lambda \neq 0),$$

atunci avem :

$$\begin{aligned} D(\lambda;\, b) = D(\lambda;\, a) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} [(b - a) \quad (b - a)\, D(\lambda;\, a)]^n + \\ + D(\lambda;\, a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} [(b - a) - (b - a)\, D(\lambda;\, a)]^n. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Formula, care se poate verifica și direct utilizînd definiția dizolvantei, rezultă dintr-una mai generală conținută în [2 ; Ch. XXIV, § 1].

PROPOZIȚIA 2.2. *Fie $\mathfrak{A}$ o algebră Banach fără unitate. Atunci $q \in \mathfrak{A}$ este a-cvasinilpotent dacă și numai dacă are loc relația :*

$$\lim_{n \to \infty} \| [q - qD(\lambda; a)]^n \|^{\frac{1}{n}} = 0 \tag{2.2}$$

pentru orice $\lambda \in \delta(a)$, $\lambda \neq 0$.

Demonstrație. Remarcăm că aplicarea Lemei 2.1 pentru $b = a + tq$ ne conduce la egalitatea :

$$\begin{aligned} D(\lambda; a + tq) = D(\lambda; a) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{\lambda^n} [q - qD(\lambda; a)]^n + \\ + D(\lambda; a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{\lambda^n} [q - qD(\lambda; a)]^n, \end{aligned} \tag{2.3}$$

dezvoltarea în serie fiind valabilă pentru

$$\| q - qD(\lambda; a) \| \, |\lambda|^{-1} < |t|^{-1} \quad (\lambda, t \neq 0).$$

Prin urmare, dacă $\lambda \in \delta(a)$, $\lambda \neq 0$, atunci $\lambda \in \delta(a + tq)$, deci $\alpha(a + tq) \cup \{0\} \subseteq \alpha(a) \cup \{0\}$. Reciproc, să presupunem că relația (1.3) e îndeplinită. Atunci, dacă $\lambda \in \delta(a)$, $\lambda \neq 0$, pentru $t \in \mathbf{C}$ aflat în discul :

$$|t| < |\lambda| \, \| [q - qD(\lambda; a)] - D(\lambda; a) \, [q - qD(\lambda; a)] \|^{-1}$$

are loc relația :

$$\begin{aligned} D(\lambda; a + tq) = D(\lambda; a) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{\lambda^n} \{ [q - qD(\lambda; a)]^n - \\ - D(\lambda; a) \, [q - qD(\lambda; a)]^n \}. \end{aligned} \tag{2.3'}$$

Însă relația (1.3) precum și considerente simple de analicitate ne asigură că $D(\lambda; a + tq)$ este o funcție analitică întreagă în variabila t, prin urmare relația (2.3′) subzistă, prin prelungire analitică, pentru orice $t \in \mathbf{C}$ și deci trebuie să avem :

$$\lim_{n \to \infty} \| [q - qD(\lambda; a)]^n - D(\lambda; a) \, [q - qD(\lambda; a)]^n \|^{\frac{1}{n}} = 0. \tag{2.4}$$

Vom scufunda acum algebra $\mathfrak{A}$ izomorf și izometric, prin procedeul canonic, în algebra $\widetilde{\mathfrak{A}}$ cu unitatea e.

În algebra $\widetilde{\mathfrak{A}}$ relația (2.4) se transcrie astfel :

$$\lim_{n \to \infty} \| [e - D(\lambda; a)] \, [q - qD(\lambda; a)]^n \|^{\frac{1}{n}} = 0. \tag{2.4'}$$

Deoarece $D(\lambda; a)$ verifică prin definiție

$$\frac{1}{\lambda} a + D(\lambda; a) - \frac{1}{\lambda} a \, D(\lambda; a) = 0, \tag{2.5}$$

rezultă [2, Ch. XXIV, § 1] că $e - D(\lambda; a)$ e invertibil în algebra $\widetilde{\mathfrak{A}}$. În plus, inegalitatea evidentă:

$$\|b^{-1} c\| \geqq \|b\|^{-1} \|c\| \quad (b,\ b^{-1},\ c \in \widetilde{\mathfrak{A}}) \tag{2.6}$$

ne dă:

$$\begin{aligned} &\|[e - D(\lambda; a)]\ [q - qD(\lambda; a)]^n\| \geqq \\ &\geqq \|[q - qD(\lambda; a)]^n\|\ \|[e - D(\lambda; a)]^{-1}\|^{-1}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Din (2.4') şi (2.7) rezultă imediat relaţia (2.2) din enunţ şi propoziţia e demonstrată.

COROLARUL 2.3. *Relaţia* $\alpha(a + tq) \cup \{0\} = \alpha(a) \cup \{0\}$ *are loc dacă şi numai dacă* $\lim\limits_{n \to \infty} \|[q - qD(\lambda a + tq)]^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$ *pentru orice* $t \in \mathbf{C}$.

PROPOZIŢIA 2.4. *Fie* $\mathfrak{A}$ *o algebră Banach cu unitate e. Un element* $q \in \mathfrak{A}$ *este a-cvasinilpotent dacă şi numai dacă are loc relaţia:*

$$\lim_{n \to \infty} \|[qR(\lambda; a)]^n\|^{\frac{1}{n}} = 0 \ \textit{pentru orice}\ \lambda \in \rho(a). \tag{2.8}$$

Demonstraţie. Deoarece are loc egalitatea:

$$R(\lambda; a) = \frac{1}{\lambda}[e - D(\lambda; a)] \quad (\lambda \neq 0), \tag{2.9}$$

rezultă că (2.8) e echivalentă cu condiţia (2.2) dacă $\lambda \neq 0$. Prin urmare (2.8) implică conform propoziţiei 2.2 incluziunea

$$\alpha(a + tq) \cup \{0\} \subseteq \alpha(a) \cup \{0\} \text{ pentru orice } t \in \mathbf{C}.$$

Se ştie însă că pentru un element oarecare $b \in \mathfrak{A}$ are loc relaţia

$$\sigma(b) \subseteq \alpha(b) \cup \{0\}.$$

Deoarece

$$R(\lambda,\ a + tq) = R(\lambda,\ a) \sum_{n=0}^{\infty} t^n\ [qR(\lambda; a)]^n,$$

rezultă că dacă $\lambda = 0 \in \rho(a)$, atunci $0 \in \rho(a + tq)$, deci dacă $0 \in \sigma(a + tq)$, atunci $0 \in \sigma(a)$. Prin urmare $\alpha(a + tq) \subseteq \sigma(a)$. Reciproc, dacă această incluziune are loc oricare ar fi $t \in \mathbf{C}$, rezultă că seria dată de (2.11) e întreagă ca funcţie de t pentru orice $\lambda \in \rho(a)$, deci (2.8) e îndeplinită.

3. Propoziţiile 2.2 şi 2.4 sugerează introducerea noţiunii de nilpotenţă în raport cu un element al algebrei.

Dacă $\mathfrak{A}$ e o algebră Banach fără unitate, vom spune că $q \in \mathfrak{U}$ e a-nilpotent dacă există $N \geqq 1$ astfel încît $[q - qD(\lambda,\ a)]^N = 0$ oricare ar fi $\lambda \in \delta(a)$, $\lambda \neq 0$.

Analog, dacă $\mathfrak{A}$ are unitate, vom spune că $q \in \mathfrak{A}$ este *a-nilpotent* dacă există $N \geqq 1$ astfel încît $[qR(\lambda; a)]^N = 0$ oricare ar fi $\lambda \in \rho(a)$. Următorul rezultat este o transpunere la cazul nostru a unei proprietăţi cunoscute pentru elemente cvasinilpotente [2, Ch. IV, § 2; 4.10].

PROPOZIŢIA 3.1. *Fie $\mathfrak{A}$ o algebră Banach cu unitate şi $q \in \mathfrak{A}$ un element a-cvasinilpotent. Atunci q este a-nilpotent pentru un anume $N \geqq 1$ dacă şi numai dacă*

$$\| [e + qR\,(\lambda,\ a)]^{\pm n} \| = o\,(n^N) \tag{3.1}$$

$(n = 1,\ 2, \ldots)$ *oricare ar fi* $\lambda \in \rho(a)$.

Demonstraţie. *Dacă* q este a-cvasinilpotent, atunci, conform propoziţiei 2.4, elementul $qR(\lambda\,;\ a)$ este cvasinilpotent pentru orice $\lambda \in \rho(a)$. De aici rezultă că:

$$R(\mu\,;\ e + R(\lambda\,;\ a)) = R(\mu - 1\,;\ qR(\lambda\,;\ a)) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [qR(\lambda\,;\ a)]^n (\mu - 1)^{-n-1} \text{ pentru } \mu \neq 1. \tag{3.2}$$

Avem atunci următoarele dezvoltări în serie Laurent:

$$R(\mu\,;\ e + qR(\lambda\,;\ a)) = -\sum_{n=0}^{\infty} [e + qR\,(\lambda\,;\ a)]^{-n-1} \mu^n \quad (|\mu| < 1) \tag{3.3}$$

$$R(\mu\,;\ e + qR(\lambda\,;\ a)) = \sum_{n=0}^{\infty} [e + qR(\lambda\,;\ a)]^n\ \mu^{-n-1} \quad (|\mu| > 1) \tag{3.4}$$

Dacă relaţia 3.1 din enunţ are loc, atunci, conform [2; Th 3.13. 5], rezultă că $R(\mu\,;\ e + qR(\lambda\,;\ a))$ e polinom în $1/\mu - 1$ de grad cel mult N. Reîntorcîndu-ne la expresia (3.2), conchidem $[qR(\lambda\,;\ a)]^N = 0$. Invers, dacă $[qR(\lambda\,;\ a)]^N = 0$, atunci pentru $n \geqq N$ avem

$$\| [e + qR(\lambda\,; a)]^N \| = \| \sum_{k=0}^{N=1} \binom{n}{k} [qR(\lambda\,;\ a)]^k \| = 0\,(n^N).$$

De asemenea, deoarece din calcul direct rezultă:

$$[e + qR(\lambda\,;\ a)]^{-1} = e + \sum_{j=1}^{N-1} [-\,qR(\lambda\,;\ a)]^j$$

şi cum

$$\left\{ \sum_{j=1}^{N-1} [-\,qR(\lambda\,;\ a)]^j \right\}^N = 0$$

obţinem pentru $n \geqq N$

$$\| [e + qR(\lambda\,;\ a)]^{-n} \| = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} [-\,qR(\lambda\,; a)]^j \right\}^k \| = o\,(n^N)$$

şi propoziţia e demonstrată.

4. Rezultatele care urmează împreună cu propoziţia 1.1 scot în evidenţă legătura între cvasinilpotenţa relativizată cu sensul definiţiei noastre şi cvasinilpotenţa luată în sens absolut. E posibil ca legătura să meargă pînă la identificare însă nu sîntem în posesia unui asemenea rezultat.

Vom prezenta două exemple în care acest lucru se întîmplă dar acestea nu pot fi concludente deoarece sînt destul de speciale.

PROPOZIŢIA 4.1. *Fie* $\mathfrak{A}$ *o algebră Banach,* a, $b \in \mathfrak{A}$ şi $q = ab - ba$. *Dacă* $aq = qa$, *atunci* q *este* b*-cvasinilpotent.*

Demonstraţie. Dacă $\mathfrak{A}$ nu are unitate, o vom scufunda prin procedeul canonic într-o algebră $\widetilde{\mathfrak{A}}$ cu unitatea e.

Relaţia $aq = qa$ ne conduce atunci la expresia :

$$\exp\,(ta)b\,\exp\,(-\,ta) = b + tq \quad (t \in \mathbf{C}) \tag{4.1}$$

(care poate fi uşor verificată prin derivare).

Deoarece $\exp\,(ta)^{-1} = \exp\,(-\,ta)$, avem

$$\sigma(b + tq) = \sigma(b) \subseteq \alpha(b + tq) \cup \{0\}.$$

Se ştie însă că $\sigma(b + tq) \subseteq \alpha(b + tq) \cup \{0\}$ şi că cele două mulţimi diferă cel mult prin zero. Avem aşadar $\alpha(b + tq) \cup \{0\} \subseteq \alpha(b) \cup \{0\}$ deci în orice caz q este b-cvasinilpotent.

Observaţie. Teoria derivării pe algebre Banach [3, § 1.3] asigură cvasinilpotenţa elementului q.

PROPOZIŢIA 4.2. *În algebra* $\mathfrak{A}$ *a matricilor* N*-dimensionale dacă un element* $q \in \mathfrak{A}$ *este* a*-cvasinilpotent, atunci el este cvasinilpotent*

Demonstraţie. Vom utiliza caracterizarea dată de propoziţia 2.4. Are loc relaţia [1 ; Ch. VIII ; § 1] :

$$R(\mu\,;\,a) = \sum_{\lambda \in \sigma(a)} \sum_{j=0}^{\nu(\lambda)-1} \frac{(a - \lambda e)^j}{(\mu - \lambda)^{j+1}}\, p(\lambda), \tag{4.2}$$

unde $\nu(\lambda)$ este cel mai mic număr întreg cu proprietatea : $(\lambda e - a)^{\nu(\lambda)}\, x = 0$ pentru orice $x \in \mathbf{C}^N$ pentru care $(\lambda e - a)^{\nu(\lambda)+1} = 0$ iar $p(\lambda)$ este elementul din $\mathfrak{A}$ care se obţine cînd se aplică calculul funcţional funcţiei analitice (în vecinătatea lui $\sigma(a)$) :

$$f_\lambda\,(\mu) = \begin{cases} 1 & \text{în vecin. lui } \lambda \\ 0 & \text{în vecin. lui } \sigma(a) \setminus \{\lambda\} \end{cases}$$

Se ştie că $p(\lambda)^2 = p(\lambda)$ şi că $\sum\limits_{\lambda \in \sigma(a)} p(\lambda) = e$.

Avem aşadar conform propoziţiei 2.4 :

$$[qR(\mu\,;\,a)]^N = \left[\sum_{\lambda \in \sigma(a)} \sum_{j=a}^{\nu(\lambda)-1} \frac{q\,(a - \lambda e)^j\, p(\lambda)}{(\mu - \lambda)^{j+1}}\right]^N = 0 \tag{4.3}$$

Aducerea la acelaşi numitor în membrul al doilea şi ordonarea după puterile lui μ la numărător ne conduce la relaţia :

$$[\sum_{\lambda \in \sigma(a)} q\,p(\lambda)]^N = q^N = 0.$$

obţinută prin identificarea cu zero a coeficientului de grad maxim şi cu aceasta propoziţia e demonstrată.

Primită la redacţie la 9 octombrie 1967

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti.

A RELATIVIZATION OF THE QUASI-NILPOTENCE ON BANACH ALGEBRAS

(ABSTRACT)

In this paper the author defines a relative quasi-nilpotence of an element of a complex Banach algebra (not necessarily unitary).

If the considered algebra is commutative this definition coincides with a very well known one. Therefore the interesting case seems to be when the algebra is not commutative (here the problem is still opened).

The author obtains a numerical characterization for this relative quasi-nilpotence and gives some examples.

BIBLIOGRAFIE

1. Dunford N., Schwartz J., *Linear operators*, Part I, Interscience Publishers, New York, London, 1958.
2. Hille E., Phillips R., *Functional analysis and semi-groups*. Providence, 1957.
3. Putnam C. R., *Commutation properties of Hilbert space operators and related topics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date din text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale. Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

1968 IUL 14

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, A. DELEANU, M. JURCHESCU, **Topologie, Categorii, Suprafeţe riemanniene**, 1967, 394 p., 21,50 lei.

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.

ROMULUS CRISTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.

I. CUCULESCU, **Procese Markov şi funcţii excesive**, 1968, 356 p., 19 lei.

N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.

ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, **Metode matematice în hidrogazodinamica subterană**, 1966, 582 p., 31 lei.

AL. GHIKA, **Analiza funcţională**, 1967, 594 p., 31 lei.

S. GUIAŞU şi R. THEODORESCU, **Teoria matematică a informaţiei**, 1966, 227 p., 8,25 lei.

M. IOSIFESCU şi P. TĂUTU, **Procese stohastice şi aplicaţii în biologie şi medicină**, 1968, 345 p., 22 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, vol. II, 1966, 669 p., 38 lei.

S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

IVAN SINGER, **Cea mai bună aproximare în spaţii vectoriale normate prin elemente din subspaţii vectoriale**, 1967, 386 p., 23 lei.

MARIUS I. STOKA, **Geometrie integrală**, 1967, 240 p., 9,75 lei.

SIMION SANIELEVICI, **Opera matematică**, 1968, 298 p., 15,50 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 6, P. 787–946, BUCUREŞTI, 1968

I. P. „Informaţia" – c. 5296

43831 **Lei 12.—**

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

7

TOMUL 20

1968

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — **redactor responsabil;**
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil **adjunct;**
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAŞ — secretar de redacție.

La revue „STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE" paraît 10 fois par an. Le prix d'un abonnement annuel est de $ 10. —; F F 49.—; D. M. 40. —.
Toute commande de l'étranger sera adressée à CARTIMEX, Boîte postale 134—135 Bucarest, Roumanie, ou à ses représentants à l'étranger. En Roumanie, vous pourrez vous abonner par les bureaux de poste ou chez votre facteur.
În țară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agențiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituții.

Manuscrisele, cărțile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție al revistei pe adresa: Str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

TOM. 20, Nr. 7
1968

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

SUMAR

Pag.

MIRCEA CÎRNU, Transformarea Laplace a funcţiilor distribuţionale şi ultradistribuţionale I 949

L. M. CHIRICĂ, Contribuţie la studiul categoriilor de automate 957

MIHAI DRAGOMIRESCU, Asupra sensitivităţii în programarea liniară 965

VIORICA GABRIEL şi ILDIKO SERDÜLT, Generalizarea metodei lui Schulz pentru calculul inversei unei matrici . . 969

G. GOLDNER şi M. BALÁZS, Asupra metodei coardei şi a unei modificări a ei pentru rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare 981

I. MARUSCIAC şi GH. NADIU, O interpretare a algoritmilor cu schema-graf în legătură cu maşinile Turing şi algoritmii de tip Cerneavschi 991

DAN PASCALI, Asupra funcţiilor analitice generalizate vectoriale 1013

TITUS PETRILA, Asupra devierii unui jet de fluid ideal printr-un obstacol simetric. 1019

TITUS PETRILA, Un algoritm pentru determinarea liniilor de curent în mişcarea plană în jurul unor profile simetrice . . 1025

IOAN ŞERB, Asupra unei proprietăţi a polinoamelor 1031

GEORGE THEILER, Lanţuri cu legături complete ergodice de tip $[O-M]$ cu distanţă Fortet — problema restului . . . 1037

NICOLAE I. TIŢĂ, Asupra operatorilor A-complet continui . . 1041

LÁSZLÓ ZSIDÓ, Speranţe condiţionate şi teorema lui Sinai . . 1045

ST. CERC. MAT., TOM. 20. NR. 7. P. 947–1112. BUCUREŞTI. 1968

TRANSFORMAREA LAPLACE A FUNCȚIILOR DISTRIBUȚIONALE ȘI ULTRADISTRIBUȚIONALE I

DE

MIRCEA CÎRNU

În această Notă se defineşte transformarea Laplace pentru funcţii distribuţionale şi ultradistribuţionale, rezultînd în particular transformarea Laplace pentru funcţiile compozabile, precum şi pentru distribuţii şi ultradistribuţii. Considerîndu-se noţiunile de convoluţie şi multiplicare pentru funcţiile distribuţionale şi ultradistribuţionale, se vor da teoremele de transformare Laplace ale acestor operaţii.

1. L. Schwartz a studiat (vezi [1]) transformarea Laplace pentru distribuţiile $u \in \mathcal{D}'$ care îndeplinesc condiţia $e^{-st} \cdot u(t) \in \mathcal{S}'$. În acest caz, transformata Laplace a distribuţiei u este o funcţie numerică. În [2], T. Ishihara a definit transformarea Laplace pentru distribuţii oarecari, transformatele fiind, în general, funcţii ultradistribuţionale. Ishihara a definit de asemenea transformarea Laplace pentru ultradistribuţiile $v \in \mathcal{Z}'$ care îndeplinesc condiţia $e^{-s\sigma} \cdot v(\sigma) \in \mathcal{Z}'$, lărgind astfel condiţia impusă de către L. Schwartz ca $e^{-s\sigma} \cdot v(\sigma) \in \mathcal{S}'$. Transformata Laplace a unei astfel de ultradistribuţii v este o funcţie distribuţională.

În această Notă vom defini transformarea Laplace pentru funcţii distribuţionale şi ultradistribuţionale. Această transformare se reduce, în particular, pentru distribuţii la cea a lui Ishihara. Din contră, pentru ultradistribuţii ea nu coincide cu cea a lui Ishihara. Avantajul constă în faptul că transformarea dată aici este definită pentru orice ultradistribuţie.

În continuare vom considera transformarea Laplace astfel definită, pentru funcţii distribuţionale compozabile[1]) $(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ şi $(\mathcal{D}, \mathcal{Z})$, respectiv pentru funcţii ultradistribuţionale compozabile $(\mathcal{Z}, \mathcal{D})$ şi $(\mathcal{Z}, \mathcal{Z})$. Vom da formulele de reprezentare, legătura cu produsele asociate spaţiilor de funcţii considerate, precum şi cu transformarea Fourier a acestor funcţii. Pentru completitudine vom defini aici şi transformarea Fourier a funcţiilor distribuţionale compozabile $(\mathcal{D}, \mathcal{Z})$ şi inversa ei.

---

[1]) Pentru aceste noţiuni vezi [4].

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 7. P. 949–955, BUCUREŞTI, 1968

În sfîrşit, cu ajutorul unor noţiuni de compozabilitate şi multiplicare pentru funcţii distribuţionale şi ultradistribuţionale vom da teoremele de transformare Laplace a convoluţiei şi multiplicării.

2. Definiţia 1. *Dacă* $\bar{u} = \{u_s\}_{s\in\mathcal{R}}$ *este o funcţie distribuţională, vom numi transformata Laplace a ei, funcţia ultradistribuţională definită prin formula* [2])

$$\mathcal{L}\bar{u} = \{\mathcal{F} u_s\}_{s\in\mathcal{R}}.$$

Definiţia 2. *Dacă* $\bar{v} = \{v_s\}_{s\in\mathcal{R}}$ *este o funcţie ultradistribuţională, vom numi transformata Laplace a ei, funcţia distribuţională definită prin formula*

$$\mathcal{L}^{-1}\bar{v} = \{\mathcal{F}^{-1} v_s\}_{s\in\mathcal{R}}.$$

Observaţia 1. Dacă vom face identificarea (izomorfism liniar)

$$\{e^{-st}\cdot u(t)\}_{s\in\mathcal{R}} \leftrightarrow u, \ \forall\ u\in\mathcal{D}',$$

atunci $\mathcal{L}(\{e^{-st}\cdot u(t)\}_{s\in\mathcal{R}})$ este transformarea Laplace generalizată definită de Ishihara şi pe care o vom nota cu $\overline{\mathcal{L}}\, u$:

$$\overline{\mathcal{L}}\, u = \mathcal{L}(\{e^{-st}\cdot u(t)\}_{s\in\mathcal{R}}) = \{\mathcal{F}(e^{-st}\cdot u(t))\}_{s\in\mathcal{R}} = 2\pi\ \{\delta^{is}_{\mathcal{Z}} * \mathcal{F} u\}_{s\in\mathcal{R}}.$$

Observaţia 2. Dacă vom face identificarea (izomorfism liniar):

$$2\pi\ \{\delta^{is}_{\mathcal{Z}} * v\}_{s\in\mathcal{R}} \leftrightarrow v, \ \forall\ v\in\mathcal{Z}',$$

atunci vom defini ca transformată Laplace $\overline{\mathcal{L}^{-1}}\ v$ a ultradistribuţiei v, funcţia distribuţională

$$\mathcal{L}^{-1}(2\pi\ \{\delta^{is}_{\mathcal{Z}} * v\}_{s\in\mathcal{R}}) = 2\pi\ \{\mathcal{F}^{-1}\ (\delta^{is}_{\mathcal{Z}} * v)\}_{s\in\mathcal{R}} = \{e^{-st}\cdot(\mathcal{F}^{-1}\, v)\ (t)\}_{s\in\mathcal{R}}.$$

După cum se vede, nu se impune ultradistribuţiei v nici o condiţie. Această definiţie diferă de definiţia dată de Ishihara. El a considerat ca transformată Laplace a unei ultradistribuţii $v\in\mathcal{Z}'$, care îndeplineşte condiţia $e^{-s\sigma}\cdot v(\sigma)\in\mathcal{Z}'$, funcţia distribuţională $\{\mathcal{F}^{-1}\ (e^{-s\sigma}\cdot v(\delta))\}_{s\in\mathcal{R}}$. Definiţia dată de noi are avantajul că se aplică oricărei ultradistribuţii.

Observaţia 3. $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{L}^{-1}$ sînt inverse ca operatori între spaţiile $\mathcal{F}^{\mathcal{D}'}_{\mathcal{R}}$ şi $\mathcal{F}^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{R}}$ [3]). În schimb aplicaţiile $\overline{\mathcal{L}}$ şi $\overline{\mathcal{L}^{-1}}$ nu sînt inverse; de altfel ele lucrează astfel:

$$\overline{\mathcal{L}}:\ \mathcal{D}' \to \mathcal{F}^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{R}},$$

$$\overline{\mathcal{L}^{-1}}:\ \mathcal{Z}' \to \mathcal{F}^{\mathcal{D}'}_{\mathcal{R}}.$$

---

[2]) Notăm cu $\mathcal{F}$ transformarea Fourier a distribuţiilor. În cadrul acestei Note vom mai nota cu aceeaşi literă transformarea Fourier a funcţiilor φ din $\mathcal{D}$, $(\mathcal{F}\,\varphi)\,(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist}\varphi(t)\,dt$, precum şi a funcţiilor distribuţionale compozabile $(\mathcal{D}, \mathcal{D})$.

[3]) Am notat cu $\mathcal{F}^{\mathcal{D}'}_{\mathcal{R}}$ mulţimea funcţiilor distribuţionale şi cu $\mathcal{F}^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{R}}$ mulţimea funcţiilor ultradistribuţionale.

Observaţia 4. Dacă vom nota cu I_1 şi I_2 izomorfismele liniare $I_1 : \mathcal{D}' \to \mathcal{F}^{\mathcal{D}'}_{\mathcal{R}}$, $I_2 : \mathcal{Z}' \to \mathcal{F}^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{R}}$, definite prin :

$$I_1(u) = \{\mathrm{e}^{-st} \cdot u(t)\}_{s \in \mathcal{R}}, \quad \forall\ u \in \mathcal{D}',$$

$$I_2(v) = 2\pi\, \{\delta^{is}_{\mathcal{Z}} * v\}_{s \in \mathcal{R}}, \quad \forall\ v \in \mathcal{Z}',$$

atunci legătura între transformarea Fourier şi transformarea Laplace generalizată pentru distribuţii şi ultradistribuţii este dată de următoarele formule :

$$\overline{\mathcal{L}}(u) = \mathcal{L}(I_1\ (u)) = I_2\ (\mathcal{F}(u)), \qquad \forall\ u \in \mathcal{D}',$$

$$\overline{\mathcal{L}^{-1}}\ (v) = \mathcal{L}^{-1}\ (I_2\ (v)) = I_1\ (\mathcal{F}^{-1}\ (v)),\ \forall\ v \in \mathcal{Z}'.$$

Observaţia 5. Se vede că $\{\mathrm{e}^{-st} \cdot u(t)\}_{s \in \mathcal{R}} \notin \mathcal{F}\mathcal{C}\,(\mathcal{D}, \mathcal{D})$.

3. Vom considera acum transformarea Laplace, definită la punctul precedent, pentru funcţii distribuţionale compozabile $(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ şi $(\mathcal{D}, \mathcal{Z})$. Atunci $\mathcal{L}$ este un izomorfism liniar între spaţiile $\mathcal{F}\mathcal{C}\,(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ şi $\mathcal{F}\mathcal{C}\,(\mathcal{Z}, \mathcal{D})$, respectiv între spaţiile $\mathcal{F}\mathcal{C}\,(\mathcal{D}, \mathcal{Z})$ şi $\mathcal{F}\mathcal{C}\,(\mathcal{Z}, \mathcal{Z})$.

Din propoziţia 2 [4][4], rezultă că

$$\mathcal{L}\bar{u} = \{\mathrm{e}^{-it\sigma}\}_{t \in \mathcal{R}} \underset{21}{\circledast} \bar{u},$$

pentru $\bar{u}$ în $\mathcal{F}\mathcal{C}\,(\mathcal{D}, \mathcal{D})$, respectiv în $\mathcal{F}\mathcal{C}\,(\mathcal{D}, \mathcal{Z})$.

Folosind această reprezentare pentru transformarea Laplace, se obţin formulele

$$\mathcal{L}(\bar{u} \underset{11}{\circledast} \bar{v}) = \mathcal{L}\bar{u} \underset{21}{\circledast} \bar{v}, \quad \forall\ \bar{u} \in \mathcal{F}\mathcal{C}\ (\mathcal{D}, \mathcal{D}), \quad \forall\ \bar{v} \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}'}_{\mathcal{R}},$$

$$\mathcal{L}(\bar{u} \underset{12}{\circledast} \bar{v}) = \mathcal{L}\bar{u} \underset{22}{\circledast} \bar{v}, \quad \forall\ \bar{u} \in \mathcal{F}\mathcal{C}\ (\mathcal{D}, \mathcal{Z}), \quad \forall\ \bar{v} \in \mathcal{F}^{\mathcal{Z}'}_{\mathcal{R}}.$$

4. Analog cu transformarea Fourier pentru funcţii distribuţionale compozabile $(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ (vezi [3], [4]) vom defini transformarea Fourier şi inversa ei respectiv pentru spaţiile $\mathcal{F}\mathcal{C}\,(\mathcal{D}, \mathcal{Z})$ şi $\mathcal{F}\mathcal{C}\,(\mathcal{Z}, \mathcal{D})$, în modul următor :

DEFINIŢIE. *Dacă* $\bar{u} = \{u_r(t)\}_{r \in \mathcal{R}} \in \mathcal{F}\mathcal{C}\,(\mathcal{D}, \mathcal{Z})$, *atunci definim ca transformată Fourier a funcţiei* $\bar{u}$, *funcţia* $\overline{\mathcal{F}}\bar{u} = \bar{v} = \{v_s\}_{s \in \mathcal{R}}$, *unde* v_s *este ultradistribuţia definită prin relaţia*

$$(v_s, \mathcal{F}\varphi) = [\mathcal{F}^{-1}\ ((u_r,\ \varphi))]\ (s),\ \forall\ \varphi \in \mathcal{D},\ \forall\ s \in \mathcal{R}.$$

---

[4] Din cauză că am considerat altă formă a transformării Fourier, formulele din propoziţia 2 [4] devin

$$\mathcal{F}x = \{\mathrm{e}^{-it\sigma}\}_{t \in \mathcal{R}} \underset{21}{\bigcirc} x, \quad \forall\ x \in \mathcal{D}',$$

$$\mathcal{F}^{-1}y = \frac{1}{2\pi}\{\mathrm{e}^{it\sigma}\}_{\sigma \in \mathcal{R}} \underset{12}{\bigcirc} y, \quad \forall\ y \in \mathcal{Z}'.$$

Funcţiile compozabile ataşate transformării Fourier şi inversei sale pentru funcţiile din $\mathcal{D}$, respectiv din $\mathcal{Z}$, sînt $\{\mathrm{e}^{it\sigma}\}_{\sigma \in \mathcal{R}} \in \mathcal{F}\mathcal{C}\ (\mathcal{D}, \mathcal{Z})$ şi $\left\{\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-it\sigma}\right\}_{t \in \mathcal{R}} \in \mathcal{F}\mathcal{C}\ (\mathcal{Z}, \mathcal{D})$.

DEFINIȚIE. *Dacă* $\bar{v} \in \mathcal{F}\,\mathcal{C}\,(\mathcal{Z}, \mathcal{D})$, *atunci definim ca transformată Fourier a funcției* $\bar{v}$, *funcția* $\overline{\mathcal{F}}^{-1}\,\bar{v} = \bar{u} = \{u_r)_{r \in \mathcal{R}}$, *unde* u_r *este distribuția definită prin relația*

$$(u_r,\ \mathcal{F}^{-1}\,\psi) = [\mathcal{F}\ ((v_s,\ \psi))]\ (r),\ \forall\ \psi \in \mathcal{Z},\ \forall\ r \in \mathcal{R}.$$

Se vede că $\overline{\mathcal{F}}$ și $\overline{\mathcal{F}}^{-1}$ sînt operatori inverși și, în mod analog cu demonstrația teoremei 3 din [4], se arată următoarele formule :

(1)

$$\overline{\mathcal{F}}\,\bar{u} = \left(\left\{\frac{1}{2\pi}\,e^{-it\sigma}\right\}_{t \in \mathcal{R}} \underset{21}{\circledast} \{u_r(t)\}_{r \in \mathcal{R}}\right) \underset{22}{\circledast} \left\{\frac{1}{2\pi}\,e^{-irs}\right\}_{s \in \mathcal{R}},\quad \forall\ \bar{u} \in \mathcal{F}\,\mathcal{C}(\mathcal{D}, \mathcal{Z})$$

$$\overline{\mathcal{F}}^{-1}\,\bar{v} = (\{e^{i\sigma t}\}_{\sigma \in \mathcal{R}} \underset{12}{\circledast} \{v_s(\sigma)\}_{s \in \mathcal{R}}) \underset{11}{\circledast} \{e^{irs}\}_{r \in \mathcal{R}}\ ,\quad \forall\,\bar{v} \in \mathcal{F}\,\mathcal{C}\,(\mathcal{Z}, \mathcal{D}).$$

Aplicațiile definite aici și în [4] se încadrează în următoarea diagramă

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}\,\mathcal{C}\,(\mathcal{D}, \mathcal{D}) \arrow[d, shift left, "\mathcal{L}"] \arrow[dr, shift left, "\mathcal{F}"] & \mathcal{F}\,\mathcal{C}\,(\mathcal{D}, \mathcal{Z}) \arrow[d, shift left, "\mathcal{L}"] \arrow[dl, shift left, "\overline{\mathcal{F}}"] \\
\mathcal{F}\,\mathcal{C}\,(\mathcal{Z}, \mathcal{D}) \arrow[u, shift left, "\mathcal{L}^{-1}"] \arrow[ur, shift left, "\overline{\mathcal{F}}^{-1}"] & \mathcal{F}\,\mathcal{C}\,(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}) \arrow[u, shift left, "\mathcal{L}^{-1}"] \arrow[ul, shift left, "\mathcal{F}^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Legătura între transformarea Fourier a funcțiilor distribuționale compozabile $(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ și transformarea Laplace a acestor funcții este dată de următoarele formule

$$\mathcal{F}\,\bar{u} = \frac{1}{2\pi}\,\mathcal{L}\,\bar{u} \underset{21}{\circledast} \{e^{irs}\}_{s \in \mathcal{R}},$$

$$\mathcal{L}\,\bar{u} = \mathcal{F}\,\bar{u} \underset{22}{\circledast} \{e^{-irs}\}_{r \in \mathcal{R}},\quad \forall\ \bar{u} \in \mathcal{F}\,\mathcal{C}\ (\mathcal{D}, \mathcal{D}).$$

Legătura între transformarea Fourier a funcțiilor distribuționale compozabile $(\mathcal{D}, \mathcal{Z})$ și transformarea Laplace a acestor funcții este dată de următoarele formule :

$$\overline{\mathcal{F}}\,\bar{u} = \frac{1}{4\pi^2}\,\mathcal{L}\,\bar{u} \underset{22}{\circledast}\ \{e^{-irs}\}_{s \in \mathcal{R}},$$

$$\mathcal{L}\,\bar{u} = 2\pi\,\overline{\mathcal{F}}\,\bar{u} \underset{21}{\circledast}\ \{e^{irs}\}_{r \in \mathcal{R}},\quad \forall\ \bar{u} \in \mathcal{F}\,\mathcal{C}\ (\mathcal{D}, \mathcal{Z}).$$

Aceste formule rezultă din teorema 3 [4][5]), formula (1) și definiția transformării Laplace.

5. DEFINIȚIE. *O funcție* $\overline{\mathrm{u}} = \{u_s\}_{s\in\mathcal{R}}$ *din* $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}'}$ *sau din* $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{Z}'}$ *se numește convolutor, dacă* u_s *este convolutor în* $\mathcal{D}'$ *respectiv în* $\mathcal{Z}'$, *pentru orice* $s\in\mathcal{R}$. *Se definește atunci convoluția funcției* $\overline{\mathrm{u}}$ *cu o funcție* $\overline{\mathrm{v}} = \{v_s\}_{s\in\mathcal{R}}$ *respectiv din* $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}'}$ *sau* $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{Z}'}$ *prin formula*

$$\overline{\mathrm{u}} * \overline{\mathrm{v}} = \{u_s * v_s\}_{s\in\mathcal{R}}.$$

DFINIȚIE. *O funcție* $\overline{\mathrm{u}}$ *din* $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}'}$ *sau din* $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{Z}'}$ *se numește multiplicator, dacă* u_s *este multiplicator în* $\mathcal{D}'$, *respectiv în* $\mathcal{Z}'$, *pentru orice* $s\in\mathcal{R}$. *Se definește atunci multiplicarea funcției* $\overline{\mathrm{u}}$ *cu o funcție* $\overline{\mathrm{v}}$ *respectiv din* $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}'}$ *sau* $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{Z}'}$ *prin formula*

$$\overline{\mathrm{u}} \cdot \overline{\mathrm{v}} = \{u_s \cdot v_s\}_{s\in\mathcal{R}}.$$

Se vede că $\{\mathrm{e}^{-st}\cdot u(t)\}_{s\in\mathcal{R}}$ este convolutor, respectiv multiplicator în $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}'}$ dacă și numai dacă $u\in\mathcal{D}'$ este convolutor, respectiv multiplicator. De asemenea $2\pi\,\{\delta^{is}_{\mathcal{Z}} * v\}_{s\in\mathcal{R}}$ este convolutor, respectiv multiplicator în $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{Z}'}$ dacă și numai dacă $v\in\mathcal{Z}'$ este convolutor, respectiv multiplicator.

TEOREMĂ. *Funcția* $\overline{\mathrm{v}}$ *este multiplicator în* $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{Z}'}$ *dacă și numai dacă* $\overline{\mathrm{u}} = \mathcal{L}^{-1}\,\overline{\mathrm{v}}$ *este convolutor în* $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}'}$ *și în acest caz avem*

$$\mathcal{L}(\overline{\mathrm{u}} * \overline{\mathrm{w}}) = \mathcal{L}\,\overline{\mathrm{u}} \cdot \mathcal{L}\,\overline{\mathrm{w}},\ \forall\ \overline{\mathrm{w}}\in\mathcal{F}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}'}.$$

Demonstrație. Într-adevăr, dacă $\overline{\mathrm{v}}$ este multiplicator în $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{Z}'}$, atunci v_s este multiplicator în $\mathcal{Z}'$, pentru orice $s\in\mathcal{R}$, deci $u_s = \mathcal{F}^{-1}\,v_s$ este con-

---

[5]) Care, pentru transformarea considerată în această Notă, se formulează astfel: „Pentru $\{u_r(t)\}_{r\in\mathcal{R}} \in \mathcal{F}\,\mathcal{C}\,(\mathcal{D},\,\mathcal{D})$, avem $\mathcal{F}(\{u_r(t)\}_{r\in\mathcal{R}}) = \{v_s(\sigma)\}_{s\in\mathcal{R}} =$

$$= \frac{1}{2\pi}\,(\{\mathrm{e}^{-it\sigma}\}_{t\in\mathcal{R}} \underset{21}{\circledast} \{u_r(t)\}_{r\in\mathcal{R}}) \underset{21}{\circledast} \{\mathrm{e}^{irs}\}_{s\in\mathcal{R}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\{\mathrm{e}^{-it\sigma}\}_{t\in\mathcal{R}} \underset{21}{\circledast} (\{u_r(t)\}_{r\in\mathcal{R}} \underset{11}{\circledast} \{\mathrm{e}^{irs}\}_{s\in\mathcal{R}})\text{“}.$$

volutor în $\mathcal{D}'$, pentru orice $s \in \mathcal{R}$, deci $\bar{u} = \{u_s\}_{s\in\mathcal{R}}$ este convolutor în $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}'}$ şi avem

$$\mathcal{L}(\bar{u} * \bar{w}) = \mathcal{L}(\{u_s * w_s\}_{s\in\mathcal{R}}) = \{\mathcal{F}(u_s * w_s)\}_{s\in\mathcal{R}} =$$

$$= \{\mathcal{F} u_s \cdot \mathcal{F} w_s\}_{s\in\mathcal{R}} = \{\mathcal{F} u_s\}_{s\in\mathcal{R}} \cdot \{\mathcal{F} w_s\}_{s\in\mathcal{R}} = \mathcal{L}\bar{u} \cdot \mathcal{L}\bar{w}.$$

Dacă $\bar{u} = \mathcal{L}^{-1}\bar{v}$ este convolutor în $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}'}$, atunci $\bar{v} = \{\mathcal{F} u_s\}_{s\in\mathcal{R}}$ este multiplicator în $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{Z}'}$.

CONSECINŢĂ. *Dacă* $\bar{u} = \{e^{-st} \cdot u(t)\}_{s\in\mathcal{R}}$, *unde* $u \in \mathcal{D}'$ *este un convolutor şi* $\bar{w} = \{e^{-st} \cdot w(t)\}_{s\in\mathcal{R}}$, *unde* $w \in \mathcal{D}'$, *atunci această teoremă se reduce la teorema 4 din Ishihara* [2].

Într-adevăr, avem

$$\overline{\mathcal{L}}(u * w) = \mathcal{L}(\{e^{-st} \cdot (u * w)(t)\}_{s\in\mathcal{R}}) = \mathcal{L}(\{(e^{-st} \cdot u(t)) * (e^{-st} \cdot w(t))\}_{s\in\mathcal{R}}) =$$

$$= \mathcal{L}(\{e^{-st} \cdot u(t)\}_{s\in\mathcal{R}}) \cdot \mathcal{L}(\{e^{-st} \cdot w(t)\}_{s\in\mathcal{R}}) = \overline{\mathcal{L}} u \cdot \overline{\mathcal{L}} w.$$

Analog se arată următoarea:

TEOREMĂ. *Dacă* $\bar{v}$ *este multiplicator în* $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{Z}'}$, *are loc formula*

$$\mathcal{L}^{-1}(\bar{v} \cdot \bar{w}) = \mathcal{L}^{-1}\bar{v} * \mathcal{L}^{-1}\bar{w}, \quad \forall\, \bar{w} \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{Z}'}.$$

CONSECINŢĂ. *Dacă luăm* $\bar{v} = 2\pi\, \{\delta_{\mathcal{Z}}^{is} * v\}_{s\in\mathcal{R}}$, *unde* $v \in \mathcal{Z}'$ *este multiplicator, şi* $\bar{w} = 2\pi\, \{\delta_{\mathcal{Z}}^{is} * w\}_{s\in\mathcal{R}}$, *unde* $w \in \mathcal{Z}'$, *obţinem ca mai sus formula*

$$\overline{\mathcal{L}^{-1}}(v \cdot w) = \overline{\mathcal{L}^{-1}}\, v * \overline{\mathcal{L}^{-1}}\, w.$$

Primită la redacţie la 7 noiembrie 1967

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

TRANSFORMATION DE LAPLACE DES FONCTIONS DISTRIBUTIONNELLES ET ULTRADISTRIBUTIONNELLES

(RÉSUMÉ)

Dans cette note on définit la transformation de Laplace pour des fonctions distributionnelles quelconques, en partant du mode suivant lequel T. Ishihara a défini la transformation de Laplace pour les distributions.

L'envers de la transformation de Laplace est donné de façon différente par rapport à celle de T. Ishihara, en permettant de définir l'envers de la transformation de Laplace pour n'importe quel élément de $\mathcal{Z}'$.

BIBLIOGRAFIE

1. Л. Шварц, *Математические методы для физических наук*. Москва, 1965.

2. T. Ishihara, *On Generalized Laplace Transforms*. Proc. Japan Acad., **37**, *9*, 556–561 (1961).

3. M. Şabac, *Familii compozabile de distribuţii şi transformate Fourier*. St. cerc. mat., **17**, 607–613 (1965).

4. M. Cîrnu, *Sur la transformation de Fourier des fonctions distributionnelles composables*. Revue Roumaine de math. pures et appl., **13**, *1*, 25–34 (1968).

CONTRIBUŢIE LA STUDIUL CATEGORIILOR DE AUTOMATE

DE

L. M. CHIRICĂ

Lucrarea de faţă se ocupă de studiul global al automatelor utilizînd mijloacele teoriei categoriilor. În prima parte a lucrării sînt studiate morfismele, sursele şi produsele directe în categoria automatelor combinatorii, urmînd ca în partea a doua să se considere din aceleaşi puncte de vedere categoria automatelor secvenţiale.

I. AUTOMATE COMBINATORII

§ 1. INTRODUCERE

Definiţia 1.1. Se numeşte automat abstract combinatoriu [1] tripletul $\mathcal{A} = (K, W, F)$, unde K şi W sînt două mulţimi numite respectiv mulţimea comenzilor şi mulţimea execuţiilor automatului $\mathcal{A}$, iar F este o funcţie de la K la W.

Definiţia 1.2. Automatele $\mathcal{A} = (K, W, F)$ şi $\mathcal{A}^* = (K^*, W^*, F^*)$ sînt homomorfe dacă există funcţiile

$$f : K \longrightarrow K^*$$
$$g : W \longrightarrow W^*$$

astfel ca diagrama

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "F"] \arrow[d, "f"'] & W \arrow[d, "g"] \\
K^* \arrow[r, "F^*"] & W^*
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă. Perechea $\alpha = (f, g)$ se zice că este un homomorfism între automatul $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{A}^*$.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 7, P. 957–964, BUCUREŞTI, 1968

În [1] se demonstrează:

Teorema 1.1. *Automatele combinatorii împreună cu homomorfismele formează o categorie.*

Vom nota această categorie prin **Autc**.

§ 2. CATEGORIA $\widetilde{\mathcal{C}}$

Pentru studiul categoriei **Autc** ne vom folosi de o construcţie în teoria categoriilor care apare în [2] şi pe care o descriem în continuare.

Definiţia 2.1. Vom numi automat combinatoriu în categoria $\mathcal{C}$ (sau $\mathcal{C}$-automat) tripletul

$$\mathcal{A} = (A, B, u) \text{ cu } A, B \in \operatorname{Ob} \mathcal{C} \text{ şi } u \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B).$$

Vom scrie $\mathcal{A} \in \operatorname{Ob} \widetilde{\mathcal{C}}$.

Definiţia 2.2. Două $\mathcal{C}$-automate $\mathcal{A} = (A, B, u)$ şi $\mathcal{A}^* = (A^*, B^*, u^*)$ se zic homomorfe dacă există morfismele $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A^*)$ şi $g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B, B^*)$ cu proprietatea

$$gu = u^* f. \tag{1}$$

Perechea $\alpha = (f, g)$ se zice că este un homomorfism între $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{A}^*$ şi vom scrie $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$, sau $\mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{A}^*$.

Definiţia 2.3. Pentru $\alpha = (f, g) \in \operatorname{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ şi $\alpha' = (f', g') \in$ $\in \operatorname{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\mathcal{A}^*, \mathcal{A}^{**})$ definim

$$\alpha'\alpha = (f'f, g'g), \tag{2}$$

a) Să arătăm că $\alpha'\alpha \in \operatorname{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^{**})$.

În diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\
A^* \arrow[r, "u^*"] \arrow[d, "f'"'] & B \arrow[d, "g'"] \\
A^{**} \arrow[r, "u^{**}"] & B^{**}
\end{tikzcd}$$

avem verificate relaţiile $gu = u^* f$ şi $g'u^* = u^{**} f'$ care rezultă din definiţia 2.2. Avem atunci:

$$g'gu = g'u^* f = u^{**} f'f$$

c.c.t.d.

b) Legea de compunere (2) este asociativă.

Fie $\alpha = (f, g) \in \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}_1)$, $\alpha_1 = (f_1, g_1) \in \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ şi $\alpha_2 = (f_2, g_2) \in \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3)$. Avem succesiv

$$\begin{aligned}\alpha(\alpha_1\alpha_2) &= (f, g)(f_1f_2, g_1g_2) = (f(f_1f_2), g(g_1g_2)) = \\ &= ((ff_1)f_2, (gg_1)g_2) = (ff_1, gg_1)(f_2, g_2) = \\ &= (\alpha\alpha_1)\alpha_2 .\end{aligned}$$

c) Pentru orice $\mathcal{A} = (A, B, u) \in \mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathcal{C}}$ avem

$$1_{\mathcal{A}} = (1_A, 1_B) \in \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$$

pentru că $1_{\mathcal{A}}$ verifică relaţia din definiţia (1), adică :

$$1_B u = u 1_A ,$$

căci $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ şi $1_B \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Cu *a*, *b*, *c* putem enunţa :

TEOREMA 2.1. *$\mathcal{C}$-automatele formează o categorie. Vom nota această categorie cu $\widetilde{\mathcal{C}}$.*

Observaţie. Luînd $\mathcal{C} = \mathbf{Ens}$, se vede imediat că

$$\mathbf{Autc} = \widetilde{\mathbf{Ens}}$$

şi atunci demonstraţia dată teoremei 2.1 este o altă demonstraţie pentru teorema 1.1.

★

În continuare vom vedea cum se transpun anumite proprietăţi ale categoriei $\mathcal{C}$ în categoria $\widetilde{\mathcal{C}}$ şi ce consecinţe are aceasta pentru categoria **Autc** ţinînd cont de observaţia de mai înainte.

TEOREMA 2.2. *Dacă $\mathcal{C}$ are obiecte iniţiale* (*finale*), *atunci şi $\widetilde{\mathcal{C}}$ are obiecte iniţiale* (*finale*).

Demonstraţie. Fie I obiect iniţial în $\mathcal{C}$. Vom arăta că $\mathcal{I} = (I, I, 1_I)$ este obiect iniţial în $\widetilde{\mathcal{C}}$. Fie $\mathcal{A} = (A, B, u)$ un obiect în $\widetilde{\mathcal{C}}$. Cum I e obiect iniţial în $\mathcal{C}$, există morfismele $i_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I, A)$, $i_B \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I, B)$ şi sînt unice. Rezultă deci că diagrama

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "1_I"] \arrow[d, "i_A"'] & I \arrow[d, "i_B"] \\ A \arrow[r, "u"] & B \end{tikzcd}$$

este comutativă, adică $i_B 1_I = u i_A$, ceea ce arată că $\alpha_{\mathcal{A}} = (i_A, i_B) \in \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$. Cum $\alpha_{\mathcal{A}}$ este şi unic, rezultă că $\mathcal{I}$ este obiect iniţial în $\widetilde{\mathcal{C}}$. Pentru obiectele finale demonstraţia este duala celei de mai înainte.

CONSECINȚĂ. *Automatul cu mulțimile comenzilor și ale execuțiilor vide este obiect inițial în* **Autc**, *iar automatele cu mulțimile comenzilor și execuțiilor formate dintr-un singur element sînt obiecte finale în* **Autc**. *Evident că toate acestea din urmă sînt izomorfe.*

TEOREMA 2.3. *Dacă $\mathcal{C}$ este o categorie cu obiecte inițiale (finale), $\alpha = (f, g) \in \mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ este monomorfism (epimorfism) dacă și numai dacă f și g sînt monomorfisme (epimorfisme).*

Demonstrație. Presupunem că f și g sînt monomorfisme în $\mathcal{C}$. Fie diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "\alpha"] & \mathcal{B} \\
\mathcal{A}' \arrow[u, shift left, "\alpha_1"] \arrow[u, shift right, "\alpha_2"'] &
\end{tikzcd}$$

în categoria $\tilde{\mathcal{C}}$, cu condiția $\alpha\alpha_1 = \alpha\alpha_2$, unde $\alpha_i = (f_i, g_i)$, $i = 1, 2$. Cum $\alpha\alpha_1 = (ff_1, gg_1) = (ff_2, gg_2) = \alpha\alpha_2$, avem : $ff_1 = ff_2$ și $gg_1 = gg_2$, de unde rezultă că $f_1 = f_2$ și $g_1 = g_2$ adică $\alpha_1 = \alpha_2$.

Invers, presupunem că $\alpha = (f, g)$ este monomorfism în $\tilde{\mathcal{C}}$. Să demonstrăm că f și g sînt monomorfisme în $\mathcal{C}$.

Să arătăm mai întîi despre f. Considerînd că $\mathcal{A} = (A, B, u)$ și că $\mathcal{B} = (C, D, v)$ și că există $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ și f_1, f_2 din $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)$, astfel ca

$$ff_1 = ff_2. \tag{3}$$

Punînd

$$t_i = uf_i \qquad (i = 1, 2) \tag{4}$$

avem diagrama :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, shift right, "f_1"'] \arrow[d, shift left, "f_2"] & X \arrow[d, shift right, "t_1"'] \arrow[d, shift left, "t_2"] \\
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\
C \arrow[r, "v"] & D
\end{tikzcd} \tag{5}$$

Notăm $\mathcal{X} = (X, X, 1_X)$. Din diagrama (5) și din relațiile (4) rezultă că $\alpha_i = (f_i, t_i) \in \mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}}(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, $(i = 1, 2)$, pentru că

$$t_i 1_X = uf_i 1_X = uf_i, \; (i = 1, 2).$$

Din ipoteze avem :

$$guf_1 = vff_1 = vff_1 = vff_2 = guf_2.$$

Cu aceste relații rezultă că :

$$\alpha\alpha_1 = (f, g)(f_1, uf_1) = (ff_1, guf_1) = (ff_2, guf_2) = \alpha\alpha_2$$

și cum α este monomorfism, avem

$$\alpha_1 = \alpha_2 \text{ și deci } f_1 = f_2,$$

ceea ce demonstrează că f este monomorfism în $\mathcal{C}$.

Pentru a demonstra că g este monomorfism, presupunem că există $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ și g_1, g_2 din $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B)$ astfel ca

$$gg_1 = gg_2. \tag{6}$$

Fie I un obiect inițial în $\mathcal{C}$. Formăm diagrama

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "i_A"'] & X \arrow[d, shift right, "g_1"'] \arrow[d, shift left, "g_2"] \\
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\
C \arrow[r, "v"] & D
\end{tikzcd}$$

Cum i_A și i_X sînt unice, avem

$$g_k i_X = u i_A, \quad (k = 1, 2)$$

ceea ce arată că $\alpha_k = (i_A, g_k) \in \operatorname{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$, $(k = 1, 2)$, unde $\mathcal{I} = (I, X, i_X)$. Dar

$$\alpha\alpha_1 = (fi_A, gg_1) = (fi_A, gg_2) = \alpha\alpha_2$$

și deci $\alpha_1 = \alpha_2$ de unde în cele din urmă rezultă că

$$g_1 = g_2$$

adică și g este monomorfism în $\mathcal{C}$.

TEOREMA 2.4. *$\alpha = (f, g) \in \operatorname{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ este izomorfism dacă și numai dacă f și g sînt izomorfisme.*

Demonstrație. Dacă α este izomorfism, atunci există $\beta = (p, q) \in \operatorname{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}}(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ astfel ca

$$\alpha\beta = 1_{\mathcal{B}} \tag{7}$$

$$\beta\alpha = 1_{\mathcal{A}}. \tag{8}$$

Considerînd $\mathcal{A} = (A, B, u)$ și $\mathcal{B} = (C, D, v)$ și știind că $1_{\mathcal{A}} = (1_A, 1_B)$ și $1_{\mathcal{B}} = (1_C, 1_D)$, din relația (7) rezultă $\alpha\beta = (fp, gq) = (1_C, 1_D)$ sau

$$fp = 1_C \tag{9}$$

$$gq = 1_D. \tag{10}$$

Analog

$$\beta\alpha = (pf, qg) = (1_A, 1_B)$$

sau

$$pf = 1_A \tag{11}$$

$$qg = 1_B. \tag{12}$$

Din (9) şi (11) respectiv (10) şi (12) rezultă că f şi g sînt izomorfisme.

Invers, din faptul că f şi g sînt izomorfisme, rezultă că există $p \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ şi $q \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D, B)$ astfel ca

$$fp = 1_C \quad \text{şi} \quad gq = 1_D$$

$$pf = 1_A, \quad qg = 1_B$$

de unde rezultă că $\beta = (p, q) \in \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ are proprietăţile $\alpha\beta = 1_{\mathcal{B}}$ şi $\beta\alpha = 1_{\mathcal{A}}$, care arată că α este monomorfism în $\widetilde{\mathcal{C}}$.

CONSECINŢE. Din teoremele de mai înainte şi din observaţia de la teorema 2.1 rezultă pentru categoria **Autc** că un omomorfism de automate $\alpha = (f, g)$ este :

— monomorfism dacă şi numai dacă f şi g sînt aplicaţii injective ;

— epimorfism dacă şi numai dacă f şi g sînt aplicaţii surjective ;

— izomorfism, dacă şi numai dacă f şi g sînt aplicaţii biunivoce.

Fie $\mathcal{A} = (A, B, u)$ şi $\mathcal{B} = (C, D, v)$ două obiecte din $\widetilde{\mathcal{C}}$. Presupunem că există produse directe pentru obiectele A, C şi B, D în categoria $\mathcal{C}$ pe care le notăm cu $(A \otimes C, p_1, p_2)$, respectiv $(B \otimes D, q_1, q_2)$, unde p_i şi $q_i (i = 1, 2)$ sînt morfismele canonice. Avem diagrama

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[r, "u"] & B & \\
A \otimes C \arrow[ru, "p_1"] \arrow[rru, "up_1"] \arrow[rrr, "w"] \arrow[rd, "p_2"'] \arrow[rrd, "vp_1"] & & & B \otimes D \arrow[lu, "q_1"'] \arrow[ld, "q_2"] \\
& C \arrow[r, "v"'] & D &
\end{tikzcd}$$

În virtutea definiţiei produsului direct $B \otimes D$, rezultă că există morfismul $w \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes C, B \otimes D)$ şi este unic astfel ca

$$q_i w = up_i \quad (i = 1, 2). \tag{13}$$

Vom nota $\mathcal{P} = (A \otimes C, B \otimes D, w)$.

Relaţiile de mai sus arată că

$$\alpha_1 = (p_1, q_1) \in \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\mathcal{P}, \mathcal{A})$$

şi

$$\alpha_2 = (p_2, q_2) \in \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\mathcal{P}, \mathcal{B}).$$

Cu cele spuse mai sus, enunţăm :

TEOREMA 2.5. *$\mathcal{P} \in \mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathcal{C}}$ cu morfismele α_1, α_2 este produsul direct al lui $\mathcal{A}$ cu $\mathcal{B}$.*

Demonstrație. Fie $\mathcal{P}' = (P, Q, w')$ și $\alpha_1' = (p_1', q_1') \in \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\mathcal{P}', \mathcal{A})$, $\alpha_2' = (p_2', q_2') \in \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\mathcal{P}', \mathcal{B})$. Vom arăta că există $\alpha = (p, q) \in \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\mathcal{P}', \mathcal{P})$ și este unic, astfel ca diagrama în categoria $\widetilde{\mathcal{C}}$:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{P} \arrow[dl, "\alpha_1"'] \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\
\mathcal{A} & & \mathcal{B} \\
 & \mathcal{P}' \arrow[uu, "\alpha"] \arrow[ul, "\alpha_1'"] \arrow[ur, "\alpha_2'"'] &
\end{tikzcd} \tag{14}$$

să fie comutativă, adică tocmai faptul că $\mathcal{P}$ este produs direct. Vom transforma diagrama (14) într-o diagramă în categoria $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "u"] & B & \\
A \otimes C \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] \arrow[r, "p"] \arrow[rrr, bend left=80, "w"] & P \arrow[u, "p_1'"] \arrow[d, "p_2'"] \arrow[r, "w'"] & Q \arrow[u, "q_1'"'] \arrow[d, "q_2'"'] \arrow[r, "q"] & B \otimes D \arrow[ul, "q_1"'] \arrow[dl, "q_2"] \\
 & C \arrow[r, "v"] & D &
\end{tikzcd} \tag{15}$$

Morfismele p și q, care apar în diagramă, există și sînt unice, fapt care rezultă din existența produselor directe $A \otimes C$ și $B \otimes D$. Vom arăta că $\alpha = (p, q) \in \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\mathcal{P}', \mathcal{P})$, adică

$$wp = qw'.$$

Aceasta rezultă din unicitatea lui p, q și w. În plus diagrama (15) este comutativă, pentru că

$$\alpha_i' = (p_i', q_i') = (p_i p, q_i q) = \alpha_i \alpha$$

c.c.t.d.

Prin dualitate, se demonstrează că dacă există sumele directe $A \oplus C$ și $B \oplus D$, atunci $\mathcal{S} = (A \oplus C, B \oplus D, s)$ este suma directă a lui $\mathcal{A}$ cu $\mathcal{B}$. Morfismul $s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \oplus C, B \oplus D)$ rezultă din existența sumelor directe $A \oplus C$ și $B \oplus D$ și din diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "u"] \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[drr, "q_1 u"] & B \arrow[dr, "q_1"] & \\
A \oplus C \arrow[rrr] & & & B \oplus D \\
 & C \arrow[ul, "p_2"] \arrow[urr, "q_2 v"] \arrow[r, "v"] & D \arrow[ur, "q_2"'] &
\end{tikzcd}$$

CONSECINȚE. Rezultatele anterioare ne arată că există produsul direct şi suma directă de automate în categoria **Autc** şi că ele se obţin făcînd produsul cartezian al mulţimilor comenzilor şi execuţiilor şi respectiv reuniunea disjunctă a acestora.

Primită la redacție la 25 februarie 1967

Universitatea din București
Facultatea de matematică și mecanică
Str. Academiei nr. 14

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES CATÉGORIES DES AUTOMATA

(RÉSUMÉ)

Dans l'ouvrage [1] on a montré que l'ensemble des automata combinatoires, avec les morphismes des automata, forment une catégorie **Autc**. L'étude des propriétés de cette catégorie (la caractérisation des morphismes, la somme directe, etc.) n'est guère aisée, tel qu'il résulte d'un travail de V. Căzănescu.

Dans l'ouvrage présent on considère la catégorie $\tilde{\mathcal{C}}$ des morphismes d'une catégorie $\mathcal{C}$ et on constate que **Autc** $= \widetilde{\mathbf{Ens}}$. On obtient ainsi plus facilement les propriétés de la catégorie des automata comme résultant des propriétés de la catégorie des ensembles.

BIBLIOGRAFIE

1. GR. C. MOISIL, *Categorii şi automate*, Curs ţinut la facultatea de matematică şi mecanică pentru studenţii secţiei maşini de calcul.
2. I. BUCUR, *Algebră omologică*. Editura didactică și pedagogică, Bucureşti, 1965.

ASUPRA SENSITIVITĂȚII ÎN PROGRAMAREA LINIARĂ

DE

MIHAI DRAGOMIRESCU

În prezenta Notă se dă dezvoltarea optimului și a soluției optime a unui program liniar parametric în serie Taylor în jurul unui punct din spațiul parametrilor pentru care programul liniar corespunzător are soluție optimă unică nedegenerată.

Considerăm problema de programare liniară :

$$\min \{c'x \mid Ax = a,\ x \geqslant 0\} = \mu(a, A, c), \tag{1}$$

unde A este o matrice $m \times n$ cu rang $A = m$, iar $a \in R^m$, $c \in R^n$. Vom studia variația optimului μ pentru variații ale parametrilor a, A, c în jurul unor valori date a_0, A_0, c_0, variații suficient de mici pentru a nu modifica mulțimea indicilor variabilelor de bază în soluția optimă a problemei :

$$\min \{c_0' x \mid A_0 x = a_0,\ x \geqslant 0\}. \tag{2}$$

Presupunînd că (2) are soluție optimă unică nedegenerată, corespunzătoare bazei B_0, există o vecinătate V a lui (a_0, A_0, c_0) pentru care baza optimă a problemei (1) este B și vom da dezvoltarea în serie Taylor în jurul lui (a_0, A_0, c_0) a optimului $\mu(a, A, c)$.

Pentru $(a, A, c) \in V$, soluția optimă a problemei (1) este $x_B = B^{-1} a$, soluția optimă a problemei duale este $y_B' = c_B' B^{-1}$, iar valoarea optimului este :

$$\mu(a, A, c) = c_B' B^{-1} a. \tag{3}$$

Problema se reduce deci la studiul funcționalei :

$$f(a, B, c) = c' B^{-1} a, \tag{4}$$

unde $a \in R^m$, $c \in R^m$ iar B este o matrice $m \times m$. Vom arăta că, dacă B_0 este o matrice nesingulară, atunci f admite următoarea dezvoltare Taylor în jurul punctului (a_0, B_0, c_0) :

$$\begin{gathered} f(a_0 + a,\ B_0 + B,\ c_0 + c) = f_0 + (c' x_0 - y_0' B x_0 + y_0' a) + \\ + (c' B_0^{-1} a - c' B_0^{-1} B x_0 - y_0' B B_0^{-1} a + y_0' B B_0^{-1} B x_0) + \\ +(-c' B_0^{-1} B B_0^{-1} a + c' B_0^{-1} B B_0^{-1} B x_0 + y_0' B B_0^{-1} B B_0^{-1} a - y_0' B B_0^{-1} B B_0^{-1} B x_0) + \ldots \end{gathered} \tag{5}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 7, P. 965–967, BUCUREȘTI, 1968

convergentă pentru:

$$(6) \qquad \| BB_0^{-1} \| < 1.$$

În (5) am notat:

$$(7) \qquad f_0 = c_0' B_0^{-1} a_0$$

valoarea optimului problemei (2) şi:

$$(8) \qquad x_0 = B_0^{-1} a_0$$

$$(9) \qquad y_0' = c_0' B_0^{-1}$$

soluţia optimă a problemei (2) şi, respectiv, a problemei duale.

Dezvoltarea (5) constituie o extindere a formulei de aproximare a lui A. Prekopa,

$$\mu - \mu_0 \approx c' x_0 - y_0' B x_0 + y_0' a$$

folosită în [1] pentru stabilirea normalităţii asimptotice a optimului μ în cazul cînd, în (1), a, A şi c sînt variabile aleatoare de medii a_0, A_0, c_0.

Se ştie că, într-o algebră Banach, dacă e este elementul de unitate şi $\| x \| < 1$, atunci elementul $e - x$ admite invers şi:

$$(e - x)^{-1} = e + \sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

În algebra Banach a matricilor de tip $m \times m$, în ipoteza (6) avem:

$$(10) \qquad (B_0 + B)^{-1} = [(I + BB_0^{-1}) B_0] = B_0^{-1}(I + BB_0^{-1})^{-1} =$$
$$= B_0^{-1} - B_0^{-1} BB_0^{-1} + \ldots + (-1)^n B_0^{-1}(BB_0^{-1})^n + \ldots$$

Notînd $B_0 + B = C$, rezultă dezvoltarea:

$$C^{-1} = C_0^{-1} - C_0^{-1} (C - C_0) C_0^{-1} + C_0^{-1} (C - C_0) C_0^{-1} (C - C_0) C_0^{-1} - \ldots$$

în ipoteza că C_0 este nesingulară şi că $\| (C - C_0) C_0^{-1} \| < 1$.

Din (10) obţinem dezvoltarea soluţiei optime:

$$(B_0 + B)^{-1} (a_0 + a) = x_0 - B_0^{-1} (Bx_0 - a) + B_0^{-1} BB_0^{-1} (Bx_0 - a) -$$
$$B_0^{-1} BB_0^{-1} BB_0^{-1} (Bx_0 - a) + \ldots$$

şi de aici, înmulţind cu $c_0 + c$ la stînga, se obţine (5). Dacă în (5) înlocuim $a_0 + a$, $B_0 + B$, $c_0 + c$ respectiv cu a, B, c, obţinem dezvoltarea echivalentă:

$$-c' B^{-1} a = c_0' B_0^{-1} a_0 +$$
$$+ [(c - c_0)' B_0^{-1} a_0 - c_0' B_0^{-1} (B - B_0) B_0^{-1} a_0 + c_0' B_0^{-1} (a - a_0)] +$$
$$+ [(c - c_0)' B_0^{-1} (a - a_0) - (c - c_0)' B_0^{-1} (B - B_0) B_0^{-1} a_0 -$$
$$- c_0' B_0^{-1} (B - B_0) B_0^{-1} (a - a_0) + c_0' B_0^{-1} (B - B_0) B_0^{-1} (B - B_0) B_0^{-1} a_0] + \ldots$$

Primită la redacţie la 28 noiembrie 1967

Centrul de statistică matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47,
Bucureşti

SENSITIVITY ANALYSIS IN LINEAR PROGRAMMING

(ABSTRACT)

The purpose of this note is to give the Taylor series of the optimum value and of the solution of a linear parametric program around a point of the space of parameters for which the corresponding linear program has a unique nondegenerate optimal solution.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Prékopa, *On the probability distribution of the optimum of a random linear program,* J. Siam Control, **4**, *1* (1966)

GENERALIZAREA METODEI LUI SCHULZ PENTRU CALCULUL INVERSEI UNEI MATRICI

DE

VIORICA GABRIEL şi ILDIKO SERDÜLT

(Cluj)

În lucrare se dă o generalizare a metodei iterative a lui Schulz pentru calculul inversei unei matrici, obţinîndu-se în acest fel procedee iterative de ordin de convergenţă oricît de mare.

Se face de asemenea un studiu comparativ al procedeelor de iteraţie obţinute, definind mai întîi ce se înţelege prin faptul că un procedeu P_1 este mai avantajos decît procedeul P_2.

§ 1. INTRODUCERE

Fie dată matricea nesingulară A, a cărei inversă, A^{-1}, vrem s-o calculăm. Presupunem că am găsit o matrice D_0, pentru care norma¹) matricei

$$F_0 = E - AD_0$$

este strict subunitară, adică :

$$\|F_0\| \leqslant q < 1. \tag{1}$$

Plecînd de la matricea D_0, considerată în acest fel ca o matrice care aproximează matricea A^{-1}, vom construi următorul proces de iteraţie [2] :

$$F_0 = E - AD_0,$$

$$D_k = D_{k-1} + D_{k-1}F_{k-1}, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

$$F_k = E - AD_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3}$$

---

¹) În calitate de normă pentru matricea $F_0 = [f^0_{i,j}]$, $i, j = 1,2, \ldots, n$ putem considera una din expresiile :

$$||F||_m = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |f^0_{i,j}|, \text{ sau } ||F_0||_k = \Big(\sum_{i,j=1}^{n} f^{0^2}_{i,j}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 7, P 969–979, BUCUREŞTI, 1968

În continuare vom arăta că procesul (2), în ipoteza (1) converge, și avem :

$$\lim_{k\to\infty} D_k = A^{-1}.$$

De asemenea, vom căuta să stabilim rapiditatea cu care acest proces de iterație converge către inversa matricei A.

Se observă că

$$F_1 = E - A(D_0 + D_0F_0) = E - AD_0(E + F_0) = E - (E - F_0) \times$$
$$\times (E + F_0) = E - (E - F_0^2) = F_0^2;$$
$$F_2 = E - AD_2 = E - A(D_1 + D_1F_1) = E - AD_1(E + F_1) = E -$$
$$- (E - F_1)(E + F_1) = E - (E - F_1^2) = F_1^2;$$
$$F_2 = F_1^2 = F_0^{2^2}.$$

În general, se demonstrează că

$$F_k = F_0^{2^k}$$

Demonstrația se face prin inducție completă.

Pentru $k = 1$ și 2, după cum am arătat mai sus, avem :

$$F_1 = F_0^2;\ F_2 = F_0^{2^2}.$$

Presupunem acum că

$$F_{k-1} = F_0^{2^{k-1}}.$$

Bazîndu-ne pe cele de mai sus, avem :

$$F_k = E - A\,[D_{k-1}(E + F_{k-1})] = E - AD_{k-1}(E + F_{k-1}) = E -$$
$$- (E - F_{k-1})(E + F_{k-1}) = E - (E - F_{k-1}^2) = F_{k-1}^2.$$

Dar,

$$F_{k-1} = F_0^{2^{k-1}},$$

adică

$$F_k = F_{k-1}^2 = F_0^{2^k},$$

prin urmare, afirmația a fost dovedită.

Avem deci

$$F_k = F_0^{2^k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4}$$

Din formulele (1) și (4) avem :

$$\|F_k\| = \|F_0^{2^k}\| \leqslant \|F_0\|^{2^k} \leqslant q^{2^k}.$$

Pentru aceasta trebuie să demonstrăm că

$$\|F_0^{2^k}\| \leqslant \|F_0\|^{2^k}.$$

Aceasta rezultă ușor dacă ne bazăm pe inegalitatea:

$$\| A \cdot B \| \leqslant \| A \| \; \| B \|.$$

Deoarece $\| F_k \| \leqslant q^{2^k}$ și $q < 1$, avem

$$\lim_{k \to \infty} \| F_k \| = 0.$$

Dar, de aici și din (3) rezultă

$$\lim_{k \to \infty} F_k = \lim_{k \to \infty} (E - AD_k) = 0,$$

adică

$$E - A \lim_{k \to \infty} D_k = 0,$$

de unde

$$\lim_{k \to \infty} D_k = A^{-1} E = A^{-1}.$$

Am demonstrat deci convergența procesului de iterație și anume că D_k pentru $k \to \infty$ are ca limită inversa matricei A.

Presupunem că în acest proces de aproximare, ne oprim la pasul k. Vrem să evaluăm eroarea, adică diferența dintre A^{-1} și D_k:

$$R_k = \| A^{-1} - D_k \| \leqslant \| A^{-1} \| \cdot \| E - AD_k \| = \| A^{-1} \| \cdot \| F_k \| \leqslant \| A^{-1} \| \cdot q^{2^k}$$

Avem

$$AD_0 = E - F_0,$$

de unde

$$A^{-1} = D_0 (E - F_0)^{-1} = D_0 (E + F_0 + F_0^2 + \ldots).$$

Rezultă deci

$$\| A^{-1} \| \leqslant \| D_0 \| \{ \| E \| + q + q^2 + \ldots \} = \| D_0 \| \left\{ \| E \| + \frac{q}{1 - q} \right\}.$$

Avem deci

$$\| A^{-1} \| < \frac{\| D_0 \|}{1 - q}, \tag{4}$$

de unde rezultă, pentru R_k, următoarea inegalitate:

$$\| A^{-1} - D_k \| \leqslant \| D_0 \| \frac{q^{2^k}}{1 - q} \quad (k = 1,2,3,\ldots). \tag{5}$$

Din formula (5) se deduce că ordinul de convergență al procesului (2) este egal cu doi.

Observația 1. Procesul (2)—(3) se poate restrînge la unul singur, după cum urmează:

Din

$$D_k = D_{k-1} + D_{k-1} F_{k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$F_{k-1} = E - AD_{k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

rezultă

$$D_k = D_{k-1} + D_{k-1}(E - AD_{k-1}) = D_{k-1}(2E - AD_{k-1}),$$

adică

$$D_k = D_{k-1}(2E - AD_{k-1}). \tag{6}$$

Acest procedeu este cunoscut în literatură sub denumirea de procedeul lui Schulz [3].

În Nota de față vom arăta că, plecînd de la procesul de iterație dat mai sus, sub forma (2) — (3), prin generalizare, putem obține pe această cale procese de iterație de ordin de convergență oricît de mare.

În cele ce urmează vom trata complet cazul ordinului de convergență 3, și pe urmă cazul ordinului de convergență p, unde $p \geqslant 2$ este un număr natural.

§ 2. PROCES DE ITERAȚIE DE ORDIN DE CONVERGENȚĂ 3

În acest caz, procesul de iterație care generalizează pe (2)—(3) are forma:

$$F_0 = E - AD_0,$$

$$D_k = D_{k-1} + (D_{k-1} + D_{k-1}F_{k-1})F_{k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{2'}$$

$$F_k = E - AD_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3'}$$

Ipoteza (1) și matricea D_0 rămîn aceleași, ca și în cazul ordinului de convergență 2.

Vom arăta și de data aceasta că, în ipoteza (1), procesul (2′) converge, și avem:

$$\lim_{k \to \infty} D_k = A^{-1}.$$

Se observă că:

$$F_1 = E - AD_1 = E - A\,[D_0 + (D_0 + D_0F_0)F_0] = E - (E - F_0) \times$$
$$\times (E + F_0 + F_0^2) = E - E + F_0^3 = F_0^3.$$

Vom demonstra că în general avem:

$$F_k = F_0^{3^k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Demonstrația se face prin inducție completă. Pentru $k = 1$, avem, așa după cum se vede din cele de mai sus:

$$F_1 = F_0^3.$$

Presupunem prin inducţie că

$$F_{k-1} = F_0^{3^{k-1}}.$$

Bazîndu-ne pe aceste ipoteze, avem :

$$F_k = E - AD_{k-1}(E + F_{k-1} + F_{k=1}^2) = E - (E - F_{k-1})(E + F_{k-1} + F_{k-1}^2) =$$
$$= E - (E - F_{k-1}^3) = F_{k-1}^3.$$

Dar $F_{k-1} = F_0^{3^{k-1}}$. Deci

$$F_k = F_0^{3^k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4'}$$

Din formulele (19) şi (4') rezultă

$$\| F_k \| = \| E - AD_k \| = \| F_0^{3^k} \| \leqslant \| F_0 \|^{3^k} \leqslant q^{3^k}.$$

Deoarece $q < 1$, avem :

$$\lim_{k \to \infty} \| F_k \| = 0.$$

Dar,

$$\lim_{k \to \infty} \| F_k \| = \lim_{k \to \infty} (E - AD_k) = E - A \lim_{k \to \infty} D_k = 0,$$

de unde

$$\lim_{k \to \infty} D_k = A^{-1} E = A^{-1}.$$

Am demonstrat deci convergenţa procesului de iteraţie către inversa matricei lui A.

Presupunem că în procesul de aproximare ne oprim la pasul k. Evaluăm diferenţa dintre A^{-1} şi D_k :

$$R_k = \| A^{-1} - D_k \| \leqslant \| A^{-1} \| \cdot \| E - AD_k \| = \| A^{-1} \| \cdot \| F_k \| \leqslant \| A^{-1} \| \cdot q^{3^k}.$$

Dar, conform relaţiei ($\ast$), are loc inegalitatea

$$\| A^{-1} \| < \frac{\| D_0 \|}{1 - q},$$

de unde rezultă că

$$R_k \leqslant \| D_0 \| \cdot \frac{q^{3^k}}{1 - q} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{5'}$$

Din formula (5') se deduce că ordinul de convergenţă al procesului (2') este egal cu 3.

Observaţia 2. Şi în acest caz, procesul de iteraţie se poate restrînge, după cum urmează :

Avem

$$D_k = D_{k-1}(E + F_{k-1} + F_{k-1}^2),$$

adică

$$D_k = D_{k-1} \sum_{i=0}^{2} F_{k-1}^{i} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{6'}$$

Dar $F_{k-1} = E - AD_{k-1}$, de unde rezultă deci

$$D_k = D_{k-1} \sum_{i=0}^{2} (E - AD_{k-1})^{i},$$

sau

$$D_k = D_{k-1} [3E - 3AD_{k-1} + (AD_{k-1})^2]. \tag{6'*}$$

Regăsim pe această cale un analog al procesului de iteraţie al lui Cebîşev pentru calculul unei matrici [1].

§ 3. PROCES DE ITERAŢIE DE ORDIN DE CONVERGENŢĂ p

Procesul de iteraţie pentru acest caz are forma:

$$F_0 = E - AD_0,$$

$$D_k = D_{k-1} \sum_{i=0}^{p-1} F_{k-1}^{i} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{2''}$$

$$F_k = E - AD_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3''}$$

Şi în acest caz se menţine condiţia (1) şi considerăm aceeaşi matrice D_0 ca în cazurile precedente.

Arătăm că, în ipoteza (1), procesul (2'') converge şi

$$\lim_{k \to \infty} D_k = A^{-1}.$$

Avem:

$$F_1 = E - AD_1 = E - A[D_0(E + F_0 + F_0^2 + \ldots + F_0^{p-1})] =$$
$$= E - AD_0(E + F_0 + F_0^2 + \ldots + F_0^{p-1}) = E - (E - F_0)(E + F_0 + F_0^2 + \ldots$$
$$\ldots + F_0^{p-1}) = E - (E + F_0 + F_0^2 + \ldots + F_0^{p-1} - F_0 - F_0^2 - \ldots - F_0^p) =$$
$$= E - (E - F_0^p) = F_0^p;$$
$$F_2 = E - AD_1(E + F_1 + \ldots + F_1^{p-1}) = E - (E - F_1)(E + F_1 + \ldots + F_1^{p-1}) =$$
$$= E - (E + F_1 + \ldots + F_1^{p-1} - F_1 - \ldots - F_1^p) = E - (E - F_1^p) = F_1^p.$$

Dar $F_1 = F_0^p$, de unde rezultă deci că $F_2 = F_0^{p^2}$.

În general, vom demonstra că:

$$F_k = F_0^{p^k} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Demonstraţia se face prin metoda inducţiei complete.

Pentru $k = 1$, $k = 2$, după cum am arătat mai sus, avem:

$$F_1 = F_0^p, \quad F_2 = F_0^{p^2}.$$

Presupunem prin inducţie că $F_{k-1} = F_0^{p^{k-1}}$.

Bazîndu-ne pe cele de mai sus, vom avea:

$$F_k = E - AD_{k-1}(E + F_{k-1} + \ldots + F_{k-1}^{p-1}) = E - (E - F_{k-1})(E + F_{k-1} + \ldots +$$
$$+ F_{k-1}^{p-1}) = E - (E + F_{k-1} + \ldots + F_{k-1}^{p-1} - F_{k-1} - F_{k-1}^2 - \ldots - F_{k-1}^p) =$$
$$= E - (E - F_{k-1}^p) = F_{k-1}^p.$$

Dar

$$F_{k-1} = F_0^{p^{k-1}},$$

adică

$$F_k = F_0^{p^k},$$

ceea ce demonstrează afirmaţia.

Avem deci

$$F_k = F_0^{p^k} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4''}$$

Din formulele (1''), (4'') rezultă

$$\| F_k \| = \| E - AD_k \| = \| F_0^{p^k} \| \leqslant \| F_0 \|^{p^k} \leqslant q^{p^k}.$$

Dar întrucît $q < 1$, avem

$$\lim_{k \to \infty} \| F_k \| = 0,$$

$$\lim_{k \to \infty} \| F_k \| = \lim_{k \to \infty} (E - AD_k) = E - A \lim_{k \to \infty} D_k = 0,$$

de unde,

$$\lim_{k \to \infty} D_k = A^{-1}.$$

S-a demonstrat astfel convergenţa procesului de iteraţie definit prin (2'') — (3''), limita şirului D_k fiind A^{-1}.

Presupunînd în continuare că în procesul de iteraţie ne oprim la pasul k, vom evalua diferenţa dintre A^{-1} şi D_k:

$$R_k = \| A^{-1} - D_k \| \leqslant \| A^{-1} \| \cdot \| E - AD_k \| = \| A^{-1} \| \; \| F_k \| \leqslant \| A^{-1} \| \, q^{p^k}.$$

Dar, conform relaţiei (*),

$$\| A^{-1} \| < \frac{\| D_0 \|}{1 - q}.$$

Vom avea

$$R_k \leqslant \| D_0 \| \frac{q^{p^k}}{1 - q} \qquad (k = 1,2,3,\ldots). \tag{5''}$$

Din această ultimă formulă se deduce că ordinul de convergență al procesului (2'') este p. Dar, întrucît $p \geqslant 2$ este un număr natural oarecare, vom putea obține ordine de convergență oricît de mari dorim.

Observația 3. Și în acest caz, cele două formule (2'') — (3'') care dau procesul de iterație se pot restrînge la una singură, după cum urmează :

$$D_k = D_{k-1} \sum_{i=0}^{p-1} F_{k-1}^i. \tag{6''}$$

Dar,

$$F_{k-1} = E - AD_{k-1}.$$

Rezultă deci

$$D_k = D_{k-1} \sum_{i=0}^{p-1} (E - AD_{k-1})^i.$$

§ 4. STUDIUL COMPARATIV AL PROCESELOR DE ITERAȚIE, RELATIV LA NUMĂRUL DE OPERAȚII

Fie P_1 și P_2 două procese iterative de forma (2'') și (3''). Pentru fixarea ideilor, să presupunem că P_1 are ordinul de convergență p și P_2 are ordinul de convergență $r\,(r < p)$.

Din inegalitatea (5''), pentru același D_0, deducem că eroarea la pasul μ pentru procesul de iterație P_1 este

$$\| A^{-1} - D_\mu \| \leqslant \| D_0 \| \frac{q^{p^\mu}}{1 - q},$$

iar pentru procesul P_2, după s pași, avem

$$\| A^{-1} - D_s \| \leqslant \| D_0 \| \frac{q^{n^s}}{1 - q}.$$

Pentru ca eroarea să aibă aceeași margine superioară, este necesar și suficient să fie verificată egalitatea

$$\mu = s \frac{\ln r}{\ln p}. \tag{7}$$

În continuare, vom calcula numărul de operații care trebuie efectuate pentru un singur pas, atunci cînd procesul de iterație are de exemplu ordinul de convergență p.

Din (2''), (3'') vom conveni să calculăm suma

$$\sum_{i=0}^{p-1} F_{k-1}^i$$

după următorul algoritm :

$$\sum_{i=0}^{p-1} F_{k-1}^i = F_{k-1}^{p-1} + F_{k-1}^{p-2} + F_{k-1}^{p-3} + \ldots + F_{k-1} + E = [(((\ldots (F_k + E) F_k +$$

$$+ E) F_k + E) F_k + E) F_k + E] + E.$$

În acest fel, vom calcula numărul de operaţii necesare pentru efectuarea acestei sume.

Avînd în vedere că avem de efectuat $(p-1)$ adunări şi $(p-2)$ înmulţiri de matrici, şi că pentru o adunare trebuie să facem n^2 operaţii, iar pentru o înmulţire $n^2(2n-1)$ operaţii, numărul de operaţii pentru calculul lui

$$\sum_{i=0}^{p-1} F_{k-1}^{i}$$

este

$$2n^3 p - 4n^3 + n^2.$$

Dar $F_{k-1} = E - AD_{k-1}$, deci, pentru calcularea lui F_{k-1}, avem de făcut $2\,n^3$ operaţii.

Ţinînd cont de formula (2″), pentru calculul lui F_k mai avem nevoie de încă o înmulţire de două matrici şi deci trebuie să mai efectuăm încă $n^2(2n-1)$ operaţii. Aşadar, numărul de operaţii în final va fi $2n^3 p$.

Definiţie. Spunem că procesul de iteraţie P_1 este avantajos procesului de iteraţie P_2, dacă numărul de operaţii efectuate pentru a obţine în final aceeaşi eroare este în cazul procesului iterativ P_1 mai mic decît în cazul lui P_2.

Teorema 1. *Dacă P_1 şi P_2 sînt două procese iterative, respectiv de ordine de convergenţă p şi r $(p > r)$, condiţia necesară şi suficientă ca procesul P_1 să fie avantajos procesului P_2 este ca p şi r să satisfacă următoarea inegalitate :*

$$\frac{\ln r}{\ln p} < \frac{r}{p} \quad (r^p < p^r).$$

Demonstraţie. Necesitatea condiţiei. Punem condiţia ca procesul de iteraţie P_1 să fie avantajos procesului P_2.

Ţinînd cont de (7) şi de numărul de operaţii mai sus stabilit, avem :

$$2n^3 ps \frac{\ln r}{\ln p} < s \cdot 2n^3 r,$$

sau

$$p \frac{\ln r}{\ln p} < r, \tag{8}$$

adică

$$\frac{\ln r}{\ln p} < \frac{r}{p}.$$

Suficienţa condiţiei rezultă imediat dacă parcurgem calea inversă de la procedeul de demonstraţie al necesităţii condiţiei teoremei.

Teorema 2. *Procesul de iteraţie de ordinul de convergenţă 3 este cel mai avantajos.*

Demonstrație. Inegalitatea (8) este echivalentă cu următoarea

$$(9) \qquad \frac{\ln r}{r} < \frac{\ln p}{p} \quad (r < p).$$

Considerăm funcția $y = \dfrac{\ln x}{x}$. Se observă că inegalitatea (9) este satisfăcută pe intervalul $I \in R_+$ pe care funcția $y = \dfrac{\ln x}{x}$ este strict crescătoare.

Calculînd prima derivată a funcției $y = \dfrac{\ln x}{x}$ obținem

$$y = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

care se anulează pentru $x = e$. De asemenea se observă ușor că pe punctul $x = e$, funcția $y = \dfrac{\ln x}{x}$ are un maxim. Atunci este evident că $I = [0, e]$ este intervalul căutat.

De aici se deduce imediat că oricare ar fi numărul natural r, are loc inegalitatea $\dfrac{\ln r}{r} < \dfrac{\ln 3}{3}$, ceea ce completează demonstrația teoremei.

Observație. Funcția $y = \dfrac{\ln x}{x}$ poate fi considerată ca o caracteristică a clasei de procese iterative descrise în § 3. Aceasta deoarece acel proces iterativ este cel mai avantajos (în sensul definiției noastre) pentru care funcția $y = \dfrac{\ln r}{r}$ ia valoarea maximă, unde r este ordinul de convergență al procesului considerat.

De asemenea, dacă p și r sînt respectiv ordinele de convergență a două procedee P_1 și P_2 și dacă

$$\frac{\ln r}{r} < \frac{\ln p}{p},$$

atunci procesul P_1 este mai avantajos decît procesul P_2.

Primită la redacție la 28 noiembrie 1967

Universitatea „Babeș-Bolyai", Cluj
Facultatea de matematică-mecanică, Catedra de Analiză

GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE DE SCHULZ POUR LE CALCUL DE L'INVERSE D'UNE MATRICE

(RÉSUMÉ)

On présente une généralisation de la méthode itérative de Schulz pour le calcul de l'inverse d'une matrice, en obtenant des procédés itératifs d'ordre de convergence aussi grand qu'on le veut et en effectuant ensuite une étude comparative de ces procédés dans le sens de la définition suivante : Le procédé d'itération P_1 est plus avantageux que le procédé d'itération P_2, si le nombre d'opérations effectuées pour obtenir la solution du problème avec la même erreur est dans le cas du procédé P_1 plus petit que dans le cas de P_2. On obtient le théorème :

Si les ordres de convergence des procédés itératifs P_1 *et* P_2 *sont* p, *respectivement* r $(p > r)$ *alors la condition nécessaire et suffisante pour que* P_1 *soit plus avantageux que* P_2 *est que l'inégalité suivante ait lieu :* $p.\ln r < r.\ln p$. *Le procédé d'itération de l'ordre de convergence* 3 *est le plus avantageux.*

BIBLIOGRAFIE

1. И. С. БЕРЕЗИН, Н. П. ЗИДКОВ, *Методы вычислений.* Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1962, vol. 2, p.62.
2. Б. П. ДЕМИДОВИЧ, И. А. МАРОН, *Основы вычислительной математики.* Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1960, pp. 310—312, 238—239.
3. JANKO BÉLA, *Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuaţii liniare.* Editura Academiei R.P.R., Bucureşti, 1961, pp. 206 – 208.

ASUPRA METODEI COARDEI ŞI A UNEI MODIFICĂRI A EI PENTRU REZOLVAREA ECUAŢIILOR OPERAŢIONALE NELINIARE

DE

G. GOLDNER şi M. BALÁZS

(Cluj)

În lucrarea de faţă se studiază convergenţa metodei date în [1], în cazul cînd diferenţele divizate nu sînt simetrice, arătînd în prealabil cîteva proprietăţi ale diferenţelor divizate. Se mai arată convergenţa unui procedeu modificat al metodei din [1].

În lucrarea de faţă vom îmbunătăţi metoda coardei dată de Sergheev [1] pentru rezolvarea ecuaţiei operaţionale neliniare

$$P(x) = 0 \tag{1}$$

şi vom da o modificare a algoritmului dat de Sergheev. În lucrarea citată se utilizează definiţii restrictive ale diferenţelor divizate pe care le dăm mai jos şi le vom folosi în § 3.

Fie $P(x)$ un operator definit în spaţiul Banach X, cu valori în spaţiul Y de acelaşi tip. Notăm cu $(X \to Y)$ spaţiul operatorilor liniari care transformă spaţiul X în Y. Notăm de asemenea cu $[X \to (X \to Y)]$ spaţiul operatorilor liniari care transformă spaţiul X în spaţiul $(X \to Y)$.

DEFINIŢIA 1. Dacă există operatorul liniar $D(x_1, x_2; P(x))$, $(X^2 \overset{D}{\to} (X \to Y))$, astfel încît :

a) $D(x_1, x_2; P(x))(x_1 - x_2) = P(x_1) - P(x_2)$,

b) $D(x_1, x_2; P(x))$ este simetric în raport cu x_1, x_2, atunci $D(x_1, x_2; P(x))$ se numeşte diferenţă divizată de ordinul întîi al operatorului $P(x)$, în punctele x_1, x_2, $(x_1 \neq x_2)$.

DEFINIŢIA 2. Dacă există operatorul liniar $D(x_1, x_2, x_3; P(x))$ $(X^3 \overset{D}{\to} [X \to (X \to Y)])$ astfel încît

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 7, P. 981–990, BUCUREŞTI, 1968

a) $D(x_1, x_2, x_3; P(x))(x_1 - x_2) = D(x_1, x_3; P(x)) - D(x_2, x_3; P(x))$,

b) $D(x_1, x_2, x_3; P(x))$ este simetric în raport cu x_1, x_2, x_3, atunci operatorul $D(x_1, x_2, x_3; P(x))$ se numeşte diferenţa divizată de ordinul doi a operatorului $P(x)$ în punctele distincte x_1, x_2, x_3.

În § 1 vom utiliza definiţiile date de Ulm [2] diferenţelor divizate. În stabilirea proprietăţilor din § 1 şi § 2 este de fapt suficient să presupunem îndeplinirea pentru operatorii liniari a primei condiţii (dată de Schröder [3]), dar din cauză că în aplicaţiile concrete o condiţie suplimentară conduce la simplificări vom da o altă definiţie ([2]) a diferenţelor divizate.

Definiţia 3. Dacă există operatorul liniar $D(x_1, x_2; P(x))$, $(X \overset{D}{\rightarrow} (X \rightarrow Y))$ astfel încît

a) $D(x_1, x_2; P(x))(x_1 - x_2) = P(x_1) - P(x_2)$

b) în cazul existenţei derivatei Fréchet $P'(x)$

$$\lim_{\substack{x_1 \to x \\ x_2 \to x}} D(x_1, x_2; P(x)) = D(x, x; P(x)) = P'(x)$$

atunci operatorul $D(x_1, x_2; P(x))$ se numeşte diferenţa divizată de ordinul întîi a operatorului $P(x)$ în punctele distincte x_1, x_2.

Observaţie. Diferenţa divizată astfel definită nu este unic determinată. Putem da următorul exemplu (vezi [2]) :

Fie $X = R^2$, $Y = R$, $P(x) = f(u, v)$.

Fiind date două puncte $x'(u', v')$ şi $x''(u'', v'')$, se vede că există trei operatori diferiţi care verifică cele două condiţii ale definiţiei 3 :

$$D_1(x', x''; P(x)) = \left(\frac{f(u', v') - f(u'', v')}{u' - u''}, \frac{f(u'', v') - f(u'', v'')}{v' - v''}\right)$$

$$D_2(x', x''; P(x)) = \left(\frac{f(u'', v'') - f(u', v'')}{u'' - u'}, \frac{f(u', v'') - f(u', v')}{v'' - v'}\right)$$

$$D_3(x', x''; P(x)) = \left(\int_0^1 f'_u(u'' + t(u' - u''), v'' + t(v' - v''))\,dt,\right.$$

$$\left.\int_0^1 f'_v(u'' + t(u' - u''), v' + t(v' - v''))\,dt\right)$$

Se poate arăta că D_1, D_2, D_3 satisfac condiţiile definiţiei 3, deci oricare dintre ei poate fi considerat ca diferenţă divizată de ordinul întîi a operatorului $P(x)$ în punctele x', x''. În general alegem ca diferenţă divizată acel operator dintre cei care satisfac condiţiile definiţiei, care corespunde scopurilor pe care ni le-am propus.

Definiţia 4. Dacă există operatorul liniar $D(x_1, x_2, x_3; P(x))$, $(X^3 \overset{D}{\rightarrow} [X \rightarrow (X \rightarrow Y)])$ astfel încît

a) $D(x_1, x_2, x_3, P(x))(x_1 - x_3) = D(x_1, x_2; P(x)) - D(x_2, x_3; P(x))$

b) în cazul existenţei derivatei Fréchet $P''(x)$

$$\lim_{\substack{x_1 \to x \\ x_2 \to x \\ x_3 \to x}} D(x_1, x_2, x_3; P(x)) = D(x, x, x; P(x)) = \frac{1}{2} P''(x)$$

atunci $D(x_1, x_2, x_3; P(x))$ se numește diferență divizată de ordinul doi a operatorului $P(x)$ în punctele distincte x_1, x_2, x_3.

Observații. 1. Putem concepe diferența divizată de ordinul doi a lui $P(x)$ ca diferență divizată de ordinul întîi a operatorului $D(x, x_1; P(x))$ sau $D(x_1, x; P(x))$.

2. Din observația precedentă și din definiție rezultă că putem defini în diferite moduri diferența divizată de ordinul doi a lui $P(x)$ pentru aceleași puncte x_1, x_2, x_3.

§ 1. UNELE PROPRIETĂȚI ALE DIFERENȚELOR DIVIZATE

Vom demonstra cîteva proprietăți ale diferențelor divizate definite prin definițiile 3 și 4, pe care le vom utiliza în paragrafele următoare.

LEMA 1. *Dacă pentru operatorul* $P_1(x)$ *există diferența divizată de ordinul întîi* $D(x_1, x_2; P_1(x))$ *și pentru operatorul* $P_2(x)$ *există diferența divizată de ordiul întîi* $D(x_1, x_2; P_2(x))$, *atunci operatorul liniar* $[D(x_1, x_2; P_1(x)) + D(x_1, x_2; P_2(x))]$ *este diferență divizată de ordinul întîi pentru operatorul* $P_1 + P_2$.

Într-adevăr,

$$[D(x_1, x_2; P_1(x)) + D(x_1, x_2; P_2(x))](x_1 - x_2) = P_1(x_1) - P_1(x_2) +$$

$$+ P_2(x_1) - P_2(x_2) = [P_1(x_1) + P_2(x_1)] - [P_1(x_2) + P_2(x_2)]$$

deci condiția a) e verificată. Condiția b) este verificată pe baza definiției 3 și a regulii de derivare a sumei operatorilor.

LEMA 2. *Dacă pentru operatorul* $Q(x)$, $(X \xrightarrow{Q} Y)$, *există diferența divizată de ordinul întîi* $D(x_1, x_2; Q(x))$ *și pentru operatorul* $P(y)$, $(Y \xrightarrow{P} Z)$, *există diferența divizată de ordinul întîi* $D(y_1, y_2; P(y))$, *unde* $y_1 = Q(x_1), y_2 = Q(x_2), y = Q(x)$, *atunci operatorul* $D(Q(x_1), Q(x_2); P[Q(x)])$ $D(x_1, x_2; Q(x))$ *este diferența divizată de ordinul întîi pentru operatorul* $PQ = P[Q(x)]$.

Într-adevăr,

$$D(Q(x_1), Q(x_2); P[Q(x)])\, D(x_1, x_2; Q(x))(x_1 - x_2) =$$

$$= D(Q(x_1), Q(x_2); P[Q(x)])\, [Q(x_1) - Q(x_2)] = P[Q(x_1)] - P[Q(x_2)]$$

și deci condiția a) e verificată. Condiția *b*) este verificată pe baza definiției 3 și a regulii de derivare a produsului de operatori.

LEMA 3. *Dacă* $L(x)$ *este un operator liniar* $(X \xrightarrow{L} Y)$, *atunci operatorul* L *este diferență divizată de ordinul întîi al lui* $L(x)$, *iar diferența divizată de ordinul doi a acestui operator este* O.

Într-adevăr, condițiile a) din definițiile 3 și 4 rezultă din egalitățile

$$L(x_1 - x_2) = L(x_1) - L(x_2)$$

$$D(x_1, x_2; L(x)) - D(x_2, x_3; L(x)) = L - L = 0.$$

Condițiile b) rezultă din $L'(x) = L$ și $L''(x) = 0$.

Din lema 2 și lema 3 rezultă următoarea

CONSECINŢĂ. *Dacă pentru operatorul* $P(x)$, $(X \xrightarrow{P} Y)$, *există diferenţa divizată de ordinul întîi* $D(x_1, x_2; P(x))$, *atunci operatorul* $L\, D(x_1, x_2; P(x))$ *este diferenţa divizată pentru operatorul* $L P = L\,[P(x)]$, *unde* $L(y)$, $(Y \xrightarrow{L} Z)$, *este un operator liniar.*

Această consecinţă arată că operatorul liniar joacă rolul unei constante în calcularea diferenţei divizate a unui produs, analog rolului său la operaţia de derivare.

Observaţii. 1. Lemele 1—3 şi consecinţa sînt evident adevărate şi în cazul diferenţelor divizate simetrice.

2. Lema 1 şi consecinţa pot fi transpuse fără nici o dificultate şi pentru diferenţele divizate de ordinul al doilea, fapt care se vede din observaţia 1 de la definiţia 4.

§ 2. METODA COARDEI PENTRU REZOLVAREA ECUAŢIILOR OPERAŢIONALE NELINIARE ÎN CAZUL DIFERENŢELOR DIVIZATE NESIMETRICE

Aplicăm metoda generalizată a coardei pentru demonstrarea existenţei soluţiei ecuaţiei (1) utilizînd definiţiile 3 şi 4 pentru diferenţele divizate (de fapt numai condiţiile a) din aceste definiţii) fără a cere simetria acestora, lărgind posibilitatea aplicării metodei dată de Sergheev.

Vom utiliza notaţiile $D(x_3, x_2, x_1; P(x)) = P(x_3, x_2, x_1)$ şi $D(x_2, x_1; P(x)) = P(x_2, x_1)$. Din definiţia diferenţelor divizate rezultă

$$P(x_3, x_2, x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = P(x_3) - P(x_2) - P(x_2, x_1)(x_3 - x_2)$$

de unde obţinem evaluarea

$$\| P(x_3) - P(x_2) - P(x_2, x_1)(x_3 - x_2) \| \leqslant \| P(x_3, x_2, x_1) \| \cdot \cdot \| x_3 - x_1 \| \, \| x_3 - x_2 \| \tag{2}$$

Fie operatorul continuu cu diferenţele divizate $P(x'', x')$ şi $P(x''', x'', x')$ existînd într-o sferă bine precizată din X. Metoda coardei este dată de algoritmul

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n P(x_n), \text{ unde } \Gamma_n = [P(x_n, x_{n-1})]^{-1}. \tag{3}$$

Se consideră punctele x_0 şi x_0' din domeniul de existenţă al operatorului $P(x)$ astfel ca să verifice condiţiile din teorema 1.

TEOREMA 1. *Dacă* :

1° *există* $\Gamma_0 = [P(x_0, x_0')]^{-1}$ *şi* $\| \Gamma_0 \| \leqslant B_0$;

2° $\| \Gamma_0 P(x_0) \| \leqslant \eta_0, \| x_0 - x_0' \| \leqslant \eta_0', (\eta_0 \leqslant \eta_0')$;

3° $\| P(u, v, z) \| \leqslant K$ *pentru orice* u, v, z *din sfera definită de inegalitatea* $\| x - x_0 \| \leqslant 2\eta_0'$;

4° $h_0 = B_0(\eta_0 + \eta_0') K < \dfrac{1}{4}$

atunci ecuația (1) are cel puțin o soluție x^* *către care converge șirul (3), iar rapiditatea convergenței se caracterizează prin*

$$(4) \qquad \| x_n - x^* \| \leqslant \frac{1}{2^{s_n - 1}} q^{s_n - 1} (4h_0)^{s_n} \eta_0 ,$$

unde $0 < q < 1$, *iar* s_n *este suma parțială a seriei lui Fibonacci.*

Demonstrație. Vom urma raționamentul din [1]. Arătăm că prin trecere la iterata x_1 condițiile 1° — 4° rămîn valabile.

1° Considerăm operatorul

$$\Gamma_0 \overline{P}_1 = \Gamma_0 [P(x_0, x_0') - P(x_1, x_0)] = - \Gamma_0 P(x_1, x_0, x_0')(x_1 - x_0').$$

Din condițiile 1° — 4° și din algoritmul (3) obținem

$$\| \Gamma_0 \overline{P}_1 \| \leqslant B_0 K (\eta_0 + \eta_0') = h_0 < \frac{1}{4} < 1, \text{ deoarece } \| x_1 - x_0 \| \leqslant \eta_0 + \\ + \eta_0' \leqslant 2\eta_0'$$

și de aici rezultă existența operatorului

$$H_1^{-1} = (I - \Gamma_0 \overline{P}_1)^{-1} \text{ astfel că } \| H_1^{-1} \| \leqslant \frac{1}{1 - h_0} .$$

Deoarece $\Gamma_1 = H_1^{-1} \Gamma_0$,

$$\| \Gamma_1 \| \leqslant \frac{B_0}{1 - h_0} = B_1 \text{ și } B_1 > B_0 .$$

2° Aplicînd formula (2) operatorului $\Gamma_0 P(x)$ în punctele x_1, x_0 x_0', obținem

$$\| \Gamma_0 P(x_1) - \Gamma_0 P(x_0) - \Gamma_0 P(x_0, x_0')(x_1 - x_0) \| \leqslant \| \Gamma_0 \| \, \| P(x_1, x_0, x_0') \| \cdot \\ \cdot \| x_1 - x_0' \| \cdot \| x_1 - x_0 \| .$$

De aici, utilizînd condițiile teoremei,

$$\| \Gamma_0 P(x_1) - \Gamma_0 (x_0) - (x_1 - x_0) \| \leqslant B_0 K (\eta_0 + \eta_0') \eta_0$$

și aplicînd algoritmul (3) avem

$$\| \Gamma_0 P(x_1) \| \leqslant h_0 \eta_0 .$$

Deci

$$\| \Gamma_1 P(x_1) \| \leqslant \| H_1^{-1} \| \| \Gamma_0 P(x_1) \| \leqslant \frac{h_0}{1 - h_0} \eta_0 = \eta_1 < \eta_0$$

și $\| x_1 - x_0 \| \leqslant \eta_0 \leqslant \eta_0'$.

3° Condiția este evidentă.

$$4° \; h_1 = B_1 (\eta_1 + \eta_0) K = B_1 \frac{B_0 K^2 (\eta_\theta + \eta_0')}{1 - h_0} \eta_0 + \frac{B_0 \eta_0 K}{1 - h_0} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{h_0}{2(1 - h_0)} + \frac{h_0^2}{2(1 - h_0)^2} \leqslant \frac{8}{9} h_0 = q h_0 < \frac{1}{4} .$$

Arătăm acum analog că și prin trecerea la iterata x_2 condițiile 1°—4° sînt verificate.

1°. $\Gamma_1 \overline{P}_2 = \Gamma_1 [P(x_1, x_0) - P(x_2, x_1)] = - \Gamma_1 P(x_2, x_1, x_0)(x_2 - x_0)$

$\| \Gamma_1 \overline{P}_2 \| \leqslant B_1 K(\eta_1 + \eta_0) = h_1 < \frac{1}{4} < 1$, deoarece $\| x_2 - x_0 \| \leqslant 2\eta_0'$. Deci există $H_2^{-1} = (I - \Gamma_1 \overline{P}_2)^{-1}$, $\| H_2^{-1} \| \leqslant \frac{1}{1-h_1}$ și cum $\Gamma_2 = H_2^{-1} \Gamma_1$, rezultă

$$\| \Gamma_2 \| \leqslant \frac{B_1}{1-h_1} = B_2$$

2°. Ca și în cazul precedent obținem

$$\| \Gamma_1 P(x_2) \| \leqslant B_1 K(\eta_1 + \eta_0)\eta_1 = h_1 \eta_1$$

și

$$\| \Gamma_2 P(x_2) \| \leqslant \frac{h_1}{1-h_1} \eta_1 = \eta_2 < \eta_1.$$

3°. Este evident verificată.

$$4°.\ h_2 = B_2 K(\eta_2 + \eta_1) \leqslant \frac{B_1 K(\eta_0 + \eta_1) h_0}{(1 - h_1)^2} = \frac{h_0 h_1}{(1 - h_1)^2} \leqslant \frac{9}{98} h_0 < \frac{1}{4}.$$

Continuînd procedeul obținem numerele B_n, η_n, h_n, care verifică relațiile demonstrabile prin inducție matematică:

$$B_n = \frac{B_{n-1}}{1 - h_{n-1}}, \quad \eta_n = \frac{h_{n-1}}{1 - h_{n-1}} \eta_{n-1}.$$

Se mai poate demonstra inegalitatea $\| x_n - x_{n-1} \| \leqslant \eta_{n-1}$ și din $h_n \leqslant \frac{h_{n-1} h_{n-2}}{(1 - h_{n-1})^2}$ $h_n \leqslant 2h_{n-1} . h_{n-2}$, pentru $n \geqslant 2$.

Pentru numerele h_n au loc inegalitățile

$$h_0 = h_0;\ h_1 \leqslant q h_0;\ h_2 \leqslant 2h_1 h_0 \leqslant 2h_0^2 q;\ h_3 \leqslant 2^2 q^2 h_0^3;$$

$$h_4 \leqslant 2^4 q^3 h_0^5;\ h_5 = 2^7 q^5 h_0^8;\ \ldots$$

Observăm că exponenții lui h_0^α și q^β se obțin prin adunarea exponenților a două puteri precedente, deci sînt termenii seriei lui Fibonacci

$$u_n = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Deci $h_n \leqslant 2^{u_{n+1} - 1} q^{u_n} h_0^{u_{n+1}} = \frac{1}{2} q^{v_n} (2h_0)^{u_{n+1}}$

Să delimităm pe η_n, notînd cu s_n termenul general al şirului sumelor parţiale ale seriei lui Fibonacci ($s_n = u_{n+2} - 1$) :

$$\eta_1 \leqslant \frac{4}{3} h_0 \eta_0$$

$$\eta_2 \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^2 q\, h_0^2\, \eta_0 .$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\eta_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n q^{s_{n-1}} (2h_0)^{s_n} \eta_0 .$$

Putem arăta că

$$(5) \qquad \| x_{n+p} - x_n \| = \eta_{n+p-1} + \dots + \eta_n \leqslant \frac{1}{2^{s_n - 1}} q^{s_{n-1}} (4h_0)^{s_n} \eta_0 .$$

Deoarece X este un spaţiu Banach, există

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x^* .$$

Demonstrarea faptului că x^* este soluţia ecuaţiei (1) este aceeaşi ca şi în [1].

Putem modifica teorema, renunţînd la condiţia de mărginire a operatorului Γ_0.

TEOREMA 2. *Dacă :*

1° *Există* $\Gamma_0 = [P(x_0, x_0')]^{-1}$;

2° $\| \Gamma_0 P(x_0) \| \leqslant \eta_0$ şi $\| x_0 - x_0' \| \leqslant \eta_0'$, $(\eta_0 \leqslant \eta_0')$;

3° $\| \Gamma_0 P(u, v, z) \| \leqslant \widetilde{K}$ *în sfera definită de* $\| x - x_0 \| \leqslant 2\eta_0'$;

4° $\tilde{h}_0 = (\eta_0 + \eta_0') \widetilde{K} < \frac{1}{4}$,

atunci ecuaţia (1) are cel puţin o soluţie x^*, către care converge şirul (3), iar rapiditatea convergenţei este caracterizată prin inegalitatea (4) în care în loc de h_0 avem $\tilde{h}_0$.

Demonstraţie. Considerăm ecuaţia

$$(1') \quad \widetilde{P}(x) = 0, \text{ unde } \widetilde{P}(x) = \Gamma_0 P(x).$$

Ecuaţiile (1) şi (1′) sînt echivalente :

Dacă $P(x^*) = 0$, rezultă, evident, $\Gamma_0 P(x^*) = 0$, dacă $\Gamma_0 P(x^*) = 0$, aplicăm ambilor membri ai ecuaţiei (1) operatorul $P(x_0, x_0')$ şi obţinem $P(x^*) = 0$.

Să arătăm că pentru ecuaţia (1′) sînt satisfăcute condiţiile teoremei 1 :

1°. Deoarece $\widetilde{\Gamma}_0 = [\widetilde{P}(x_0, x_0')]^{-1} = [\Gamma_0 P(x_0, x_0')]^{-1} = I$, rezultă că $\widetilde{B}_0 = 1$.

2°. $\| \widetilde{\Gamma}_0 \widetilde{P}(x_0) \| \leqslant \| \widetilde{P}(x_0) \| = \| \Gamma_0 P(x_0) \| \leqslant \eta_0$ şi $\| x_0 - x_0' \| \leqslant \eta_0'$.

3°. $\| \widetilde{P}(u, v, z) \| = \| \Gamma_0 P(u, v, z) \| \leqslant \widetilde{K}$ în sfera definită de $\| x - x_0 \| \leqslant \leqslant 2\eta_0'$.

$$4^\circ.\ \tilde{h}_0 = (\eta_0 + \eta_0')\widetilde{B}_0\widetilde{K} = (\eta_0 + \eta_0')\widetilde{K} < \frac{1}{4}.$$

Deci ecuaţia (1^1) are o soluţie x^*, care este limita şirului $(\widetilde{x}_n)$ construit prin algoritmul (3) în cazul ecuaţiei ($1'$) şi are loc inegalitatea (4), unde în loc de x_n vom lua $\widetilde{x}_n$.

Putem să arătăm că prin algoritmul (3) pornind de la aceleaşi aproximaţii iniţiale x_0, x_0', avem $x_n = \widetilde{x}_n$.

Demonstrăm prin inducţie matematică. Conform condiţiei avem

$$\widetilde{x}_0 = x_0,\ \widetilde{x}_0' = x_0'.$$

Presupunem că $\widetilde{x}_n = x_n$, de unde

$$\widetilde{x}_{n+1} = \widetilde{x}_n - \widetilde{\Gamma}_n \widetilde{P}(\widetilde{x}_n) = x_n - \widetilde{\Gamma}_n \Gamma_0 P(x_n)$$

şi deoarece

$$\widetilde{\Gamma}_n = [\widetilde{P}(x_n, x_{n-1})]^{-1} = [\Gamma_0 P(x_n, x_{n-1})]^{-1} = \Gamma_n \cdot \Gamma_0^{-1},$$

$$\widetilde{x}_{n+1} = x_n - \Gamma_n P(x_n) = x_{n+1}.$$

Rezultă de aici $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{x}_n = x^*$ şi astfel teorema este complet demonstrată.

§ 3. METODA MODIFICATĂ A COARDEI ÎN CAZUL DIFERENŢELOR DIVIZATE SIMETRICE

În acest paragraf vom considera definiţiile 1 şi 2 ale diferenţelor divizate. Sergheev a demonstrat, [1], existenţa soluţiei ecuaţiei (1) în anumite condiţii.

Considerăm algoritmul

$$(6)\qquad x_{n+1} = x_n - \Gamma_0 P(x_n), \text{ unde } \Gamma_0 = [P(x_0, x_0')]^{-1}.$$

Are loc

Teorema 3. *Dacă :*

1° *există* Γ_0 *şi* $\| \Gamma_0 \| \leqslant B_0$;

2° $\| \Gamma_0 P(x_0) \| \leqslant \eta_0$ *şi* $\| \Gamma_0 P(x_0') \| \leqslant \eta_0'$, $(\eta_0 \leqslant \eta_0')$;

3° $\| P(u, v, z) \leqslant K$ *în sfera definită de* $\| x - x_0 \| \leqslant 2\eta_0'$;

4° $h_0 = B_0(\eta_0 + \eta_0') K < \frac{1}{4}$

atunci şirul (6) converge către o soluţie x^* *a ecuaţiei (1) şi rapiditatea de convergenţă este caracterizată de inegalitatea*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant q^{n-1} \| x_1 - x^* \|, \text{ unde } q = 3h_0 < 1.$$

Demonstraţie. Ecuaţia (1) are soluţia x^* deoarece sînt îndeplinite condiţiile teoremei din [1]. Vom arăta că şirul (6) converge către soluţia x^*.

Considerăm operatorul

$$F(x) = x - \Gamma_0 P(x),$$

cu proprietățile care rezultă din § 1 :

$$F(x^*) = x^*,\ F(x_n) = x_{n+1},\ F(x'', x') = I - \Gamma_0 P(x'', x')$$

de unde $F(x_0,\ x_0') = 0,\ F(x''', x'', x') = -\Gamma_0 P(x''', x'', x')$.

Să arătăm că dacă au loc inegalitățile

$$\begin{cases} \| x - x^* \| \leqslant \| x_1 - x^* \| \\ \| x - x_0 \| \leqslant 2\eta_0, \end{cases} \tag{7}$$

atunci

$$\begin{cases} \| F(x) - x^* \| \leqslant q \| x_1 - x^* \| \\ \| F(x) - x_0 \| \leqslant 2\eta_0 \end{cases}. \tag{8}$$

Într-adevăr,

$$\| F(x) - x^* \| = \| F(x) - F(x^*) \| \leqslant \| F(x, x^*) \| \| x - x^* \|.$$

Dar

$$\| F(x, x^*) - F(x, x_0) \| \leqslant \| F(x, x^*, x_0) \| \| x^* - x_0 \|.$$

Cum

$$\| F(x, x_0) \| = \| F(x, x_0) - F(x_0, x_0') \| \leqslant \| F(x, x_0, x_0') \| \| x - x_0' \|,$$

avem

$$\| F(x, x^*) \| \leqslant B_0 K (\| x^* - x_0) \| + \| x - x_0' \|).$$

Deoarece din demonstrația teoremei 1 din [1] rezultă $\| x^* - x_0 \| \leqslant 2\eta_0$ iar

$$\| x - x_0' \| \leqslant \| x - x_0 \| + \| x_0 - x_0' \| \leqslant 2\eta_0 + \eta_0 + \eta_0' \leqslant 3\eta_0' + \eta_0$$

deci avem

$$\| F(x) - x^* \| \leqslant 3B_0 K(\eta_0 + \eta_0') \| x_1 - x^* \| = 3h_0 \| x_1 - x^* \| = q \| x_1 - x^* \|$$

$$\| F(x) - x_0 \| \leqslant \| F(x) - x_1 \| + \| x_1 - x_0 \| \leqslant \| F(x) - F(x_0) \| + \eta_0 \leqslant$$
$$\leqslant \| F(x, x_0) \| 2\eta_0 + \eta_0$$

$$\| F(x,\ x_0) \| = \| F(x, x_0) - F(x_0, x_0') \| \leqslant \| F(x, x_0, x_0') \| \| x - x_0' \| \leqslant$$
$$\leqslant B_0 K (2\eta_0 + 2\eta_0') = 2h_0$$

$$\| F(x) - x_0 \| \leqslant (4h_0 + 1)\eta_0 \leqslant 2\eta_0.$$

Deoarece pentru $x = x_1$ sînt adevărate inegalitățile (7) și $F(x_1) = x_2$, rezultă că

$$\| x_2 - x^* \| \leqslant q \| x_1 - x^* \|.$$

Prin inducție matematică se poate demonstra că

$$\| x^* - x_n \| = q^{n-1} \| x_1 - x^* \|$$

și cu aceasta teorema este demonstrată în întregime deoarece $q < 1$.

Analog cu teorema 2 pe baza teoremei 3 putem demonstra :

TEOREMA 4. *Dacă* :

1° *există* Γ_0 ;

2° $\| \Gamma_0 P(x_0) \| \leqslant \eta_0$ *și* $\| \Gamma_0 P(x_0') \| \leqslant \eta_0'$, $(\eta_0 = \eta_0')$;

3° $\| \Gamma_0 P(u, v, z) \| \leqslant \widetilde{K}$ *în sfera definită de* $\| x - x_0 \| \leqslant 2\eta_0'$;

4° $\tilde{h}_0 = \widetilde{K}(\eta + \eta_0') < \dfrac{1}{4}$

atunci șirul (6) converge către o soluție a ecuației (1) și rapiditatea de convergență este caracterizată de inegalitatea

$$\| x^* - x_n \| = \widetilde{q}^{\,n-1} \| x_1 - x^* \|, \text{ unde } \widetilde{q} = 3\tilde{h}_0 < 1.$$

ON THE METHOD OF CHORD AND ON ITS MODIFICATION FOR SOLVING THE NONLINEAR OPERATIONAL EQUATIONS

(ABSTRACT)

In the present paper the convergence of the method of chord (3) for solving equation (1) in Banach spaces is studied. We use the nonsymmetrical difference quotient defined by conditions (a) of Definitions 3 and 4. In § 1 we prove some properties of the difference quotients. In § 2 we prove the existence of the solution of equation (1), as limit of the sequence (x_n) given by formula (3). In § 3 a theorem for the convergence of a modification of process (3) is given. It proved the convergence of sequence (x_n) given by formula (6) to a solution of equation (1). In § 2 and § 3, we give also a theorem, in which the convergence of studied methods avoiding the boundness of $[P(x_0, x_{-1})]^{-1}$ is proved.

BIBLIOGRAFIE

1. А. С. Сергеев, Сибирский математический журнал, **2**, *2* (1961).
2. С. Улм, Известия АН ЭССР, XVI, физ.—мат., *1* (1967).
3. J. Schröder, *Nichtlineare Majoranten beim Verfahren der schrittweisen Näherung*, Archiv der Mathematik **7**, *6* (1956).

O INTERPRETARE A ALGORITMILOR CU SCHEMA-GRAF ÎN LEGĂTURĂ CU MAŞINILE TURING ŞI ALGORITMII DE TIP CERNEAVSCHI

DE

I. MARUSCIAC şi GH. NADIU

În această lucrare se dă o interpretare a algoritmilor cu schemă-graf, introduşi de L. A. Kalujnin, care conduce la o clasă de maşini Turing, construind apoi un algoritm cu schemă-graf universal în alfabetul exterior al unei maşini Turing universale date în această clasă. În partea a doua a lucrării se dă un procedeu de modelare locală a algoritmilor de tip σ ai lui N. A. Nagornîi prin intermediul unei subclase de algoritmi Cerneavski, construind de asemenea algoritmii cu schemă-graf corespunzători.

1. Sistemul algoritmic general, denumit algoritm cu schemă-graf, introdus în anul 1959 de L.A. Kalujnin [1], permite diferite interpretări ale operatorilor şi identificatorilor care stau la baza definiţiei schemelor-graf, obţinîndu-se diverse alte sisteme algoritmice. Astfel se obţin, de exemplu, algoritmii normali generalizaţi şi algoritmii normali în sensul lui A.A. Markov [2]. În prezenta Notă vom da o nouă interpretare care va conduce la o clasă de maşini Turing. Apoi cu ajutorul unei maşini Turing universale în clasa acestor maşini, se va construi un algoritm cu schemă-graf universal. În final vom da o interpretare care conduce la localizarea procesului determinat de un algoritm de tip σ introdus de N. A. Nagornîi [3], în sensul lui Cerneavschi [4].

2. Considerăm maşinile Turing cu bandă infinită în ambele sensuri, sau cu bandă finită însă potenţial prelungibilă în ambele sensuri. Prin aceasta se înţelege faptul că maşina e capabilă să-şi prelungească banda la orice moment în ambele sensuri cu cîte o celulă considerată vidă. În cele ce urmează, pentru simplificare vom considera banda infinită.

Fie $\mathcal{A}=\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ alfabetul exterior, iar $\mathcal{B}=\{q_0, q_1, \ldots, q_m, S, D\}$ alfabetul interior al maşinii, unde $q_0, q_1, \ldots, q_m$ reprezintă stările

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 7. P. 991–1012, BUCUREŞTI, 1968

maşinii, iar S, D simbolizează cele două deplasări (la stînga şi la dreapta ale dispozitivului de citire şi înregistrare (DCI).

În general funcţia logică a maşinii este dată, după cum se ştie, sub forma unui tabel în care se realizează o corespondenţă între perechile (a_i, q_j) şi tripletele (a_k, P, q_s), unde P este S sau D, care arată că simbolul a_i de pe bandă în dreptul căruia se află DCI în starea q_j, se înlocuieşte cu simbolul a_k, iar DCI se deplasează la dreapta sau la stînga (după cum $P = D$ sau $P = S$) trecînd în starea q_s. Aceste maşini efectuează în general la un pas două operaţii : schimbarea compoziţiei celulei şi deplasarea DCI la stînga sau la dreapta cu o celulă. Se pot considera însă [5] maşini Turing care efectuează în cadrul unui pas o singură operaţie : înlocuirea unei litere sau deplasarea DCI cu o celulă la stînga sau la dreapta.

Funcţia logică a unei asemenea maşini realizează corespondenţă între perechi de forma :

$$q_j a_i \to q_s a_k \tag{1}$$

sau

$$q_j a_i \to q_s P. \tag{2}$$

Se poate arăta că fiind dată o maşină Turing de primul tip (capabilă să efectueze două operaţii în cadrul unui pas), se poate construi o maşină Turing de tipul doi cu acelaşi alfabet exterior şi eventual, cu un număr mai mare de stări interne, echivalentă cu prima, adică care realizează corespondenţa între cuvintele de intrare şi cuvintele de ieşire.

De exemplu să considerăm maşina Turing de tipul întîi t_1 cu schema dată în tabelul 1, unde corespondenţa perechii (q_i, a_k) se citeşte la intersecţia liniei lui q_i şi coloanei lui a_k (aici L simbolizează rămînerea pe loc a DCI, iar a_0 are rolul de simbol nul, şi q_0 de starea de repaus) şi care reprezintă algoritmul sumei a două numere naturale scrise ca şi cuvinte în alfabetul $\mathcal{N} = \{|\}$. Atunci se poate arăta că maşina Turing de tipul doi t_1', cu schema dată în tabelul 1′ este echivalentă cu t_1. Aici şi în cele ce urmează căsuţele rămase goale au semnificaţia că pentru cuvintele de intrare dintr-o mulţime dată, perechea (q_i, a_j) corespunzătoare intrării nu intervine în procesul algoritmic.

Tabelul 1

	$\vert$	a_0	$*$
q_1	a_0Dq_3	a_0Dq_1	a_0Lq_0
q_2	$\vert Sq_2$	a_0Dq_1	$*Sq_2$
q_3	$\vert Dq_3$	$\vert Lq_2$	$*Dq_3$

În cele ce urmează vom considera numai mașinile Turing de cel de-al doilea tip, în care q_0 reprezintă starea de repaus a mașinii, iar a_0 simbolul nul.

Tabelul 1'

	I	a_0	$*$
q_1	q_4a_0	q_1D	q_0a_0
q_2	q_2S	q_1D	q_2S
q_3	q_3D	$q_2\mid$	q_3D
q_4		q_3D	

Cuvîntul M în alfabetul $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}_1$, unde

$$\mathcal{B}_1 = \{q_0, q_1, \ldots, q_m\},$$

de forma

$$M = a_{i_1}\, a_{i_2}\, \ldots, a_{i_{k-1}}\, q_j\, a_{i_k} \ldots a_{i_r} \tag{3}$$

se va numi cuvînt de mașină și reprezintă configurația benzii la un moment dat. Prin configurația benzii se înțelege conținutul tuturor celulelor mașinii și poziția *DCI* la un moment dat. Celulele benzii corespunzătoare literelor ce nu intră în M se consideră toate vide. Astfel cuvîntul M caracterizează compoziția întregii benzi. Litera a_{i_k} în fața căreia se află q_j indică celula în dreptul căreia se află *DCI*.

Spunem că mașina t trece simplu cuvîntul M în M_1 și notăm

$$t:\ M \vdash M_1$$

dacă M_1 se obține din M ca rezultat al aplicării unui singur pas al mașinii t. În mod analog spunem că M se transformă prin t în M_1 și notăm

$$t:\ M \sqsubseteq M_i,\ M_1 = M^{(i)}$$

dacă există un șir de cuvinte de mașină M_0, $M_1, \ldots, M_i$ astfel încît

$$t:\ M_0 \vdash M_1 \vdash M_2 \vdash \ldots \vdash M_i,\ M_0 = M.$$

Se spune că mașina t prelucrează un cuvînt P în $\mathcal{A}\setminus\{a_0\}$, într-un cuvînt Q în $\mathcal{A}\setminus\{a_0\}$ și se notează

$$t(P) = Q$$

dacă, P^* fiind un cuvînt obținut din P intercalînd în acesta litera q_1, există un număr natural i, astfel încît

$$q_0 \in (P^*)^{(i)},\ Q = S^{a_0,\, q_0}_{\Lambda,\, \Lambda}\,(q_1\ a_0P)^{(i)}$$

unde $S^{a_0;\,q_0}_{\Lambda;\,\Lambda}(R)$ reprezintă cuvîntul obţinut din R scoţînd literele a_0 şi q_0.

Observăm că corespondenţele (2) se pot scrie ca şi substituţii în alfabetul $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}_1$, căci

$$q_i\, a_j \to q_s\, S$$

este echivalentă cu

$$\xi\, q_i\, a_j \to q_s\, \xi\, a_j \qquad (\xi \in \mathcal{A})$$

iar

$$q_i\, a_j \to q_s\, D$$

cu

$$q_i\, a_j \to a_j\, q_s .$$

Atunci $M \vdash M_1$, dacă M_1 se obţine din M aplicînd o singură dată una din substituţiile (1) sau

$$(2') \qquad q_i\, a_j \to a_j\, q_s , \qquad \xi\, q_i\, a_j \to q_s\, \xi\, a_j \qquad (\xi \in \mathcal{A}).$$

Datorită faptului că o singură literă q_j intră în M, există o singură substituţie din (1)—(2') aplicabilă lui M.

Pentru a urmări transformările consecutive ale cuvintelor de maşină considerăm maşina Turing pentru sumă, dată în tabelul 1' şi să urmărim transformarea cuvîntului

$$M = q_1 a_0 || \ast |||.$$

Aici $\mathcal{A} = \{a_0, |, \ast\}$, iar M este cuvîntul de maşină ce reprezintă sistemul $\{2,3\}$ în alfabetul $\{|, \ast\}$.

Conform schemei 1' avem,

$$q_1 a_0 || \ast ||| \vdash a_0 q_1 || \ast ||| \vdash a_0 q_4 a_0 | \ast ||| \vdash a_0 a_0 q_3 | \ast ||| \models a_0 | \ast ||| q_3 a_0 \vdash$$
$$\vdash a_0 | \ast ||| q_2 || \models q_2 a_0 | \ast |||| \vdash a_0 q_1 | \ast |||| \models a_0 q_1 \ast ||||| \vdash a_0 q_0 a_0 |||||.$$

Deci

$$t'_1 (|| \ast |||) = |||||.$$

3. Să considerăm acum mulţimea τ de maşini Turing de tipul doi, cu acelaşi alfabet exterior $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, inclusiv simbolul nul şi alfabetul interior $\mathcal{B} = \{q_0, q_1, \ldots, q_m, S, D\}$.

Pentru maşinile de tipul întîi, K.E. Shannon [6] a construit o maşină universală Turing cu două stări interne şi cu un alfabet exterior format din 4 $mn + n$ litere.

Pentru maşinile Turing de tipul doi, vom da un algoritm universal u cu cinci stări interne însă cu un alfabet exterior format din $2mn + 2n$ litere. Alfabetul exterior al acestei maşini este format din literele u_i şi u_{ij}, $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$, unde u_i sînt litere arbitrare puse în corespondenţă cu literele a_i, iar $u_{i,j}$ caracterizează perechile (a_i, q_j). Anume, primul indice corespunde lui a_i iar al doilea lui q_j. Cele cinci stări interne se vor nota cu α, β, γ, δ, ε. Starea de repaus a maşinii μ va coincide cu starea de repaus q_0 a maşinilor $t \in \tau$.

Fiind dată acum o mașină $t \in \tau$, unei formule de substituții a acesteia de forma

$$(4) \qquad q_j a_i \rightarrow q_s a_k$$

facem să-i corespundă în mașina universală u substituția

$$(4') \qquad \alpha u_{i,j} \rightarrow \alpha u_{k,s}$$

iar formulelor de forma

$$(5) \qquad q_j a_i \rightarrow q_s S \text{ sau } q_j a_i \rightarrow q_s D$$

respectiv substituțiile

$$(5') \qquad \alpha u_{i,j} \rightarrow \varepsilon v_{i,s} \text{ sau } \alpha u_{i,j} \rightarrow \delta v_{i,s}$$

Schema mașinii universale u este dată în tabelul 2.

Tabelul 2

	u_i	$u_{i,j}, j=\overline{1, m-1}$	$v_{i,j}, j > 1$	$v_{i,1}$	$v_{i,0}$
α	$q_0 u_{i,0}$		$\delta v_{i,j-1}$	δu_i	
β	$\delta u_{i,1}$	$\delta u_{i,j+1}$	$\varepsilon v_{i,j-1}$	εu_i	
γ	$\varepsilon u_{i,1}$	$\varepsilon u_{i,j+1}$			
δ	αD	αS	βD	βD	δu_i
ε	αS	βD	γS	γS	γu_i

Corespondența din căsuța corespunzătoare lui $\alpha u_{i,j}$ se completează după formulele (4′) și (5′) în funcție de mașina $t \in \tau$.

Mașina u modelează mașinile $t \in \tau$ în felul următor. Dacă pe banda mașinii t avem cuvîntul

$$M_t = a_{i_1}, \ldots, q_k a_{i_k}, \ldots, a_{i_r},$$

atunci înscriem pe banda corespunzătoare mașinii u cuvîntul

$$M = u_{i_1}, \ldots, u_{i_k, k}, \ldots, u_{i_r},$$

adică cuvîntul obținut din M_t înlocuind fiecare literă a_i, cu excepția aceleia care se află în dreptul *DCI*, cu litere corespondente u_j, q_k cu α, iar litera din dreptul *DCI* cu $u_{i,k}$.

Pornind de la acest cuvînt, mașina u modelează pașii mașinii t, executînd eventual mișcări oscilatorii la stînga și la dreapta așa încît după un ciclu mașina u ajunge la un cuvînt de mașină M care corespunde cuvîntului M_t la pasul următor.

Astfel, de exemplu, dacă

$$M_t = a_1\, a_{13}\, q_6 a_7 a_3 \tag{6}$$

şi

$$q_6 a_7 \rightarrow q_1 a_2,$$

atunci

$$t : M_t \vdash a_1 a_{13} q_1 a_2 a_3.$$

Însă avem :

$$M_u = u_1 u_{13}\, \alpha\, u_{7.6}\, u_3$$

şi pe baza (4′), rezultă

$$u : M_u \vdash u_1 u_{13}\, \alpha u_{2.1}\, u_3$$

care este cuvîntul corespunzător pasului următor din maşina t.

Dacă însă avem :

$$q_6 a_7 \rightarrow q_4\, D,$$

atunci cuvîntul (6) trece în

$$M_t \vdash a_1 a_{13} a_7 q_4 a_3 \tag{7}$$

Pe baza formulei (5′) avem

$$\alpha\, u_{7.6} \rightarrow \delta\, v_{7.4}$$

şi folosind schema lui u, avem succesiv

$$\begin{gathered} u\,;\, M_u = u_1\, u_{13}\, \alpha u_{7.6}\, u_3 \vdash u_1\, u_{13}\, \delta v_{7.4}\, u_3 \vdash u_1\, u_{13}\, v_{7.4}\, \beta u_3 \vdash \\ \vdash u_1\, u_{13}\, v_{7.4}\, \delta u_{3.1} \vdash u_1\, u_{13}\, \alpha v_{7.4}\, u_{3.1} \vdash u_1\, u_{13}\, \delta v_{7.3}\, u_{3.1} \vdash \\ \vdash u_1\, u_{13}\, v_{7.3}\, \beta u_{3.1} \vdash u_1\, u_{13}\, v_{7.3}\, \delta u_{3.2} \vdash u_1\, u_{13}\, \alpha v_{7.3}\, u_{3.2} \vdash u_1\, u_{13}\, \delta v_{7.2} \\ u_{3.2} \vdash u_1\, u_{13}\, v_{7.2}\, \beta u_{3.2} \vdash u_1\, u_{13}\, v_{7.2}\, \delta u_{3.3} \vdash u_1\, u_{13}\, \alpha v_{7.2}\, u_{3.3} \vdash \\ \vdash u_1\, u_{13}\, \delta v_{7.1}\, u_{3.3} \vdash u_1\, u_{13}\, v_{7.1}\, \beta u_{3.3} \vdash u_1\, u_{13}\, v_{7.1}\, \delta u_{3.4} \vdash \\ \vdash u_1\, u_{13}\, \alpha v_{7.1}\, u_{3.4} \vdash u_1\, u_{13}\, \delta u_7\, u_{3.4} \vdash u_1\, u_{13}\, u_7\, \alpha u_{3.4}. \end{gathered}$$

Deci

$$u : u_1\, u_{13}\, \alpha u_{7.6}\, u_3 \sqsubset u_1\, u_{13}\, u_7\, \alpha u_{3.4}$$

care, după cum se vede din (7), este tocmai corespondentul lui $M_t^{(1)}$.

Dacă avem formula

$$q_6\, a_7 \rightarrow q_2\, S,$$

atunci

$$t : M_t \vdash a_1\, q_2\, a_{13}\, a_7\, a_3.$$

Din (5′) rezultă substituţia

$$u_{7.6} \rightarrow \varepsilon\, v_{7.2}.$$

De aici, ținînd seama de schema lui u, avem succesiv

$$u : M_u = u_1 u_{13} \alpha u_{7.6} u_3 \vdash u_1 u_{13} \varepsilon v_{7.2} u_3 \vdash u_1 \gamma u_{13} v_{7.2} u_3 \vdash$$
$$\vdash u_1 \varepsilon u_{13.1} v_{7.2} u_3 \vdash u_1 u_{13.1} \beta v_{7.2} u_3 \vdash u_1 u_{13.1} \varepsilon v_{7.1} u_3 \vdash$$
$$\vdash u_1 \gamma u_{13.1} v_{7.1} u_3 \vdash u_1 \varepsilon u_{13.2} v_{7.1} u_3 \vdash u_1 u_{13.2} \beta v_{7.1} u_3 \vdash$$
$$\vdash u_1 u_{13.2} \varepsilon u_7 u_3 \vdash u_1 \alpha u_{13.2} u_7 u_3.$$

Prin urmare

$$u : M_u \sqsubseteq u_1 \alpha u_{13.2} u_7 u_3$$

și ținînd seama de (8) se vede din nou că am ajuns la un cuvînt ce corespunde pasului următor al mașinii t. În felul acesta, mașina u, prelucrînd acest nou cuvînt, continuă să modeleze operațiile mașinii t, oprindu-se atunci și numai atunci cînd se oprește mașina t, adică atunci cînd mașina u ajunge la un cuvînt de forma... $u_{i,0}$ ....

4. Să considerăm acum o schemă-graf a unui algoritm cu interpretare markoviană [7], adică conținînd operatori alfabetici de substituție și identificatori de recunoaștere a intrărilor. De asemenea presupunem că în schema-graf au fost identificate perechile operator-identificator în cîte un singur nod.

Vom spune că schema-graf cu interpretare markoviană și cu nodurile unificate (operator-identificator) verifică proprietatea T, dacă au loc următoarele proprietăți :

1° Toți operatorii de substituție sînt de următoarele trei forme :

$$q_i a_j \to q_s a_k \tag{8}$$

$$q_i a_s \to a_j q_s \tag{9}$$

$$\xi q_i a_j \to q_s \xi a_j \qquad (\xi \in \mathcal{A}) \tag{10}$$

și cuvîntul $q_i a_j$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{0, n}$, intră o singură dată în membrul întîi al formulelor (8) — (10).

2° Nodurile A_i ale schemei sînt ordonate.

3° Din fiecare nod A_i pornesc două săgeți, una notată cu +, iar alta cu — . Săgeata cu semnul + , ce pleacă din A_i, se leagă cu A_1, dacă membrul doi al substituției A_i nu conține pe q_0 și cu nodul de ieșire E, în caz contrar, iar săgeata cu semnul — cu nodul A_{i+1}. Săgeata + a ultimului nod se leagă cu nodul de ieșire E.

4° Nodul de intrare I se unește cu A_1.

Orice algoritm cu schemă-graf, care verifică proprietatea T, se va numi algoritm cu schemă-graf Turing.

Algoritmul cu schemă-graf Turing operează asupra cuvintelor de mașină în felul următor :

Cuvîntul de intrare M se introduce în nodul de intrare I după care se transmite în primul nod A_1. Dacă formula de substituție corespunzătoare nodului A_1 se aplică cuvîntului M, atunci se efectuează această substituție și cu cuvîntul rezultat se procedează la fel. Dacă A_1 nu se aplică cuvîntului M, atunci cuvîntul se transmite nodului următor. Cuvîntul ajunge în nodul de ieșire numai atunci cînd conține litera q_0.

În următoarele două exemple vom da două scheme-graf Turing pentru cuvinte în alfabetul $\{0, 1, q_0, q_1, q_2\}$.

Exemplul 1. Fie

$$A_1 : q_1 0 \rightarrow q_0 1$$

$$A_2 : q_1 1 \rightarrow 1 q_1.$$

Atunci schema-graf Turing corespunzătoare este dată în figura 1.

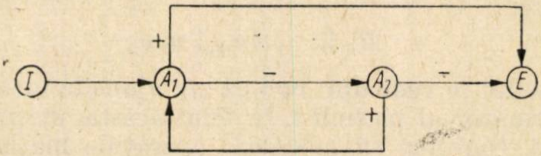


Fig. 1.

Notînd cu 1^x cuvîntul format din x unităţi şi cu $\mathfrak{U}_1$ algoritmul cu schemă-graf Turing dată în figura 1, se vede că avem

$$\mathfrak{U}_1 : (1^x) = 1^{x+1}$$

căci conform schemei-graf avem

$$\mathfrak{U} : q_1 1^x \vdash 1 q_1 1^{x-1} \vDash 1^x q_1 0 \vdash 1^x q_0 1.$$

Prin urmare, $\mathfrak{U}_1$ adaugă unitatea la dreapta cuvîntului iniţial.

Exemplul 2. Fie $\mathfrak{U}_2$ algoritmul cu schemă-graf Turing din figura 2 în care

$$A_1 : \xi q_1 0 \rightarrow q_1 \xi 0 \qquad (\xi = 0{,}1)$$

$$A_2 : q_1 1 \rightarrow q_2 0$$

$$A_3 : \xi q_2 0 \rightarrow q_2 \xi 0 \qquad (\xi = 0{,}1)$$

$$A_4 : q_2 1 \rightarrow q_0 1.$$

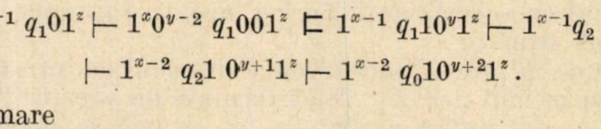


Fig. 2

Atunci considerînd cuvîntul $1^x 0^{y-1} q_1 0 1^z$ avem succesiv

$$\mathfrak{U}_2 : 1^x 0^{y-1} q_1 0 1^z \vdash 1^x 0^{y-2} q_1 0 0 1^z \vDash 1^{x-1} q_1 1 0^y 1^z \vdash 1^{x-1} q_2\, 0^{y+1}\, 1^z \vdash$$
$$\vdash 1^{x-2} q_2 1\, 0^{y+1} 1^z \vdash 1^{x-2} q_0 1 0^{y+2} 1^z.$$

Prin urmare

$$\mathfrak{U}_2\, (1^x 0^y 1^z) = 1^{x-1}\, 0^{y+1}\, 1^z$$

adică şterge unitatea din primul grup de unităţi din stînga.

Are loc,

TEOREMĂ. *Orice algoritm cu schemă-graf Turing în alfabetul* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}_1$ *este echivalent cu o maşină Turing cu alfabetul exterior* $\mathcal{A}$, *şi stările interioare* $q_0, q_1, \ldots, q_m$.

Într-adevăr, fie $\mathfrak{U}$ un algoritm cu schemă-graf Turing în alfabetul $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}_1$. Întrucît cuvîntul $q_i a_j$ intră o singură dată în membrii întîi ai formulelor (8)—(10), putem construi o maşină Turing $t_{\mathfrak{U}}$ care are ca alfabet exterior $\mathcal{A}$, stările interioare $q_0, q_1, \ldots, q_m$, unde q_0 este starea de repaus şi cu funcţia logică construită în felul următor : căsuţa (i, j) se completează cu $q_s a_k$, $q_s D$ sau $q_s S$, după cum cuvîntul $q_i a_j$ intră respectiv în membrul întîi al unei substituţii de forma (8), (9) sau (10). Datorită faptului că $q_i a_j$ intră într-o singură formulă de substituţie din (8)—(10), rezultă că schema logică a maşinii $t_{\mathfrak{U}}$ este unic determinată.

Invers, pornind de la o maşină Turing t, se poate construi un algoritm cu schemă-graf Turing, în care operatorii A_i se obţin în felul următor : dacă în schema logică a maşinii Turing t, lui $q_i a_j$ îi corespunde perechea $q_s a_k$, atunci se consideră substituţia

$$q_i a_j \rightarrow q_s a_k,$$

dacă lui $q_i a_j$ îi corespunde $q_s D$ sau $q_s S$, atunci se consideră respectiv substituţiile

$$q_i a_j \rightarrow a_j q_s$$

sau

$$\xi q_i a_j \rightarrow q_s \xi a_j \qquad (\xi \in \mathcal{A}).$$

Întrucît operatorii astfel construiţi verifică condiţia 1°, construind schema-graf care verifică proprietăţile 2° şi 3° vom obţine un algoritm cu schema-graf Turing $\mathfrak{U}_t$.

Evident că orice cuvînt de maşină M va suferi aceleaşi transformări în schema-graf $\mathfrak{U}$ ca şi în $t_{\mathfrak{U}}$, deci cei doi algoritmi sînt echivalenţi.

5. Construim acum un algoritm cu schemă-graf Turing $\mathfrak{U}_u$ echivalent cu maşina Turing universală u construită mai sus.

Fie $\mathcal{U}$ alfabetul format din literele $u_i, u_{i,j}, v_{i,j}$, $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, m}$. Atunci operatorii de substituţie ai schemei-graf vor fi pentru $i = \overline{1, n}$:

$$\alpha u_i \rightarrow q_0 u_{i,0}$$

$$\alpha v_{i,j} \rightarrow \delta v_{i,j-1}, \qquad j = \overline{2, m}$$

$$\alpha v_{i,1} \rightarrow \delta u_i$$

$$\beta u_i \rightarrow \delta u_{i,1}; \quad \beta u_{i,j} \rightarrow \delta u_{i,j+1}, \qquad j = \overline{1, m-1};$$

$$\beta v_{i,j} \rightarrow \varepsilon v_{i,j-1}, \qquad j = \overline{2, m};$$

$$\beta v_{i,1} \rightarrow \varepsilon u_i$$

$$\gamma u_i \rightarrow \varepsilon u_{i,1}$$

$$\gamma u_{i,j} \rightarrow \varepsilon u_{i,j+1}; \qquad j = \overline{1, m-1}$$

$$
\begin{aligned}
(11)\qquad & \delta u_i \to u_i \alpha\,; \quad \delta v_{i,j} \to v_{i,j}\beta\,; \qquad j = \overline{1, m}\,;\\
& \xi\,\delta u_{i,j} \to \alpha\xi u_{i,j}, \ \xi \in \mathcal{U}, \qquad j = \overline{1, m}\,;\\
& \xi\,\varepsilon u_i \to \alpha\xi u_i, (\xi \in \mathcal{U})\,; \quad \varepsilon u_{i,j} \to u_{i,j}\beta\,; \quad j = \overline{1, m}\\
& \xi\,\varepsilon v_{i,j} \to \delta\xi v_{i,j}, \qquad j = \overline{1, m}\\
& \delta v_{i,0} \to \delta u_i\\
& \varepsilon v_{i,0} \to \varepsilon u_i\,.
\end{aligned}
$$

Schema-graf a algoritmului $\mathfrak{U}_u$ se construiește în felul următor: după nodul de intrare I se lasă mn noduri libere ce corespund substituțiilor algoritmilor particulari $\mathfrak{U}$, după care se continuă într-o ordine oarecare cu nodurile operatorilor corespunzători substituțiilor (11).

Operatorii corespunzători substituțiilor (8)—(10) sînt respectiv:

$$
\begin{aligned}
(8')\qquad & \alpha u_{j,i} \to \alpha u_{k,s}\\
(9')\qquad & \alpha u_{j,i} \to \varepsilon v_{j,s}\\
(10')\qquad & \alpha u_{j,i} \to \delta v_{j,s}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}\,.
\end{aligned}
$$

Din teorema demonstrată rezultă că algoritmul $\mathfrak{U}_u$ în $\mathcal{U}$ modelează orice algoritm cu schemă-graf, în alfabetul $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}_1$.

În cazul algoritmilor cu schemă-graf Turing în alfabetul exterior $\{0, 1\}$ și cu o singură stare activă q_1, schema-graf a algoritmului universal $\mathfrak{U}_u$ este dată în figura 3, unde A_1, A_2, sînt operatorii de substituții corespunzători algoritmului $\mathfrak{U}$, iar restul, conform formulelor (11), sînt, pentru $i = 0,1$,

$$
\begin{aligned}
& A_3 : \alpha u_i \to q_0 u_{i,0}\,;\\
& A_4 : \alpha v_{i,1} \to \delta u_i\,;\\
& A_5 : \beta u_i \to \delta u_{i,1}\,;\\
& A_6 : \beta v_{i,1} \to \varepsilon u_i\,;\\
& A_7 : \gamma u_i \to \varepsilon u_{i,1}\,;\\
& A_8 : \delta u_i \to u_i\,\alpha\,;\\
& A_9 : \xi\delta u_{i,1} \to \alpha\,\xi u_{i,1}, \qquad \xi \in \mathcal{U}\,;\\
& A_{10} : \delta v_{i,1} \to v_{i,1}\,\beta\,;\\
& A_{11} : \delta v_{i,0} \to \delta u_i\,;\\
& A_{12} : \xi\varepsilon u_i \to \alpha\xi u_i \qquad (\xi \in \mathcal{U})\,;\\
& A_{13} : \xi\varepsilon v_{i,1} \to \gamma\xi v_{i,1} \qquad (\xi \in \mathcal{U})\,;\\
& A_{14} : \varepsilon v_{i,0} \to \varepsilon u_i\,.
\end{aligned}
$$

Dacă considerăm algoritmul $\mathfrak{U}_1$ din exemplul 1, atunci :

$$A_1 : \alpha u_{0.1} \to \alpha u_{1.0}, \quad \alpha u_{i.0} \to q_0 u_{i.0}.$$
$$A_2 : \alpha u_{1.1} \to \delta v_{1.1}.$$

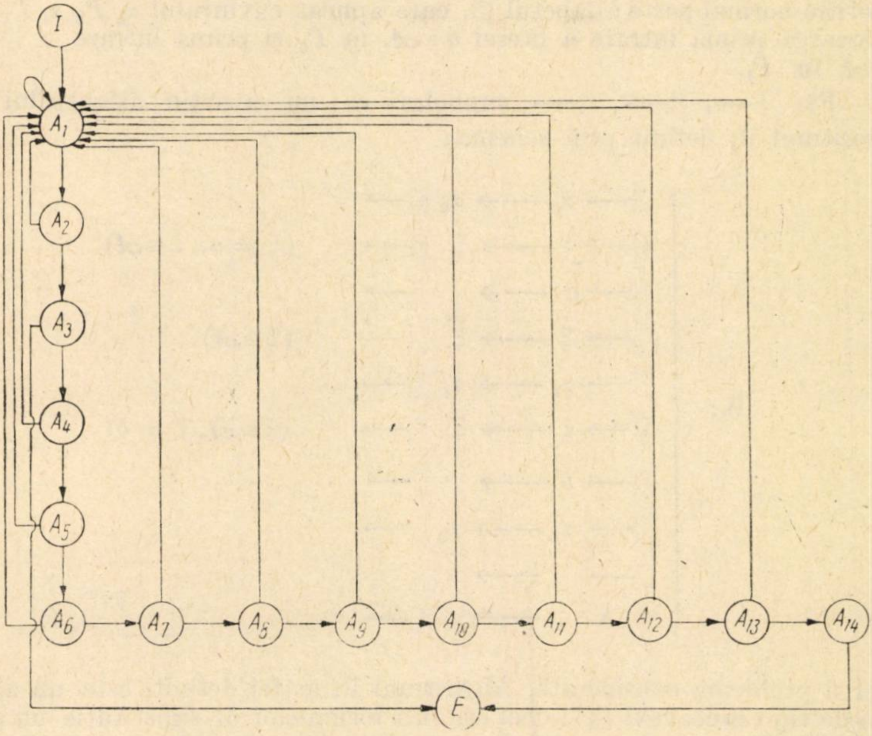


Fig. 3

Considerînd același cuvînt de mașină $q_1 1^x$, algoritmul va efectua următoarele transformări asupra cuvîntului corespunzător $u_{1.1} u_1^{x-1}$ din mașină :

$$u : \alpha u_{1.1} u_1^{x-1} \overset{2}{\vdash} \delta v_{1.1} u_1^{x-1} \overset{5}{\vdash} v_{1.1} \beta u_1^{x-1} \overset{9}{\vdash}$$
$$\overset{9}{\vdash} v_{1.1} \delta u_{1.1} u_1^{x-2} \overset{8}{\vdash} \alpha v_{1.1} u_{1.1} u_1^{x-2} \overset{4}{\vdash} \delta u_1 u_{1.1} u_1^{x-2} \overset{7}{\vdash}$$
$$\overset{7}{\vdash} u_1 \alpha u_{1.1} u_1^{x-2} \sqsubset u_1^{x-1} \alpha u_{1.1} u_0 \vdash u_1^{x-1} \delta v_{1.1} u_0 \vdash$$
$$\vdash u_1^x v_{1.1} \beta u_0 \vdash u_1^{x-1} v_{1.1} \delta u_{0.1} \vdash u_1^{x-1} \alpha v_{1.1} u_{0.1} \vdash$$
$$\vdash u_1^{x-1} \delta u_1 u_{0.1} \vdash u_1^x \alpha u_{0.1}.$$

Ultimul cuvînt $u_1^x q_0 u_{1.0}$ este cuvîntul corespunzător lui $1^x q_0 1$ din algoritmul $\mathfrak{U}_1$, ceea ce arată că într-adevăr, algoritmul u efectuează aceleași operații ca și $\mathfrak{U}_1$.

6. În acest paragraf vom pune în evidență, în clasa algoritmilor Cerneavski [4], o subclasă de algoritmi, pe care îi vom numi C-algoritmi de tip σ, în scopul modelării locale a algoritmilor de tip σ a lui Nagornîi [3].

Pentru o mai uşoară înţelegere vom considera iniţial două exemple.

Fie $\mathcal{A}$ un alfabet oarecare, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \rceil\!\in \mathcal{A}$ şi $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\}$. Să considerăm următoarea problemă : dacă $\alpha_0 P_0\, \alpha_1\, P_1\, \alpha_2$ este un cuvînt în alfabetul $\mathcal{B}$, iar P_0 şi P_1 sînt cuvinte în $\mathcal{A}$, să se construiască un algoritm normal peste alfabetul $\mathcal{B}$, care aplicat cuvîntului $\alpha_0\, P_0\, \alpha_1\, P_1\, \alpha_2$, să şteargă prima intrare a literei $a \in \mathcal{A}$, în P_0 şi prima intrare a literei $b \in \mathcal{A}$ în P_1.

Fie $\overline{\underline{\ }}|\!\rightarrow$, $\overline{\underline{0}}|\!\rightarrow$, $\overline{\underline{1}}|\!\rightarrow$, simboluri ce nu aparţin alfabetului $\mathcal{B}$. Algoritmul $\mathfrak{U}$, definit prin schema:

$$\mathfrak{U}: \left\{\begin{array}{lll}
\overline{\underline{\ }}|\!\rightarrow \alpha_0 \longrightarrow \alpha_0\, \overline{\underline{0}}|\!\rightarrow & & \\
\overline{\underline{0}}|\!\rightarrow \xi \longrightarrow \xi\, \overline{\underline{0}}|\!\rightarrow & & (\xi \neq a,\ \xi \in \mathcal{A}) \\
\overline{\underline{0}}|\!\rightarrow a \longrightarrow \overline{\underline{\ }}|\!\rightarrow & & \\
\overline{\underline{\ }}|\!\rightarrow \xi \longrightarrow \xi\, \overline{\underline{\ }}|\!\rightarrow & & (\xi \in \mathcal{A}) \\
\overline{\underline{\ }}|\!\rightarrow \alpha_1 \longrightarrow \alpha_1\, \overline{\underline{1}}|\!\rightarrow & & \\
\overline{\underline{1}}|\!\rightarrow \xi \longrightarrow \xi\, \overline{\underline{1}}|\!\rightarrow & & (\xi \in \mathcal{A},\ \xi \neq b) \\
\overline{\underline{1}}|\!\rightarrow b \longrightarrow \overline{\underline{\ }}|\!\rightarrow & & \\
\overline{\underline{\ }}|\!\rightarrow \alpha_2 \longrightarrow \alpha_2\, \overline{\underline{\ }}|\!\rightarrow & & \\
\overline{\underline{\ }}|\!\rightarrow \longrightarrow \cdot & & \\
\Lambda \longrightarrow \overline{\underline{\ }}|\!\rightarrow & &
\end{array}\right.$$

rezolvă problema considerată. Algoritmul $\mathfrak{U}$, astfel definit, este un algoritm de tip Cerneavski [4]; deci ordinea formulelor de substituţie nu este esenţială, deoarece în cuvîntul prelucrat intră întotdeauna o singură săgeată. Datorită acestui fapt vom putea considera algoritmul $\mathfrak{U}$ sub forma :

$$\widetilde{\mathfrak{U}}: \left\{\begin{array}{lll}
\overline{\underline{\ }}|\!\rightarrow \alpha_0 \longrightarrow \alpha_0\, \overline{\underline{0}}|\!\rightarrow & & \\
\overline{\underline{\ }}|\!\rightarrow \xi \longrightarrow \xi\, \overline{\underline{\ }}|\!\rightarrow & & (\xi \in \mathcal{A}) \\
\overline{\underline{\ }}|\!\rightarrow \alpha_1 \longrightarrow \alpha_1\, \overline{\underline{1}}|\!\rightarrow & & \\
\overline{\underline{\ }}|\!\rightarrow \longrightarrow \cdot & & \\
\overline{\underline{0}}|\!\rightarrow \xi \longrightarrow \xi\, \overline{\underline{0}}|\!\rightarrow & & (\xi \in \mathcal{A},\ \xi \neq a) \\
\overline{\underline{0}}|\!\rightarrow a \longrightarrow \overline{\underline{\ }}|\!\rightarrow & & \\
\overline{\underline{0}}|\!\rightarrow \alpha_1 \longrightarrow \overline{\underline{\ }}|\!\rightarrow \alpha_1 & & \\
\overline{\underline{1}}|\!\rightarrow \xi \longrightarrow \xi\, \overline{\underline{1}}|\!\rightarrow & & (\xi \in \mathcal{A},\ \xi \neq b) \\
\overline{\underline{1}}|\!\rightarrow b \longrightarrow \overline{\underline{\ }}|\!\rightarrow & & \\
\overline{\underline{1}}|\!\rightarrow \alpha_2 \longrightarrow \alpha_2\, \overline{\underline{\ }}|\!\rightarrow & & \\
\Lambda \longrightarrow \overline{\underline{\ }}|\!\rightarrow & &
\end{array}\right.$$

care este echivalent cu algoritmul $\mathfrak{U}$, definit mai sus. Algoritmul $\widetilde{\mathfrak{U}}$ se caracterizează prin faptul că formulele sale de substituţie sînt grupate după indicii săgeţilor, în ordinea lor crescătoare.

Vom considera acum o a doua problemă; să se construiască un algoritm normal $\mathfrak{B}$, care aplicat cuvîntului $\alpha_0\, P_0\, \alpha_1\, P_1\, \alpha_2$, să şteargă primele două intrări ale literei $a \in \mathscr{A}$, în P_0, şi a lui $b \in \mathscr{A}$, în P_1, iar dacă într-unul dintre cuvintele P_0, P_1 nu există astfel de intrări, acel cuvînt să rămînă neschimbat.

Algoritmul $\mathfrak{U}$ dat prin schema (unde $\overline{\underline{i}}|\!\longrightarrow$, $\overline{\underline{\;}}|\!\longrightarrow$, $\overline{\underline{\;}}|\!\xrightarrow{i}$ $\urcorner \in$ $\urcorner \in \mathscr{B}$, $i = 0, 1$);

$$\mathfrak{B}:\left\{\begin{array}{rcll}
\overline{\underline{\;}}|\!\longrightarrow \alpha_0 & \longrightarrow & \alpha_0\, \overline{\underline{0}}|\!\longrightarrow & \\
\overline{\underline{\;}}|\!\xrightarrow{0} \xi & \longrightarrow & \xi\, \overline{\underline{0}}|\!\longrightarrow & (\xi \in \mathscr{A}) \\
\overline{\underline{\;}}|\!\xrightarrow{0} \alpha_1 & \longrightarrow & \alpha_1\, \overline{\underline{1}}|\!\longrightarrow & \\
\overline{\underline{\;}}|\!\xrightarrow{1} \eta & \longrightarrow & \eta\, \overline{\underline{\;}}|\!\xrightarrow{1} & (\eta \in \mathscr{B}) \\
\overline{\underline{\;}}|\!\xrightarrow{1} & \longrightarrow & \cdot & \\
\overline{\underline{0}}|\!\longrightarrow \xi & \longrightarrow & \xi\, \overline{\underline{0}}|\!\longrightarrow & (\xi \neq a,\ \xi \in \mathscr{A}) \\
\overline{\underline{0}}|\!\longrightarrow a & \longrightarrow & \underline{a}\, \overline{\underline{0}}|\!\xrightarrow{\bullet} & \\
\overline{\underline{0}}|\!\xrightarrow{\bullet} \xi & \longrightarrow & \xi\, \overline{\underline{0}}|\!\xrightarrow{\bullet} & (\xi \neq a,\ \xi \in \mathscr{A}) \\
\overline{\underline{0}}|\!\xrightarrow{\bullet} a & \longrightarrow & \xleftarrow{\bullet}\!|\overline{\underline{0}} & \\
\xi \xleftarrow{\bullet}\!|\overline{\underline{0}} & \longrightarrow & \xleftarrow{\bullet}\!|\overline{\underline{0}}\, \xi & (\xi \neq \underline{a},\ \xi \in \mathscr{A}) \\
\underline{a} \xleftarrow{\bullet}\!|\overline{\underline{0}} & \longrightarrow & \overline{\underline{\;}}|\!\xrightarrow{0} & \\
\overline{\underline{0}}|\!\longrightarrow \alpha_1 & \longrightarrow & \overline{\underline{\;}}|\!\xrightarrow{0} \alpha_1 & \\
\overline{\underline{0}}|\!\xrightarrow{\bullet} \alpha_1 & \longrightarrow & \xleftarrow{\bullet\bullet}\!|\overline{\underline{0}}\, \alpha_1 & \\
\xi \xleftarrow{\bullet\bullet}\!|\overline{\underline{0}} & \longrightarrow & \xleftarrow{\bullet\bullet}\!|\overline{\underline{0}}\, \xi & (\xi \neq \underline{a},\ \xi \in \mathscr{A}) \\
\underline{a} \xleftarrow{\bullet\bullet}\!|\overline{\underline{0}} & \longrightarrow & a\, \overline{\underline{\;}}|\!\xrightarrow{0} & \\
\overline{\underline{1}}|\!\longrightarrow \xi & \longrightarrow & \xi\, \overline{\underline{1}}|\!\longrightarrow & (\xi \in \mathscr{A},\ \xi \neq b) \\
\overline{\underline{1}}|\!\longrightarrow b & \longrightarrow & \underline{b}\, \overline{\underline{1}}|\!\xrightarrow{\bullet} & \\
\overline{\underline{1}}|\!\xrightarrow{\bullet} \xi & \longrightarrow & \xi\, \overline{\underline{1}}|\!\xrightarrow{\bullet} & (\xi \in \mathscr{A},\ \xi \neq b) \\
\overline{\underline{1}}|\!\xrightarrow{\bullet} b & \longrightarrow & \xleftarrow{\bullet}\!|\overline{\underline{1}} & \\
\xi \xleftarrow{\bullet}\!|\overline{\underline{1}} & \longrightarrow & \xleftarrow{\bullet}\!|\overline{\underline{1}}\, \xi & (\xi \in \mathscr{A},\ \xi \neq \underline{b}) \\
\underline{b} \xleftarrow{\bullet}\!|\overline{\underline{1}} & \longrightarrow & \overline{\underline{\;}}|\!\xrightarrow{1} & \\
\overline{\underline{1}}|\!\longrightarrow \alpha_2 & \longrightarrow & \alpha_2\, \overline{\underline{\;}}|\!\xrightarrow{1} & \\
\overline{\underline{1}}|\!\xrightarrow{\bullet} \alpha_2 & \longrightarrow & \xleftarrow{\bullet\bullet}\!|\overline{\underline{1}}\, \alpha_2 & \\
\xi \xleftarrow{\bullet\bullet}\!|\overline{\underline{1}} & \longrightarrow & \xleftarrow{\bullet\bullet}\!|\overline{\underline{1}}\, \xi & (\xi \in \mathscr{A},\ \xi \neq \underline{b}) \\
\underline{b} \xleftarrow{\bullet\bullet}\!|\overline{\underline{1}} & \longrightarrow & b\, \overline{\underline{\;}}|\!\xrightarrow{1} & \\
\Lambda & \longrightarrow & \overline{\underline{\;}}|\!\longrightarrow &
\end{array}\right.$$

este chiar algoritmul corespunzător celei de-a doua probleme. Formulele de substituţie ale algoritmului $\mathfrak{B}$ sînt grupate în raport cu indicii săgeţilor care intervin, în ordinea lor crescătoare.

Algoritmii $\widetilde{\mathfrak{U}}$ şi $\mathfrak{B}$ sînt algoritmi Cerneavski, care verifică următoarele proprietăţi :

1°. Algoritmii sînt construiţi într-o extensiune a alfabetului $\mathcal{B}$, care poate conţine : litere din $\mathcal{A}$, litere din $\mathcal{A}$ subliniate sau supraliniate, steluţe, săgeţi de două tipuri, săgeţi de comandă notate $]\!\longrightarrow$ sau $\overset{i}{]}\!\longrightarrow$ $\underset{j}{\overset{i}{]}}\!\longrightarrow$, $]\!\xrightarrow{i}$ şi săgeţi de lucru în diferite stări notate $\boxed{i}\xrightarrow[q]{i}$ (săgeată în starea q_j, sau j şi de rang i).

2°. Algoritmii sînt compuşi din două grupe de elemente, şi anume : grupul elementelor de comandă (totalitatea formulelor de substituţie care conţin în membrul stîng săgeţi de comandă), şi grupul elementelor de lucru (totalitatea formulelor de substituţie care conţin în membrul stîng săgeţi de lucru de acelaşi rang.)

3°. Ordinea grupurilor de lucru nu este esenţială, căci în cuvîntul prelucrat intră o singură săgeată.

4°. Oprirea procesului este stabilită de grupul de comandă.

Vom numi C-algoritm de tip σ, un algoritm Cerneavski care verifică proprietăţile 1°—4°.

Numim indice al C-algoritmului de tip σ, rangul maxim al săgeţilor care intervin în algoritm.

7. Algoritmii Cerneavski [4], în speţă C-algoritmii de tip σ introduşi mai sus, au avantajul că compoziţia lor se face foarte simplu. Vom construi acum compoziţia a doi C-algoritmi de tip σ. Observăm iniţial faptul că un C-algoritm de tip σ are o formulă iniţială şi numai una, şi cel puţin o formulă finală, adică are o singură intrare şi cel puţin o ieşire.

Fie $\mathfrak{U}$ şi $\mathfrak{B}$ doi C-algoritmi de tip σ. Ne propunem să construim un C-algoritm de tip σ, $\mathfrak{C}$, care să transforme un cuvînt la fel ca şi $\mathfrak{U}$, urmat de $\mathfrak{B}$.

Fie N, respectiv M, indicii algoritmilor $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$.

Considerăm toate grupurile elementelor de lucru ale algoritmului $\mathfrak{U}$, după care vom transcrie grupurile elementelor de lucru ale algoritmului $\mathfrak{B}$, cu rangurile $i + N$ $(i = 1, 2, \ldots, M)$, astfel că în total vom obţine $M + N$ grupuri de lucru.

În grupul de comandă al C-algoritmului $\mathfrak{U}$, formulele de închidere de forma $A_i \to \cdot B_i$, le vom înlocui prin formule de forma $A_i \longrightarrow \overset{i}{\longleftarrow}\!\circ B_i$ $(\overset{i}{\longleftarrow}\!\circ] \in \mathcal{A})$, iar la sfîrşitul grupului de comandă vom aşeza formulele

$$\begin{aligned} &\eta \overset{i}{\longleftarrow}\!\circ \longrightarrow \overset{i}{\longleftarrow}\!\circ\, \eta \quad (\eta \in \mathcal{B}) \\ (15)\qquad & \\ &\overset{i}{\longleftarrow}\!\circ \longrightarrow \cdot \end{aligned}$$

Algoritmul nou obţinut $\mathfrak{U}'$ este un C-algoritm de tip σ echivalent cu $\mathfrak{U}$ relativ la alfabetul $\mathcal{B}$.

Vom renota săgeţile de comandă ale algoritmului $\mathfrak{B}$ astfel ca să fie diferite de cele ale algoritmului $\mathfrak{U}'$, şi anume prin săgeţi de tipul $\supset\!\longrightarrow$, $\longleftarrow\!\subset$, sau $\supset\!\xrightarrow{i}$, $\xleftarrow{i}\!\subset$. Reunind grupurile de coamandă ale celor doi algoritmi, după înlocuirea formulei

$$\overset{i}{\longleftarrow}\!\circ \longrightarrow \cdot$$

prin formula

$$\overset{i}{\longleftarrow}\!\circ \longrightarrow \supset\!\longrightarrow$$

şi a simbolurilor $\overline{\underline{j}}|\!\longrightarrow$, din formulele de substituţie ale grupului de comandă al algoritmului $\mathfrak{B}$ prin $\overline{\underline{j+N}}|\!\longrightarrow$, obţinem grupul elementelor de comandă al algoritmului căutat.

C-algoritmul $\mathfrak{C}$ va fi dat de grupul de comandă mai sus construit, grupul elementelor de lucru în ordinea indicată anterior, la sfîrşitul cărora se adaugă formula iniţială a lui $\mathfrak{U}$.

În cazul C-algoritmilor de tip σ, modurile de compunere ale algoritmilor pot fi foarte diferite în probleme de construcţii a anumitor algoritmi.

8. N.A.Nagornîi, [3], a introdus noţiunea de algoritm de tip σ, ca o generalizare a algoritmului normal al lui A.A.Markov [2].

Fie $\mathcal{A}$ un anumit alfabet, astfel că simbolurile $\rightarrow, \square \urcorner\!\in \mathcal{A}$. Numerele naturale sînt cuvinte în alfabetul $\mathcal{C} = \{|\}$. Un cuvînt în alfabetul $\mathcal{A} \cup \mathcal{C} \cup \{\rightarrow, \square\}$ de forma:

$$U \longrightarrow N \square V,$$

unde U şi V sînt cuvinte în $\mathcal{A}$ şi un cuvînt în $\mathcal{C}$, îl vom numi formulă de substituţie de tip σ în alfabetul $\mathcal{A}$, iar cuvintele U, V, N, partea stîngă, partea dreaptă şi indicele formulei.

Orice listă de formule de substituţie de tip σ, o vom numi schemă de tip σ în alfabetul $\mathcal{A}$, iar cel mai mare dintre indicii formulelor de substituţie îl vom numi indice al schemei.

Să considerăm un sistem de scheme de tip σ, numerotate, scris sub formă de coloană în ordinea numerotării, închis în paranteze pătrate de forma:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix}$$

unde S_i sînt scheme de tip σ, de rang i, iar n fiind ordinul sistemului.

Numim indice al sistemului considerat, cel mai mare dintre indicii schemelor de tip σ, care alcătuiesc sistemul. Un astfel de sistem îl vom numi admis dacă indicile sistemului nu întrece ordinul lui.

Fie S o schemă de tip σ în alfabetul $\mathcal{A}$, şi P un cuvînt în $\mathcal{A}$. Spunem că P se supune schemei S, dacă în S există formule de substituţie a căror parte stîngă intră în P. În caz contrar P nu se supune la S.

Schema S este închisă în $\mathcal{A}$, dacă orice cuvînt P în $\mathcal{A}$ se supune la S.

Numim algoritm de tip σ, orice algoritm în $\mathcal{A}$ definit în felul următor :

Se fixează un anumit sistem de scheme, admis în $\mathcal{A}$. Fie P un cuvînt oarecare din $\mathcal{A}$. Se verifică dacă P se supune primei scheme a sistemului. Dacă P nu se supune primei scheme, atunci procesul se opreşte şi P este rezultatul aplicării algoritmului. Dacă P se supune primei scheme a sistemului, atunci se construieşte rezultatul aplicării acestei scheme la cuvîntul P şi fie acesta cuvîntul P_1. Dacă formula aplicată are indicele egal cu zero, atunci procesul se termină şi rezultatul lui se consideră cuvîntul P_1. Dacă indicele formulei este diferit de zero, atunci se trece la al doilea pas al procesului, care diferă de primul pas prin faptul că în loc de prima schemă a sistemului, se ia schema de rang egal cu indicele formulei de substituţie precedente, iar în loc de P se ia P_1. Procesul se cotinuă în mod analog, obţinîndu-se cuvîntul Q, drept rezultat al procesului.

Cerneavski [4] a dat o caracterizare locală a algoritmilor normali ai lui A. A. Markov. Noi vom da acum o caracterizare locală a algoritmilor de tip σ, prin intermediul C-algoritmilor de tip σ, definiţi mai sus, exprimată prin următoarea teoremă :

TEOREMĂ. *Oricare ar fi algoritmul de tip* $\sigma, \mathfrak{U}$, *există un* C*-algoritm de tip* $\sigma, \mathfrak{B}$ *peste alfabetul* $\mathcal{A}$ *astfel că :*

$$\mathfrak{U}(P) \simeq \mathfrak{B}(P)$$

pentru orice cuvînt P *în alfabetul* $\mathcal{A}$.

Demonstraţie. Fie $\mathfrak{U}$ un algoritm de tip σ, peste alfabetul $\mathcal{A} \cup \mathcal{C} \cup \{\square\}$, unde $\square \; \urcorner \in \mathcal{A}$. Să considerăm închiderea $[\;]\;\mathfrak{U}$ a algoritmului $\mathfrak{U}$, definit prin sistemul :

$$\left|\begin{matrix} \overline{S_1} \\ S_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{S_N} \end{matrix}\right|$$

Algoritmul $\mathfrak{U}'$ fiind închis, fiecare din schemele $S_1, S_2, \ldots, S_N$, este nchisă.

Fie S_i $(1 \leqslant i \leqslant N)$ una din schemele sistemului, de forma:

$$\begin{cases} P_1^{(i)} \longrightarrow N_1^{(i)} \square Q_1^{(i)} \\ P_2^{(i)} \longrightarrow N_2^{(i)} \square Q_2^{(i)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ P_{k_i}^{(i)} \longrightarrow N_{k_i}^{(i)} \square Q_{k_i}^{(i)} \end{cases}$$

şi $P_j^{(i)} \to N_j^{(i)} \square Q_j^{(i)}$ o formulă de substituţie de tip σ, a schemei S_i $(1 \leqslant j \leqslant k_i)$.

Vom construi acum algoritmul $\mathfrak{C}_j^{(i)}$, care localizează procesul de transformare al cuvintelor, în urma aplicării celei de a j-a formulă de substituţie a schemei S_i, pe care o presupunem de forma:

$$\alpha_{j1}^{(i)} \alpha_{j2}^{(i)} \ldots \alpha_{jn_j^{(1)}}^{(i)} \longrightarrow \left|^{\left(N_j^{(i)}\right)} \square\, \beta_{j1}^{(i)} \beta_{j2}^{(i)} \beta_{j3}^{(i)} \ldots \beta_{jm_j^{(i)}}^{(i)} \cdot\right.$$

Algoritmul $\mathfrak{C}_j^{(i)}$ va fi definit prin schemă:

$$\left\{\begin{array}{llll}
\left.\overset{i}{\underset{j}{\overline{\underline{\;\;}}}}\right| \longrightarrow \xi & \longrightarrow & \left.\frac{\overline{i}}{j}\right| \xrightarrow[\alpha]{j1} & (\xi \in \mathcal{A}) \\
\left.\overset{i}{\underset{j}{\overline{\underline{\;\;}}}}\right| \longrightarrow & \longrightarrow & \cdot & (a) \\
\bullet\!\!:\!\left.\overset{N_j^{(i)}}{\overline{\underline{\;\;}}}\right| \longrightarrow & \longrightarrow & \cdot & (b) \\
\left.\frac{\overline{i}}{j}\right| \xrightarrow[\alpha]{j1} \xi & \longrightarrow & \xi \left.\frac{\overline{i}}{j}\right| \xrightarrow[\alpha]{j1} & (\xi \neq \alpha_{j1}^{(i)}) \\
\left.\frac{\overline{i}}{j}\right| \xrightarrow[\alpha]{j1} \alpha_{j1}^{(i)} & \longrightarrow & \underline{\alpha_{j1}^{(i)}} \left.\frac{\overline{i}}{j}\right| \xrightarrow[\alpha]{j2} & \\
\left.\frac{\overline{i}}{j}\right| \xrightarrow[\alpha]{j2} \alpha_{j2}^{(i)} & \longrightarrow & \alpha_{j2}^{(i)} \left.\frac{\overline{i}}{j}\right| \xrightarrow[\alpha]{j3} & \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\
\left.\frac{\overline{i}}{j}\right| \xrightarrow[\alpha]{jn_j^{(i)}} \alpha_{jn_j^{(i)}}^{(i)} & \longrightarrow & \longleftarrow \left|\frac{\overline{i}}{j}\right. & \\
\xi \longleftarrow \left|\frac{\overline{i}}{j}\right. & \longrightarrow & \longleftarrow \left|\frac{\overline{i}}{j}\right. & (\xi \in \mathcal{A}) \\
\underline{\alpha_{j1}^{(i)}} \longleftarrow \left|\frac{\overline{i}}{j}\right. & \longrightarrow & \left.\frac{\overline{i}}{j}\right| \xrightarrow[\beta]{j1} & \\
\bullet \left.\frac{\overline{i}}{j}\right| \xrightarrow[\beta]{j1} & \longrightarrow & \beta_{j1}^{(i)} \left.\frac{\overline{i}}{j}\right| \xrightarrow[\beta]{j2} & \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots &
\end{array}\right.$$

$$
\left|\begin{array}{llll}
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & & & \\
\frac{\bar{i}}{j}\Big|\xrightarrow[\beta]{jm_j^{(i)}} & \longrightarrow & \beta^{(i)}_{jm_j^{(i)}}\;\overset{N_j^{(i)}}{:\!\frac{\;\;}{\;\;}}\Big|\longrightarrow & \\
\frac{\bar{i}}{j}\Big|\xrightarrow[\alpha]{j2}\xi & \longrightarrow & \overset{\bullet}{\longleftarrow}\Big|\frac{\bar{i}}{j}\;\xi & (\xi\neq\alpha^{(i)}_{j2}) \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & & & \\
\frac{\bar{i}}{j}\Big|\xrightarrow[\alpha]{jn_j^{(i)}}\xi & \longrightarrow & \overset{\bullet}{\longleftarrow}\Big|\frac{\bar{i}}{j}\;\xi & (\xi\neq\alpha^{(i)}_{jn_j^{(i)}}) \\
\xi\;\overset{\bullet}{\longleftarrow}\Big|\frac{\bar{i}}{j} & \longrightarrow & \overset{\bullet}{\longleftarrow}\Big|\frac{\bar{i}}{j}\;\xi & (\xi\in\mathcal{A}) \\
\underline{\alpha^{(i)}_{j1}}\;\overset{\bullet}{\longleftarrow}\Big|\frac{\bar{i}}{j} & \longrightarrow & \alpha^{(i)}_{j1}\;\frac{\bar{i}}{j}\Big|\xrightarrow[\alpha]{j1} & \\
\frac{\bar{i}}{j}\Big|\xrightarrow[\alpha]{j1} & \longrightarrow & \frac{\bar{i}}{j}\Big|\longrightarrow & \\
\Lambda & \longrightarrow & \frac{\overset{i}{-}}{j}\Big|\longrightarrow . &
\end{array}\right.
$$

Compunerea tuturor algoritmilor $\mathfrak{C}_j^{(i)}$ $(1\leqslant i\leqslant N,\ 1\leqslant j\leqslant k_i)$, ne va conduce la algoritmul căutat.

În comanda algoritmului $\mathfrak{C}_j^{(i)}$ deosebim două tipuri de ieşiri (a) şi (b), respectiv corespunzător cazului cînd partea stîngă a formulei de substituţie :

$$P_j^{(i)} \longrightarrow N_j^{(i)} \square\, Q_j^{(i)}$$

nu intră, sau intră în cuvîntul de prelucrat. Compunem algoritmii $\mathfrak{C}_j^{(i)}$ astfel : asociem ieşirea de tipul (a) cu intrarea algoritmului $\mathfrak{C}_{j+1}^{(i)}$ prin formula de substituţie

$$\frac{\overset{i}{-}}{j}\Big|\longrightarrow \;\longrightarrow\; \frac{\overset{i}{-}}{j+1}\Big|\longrightarrow$$

iar ieşirea de tipul (b), o asociem cu intrarea algoritmului $\mathfrak{C}_1^{(N_j^{(i)})}$ prin formula de substituţie

$$\overset{N_j^{(i)}}{:\!\frac{\;\;}{\;\;}}\Big|\longrightarrow \;\longrightarrow\; \overset{N_j^{(i)}}{:\!\frac{\;\;}{\;\;}}\Big|\longrightarrow$$

Să notăm cu $[\mathfrak{C}]_j^{(i)}$ mulţimea formulelor de substituţie care formează grupul elementelor de lucru a C-algoritmului $\mathfrak{C}_j^{(i)}$ şi cu $[S_i]$ schema :

$$[S_i] : \left\{\begin{array}{l} [\mathfrak{C}]_1^{(i)} \\ [\mathfrak{C}]_2^{(i)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ [\mathfrak{C}]_{k_i}^{(i)} \end{array}\right.$$

Să considerăm acum C-algoritmul de tip σ, $\mathfrak{B}$ definit în felu următor :

$$\left\{\begin{array}{ll}
\overset{1}{\underset{1}{\bar{\underline{\ }}}}|\longrightarrow \xi \longrightarrow \frac{\overline{1}}{1}|\xrightarrow[\alpha]{11} \xi & (\xi \in \mathcal{A}) \\
\overset{i}{\underset{j}{\bar{\underline{\ }}}}|\longrightarrow \quad \longrightarrow \longleftarrow|\overset{i}{\underset{j}{\bar{\underline{\ }}}} & (j \neq k_i) \\
\xi \longleftarrow|\overset{i}{\underset{j}{\bar{\underline{\ }}}} \longrightarrow \longleftarrow|\overset{i}{\underset{j}{\bar{\underline{\ }}}}\ \xi & (\xi \in \mathcal{A}) \\
\longleftarrow|\overset{i}{\underset{j}{\bar{\underline{\ }}}} \longrightarrow \frac{\overline{i}}{j+1}|\longrightarrow & \\
\overset{N_j^{(i)}}{:\bar{\underline{\ }}}|\longrightarrow \xi \longrightarrow \longleftarrow|\overset{N_j^{(i)}}{\bar{\underline{\ }}:}\ \xi & (\xi \in \mathcal{A}) \\
\xi \longleftarrow|\overset{N_j^{(i)}}{\bar{\underline{\ }}:} \longrightarrow \longleftarrow|\overset{N_j^{(i)}}{\bar{\underline{\ }}:}\ \xi & (\xi \in \mathcal{A}) \\
\longleftarrow|\overset{N_j^{(j)}}{\bar{\underline{\ }}:} \longrightarrow \frac{\overline{N_j^{(i)}}}{1}|\xrightarrow[\alpha]{11} & \\
\overset{i}{\underset{k_i}{\bar{\underline{\ }}}}|\longrightarrow \longrightarrow \cdot & \\
\overset{0}{:\bar{\underline{\ }}}|\longrightarrow \longrightarrow \cdot & \\
\qquad {[S_1]} & \\
\qquad {[S_2]} & \\
\qquad \vdots & \\
\qquad {[S_N]} & \\
\qquad \Lambda \longrightarrow \bar{\underline{\ }}|\xrightarrow[1]{1} &
\end{array}\right.$$

C-algoritmul de tip σ, $\mathfrak{U}$ astfel construit, este algoritmul căutat.

Într-adevăr [6] dacă

$$\mathfrak{U}(P) = Q,$$

atunci

$$\mathfrak{U}^{\cdot}(P) = Q$$

şi

$$\mathfrak{U}^{\cdot} : |\square P \sqsubset \cdot Q$$

adică există un număr $s > 0$, numerele $N_0, N_1, \dots, N_{s-1}$ şi cuvintele $P_0, P_1, \dots, P_s$ în $\mathfrak{A}$ astfel că

$$1 \leqslant N_k \leqslant N,\ k = 0, 1, \dots, s-1$$

$$N_0 = I$$

$$P_0 = P$$

$$\vdots$$

$$P_s = Q$$

$$\mathfrak{U}^{\cdot} : N_{k-1} \square P_{k-1} \vdash N_k \square P_k \qquad k = 1, 2, \dots, s-1$$

$$\mathfrak{U}^{\cdot} : N_{s-1} \square P_{s-1} \vdash \cdot P_s .$$

Deoarece algoritmul $\mathfrak{B}$ modelează local modul de aplicare al algoritmului $\mathfrak{U}$, avem

$$\mathfrak{B} : P_0 \vdash P_1 \vdash P_2 \vdash \dots \vdash P_{s-1} \vdash \cdot P_s = Q.$$

Această teoremă ne conduce la afirmaţia că C-algoritmii de tip σ, consideraţi de noi, joacă acelaşi rol pentru algoritmii de tip σ, precum algoritmii Cerneavski pentru algoritmii normali [4], şi calculele locale pentru calculele canonice Post [8].

9. Să considerăm N algoritmi cu schemă-graf [7], $S_1, S_2, \dots, S_N$, în care au fost identificate perechile operatori-identificatori. Presupunem că

$$S_i = \{A_1^{(i)}, A_2^{(i)}, \dots, A_{k_i}^{(i)}\},\ (i = 1, 2, \dots, N),$$

unde $A_j^{(i)}$ $(1 \leqslant j \leqslant k_i)$ sînt operatori alfabetici, care verifică proprietăţile :

1) Nodurile $A_j^{(i)}$ sînt ordonate după indicele j.

2) Din fiecare nod pornesc două săgeţi, una notată cu semnul $+$, iar alta cu semnul $-$. Săgeata cu semnul $+$ ce pleacă din $A_j^{(i)}$ se leagă cu $A_1^{(i)}$ dacă operatorul $A_j^{(i)}$ este aplicabil, iar cea cu semnul $-$, se leagă cu $A_{j+1}^{(i)}$.

3) Nodul de intrare I, se leagă cu $A_1^{(i)}$, iar săgeata cu semnul $-$ care pleacă din $A_{k_i}^{(i)}$ se leagă cu nodul de ieşire E.

O astfel de schemă-graf se poate reprezenta ca în figura 4.

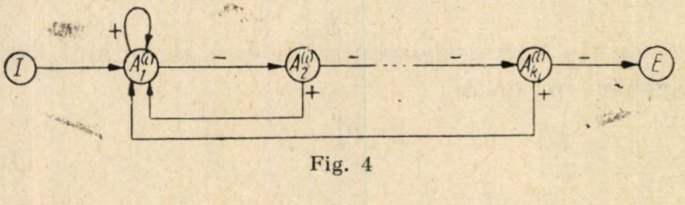


Fig. 4

Vom numi *schemă-graf de tip* σ, a unui algoritm, o schemă-graf definită în felul următor.

Ştergem toate săgeţile notate cu semnul $+$ din schemele-graf S_i, şi fiecărui operator $A_j^{(i)}$ îi ataşăm un număr $N_j^{(i)}$ numit indicile operatorului. Legăm fiecare nod $A_j^{(i)}$ cu nodul $A_1^{(N_j^{(i)})}$ al schemei $S_{N_j^{(i)}}$. Schema-graf obținută se numește admisă dacă $\max\limits_{j,i} N_j^{(i)} \leqslant N$, și

$$\{1, 2, \ldots, N\} \subset \{N_j^{(i)} : i = 1, 2, \ldots, N\,;\ j = 1, 2, \ldots k_i\}$$

Dacă $N_j^{(i)} = 0$, atunci nodul $A_j^{(i)}$ se leagă cu nodul de ieșire. Săgețile cu semnul — ce ies din nodurile $A_{k_i}^{(i)}$ se leagă cu nodul de ieșire. Nodul de intrare se leagă cu nodul $A_1^{(1)}$.

Dacă se interpretează operatorii $A_j^{(i)}$, ca și formule de substituție de tip σ, în care indicile operatorului coincide cu indicile formulei de substituție, atunci schema-graf de tip σ definită mai sus determină un algoritm de tip σ.

Numim C-schemă-graf de tip σ, schema-graf obținută dintr-o schemă-graf de tip σ, în urma substituirii nodurilor $A_j^{(i)}$ cu scheme-graf cu interpretare markoviană care verifică proprietatea T.

Algoritmul definit de o schemă-graf de tip σ, îl vom numi algoritm cu schemă-graf de tip σ, iar algoritmul definit de o C-schemă-graf de tip σ, îl vom numi C-algoritm cu schemă-graf de tip σ.

Ținînd seama de teorema demonstrată în paragraful anterior, putem enunța ;

TEOREMĂ. *Oricare ar fi un algoritm cu schemă-graf de tip* σ, *există un C-algoritm cu schemă-graf de tip* σ, *echivalent cu el.*

C-algoritmii cu schemă-graf de tip σ, modelează local algoritmii schemă-graf de tip σ. C-algoritmii de tip σ, considerați de noi, ne furnizează o metodă de demonstrație directă a echivalenței mașinilor Turing cu benzi multiple [9] cu algoritmii de tip σ, problemă care va fi cuprinsă în altă Notă.

UNE INTERPRÉTATION DES ALGORITHMES AU GRAPHE-SCHÉMA EN LIAISON AVEC LES MACHINES DE TURING ET LES ALGORITHMES DE TYPE TCHERNJAVSKI

(RÉSUMÉ)

On appelle le graphe-schéma d'un algorithme un graphe orienté et fini Γ dans lequel à chaque nœud, à l'exception des nœuds I et E qui s'appellent le nœud d'entrée et le nœud de sortie respectivement, on pose en correspondance un opérateur arithmétique A_i d'un ensemble d'opérateurs arithmétiques $A = \{A_i\}_1^n$, ou un opérateur logique Φ_j d'un ensemble d'opérateurs logiques $\Phi = \{\Phi_j\}_1^m$ et dont les arêtes vérifient les conditions suivantes :

1. De chaque nœud arithmétique A_i et du nœud I sort une seule flèche.
2. De chaque nœud logique Φ_j sortent deux flèches (désignées par „+" et „—").
3. Du nœud E ne sort aucune flèche.

Un algorithme défini par un tel graphe-schéma s'appelle algorithme au graphe-schéma et il a été introduit par L. A. Kalujnin en 1959.

Cet algorithme permet différentes interprétations par rapport à divers ensembles d'opérateurs arithmétiques et logiques considérés.

Au cas où les opérateurs arithmétiques A_i sont les opérateurs de substitutions et les opérateurs logiques Φ_j sont des opérateurs de reconnaissance des entrées des mots, on obtient les algorithmes normaux dans le sens de A. A. Markoff.

Dans ce travail on donne une nouvelle interprétation des algorithmes au graphe-schéma, qui conduit à une classe de machines de Turing. Puis on donne une machine de Turing universelle par rapport à cette classe dont on construit un algorithme au graphe-schéma universel dans un alphabet qui coïncide à l'alphabet extérieur de la machine universelle de Turing.

Dans la seconde partie du travail, en considérant les C-algorithmes de type σ comme une sous-classe d'algorithmes de Tchernjavski [7], on montre que quel que soit un algorithme $\mathfrak{U}$ de type σ, introduit de N. A. Nagornii [6], il existe un C-algorithme $\mathfrak{B}$ de type σ équivalant à $\mathfrak{U}$. Ce résultat conduit à la localisation du procès déterminé d'algorithmes de type σ de Nagornii. Puis en introduisant la notion de graphe-schéma de type σ, on considère les algorithmes au graphe-schéma de type σ et aussi les C-algorithmes au graphe-schéma de type σ, et on montre que les C-algorithmes au graphe-schéma de type σ modèlent localement les algorithmes au graphe-schéma de type σ.

BIBLIOGRAFIE

1. КАЛУЖНИН, *Об алгоритмизации математических задач.* Проблемы кибернетики, **2** (1959).
2. А. А. МАРКОВ, *Теория алгорифмов.* Труды Мат. инст-та им. Стеклова, **XLII** (1954).
3. Н. А. НАГОРНЫЙ, *Некоторые обобщения понятия нормального алгорифма.* Труды Мат. инст-та им. Стеклова, **LII** (1958).
4. ЧЕРНЯВСКИЙ, *Об одном подклассе нормального алгорифма Маркова*, Логические исследования, 1959.
5. А. И. МАЛЬЦЕВ, *Алгорифмы и рекурсивные функции.* Москва, 1965.
6. C. E. SHANNON, *A universal Turing-machine with two internal states. Automat astudies*, Princeton, 1956.
7. I. MARUSCIAC, *Teoria algoritmilor.* Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1966.
8. С. Ю. МАСЛОВ, *Некоторые свойства аппарата канонических исчислений Е. Л. Поста.* Труды Мат. инст-та им. Стеклова, **LXXII** (1964).
9. В. А. УСПЕНСКИЙ, *Лекции о вычислимых функциях.* Физматгиз, Москва, 1960.

ASUPRA FUNCŢIILOR ANALITICE GENERALIZATE VECTORIALE

DE

DAN PASCALI

În lucrare se inversează reprezentarea de speţa întîia pentru funcţii analitice generalizate vectoriale, stabilită în [6].

Aplicarea derivatei areolare la rezolvarea problemelor la limită pentru ecuaţii cu derivate parţiale de tip eliptic de către N. Teodorescu [7], L. Bers [1] şi I. N. Vekua [8], a condus la formarea teoriei funcţiilor analitice generalizate. Rezultatele principale ale acestei teorii au fost extinse, în cazul algebrelor comutative, de Min Szu-Hoa [4], iar în cazul algebrelor necomutative de D. Pascali şi D. Pop [6]. Izomorfismul dintre funcţiile analitice şi funcţiile analitice generalizate, din cazul scalar, este extins mai jos la cazul vectorial.

1. La fel ca în [6], fie $\mathbf{A}$ o algebră necomutativă, $\mathbf{D}$ o submulţime a sa iar $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}_1$ spaţii Banach şi $\mathbf{S}$ o algebră Banach cu element unitate (pe care-l vom nota prin e), astfel încît

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \mathbf{S} \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{B}_1 \subset \mathbf{A}, \\ \mathbf{B}_1 \mathbf{S} \subset \mathbf{B}_1, \quad \mathbf{DB} \subset \mathbf{B}_1, \quad \mathbf{SB} \subset \mathbf{B}, \end{cases}$$

unde prin produsul XY se înţelege mulţimea elementelor de forma xy, cu $x \in X$ şi $y \in Y$.

(II) Mulţimea $\mathbf{D} \cap \mathbf{S}$ este invers închisă : dacă $u \in \mathbf{D} \cap \mathbf{S}$ şi $u^{-1} \in \mathbf{S}$, atunci $u^{-1} \in \mathbf{D} \cap \mathbf{S}$.

Introducem operatorul liniar $\partial : \mathbf{D} \to \mathbf{B}_1$ cu proprietăţile :

(i) Dacă $f \in \mathbf{D}$, $g \in \mathbf{D} \cap \mathbf{S}$, $\partial g \in \mathbf{B}$, atunci $f \cdot g \in \mathbf{D}$ şi

$$\partial (f \cdot g) = \partial f \cdot g + f \cdot \partial g.$$

(ii) Dacă $f_k \in \mathbf{D} \cap \mathbf{S}$, atunci $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k \in \mathbf{D} \cap \mathbf{S}$ şi $\partial \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k \right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \partial f_k$.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 7, P. 1013–1017, BUCUREŞTI, 1968

Notăm $\mathbf{H} = \{ h \in \mathbf{D} \mid \partial h = 0 \}$. Elementele lui $\mathbf{H}$ se numesc *funcții analitice vectoriale*. Din $\mathbf{HS} \subset \mathbf{DS} \subset \mathbf{DB} \subset \mathbf{B}_1$ rezultă $\mathbf{H} \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{B}_1$.

Definim *funcțiile analitice generalizate vectoriale* ca soluții de clasă $\mathbf{D} \cap \mathbf{B}_1$ ale ecuației

$$\partial w = w \cdot F(w), \tag{1}$$

unde operatorul neliniar $F : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}$ este mărginit, $\| F(w) \|_{\mathbf{B}} \leqslant K$, cu K independent de w și satisfăcînd condiția

$$K < \frac{\ln 2}{\| Te \|_{\mathbf{S}}}.$$

Mulțimea funcțiilor analitice generalizate vectoriale o vom nota $\mathfrak{U}$.

Asociem operatorului ∂ operatorul liniar $T : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{D}$, astfel încît

$$\partial Tf = f \text{ pentru } f \in \mathbf{B}_1,$$

și operatorul

$$P(f) = T(f \cdot F(w))$$

pentru $w \in \mathbf{D} \cap \mathbf{B}_1$ dat și $f \in \mathbf{S}$, cu următoarele proprietăți:

(iii) $T(\mathbf{B}) \subset \mathbf{S}$.

(iv) Dacă F comută cu $T(F)$, atunci

$$(Pe)^n = n!\, P^n e, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

(v) $\| P(f) \|_{\mathbf{S}} \leqslant \| F(w) \|_{\mathbf{B}} \| Tf \|_{\mathbf{S}}$.

Dacă w este o funcție analitică generalizată vectorială dată, atunci

$$w = \Phi \cdot u, \tag{2}$$

unde $\Phi \in \mathbf{H}$ iar u este soluția în $\mathbf{D} \cap \mathbf{S}$ a ecuației

$$\partial u = u \cdot F(w)$$

construită prin aproximații succesive, pornind de la elementul $e \in \mathbf{S}$,

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} P^k(e) \text{ cu } P^0(e) = e. \tag{3}$$

Relația (2) este o extindere a reprezentării de speța întîia a funcțiilor analitice generalizate dată de N. Teodorescu și I. N. Vekua.

2. Prin inversiunea reprezentării (2) se înțelege stabilirea unei corespondențe între funcțiile analitice vectoriale și funcțiile analitice generalizate vectoriale. În alte cuvinte, aceasta înseamnă că fiind dat un element $\Phi \in \mathbf{H}$, să găsim o soluție în $\mathbf{D} \cap \mathbf{S}$ a ecuației neliniare

$$\partial u = u \cdot F(\Phi \cdot u)$$

astfel ca produsul $\Phi \cdot u = w$ să fie o soluție în $\mathbf{D} \cap \mathbf{B}_1$ a ecuației (1).

Elementul u din $\mathbf{D} \cap \mathbf{S}$ dat prin (3) este o soluţie a ecuaţiei

$$u = e + P(u) = e + T(u \cdot F(\Phi \cdot u)),$$

căreia îi aplicăm teorema de punct fix a lui Schauder.

În vederea acestui lucru, facem următoarele ipoteze suplimentare:

(vi) Restricţia $T : \mathbf{B} \to \mathbf{S}$ este complet continuă.

(vii) Restricţia $F : \mathbf{HS} \to \mathbf{B}$ este continuă,

(viii) Norma $\| T \|$ a restricţiei $T : \mathbf{S} \to \mathbf{S}$ este mai mică decît $\dfrac{1}{2K}$.

Din aceste condiţii rezultă complet continuitatea operatorului

$$Gu = e + T(u \cdot F(\Phi \cdot u)) : \mathbf{S} \to \mathbf{S}.$$

Să considerăm mulţimea $\mathbf{M} = \left\{ u \in \mathbf{D} \cap \mathbf{S} \,\middle|\, \| u \|_{\mathbf{S}} \leqslant \dfrac{1}{K \| T \|} \right\} \subset \mathbf{S}$, unde $\dfrac{1}{K \| T \|} \geqslant 2$. Mulţimea $\overline{\mathbf{M}}$ este convexă şi închisă. Pentru $u \in M$, din (v) rezultă

$$\| Gu \|_{\mathbf{S}} \leqslant \| e \|_{\mathbf{S}} + \| P(u) \|_{\mathbf{S}} \leqslant 1 + K \| T \| \, \| u \|_{\mathbf{S}} \leqslant 2,$$

de unde $G\overline{\mathbf{M}} \subset \overline{\mathbf{M}}$. În virtutea ipotezelor (vi)—(viii), putem scrie succesiv

$$\| Gu_1 - Gu_2 \|_{\mathbf{S}} \leqslant \| T[(u_1 - u_2) \cdot F(\Phi \cdot u_1)] \|_{\mathbf{S}} +$$

$$+ \| Tu_2 [F(\Phi \cdot u_1) - F(\Phi \cdot u_2)] \|_{\mathbf{S}} \leqslant \| F(\Phi \cdot u_1) \|_{\mathbf{B}} \, C \, \| u_1 - u_2 \|_{\mathbf{S}} +$$

$$+ \| F(\Phi \cdot u_1) - F(\Phi \cdot u_2) \|_{\mathbf{B}} \, \| Tu_2 \|_{\mathbf{S}} \to 0$$

pentru $u_1 - u_2 \to 0$ în $\mathbf{S}$, deci G este un operator continuu pe $\mathbf{S}$ şi conform principiului lui Schauder, există un element $u \in \overline{\mathbf{M}} \subset \mathbf{D} \cap \mathbf{S}$ aşa încît $Gu = u$. Prin urmare, în condiţiile precizate mai sus, vom avea

$$w = \Omega[\Phi],$$

unde operatorul Ω stabileşte un izomorfism între mulţimile $\mathbf{H}$ şi $\mathfrak{U}$.

Rezultatul de mai sus extinde reprezentarea de speţa întîia a funcţiilor analitice generalizate dată de L. Bers [1], L. G. Mihailov [3] şi I. N. Vekua [8], precum şi a generalizărilor sale, dată în cazul vectorilor analitici generalizaţi de D. Pascali [5] şi în cazul funcţiilor analitice generalizate pe algebre comutative de Min Szu Hoa [4].

3. Fie A ca o algebră de funcţii definite pe întreg planul complex E şi $Tf(z)$ o funcţie continuă pe E pentru $f(z) \in \mathbf{B}$. Dacă L este un contur simplu, rectificabil şi închis din E, notăm cu E^+ domeniul mărginit, limitat de curba L iar cu E^- domeniul complimentar lui $E^+ + L$.

Mai departe vom avea în vedere numai soluţiile ecuaţiei (1) care aparţin clasei $\mathbf{D} \cap \mathbf{S}$. Elementul $\Phi \in \mathbf{H}$, din reprezentarea (2) a acestor soluţii, aparţine de asemenea lui $\mathbf{D} \cap \mathbf{S}$. Să presupunem că pentru orice funcţie $f(z) \in \mathbf{D} \cap \mathbf{S}$ putem defini valorile limită $f^{+}(t)$ şi $f^{-}(t)$ cînd $z \to t \in L$ în E^{+} respectiv E^{-}, la fel ca în cazul funcţiilor obişnuite olomorfe pe porţiuni [2].

Putem formula, în cazul funcţiilor analitice generalizate vectoriale problema Riemann omogenă : Să se găsească o funcţie din $\mathfrak{U} \cap \mathbf{S}$ cu condiţia la limită

$$w^{+}(t) = g(t)\, w^{-}(t), \text{ unde } g(t) \in \mathbf{S}.$$

Ţinînd seama de reprezentarea $w = \Phi \cdot u$ şi de continuitatea lui u în tot planul, datorită condiţiei puse operatorului T putem scrie

$$w^{+}(t) = \Phi^{+}(t) \cdot u(t) \text{ şi } w^{-}(t) = \Phi^{-}(t) \cdot u(t),$$

şi problema de mai sus se reduce la problema Riemann omogenă pentru elementul din $\mathbf{H}$ corespunzător.

$$\Phi^{+}(t) = g(t)\ \Phi^{-}(t). \tag{4}$$

Dacă $X(z)$ este o soluţie a problemei la limită (4) şi un element regulat din $\mathbf{S}$, atunci $W = X^{-1} \cdot w \in \mathbf{S}$ este o soluţie continuă în tot planul pentru ecuaţia

$$\partial W = W \cdot F(X \cdot W).$$

În cazul problemei Riemann pentru funcţii analitice generalizate scalare [3], se folosesc soluţiile $W = \Omega(\psi)$, unde ψ este un polinom complex, pentru a asigura funcţiei $w \in \mathfrak{U} \cap \mathbf{S}$ un ordin finit la infinit.

Primită la redacţie la 15 decembrie 1967.

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

ON THE GENERALIZED VECTORIAL ANALYTIC FUNCTIONS

(SUMMARY)

The author continues the construction of an axiomatic theory of generalized vectorial analytic functions, started in [6].

Let $\mathbf{A}$ be a noncommutative algebra over the complex field, $\mathbf{D}$ a subset of $\mathbf{A}$; $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}_1$ Banach spaces and $\mathbf{S}$ a Banach algebra such that $\mathbf{S} \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{B}_1 \subset \mathbf{A}$, $\mathbf{B}_1 \mathbf{S} \subset \mathbf{B}_1$, $\mathbf{D}\mathbf{B} \subset \mathbf{B}_1$, $\mathbf{S}\mathbf{B} \subset \mathbf{B}$ and the set $\mathbf{D} \cap \mathbf{S}$ is inverse closed. Consider the derivation operator $\partial : \mathbf{D} \to \mathbf{B}_1$ and the set $\mathbf{H} = \{h \mid h \in \mathbf{D},\ \partial h = 0\}$. *A generalized vectorial analytic function* is a solution $w \in \mathbf{D} \cap \mathbf{B}_1$ of the equation $\partial w = wF(w)$, where $F : \mathbf{B} \to \mathbf{B}_1$ is a nonlinear bounded operator. This admits the representation $w = \Phi u$, where $\Phi \in \mathbf{H}$ and $u \in \mathbf{D} \cap \mathbf{S}$ is a solution of the equation $\partial u = uF(w)$.

The paper deals with the inversion of the representation $w = \Phi u$. If $\Phi \in \mathbf{H}$ is given, the conditions of the application of Schauder's fixed-point theorem for the nonlinear equation $\partial u = uF(\Phi u)$ are pointed out.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Bers, *Theory of pseudo-analytic functions*. New York, 1953.
2. Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*. Физматгиз, Москва, 1958.
3. Л. Г. Михайлов, *Краевая задача типа задачи Римана для систем дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и некоторые интегральные уравнения*. Ученые записки. Труды физ.-матем. ф-та Тадж. гос. ун-та, **10**, 32–79 (1957).
4. Min Szu Hoa, *On concrete examples and the abstract theory of generalized analytic functions*. Scientia Sinica, **XII**, *9*, 1269–1283 (1963).
5. D. Pascali, *Vecteurs analytiques généralisés*. Rev. Roum. math. pures et appl., **10**, *6*, 779–808 (1965).
6. D. Pascali, D. Pop, *Funcţii analitice generalizate pe algebre Banach*, St. cerc. mat., **20**,*3* (1968).
7. N. Teodorescu, *La dérivée aréolaire et ses applications dans la physique mathématique* (Thèse), Paris, Gauthier-Villars, 1931.
8. И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*. Физматгиз, Москва, 1959.

ASUPRA DEVIERII UNUI JET DE FLUID IDEAL PRINTR-UN OBSTACOL SIMETRIC

DE

TITUS PETRILA

(Cluj)

În lucrarea de faţă se studiază mişcarea plană a unui jet de fluid ideal şi incompresibil, ieşind dintr-un canal cu pereţi rectilinii şi paraleli şi întîlnind în cale un obstacol, în ipoteza că această configuraţie admite o axă de simetrie (fig. 1).

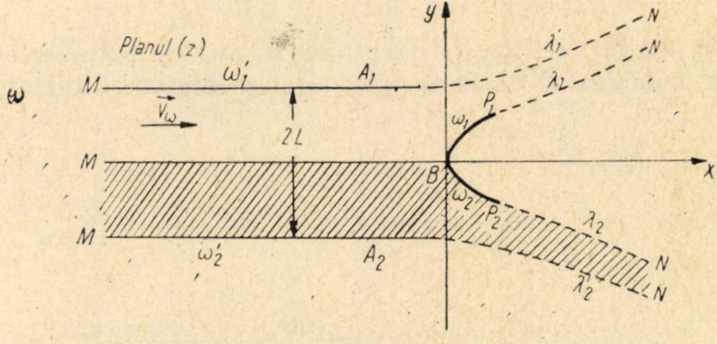


Fig. 1

Problema aceasta a fost pusă pentru prima dată de V. Vâlcovici în teza sa de doctorat susţinută la Universitatea din Göttingen în 1913 [1]. Ea a fost ulterior reluată de mai mulţi cercetători [2]. Metoda de studiu pe care o propunem generalizează pe aceea considerată de Berman [3], în cazul în care canalul se întinde pînă la infinit aval.

1. *Punerea problemei.* Vom nota prin V_∞ mărimea vitezei la infinit amonte (viteză ce este paralelă cu pereţii canalului), prin V_0 mărimea vitezei la infinit aval, iar prin $2L$ lărgimea canalului.

Datorită simetriei ne vom fixa atenţia asupra jumătăţii inferioare a configuraţiei, adică asupra mişcării din semiplanul inferior.

ST. CERC. MAT., TOM. 20. NR. 7, P. 1019–1024, BUCUREŞTI, 1968

Pentru rezolvarea problemei propuse vom căuta să găsim dependența dintre potențialul complex al mișcării $f = \varphi + i\psi$ și viteza complexă $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$. Introducînd funcția auxiliară $\Omega = \ln \frac{1}{V_0} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \ln \frac{|V|}{V_0} - i\theta$, considerată de Berman [3] și căreia îi corespunde $-i\omega$ în notațiile din [4], problema revine de fapt la găsirea unor exprimări parametrice de formă $f(u)$ și $\Omega(u)$, pentru cele două funcții, unde $u = u_1 + iu_2 \in D$. Specificul metodei pe care o vom folosi constă în faptul că acest domeniu D va fi primul cadran ceea ce conferă soluției o exprimare suficient de simplă.

2. *Construcția soluției generale.* Ne vom ocupa în primul rînd de determinarea funcției $f(u)$, $u \in \mathrm{cadr}_{\mathrm{I}}$. Pentru aceasta vom preciza în prealabil domeniul de variație al funcției $f = \varphi + i\psi$ (fig. 2); întrucît am considerat doar mișcarea din semiplanul (z) inferior, ne vom limita doar la fîșia de lărgime $Q = L \cdot V_\infty$ — debitul fluidului, din semiplanul (f) inferior.

Considerînd acum reprezentarea conformă a acestei fîșii pe primul cadran, vom avea în definitiv

$$f = \frac{Q}{\pi} \ln \left[\frac{u^2 - m^2}{m^2} \cdot e^{\frac{\pi f_0}{Q}} \right] - i\,Q,$$

unde $f_0 = f(0)$, iar m, abscisa punctului M, este un parametru real mai mare decît 1 depinzînd de forma profilului și lărgimea canalului.

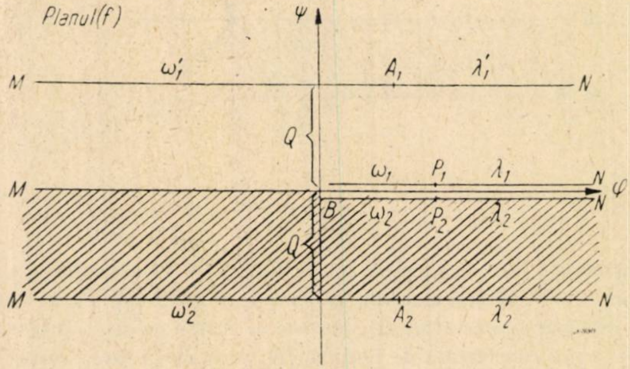


Fig. 2

Imaginile din planul (u) ale punctelor remarcabile din planul (f) (și implicit din planul (z)) sînt precizate în figura 3.

În cele ce urmează ne vom ocupa de determinarea funcției $\Omega(u)$. Întrucît domeniul de variație al funcției Ω nu ne este cunoscut, vom utiliza un procedeu diferit de cel dinainte. Acest procedeu, care constă în exprimarea funcției $\Omega(u)$ ca soluție a unei probleme la limită, va necesita studiul prealabil al comportării funcției $\Omega(u)$ pe frontiera domeniului D.

Deoarece partea reală $\ln \frac{|V|}{V_0}$ a lui $\Omega(u)$ pe semiaxa Ou_2 este nulă, conform principiului de simetrie funcţia căutată $\Omega(u)$ se va putea prelungi în cadranul II. Pe de altă parte, axa reală se poate considera ca împărţită în porţiuni pe care se cunosc fie partea reală, fie partea imaginară a aceleiaşi funcţii $\Omega(u)$. Astfel presupunînd dată funcţia $\theta = \theta(\xi)$

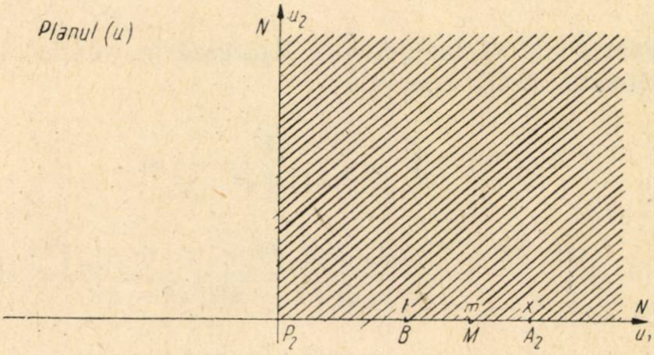


Fig. 3

pentru $\xi \in [-1, 1]$, astfel ca $\theta(-\xi) = \theta(\xi)$, vom avea următoarea problemă la limită pentru semiplanul superior :

$\theta = \theta(\xi)$ pe intervalul $[-1, 1]$

$\theta = 0$ pe intervalul $(1, k] \cup [-k, -1)$

$\ln \frac{|V|}{V_0} = 0$ pe restul axei reale,

unde k este abscisa punctului A_2, valoarea ei depinzînd atît de f_0 cît şi de valoarea potenţialului φ în punctul $A_1(A_2)$:

$$k = m \sqrt{e^{\varphi(a, L) \frac{\pi}{Q} - \frac{\pi f_0}{Q}} + 1}.$$

Această problemă la limită, de tip Volterra — Signorini, are următoarea soluţie :

$$\Omega(u) = \frac{i}{\pi} \sqrt{u^2 - k^2} \int_{-1}^{1} \frac{\theta(\xi)}{\sqrt{k^2 - \xi^2}} \cdot \frac{d\xi}{u - \xi},$$

unde pentru radicalul $\sqrt{u^2 - k^2}$ adoptăm determinarea care este negativă pentru u real şi mai mic decît $-k$, după practicarea tăieturii pe segmentul $[-k, +k]$.

Ne vom plasa acum în cazul particular cînd funcţia $\theta(\xi)$ are o expresie de forma :

$$\theta(\xi) = -\left[\frac{\pi}{2} + \sqrt{1 - \xi^2}\,(A_0 + A_2\,\xi^2 + \ldots + A_{2n}\,\xi^{2n})\right]$$

pentru $-1 \leqslant \xi \leqslant 1$.

Atunci soluţia problemei Volterra — Signorini va fi :

$$(1)\ \Omega(u) = -\frac{i}{\pi}\sqrt{u^2-k^2}\int_{-1}^{1}\frac{\pi/2+\sqrt{1-\xi^2}\,(A_0+A_2\xi^2+\ldots+A_{2n}\xi^{2n})}{\sqrt{k^2-\xi^2}}\,\frac{\mathrm{d}\xi}{u-\xi}.$$

Pentru $A_{2j} = 0$ $(j = \overline{0,\ n})$ ne vom afla în cazul plăcii normale jetului.

Observăm acum că integrala ce figurează în soluţia (1) revine de fapt la următoarele două integrale :

$$I(u) = \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}\xi}{(u-\xi)\cdot\sqrt{k^2-\xi^2}}\ \text{şi}$$

$$H(u) = \int_{-1}^{1}\frac{(1-\xi^2)\,(A_0+A_2\,\xi^2+\ldots+A_{2n}\,\xi^{2n})}{(u-\xi)\cdot\sqrt{1-\xi^2}\cdot\sqrt{k^2-\xi^2}}\,\mathrm{d}\xi.$$

În ceea ce priveşte integrala $I(u)$, făcînd substituţia $u-\xi = \frac{1}{t}$ ea devine :

$$I(u) = \int_{\frac{1}{u+1}}^{\frac{1}{u-1}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(k^2-u^2)\,t^2+2ut-1}}$$

care se calculează imediat obţinînd :

$$I(u) = \frac{1}{\sqrt{k^2-u^2}}\lg\left(\frac{u+1}{u-1}\cdot\frac{k^2-u+\sqrt{(k^2-1)\,(k^2-u^2)}}{k^2+u+\sqrt{(k^2-1)\,(k^2-u^2)}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k^2-u^2}}\lg\left[\frac{(u\sqrt{k^2-1}+\sqrt{k^2-u^2})^2}{k^2\,(u^2-1)}\right].$$

Pe de altă parte, se observă, din expresia iniţială a lui $I(u)$, că funcţia $\frac{i}{\pi}\,I(u)$ trebuie să fie soluţia următoarei probleme Dirichlet pentru semiplanul superior :

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{i}{\pi}\,I(u_1)\right\} = \frac{1}{\sqrt{k^2-u_1^2}}\quad \text{pentru}\ -1 < u_1 < 1$$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{i}{\pi}\,I(u_2)\right\} = 0\qquad \text{pe restul axei reale.}$$

Funcția $I(u)$ trebuie să fie olomorfă în semiplanul superior, iar comportamentul ei în vecinătatea punctelor $u = \pm 1$ să fie dat de

$$I(u) = \mp \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}} \lg (u \mp 1) + \text{funcție continuă.}$$

Remarcăm că dacă se păstrează aceeași determinare pentru radicalul $\sqrt{u^2 - k^2}$ care a fost adoptată în rezolvarea problemei Volterra — Signorini, expresia explicită obținută pentru $I(u)$ satisface atît condiția de olomorfie în semiplanul superior, cît și cea legată de comportamentul în punctele de discontinuitate $u = \pm 1$.

În ceea ce privește pe $H(u)$ vom avea și :

$$H(u) = -\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{n+1} (A_{2j} - A_{2j-2}) \cdot \int_{-1}^{1} \frac{\xi^{2j} (u + \xi)\, \mathrm{d}\xi}{(\xi^2 - u^2) \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{k^2}}} =$$

$$= -\frac{u}{k} \sum_{j=0}^{n+1} (A_{2j} - A_{2j-2}) \int_{-1}^{1} \frac{\xi^{2j} \cdot \mathrm{d}\xi}{(\xi^2 - u^2) \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{k^2}}}$$

unde $A_{-2} = A_{2n+2} = 0$.

Cu alte cuvinte calculul integralei $H(u)$ revine de fapt la calcularea unor integrale de următoarele două tipuri :

$$H_{1j} = \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^{2j} \cdot \mathrm{d}\xi}{\sqrt{1 - \xi^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{k^2}}} \quad \text{și} \quad H_{2j} = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi^2 - u^2) \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{k^2}}}.$$

Primul tip (H_{1j}) pe baza unor formule de recurență cunoscute se reduce la integrale eliptice de speța I și a II-a, iar al doilea tip (H_{2j}) la integrale eliptice de speța a III-a.

Dacă în expresia integrală a lui $\Omega(u)$ vom dispune ca variabila $u = u_1 + iu_2$ să tindă de-a lungul axei imaginare către punctul de la infinit (N), ceea ce revine la a face pe $u_1 = 0$ iar pe $u_2 \to +\infty$, vom putea obține direcția asimptotică θ_0 a liniilor de curent la infinit aval. Ținînd cont de determinarea aleasă pentru radicalul $\sqrt{(u + k)(u - k)}$, vom putea scrie :

$$-i\theta_0 = \lim_{u_2 \to +\infty} -\frac{i}{\pi} \cdot i \cdot \sqrt{u_2^2 + k^2} \cdot$$

$$\cdot \int_{-1}^{1} \frac{(-iu_2 - \xi) \cdot \left[\frac{\pi}{2} + \sqrt{1 - \xi^2} (A_0 + \ldots + A_{2n} \xi^{2n})\right]}{(u_2^2 + \xi^2) \cdot \sqrt{k^2 - \xi^2}} \mathrm{d}\xi$$

de unde

$$\theta_0 = \frac{1}{2}\left[\arcsin\frac{\xi}{k}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{\pi k}\sum_{j=0}^{n+1}(A_{2j} - A_{2j-2})\int_{-1}^{1}\frac{\xi^{2j}\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\cdot\sqrt{1-\frac{\xi^2}{k^2}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{k}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{k^2}} + \frac{1}{\pi k}\sum_{j=0}^{n+1}(A_{2j} - A_{2j-2})\,H_{1j},$$

unde H_{1j} sînt integrale care se reduc pe baza aceloraşi formule de recurenţă de care a fost vorba şi mai sus la integrale eliptice de speţa I-a şi a II-a.

Pentru $A_{2j} = 0$ ($j = \overline{0, n}$) se reobţine un rezultat valabil pentru placa normală jetului.

Primită la redacţie la 15 noiembrie 1967

Universitatea „Babeş-Bolyai" Cluj
Facultatea de matematică şi mecanică

SUR LA DÉVIATION D'UN JET DE FLUIDE IDÉAL PAR UN OBSTACLE SYMÉTRIQUE

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail on étudie le mouvement plan d'un jet de fluide idéal et incompressible sortant d'un tuyau à parois rectilignes et rencontrant un obstacle, dans l'hypothèse que cette configuration admet un axe de symétrie.

Ce problème a été posé pour la première fois par V. Vâlcovici dans sa thèse à l'Université de Gottingue en 1913 [1]. Il a été repris par plusieurs chercheurs [4]. La méthode d'étude que nous proposons généralise la méthode considérée par Berman [3], dans le cas où le tuyau s'étend jusqu'à l'infini aval.

BIBLIOGRAFIE

1. V. Vîlcovici, *Inaugural Dissertation*. Göttingen, 1913.
2. S. Popp, *Mişcări fluide discontinue, incompresibile sau compresibile, în canale (sinteză)*. Revista de referate şi recenzii, Centrul de documentare ştiinţifică, *12* (1965).
3. Я. Р. Берман, *Отрывное обтекание круглого цилиндра в ограниченном потоке*. Прикл. мат. и мех., **XIII** (1949).
4. C. Iacob, *Introduction mathématique à la Mécanique des fluides*, Bucarest—Paris, 1959.

UN ALGORITM PENTRU DETERMINAREA LINIILOR DE CURENT ÎN MIŞCAREA PLANĂ ÎN JURUL UNOR PROFILE SIMETRICE

DE

TITUS PETRILA

(Cluj)

Se prezintă un algoritm pentru determinarea liniilor de curent în mişcările plane ale fluidelor incompresibile în prezenţa obstacolelor simetrice.

1. În această lucrare se prezintă un algoritm pentru stabilirea liniilor de curent în mişcarea plană, potenţială şi permanentă, fără circulaţie, în jurul unor profile simetrice.

Pentru aceasta se va folosi un algoritm extrem de general dat de C. Y. Lee [1], pe care îl vom schiţa în cele ce urmează în felul următor :

a) Fie $C = \{c^1, c^2, \ldots, c^n, \ldots\}$ o mulţime oarecare de elemente numite *celule*. Pentru fiecare $c^i \in C$, se defineşte o *vecinătate* $N(c^i) = \{c^i_1, c^i_2, \ldots, c^i_n\}$ care satisface la următoarele două condiţii :

1. Fiecare $N(c^i)$ conţine exact n celule, unde $n \geqslant 1$.

2. Dacă $c^j \in N(c^i)$, atunci şi $c^i \in N(c^j)$.

Paralel cu introducerea pentru fiecare celulă c^i a vecinătăţii $N(c^i)$ vom introduce şi un ansamblu de funcţii $d_i \, (i = \overline{1,n})$, definite pe C şi cu valori tot în C, care satisfac la :

$$d_k(c^i) = c^i_k, \; k = \overline{1,n}.$$

Fie S o mulţime finită de simboluri : $S = \{s^1, s^2, \ldots, s^m\}$ numită *alfabet*.

Fie Γ o aplicaţie a lui C pe $C \times S$, prin care de fapt, la fiecare celulă $c^i \in C$, i se asociază un simbol oarecare $s(c^i) \in S$.

Fie c^i şi c^j două celule distincte din C. Printr-un *drum* între aceste celule $p(c^i, c^j)$, vom înţelege ansamblul de celule $\{c^i = c^0, c^1, \ldots, c^m = c^j\}$, care se bucură de proprietatea că $c^{i+1} \in N(c^i)$ pentru $i = 0, 1, \ldots, m-1$.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 7, P. 1025–1030, BUCUREŞTI, 1968

Notăm prin $\pi(c^i, c^j)$ mulțimea tuturor drumurilor $p(c^i, c^j)$ dintre celulele c^i și c^j.

Fie M o aplicație a mulțimii $\pi(c^i, c^j)$ în mulțimea $\{0,1\}$. Un drum $p(c^i, c^j)$ se va numi *admisibil*, dacă $M(p(c^i, c^j)) = 1$. În caz contrar el va fi neadmisibil. Notăm prin $\pi^*(c^i, c^j)$ mulțimea drumurilor admisibile dintre c^i și c^j.

Cvintetul (C, S, N, Γ, M) este numit *spațiu* $\mathcal{C}$.

Fie acum F un vector de r funcții $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ definite pe $\pi^*(c^i, c^j)$ și cu valori în mulțimea numerelor întregi nenegative.

Un drum $p^1(c^i, c^j) \in \pi^*(c^i, c^j)$ se zice *minimal în raport cu* f_1 dacă $f_1(p^1(c^i, c^j)) \leqslant f_1(p(c^i, c^j))$ oricare ar fi $p(c^i, c^j) \in \pi^*(c^i, c^j)$.

Un drum $p^{12}(c^i, c^j)$ se spune că este *minimal în raport cu* (f_1, f_2) dacă $p^{12}(c^i, c^j) \in P^1(c^i, c^j) = \{p^1(c^i, c^j) \mid f_1(p^1(c^i, c^j)) \leqslant f_1(p(c^i, c^j)$ oricare ar fi $p(c^i, c^j) \in \pi^*(c^i, c^j)$ și $f_2(p^{12}(c^i, c^j)) \leqslant f_2(p(c^i, c^j))$ pentru orice $p(c^i, c^j) \in$ $\in P^1(c^i, c^j)$.

Analog se poate defini un drum $p^{12\cdots r}(c^i, c^j)$ *minimal în raport cu* $F = (f_1, f_2, \ldots, f_r)$.

Problema drumului $\mathcal{P}$. Dat fiind un spațiu $\mathcal{C}$, un vector $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_r\}$, o celulă inițială c^* și una finală c^{**}, să se găsească un drum admisibil $p^{12\ldots r}(c^*, c^{**})$ care este minimal în raport cu F.

O funcție f definită pe $\pi^*(c^i, c^j)$ și cu valori în mulțimea numerelor întregi nenegative se zice *monotonă* dacă, pentru orice drum $p(c^i, c^j)$, avem inegalitatea $f(p(c^i, c^k)) \leqslant f(p(c^i, c^j))$, unde $p(c^i, c^k)$ este un subdrum oarecare al lui $p(c^i, c^j)$.

Vectorul F se zice monoton, dacă toate funcțiile sale f_i sînt monotone.

b) *Algoritmul A*. Fie L o *listă* de celule. Pentru fiecare celulă din lista L vom atașa o *masă celulară* $(m_1, m_2, \ldots, m_r)$; mulțimea maselor celulare este ordonată lexicografic. În același timp fiecărei celule din lista L îi vom atașa și o *coordonată de lanț* care este una din funcțiile d_k corespunzătoare. Pornind de la lista L, vom construi o listă auxiliară L_1 în felul următor:

R 1) Fie c o celulă din lista L. O celulă c^i se zice *admisibilă* dacă $p(c^*, c^i, c^{**})$ este un drum admisibil și dacă masa celulară a celulei c^i nu a fost încă determinată. Să notăm prin $\{c^i \mid c^i \in N(c)\}$ mulțimea celulelor admisibile din $N(c)$. Atunci lista auxiliară L_1 se va obține astfel: $L_1 = \bigcup\limits_{c \in L} \{c^i \mid c^i \in N(c)\}$.

R 2) Vom da acum un procedeu pentru stabilirea masei celulare și a coordonatei de lanț. Fie c^i o celulă din L_1. O masă celulară *posibilă* pentru c^i se va determina astfel:

Pentru fiecare $c^j \in N(c^i)$ pentru care masa celulară a fost bine determinată, se construiește r-pletul $(f_1(p(c^*, c^j, c^i)), \ldots, f_r(p(c^*, c^j, c^i)))$.

Fie acum $c^{j_0} \in N(c^i)$, celula pentru care r-pletul este minim. În cazul în care există mai multe celule c^{j_0} care satisfac la această condiție se aplică un procedeu de selecționare precizat la R 3). O masă celulară posibilă pentru c^i este atunci r-pletul $(f_1(p(c^*, c^{j0}, c^i, \ldots, f_r(p((c, c^{j_0}, c^i)))$ iar o coordonată de lanț *posibilă* pentru c^i este d_k, unde $d_k(c^i) = c^{j_0}$.

Fie acum $\{c^1\}$ mulțimea celulelor din L_1 pentru care masa celulară posibilă este minimă. Pentru aceste celule vom conveni să le atribuim ca masă celulară şi ca coordonată de lanţ însăşi masa celulară posibilă, respectiv coordonata de lanţ posibilă. Restul celulelor a căror masă celulară nu este minimă nu vor mai fi considerate.

R3) Regula de selecţionare a celulei c^{j_0}, regulă bazată, în general, pe specificul problemei considerate.

R4) Procedeu de revizuire a listei L.

Fie $\{c^l\}$ celulele din L_1 a căror masă a fost bine determinată prin R2). Considerăm atunci reuniunea listei L cu $\{c^l\}$ şi eliminăm din mulţimea obţinută acele celule pentru care masa celulară a tuturor celulelor admisibile din vecinătatea respectivă a fost determinată. Obţinem astfel noua listă L.

R5) Procedeul de iniţializare.

Lista L va conţine iniţial doar celula c^* căreia i se atribuie masa $(0, 0, \ldots, 0)$.

Algoritmul A 1 de „căutare”. Aplicăm regula R5) pentru iniţializare. Apoi se aplică succesiv regulile *R*1), R2), R3) şi R4) pînă cînd în lista L va apare celula c^{**} sau lista L va deveni vidă.

În primul caz se trece la algoritmul A2) de „trasare” ; în al doilea caz nu există un drum admisibil $p(c^*, c^{**})$ în spaţiul $\mathcal{C}$.

Algoritmul A 2 de „trasare”. Plecînd de la c^{**} urmărim lanţul de coordonate pînă cînd se va cădea peste c^*. În felul acesta se va trasa univoc drumul $p(c^*, c^{**})$.

c) TEOREMĂ. *Dacă F este un vector monoton, atunci algoritmul A determină un drum $\bar{p}(c^*, c^{**})$, soluţie a problemei drumului $\mathcal{P}$.*

2. Să considerăm acum un cadrilaj uniform al planului mişcării şi fie $C = \{c^1, c^2, \ldots, c^n, \ldots\}$. mulţimea tuturor pătrăţelelor din plan. Definim pe $N(c^i) = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_1', d_2', d_3', d_4'\}$ ca ansamblul tuturor celor opt pătrăţele învecinate cu c^i. Se verifică imediat că proprietăţile vecinătăţilor sînt verificate.

Vom ataşa în acelaşi timp pătrăţelelor din $N(c^i)$ simboluri — vectori ce caracterizează poziţia acestora faţă de celula c^i, după cum se vede mai jos :

$$\begin{array}{ccccc} & & d_2' & & \\ d_2 & \nwarrow & \uparrow & \nearrow & d_1 \\ d_3' & \rightarrow & c^i & \rightarrow & d_1' \\ d_3 & \swarrow & \downarrow & \searrow & d_4 \\ & & d_4' & & \end{array}$$

Aceste simboluri substituie în mod practic funcţiile $d_k(c^i)$ din teoria generală.

Alfabetul S îl considerăm ca fiind format din simbolurile $S = \{\uparrow, \downarrow, \rightarrow, \leftarrow, \nearrow, \searrow, \swarrow, \nwarrow,$ X, Spaţiu liber$\}$.

În ceea ce priveşte Γ, aplicaţia concretă a lui S pe C ea este legată de forma obstacolului considerat şi se va preciza în problema concretă.

Funcţia M o vom defini în felul următor :

Un drum $p(c^1, c^i, c^n)$ se zice admisibil dacă :

a) Nu va intersecta aplicaţia Γ;

b) $s(c^{i+1}) \neq \nearrow, \searrow, \rightarrow$ ori de cîte ori $s(c^i) = \nwarrow, \swarrow, \leftarrow$;

c) $s(c^{i+1}) \neq \nwarrow, \swarrow, \leftarrow$ ori de cîte ori $s(c^i) = \searrow, \nearrow, \rightarrow$.

În caz contrar, drumul este neadmisibil.

Vom observa aici că prin $s(c^i)$ *nu* înţelegem simbolul ataşat celulei c^i prin aplicaţia Γ, ci cel care corespunde celulei c^i caracterizînd poziţia ei faţă de celula precedentă din drum. În ceea ce priveşte condiţiile b) şi c), ele s-au pus pentru asigurarea sensului progresiv al mişcării, cît şi ţinînd seama de faptul că vom considera doar profile a căror pantă nu variază brusc.

Vectorul F se va reduce în cazul nostru la o singură componentă f, pe care o vom defini astfel:

1. $f(p(c^*, c^*)) = 0$

2. $f(p(c^*, c^{i+1})) = f(p(c^*, c^i)) +$

$$+ |\operatorname{Re}\operatorname{Med}(Si) - \operatorname{Re}\operatorname{val} s(c^{i+1})| + |\operatorname{Im}\operatorname{Med}(Si) - \operatorname{Im}\operatorname{val} s(c^{i+1})|$$

unde Med(Si) este media aritmetică rotunjită la întregul cel mai apropiat al *valorii* tuturor simbolurilor $s(c^j) = X$ sau spaţiu liber prezente în celulele c^j din vecinătatea celulei c^i, exceptînd pe cele situate în „spate"[1]; dacă în vecinătatea celulelor c^j se vor afla şi celule „frontieră" atunci şi valoarea simbolurilor din aceste celule se va considera în mediere. În ceea ce priveşte valoarea simbolurilor considerate, o vom defini în felul următor:

$$\operatorname{Val} s(c^j) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } s(c^j) = \rightarrow \\ 1+i & \text{dacă } s(c^j) = \nearrow \\ i & \text{dacă } s(c^j) = \uparrow \\ -1+i & \text{dacă } s(c^j) = \nwarrow \\ -1 & \text{dacă } s(c^j) = \leftarrow \\ -1-i & \text{dacă } s(c^j) = \swarrow \\ -i & \text{dacă } s(c^j) = \downarrow \\ 1-i & \text{dacă } s(c^j) = \searrow . \end{cases}$$

Se vede imediat că funcţia f astfel introdusă este monotonă. În acelaşi timp observăm că de fapt calcularea mediei aritmetice Med(Si) rotunjită la întreg, a valorii tuturor simbolurilor $s(c^j)$ din vecinătăţile respective, care intervine în expresia lui f, revine la compunerea *aproximativă* a vectorilor $\rightarrow$, $\nearrow$, $\uparrow$, $\nwarrow$, $\leftarrow$, $\swarrow$, $\downarrow$, $\searrow$ din aceste celule.

Corolar. *Algoritmul A aplicat acestui spaţiu* $\mathcal{C}$ *şi acestei funcţii* f *rezolvă într-o primă aproximaţie, problema trasării liniilor de curent în mişcarea plană, potenţială şi permanentă în jurul unuia sau a mai multor profile simetrice date.*

În cele ce urmează vom căuta să îmbunătăţim această „primă aproximaţie". Pentru aceasta vom reformula problema noastră modificînd structura funcţiei f. Mai precis, în locul mediei Med(Si) vom considera pe $\widetilde{\operatorname{Med}}(Si)$ care revine la medierea aritmetică rotunjită la întreg a valorii tuturor simbolurilor $s(c^j)$ din celulele ocupînd *fie poziţia* d_i, *fie* d_i' *faţă de* c^i, simboluri obţinute deja prin prima aproximaţie. Această modificare este în concordanţă cu faptul că, în acest caz, direcţia vitezei θ fiind o funcţie armonică, determinarea spectrului liniilor de curent este de fapt o problemă Dirichlet. Or, atunci, retranscriind ecuația lui Laplace în diferențe finite, pentru valoarea funcției θ într-un punct al planului (într-o celulă), se obține o mediere de tipul $\widetilde{\text{Med}}(Si)$. De aceea folosind această nouă expresie $\tilde{f}$ pentru funcția f și folosind ca date inițiale cele obținute prin aplicarea algoritmului A spațiului $\mathcal{C}$ și funcției f, ne încadrăm într-un proces iterativ de tip Libman pentru determinarea spectrului liniilor de curent, care aplicat repetat ne va furniza configurații tot mai exacte pentru spectrul liniilor de curent.

---

[1] Este vorba de celulele d_2, d_2', d_3, dacă mişcarea se face de la stînga spre dreapta etc.

Practic. La o scară convenabilă pe un caroiaj suficient de fin, se reprezintă profilul dat inițial. Apoi în celulele frontieră se vor figura acele simboluri — vectori din alfabetul S care aproximează cel mai bine direcția locală a tangentei la frontierea respectivă. Aceste simboluri „frontieră" marchează și direcția aproximativă a vectorului viteză în porțiunea respectivă și vor servi ca prime date inițiale în rezolvarea problemei noastre. Tot ca date inițiale vor servi și simbolurile $\rightarrow$ plasate în fîșia de celule trecînd prin bordul de atac, paralelă cu $\vec{V}_\infty$.

Considerăm apoi o celulă inițială „de pornire" c^*, plasată în vecinătatea fîșiei de atac căreia i se atribuie masa celulară 0 și pentru care $s(c^*) = \rightarrow$. Aplicînd succesiv algoritmul A spațiului $\mathcal{C}$ și funcției f, lista L se va îmbogăți la fiecare pas cu cîte *un* element, acesta avînd de fiecare dată masa celulară 0[2] și reprezentînd coordonata de lanț a celulei imediat următoare în listă. Convenim să atribuim celulei obținute acel simbol vector ce caracterizează poziția celulei față de cea precedentă în drum. Repetînd algoritmul de un număr suficient de ori se va obține prima aproximație a liniei de curent trecînd prin c^*. Pentru trasarea ei se vor putea utiliza însăși simbolurile-vector prezente în celulele respective.

Se va trece apoi la construirea primei aproximații a unei alte linii de curent trecînd prin celula c_1^* aflată în vecinătatea liniei trasate înainte și pentru care se vor folosi în calitate de date inițiale și datele obținute înainte etc.

O dată determinată această primă aproximație a liniilor de curent vom trece la aplicarea algoritmului A spațiului $\mathcal{C}$ și funcției $\tilde{f}$, folosind prima aproximație a spectrului în calitate de date inițiale. Observăm că aplicarea acestui algoritm va fi acum independentă de celula de pornire; o dată ce aceasta însă a fost precizată, noi o vom urmări în mișcarea ei, aplicînd de fiecare dată algoritmul acelei celule la care am fost conduși.

Convenind să atribuim de fiecare dată unei celule din drum acel simbol-vector ce caracterizează poziția ei față de celula precedentă, prin urmărirea acestor simboluri, linia de curent, în aproximația respectivă, va fi gata trasată. După obținerea acestei noi aproximații a spectrului liniilor de curent, prin aplicarea algoritmului A spațiului $\mathcal{C}$ și aceleiași funcţii $\tilde{f}$, putem obţine cu aproximaţie de ordin superior etc. În cazul mai multor profile se va proceda analog, urmărindu-se mai întîi trasarea într-o primă aproximaţie, a liniilor de curent afiate în vecinătatea imediată a profilelor după care, din aproape în aproape, se va trasa, în aceeaşi aproximaţie, şi celelalte linii de curent, „întrepătrunderea'' cărora realizîndu-se atunci cînd ele sînt suficient de aproape pentru ca în calcularea Med(Si) să intervină simboluri din două sau mai multe spectre. Analog, ca şi în cazul unui singur profil, se vor trece la aproximaţii de ordin superior etc.

---

[2] Dacă vrem ca masa celulară să crească continuu în loc ca să rămînă constantă în zero, va fi suficient să introducem în locul lui f, funcția $\bar{f}$ definită astfel: 1) $\bar{f}(p(c^*, c^*)) = 0$ 2) $\bar{f}(p(c^*, c^{i+1})) = f(p(c^*, c^{i+1}) + 1$.

Avantajul acestei funcții $\bar{f}$ ar fi și acela că valoarea ei minimală ne dă chiar numărul celulelor ce compun linia de curent respectivă ceea ce ne-ar da posibilitatea stabilirii liniilor de curent mai „scurte".

Primită la redacţie la 15 noiembrie 1967

Universitatea „Babeş-Bolyai'' Cluj
Facultatea de matematică şi mecanică

UN ALGORITHME POUR LA DÉTERMINATION DES LIGNES DE COURANT DANS LE MOUVEMENT PLAN, AUTOUR DES PROFILS SYMÉTRIQUES

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail on donne un algorithme pour la détermination des lignes de courant dans le mouvement plan, potentionnel et stationnaire, sans circulation, autour des profils symétriques.

Pour établir cet algorithme, on utilise un autre algorithme, très général, donné par C. Y. Lee [1] et qui est présenté, en résumé, dans la première partie du travail.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Y. Lee, *An Algorithm for Path Connections and is Application.* IRE Trans. Electr. Computers, *3* (1961).
2. C. Iacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides.* Bucarest — Paris, 1959.

ASUPRA UNEI PROPRIETĂȚI A POLINOAMELOR

DE

IOAN ȘERB
(Cluj)

Fiind date două funcţii $f(x)$ şi $g(x)$ nedescrescătoare pe $[a, b]$, spunem că $g(x)$ creşte mai încet decît $f(x)$ dacă pentru orice $x_1, x_2 \in [a, b]$ astfel ca

$$a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant b$$

are loc relaţia

$$g(x_2) - g(x_1) \leqslant f(x_2) - f(x_1).$$

Relativ la această noţiune introdusă mai sus se demonstrează teorema 1.

Teorema a doua din lucrare precizează care este gradul minimal al polinomului, care să crească mai încet decît două polinoame date.

În încheierea lucrării se face următoarea generalizare:

Fiind date n polinoame $f_1, \ldots, f_n$ care verifică ipotezele din enunţul primei teoreme, se găseşte o condiţie necesară şi suficientă pentru ca să existe un polinom al cărui grad se precizează şi care să crească mai încet decît cele n polinoame date.

Fie $f(x)$ şi $g(x)$ două funcţii nedescrescătoare definite pe $[a, b]$.

DEFINIȚIE. *Spunem că funcția $g(x)$ crește mai încet decît funcția $f(x)$, dacă pentru orice pereche de puncte x_1, x_2 astfel ca*

$$a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant b,$$

are loc inegalitatea:

$$g(x_2) - g(x_1) \leqslant f(x_2) - f(x_1).$$

TEOREMA 1. *Dacă $f_1(x)$ și $f_2(x)$ sînt două polinoame crescătoare pe $[a, b]$, întotdeauna există un polinom crescător pe $[a, b]$ astfel ca aceasta să crească mai încet și decît polinomul $f_1(x)$ și decît polinomul $f_2(x)$.*

Demonstrație. Fie:

$$f_1'(x) = (x-a)^{\alpha_1}(b-x)^{b_1}(x-x_1)^{p_1}\ldots(x-x_r)^{p_r}P_1(x),$$

$$f_2'(x) = (x-a)^{\alpha_2}(b-x)^{b_2}(x-x_1)^{q_1}\ldots(x-x_r)^{q_r}P_2(x),$$

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 7, P. 1031–1035, BUCUREȘTI, 1968

unde $P_1(x)$ şi $P_2(x)$ sînt polinoame ce nu se anulează pe $[a, b]$, iar $a_1, b_1, p_1, \ldots, p_r, a_2, b_2, q_1, \ldots, q_r$ sînt numere naturale sau unele nule, iar $x_1, \ldots, x_r$ sînt puncte din intervalul (a, b). În plus, pentru că $f_1(x)$ şi $f_2(x)$ sînt crescătoare pe $[a, b]$, $p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_r$ trebuie să fie numere pare. $P_1(x)$ şi $P_2(x)$ fiind polinoame pozitive pe $[a, b]$, există un număr pozitiv, P, astfel ca pe $[a, b]$ să avem

$$0 < P < P_1(x),$$
$$0 < P < P_2(x).$$

Fie acum :

$$a_0 = \max(a_1, a_2),$$
$$b_0 = \max(b_1, b_2),$$
$$s_i = \max(p_i, q_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Fie M un număr pozitiv, astfel ca pe $[a, b]$

$$M > L_1(x) = (x-a)^{a_0-a_1}(b-x)^{b_0-b_1}(x-x_1)^{s_1-p_1}\ldots(x-x_r)^{s_r-p_r},$$
$$M > L_2(x) = (x-a)^{a_0-a_2}(b-x)^{b_0-b_2}(x-x_1)^{s_1-q_1}\ldots(x-x_r)^{s_r-q_r}.$$

În baza notaţiilor de mai sus vom demonstra următoarele inegalităţi (ce au loc în intervalul $[a, b]$) :

$$\frac{P}{M}(x-a)^{a_0}(b-x)^{b_0}(x-x_1)^{s_1}\ldots(x-x_r)^{s_r} \leqslant f_1'(x)$$

şi

$$\frac{P}{M}(x-a)^{a_0}(b-x)^{b_0}(x-x_1)^{s_1}\ldots(x-x_r)^{s_r} \leqslant f_2'(x).$$

Este suficient să demonstrăm prima inegalitate, întrucît, din motive de simetrie, cea de a doua se demonstrează analog.

Avem :

$$\frac{P}{M}(x-a)^{a_0}(b-x)^{b_0}(x-x_1)^{s_1}\ldots(x-x_r)^{s_r} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{M}(x-a)^{a_0}(b-x)^{b_0}(x-x_1)^{s_1}\ldots(x-x_r)^{s_r} P_1(x) \leqslant$$
$$\leqslant (x-a)^{a_1}(b-x)^{b_1}(x-x_1)^{p_1}\ldots(x-x_r)^{p_r} P_1(x) = f_1'(x),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Cu aceste consideraţii putem afirma acum că există un polinom crescător pe $[a, b]$, care creşte mai încet şi decît polinomul $f_1(x)$ şi decît polinomul $f_2(x)$. Acest polinom este :

$$\Psi(x) = \frac{P}{M}\int_a^x (x-a)^{a_0}(b-x)^{b_0}(x-x_1)^{s_1}\ldots(x-x_r)^{s_r}\,\mathrm{d}x.$$

Într-adevăr,

$$\Psi(x_2) - \Psi(x_1) = \frac{P}{M}\int_{x_1}^{x_2} (x-a)^{a_0}(b-x)^{b_0}(x-x_1)^{s_1}\dots(x-x_r)^{s_r}\,\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant \int_{x_1}^{x_2} f_1'(x)\,\mathrm{d}x = f_1(x_2) - f_1(x_1).$$

Analog se demonstrează că $\Psi(x_2) - \Psi(x_1) \leqslant f_2(x_2) - f_2(x_1)$.

Polinomul astfel găsit are gradul

$$a_0 + b_0 + s_1 + \dots + s_r + 1.$$

Întotdeauna există un polinom de grad mai mare decît $a_0 + b_0 + s_1 + \dots + s_r + 1$, care creşte mai încet şi decît $f_1(x)$ şi decît $f_2(x)$.

Se verifică uşor că polinomul

$$\Psi_1(x) = \frac{P}{M}\int_a^x (x-a)^{a_0}(b-x)^{b_0}(x-x_1)^{s_1}\dots(x-x_r)^{s_r}\left[\frac{x + |a| + |b|}{2(|a| + |b|)}\right]^n \mathrm{d}x,$$

unde n este un număr natural, este polinomul care verifică proprietatea de mai sus.

TEOREMA 2. *Nu există nici un polinom de grad mai mic decît* $a_0 + b_0 + s_1 + \dots + s_r + 1$ *care să crească mai încet şi decît* $f_1(x)$ *şi decît polinomul* $f_2(x)$ (notaţiile fiind cele de mai sus).

Vom presupune contrariul, că există un polinom $R_1(x)$ de grad mai mic decît $a_0 + b_0 + s_1 + \dots + s_r + 1$, care creşte mai încet şi decît $f_1(x)$ şi decît $f_2(x)$.

Atunci

$$\frac{R_1(x) - R_1(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f_1(x) - f_1(x_1)}{x - x_1}$$

pentru orice x şi x_1 din $[a, b]$.

Deci $R_1'(x_1) \leqslant f_1'(x_1)$ pentru orice $x_1 \in [a, b]$, sau $R_1'(x) \leqslant f_1'(x)$ şi analog $R_1'(x) \leqslant f_2'(x)$.

Dar, întrucît $R_1'(x) \geqslant 0$ pe $[a, b]$, rezultă că se poate scrie

$$R_1'(x) = (x-a)^{a_3}(b-x)^{b_3}(x-x_1)^{m_1}\dots(x-x_r)^{m_r}R(x),$$

unde $R(x)$ este un polinom ce nu se mai anulează pe $a, b, x_1, \dots, x_r$ şi $m_1, \dots, m_r$ sînt pare. Fie m gradul lui $R(x)$. Conform ipotezei adoptate, avem :

$$a_3 + b_3 + m_1 + \dots + m_r + m + 1 < a_0 + b_0 + s_1 + \dots + s_r + 1.$$

Atunci cel puţin una din următoarele inegalităţi este valabilă :

$$a_3 < a_0,$$

$$b_3 < b_0,$$

$$m_1 < s_1,$$

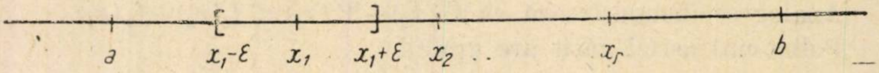
$$\dots\dots$$

$$m_r < s_r.$$

În caz contrar, inegalitatea de mai sus nu ar mai avea loc. Presupunem că este verificată inegalitatea:

$$m_1 < s_1.$$

Construim un interval $[x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon]$, care să nu mai cuprindă alte rădăcini ale lui $R_1'(x)$ decît pe x_1:



Pe $[x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon]$, $(x-a)^{a_3}(b-x)^{b_3}(x-x_2)^{m_2} \dots (x-x_r)^{m_r} R(x) \geqslant R > 0$.

Deci $R_1'(x) \geqslant R(x-x_1)^{m_1} = \dfrac{R(x-x_1)^{s_1}}{(x-x_1)^{s_1-m_1}} = \dfrac{R(x-x_1)^{p_1}}{(x-x_1)^{p_1-m_1}}$ (am presupus că $s_1 = p_1$). Pe $[x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon]$ există un $S > 0$ astfel ca

$$S \geqslant (x-a)^{a_1}(b-x)^{b_1}(x-x_2)^{p_2} \dots (x-x_r)^{r_r} P_1(x).$$

Deci

$$R_1'(x) \geqslant \frac{R}{S} \, \frac{f_1'(x)}{(x-x_1)^{p_1-m_1}}.$$

Pentru x suficient de apropiat de x_1 avem

$$R_1'(x) > f_1'(x),$$

ceea ce contrazice ipoteza făcută.

În concluzie, *condiția necesară și suficientă ca să existe un polinom de gradul k, astfel încît să crească mai încet decît polinoamele $f_1(x)$ și $f_2(x)$, este*: $k \geqslant a_0 + b_0 + s_1 + \dots + s_r + 1$ (notațiile fiind cele de la prima teoremă).

Generalizare: Dacă $f_1(x), \dots, f_n(x)$ sînt n polinoame pentru care:

$$f_1'(x) = (x-a)^{a_1}(b-x)^{b_1}(x-x_1)^{p_1} \dots (x-x_r)^{r_r} P_1(x),$$

$$f_2'(x) = (x-a)^{a_2}(b-x)^{b_2}(x-x_1)^{q_1} \dots (x-x_r)^{q_r} P_2(x),$$

. . . .

$$f_n'(x) = (x-a)^{a_n}(b-x)^{b_n}(x-x_1)^{l_1} \dots (x-x_r)^{l_r} P_n(x),$$

condiția necesară și suficientă ca să existe un polinom de gradul k astfel încît să crească mai încet decît cele n polinoame este

$$k \geqslant \max(a_1, \dots, a_n) + \max(b_1, \dots, b_n) + \sum_{i=1}^{n} \max(p_i, q_i, \dots, l_i) + 1.$$

Primită la redacție la 28 noiembrie 1967

Universitatea „Babeș-Bolyai” Cluj.
Facultatea de matematică mecanică,
Catedra de Analiză

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES POLYNÔMES

(RÉSUMÉ)

Étant donné deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ non décroissantes sur $[a, b]$, nous disons que $g(x)$ croît plus lentement que $f(x)$ si pour tous les $x_1, x_2 \in [a, b]$, tels que $a \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq b$, on a la relation $g(x_2) - g(x_1) < f(x_2) - f(x_1)$. On démontre le théorème :

Si $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont deux polynômes croissants sur $[a, b]$, il existe toujours un polynôme croissant sur $[a, b]$, tel que celui-ci croisse plus lentement que $f_1(x)$ et $f_2(x)$.

On précise le degré du polynôme de degré minimal, qui croît plus lentement que les polynômes donnés. Ce résultat se généralise pour le cas où à la place des polynômes f_1 et f_2 on considère n polynômes $f_1, f_2, \ldots, f_n$, croissants sur $[a, b]$, en présentant une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un polynôme croissant sur $[a, b]$, qui croît plus lentement que $f_1, \ldots, f_n$.

LANȚURI CU LEGĂTURI COMPLETE ERGODICE DE TIP $[O-M]$ CU DISTANȚĂ FORTET – PROBLEMA RESTULUI

DE

GEORGE THEILER

Se dau condiţii suficiente de ergodicitate și o majorantă a restului pentru lanţuri cu legături complete nestaţionare de tip $[O-M]$ cu distanță Fortet.

În cele ce urmează ne propunem să dăm un corespondent al teoremei din [1] privitor la lanţurile neomogene cu un număr finit de stări de tip $[O-M]$ în cazul cînd seria care intervine în teorema de acolo în loc să aibă termeni dependenţi de lungimea maximă a ultimei porţiuni de drum parcurs în care în cele două şiruri de probe au apărut aceleaşi stări, să-i aibă dependenţi numai de numărul de ori în care pe acea porţiune a apărut o stare determinată.

Notaţiile vor fi aceleaşi ca în [1] cu singura deosebire că vom scrie în loc de $\varphi\ [\overline{p}_w,\ l^{(w)}_{n+1}]$, $\varphi_{i^{(w)}_{n+1}}\ [\overline{p}_w,\ l^{(w)}_n]$, spre a exprima în mod mai explicit faptul că stările $l^{(w)}_n$ se referă la trecut şi ultima stare din $l^{(w)}_{n+1}$ şi anume $i^{(w)}_{n+1}$ la viitor.

Teorema pe care ne propunem să o demonstrăm are următorul conţinut :

TEOREMĂ. *Se consideră un lanț cu legături complete neomogen ale cărui probabilități de trecere* $\varphi^{(n)}_{i_j}(\overline{p})$; $1 \leqslant i, j \leqslant m+1$, $n \in N^*$ *sînt definite într-un domeniu* (Δ) *al punctelor* $\overline{p}$ *din* R^m *date de relațiile* :

$$0 \leqslant p_k \leqslant 1 ;\ \sum_{k=1}^{m} p_k \leqslant 1$$

și care satisfac condițiile :

a) $$\varphi^{(n)}_{ij_0}(\overline{p}) \geqslant \delta ;\quad 0 < \delta < 1$$

pentru orice $\overline{p} \in R^m$, $\quad i \in M = \{1,2,\dots,(m+1)\}$;

b) $$|\ \varphi_i(\overline{p}'_u,\ l^{(u)}_n) - \varphi_i(\overline{p}''_v,\ l^{(v)}_n)| \leqslant a_p$$

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 7, P. 1037–1010, BUCUREȘTI, 1968

dacă $l_n^{(u)} = l_n^{(v)}$, p *fiind numărul de ori în care starea* j_0 *apare între cele* $n+1$ *stări* $l_n^{(u)}\ i = l_n^{(v)}\ i$ *și aceasta pentru orice* $u,\ v \in N^*$, $l_n^{(u)} = l_n^{(v)} \in M^{x(n)}$, $i \in M$, $\overline{p}'_u$, $\overline{p}''_v \in R^m$, a_p *fiind termenul general al unei serii convergente nedepinzînd de* $u,\ v,\ n$; $\overline{p}'_u$, $\overline{p}''_v$, $l_n^{(u)} = l_n^{(v)}$, i.

În aceste condiții lanțul este ergodic și :

$$|P_i^{[u,\,n+u]}(\overline{p}) - P_i^{\infty}| < a_p + \frac{(m+1)}{\delta} \cdot \sum_{u=p}^{\infty} a_u + [1-\delta^{2p}]^{\left[\frac{n}{p}\right]}.$$

Demonstrația teoremei se bazează pe rezultatele obținute în [2]. Dacă se urmăresc cu atenție diferitele considerații de acolo, se vede cu ușurință că dacă în loc de $p_i(x)$ am luat $\varphi_i^{(u)}(\overline{p}_u)$, în loc de $p_i(x'+x)$ am lua $\varphi_i(\overline{p}_u,\ l_s^{(u)})$, în loc de $p_i^{(n)}(x'+x)$ am lua $P_i^{(n)}[\varphi(\overline{p}_u,\ l_s^{(u)})]$, demonstrațiile de acolo nu comportă modificări.

Se obține o teoremă mai generală decît cea enunțată mai sus și anume corespondentul teoremei din [2].

Desigur aici se va nota :

$$a_p = \sup |\varphi_i(\overline{p}'_u,\ l_n^{(u)}) - \varphi_i(\overline{p}''_v,\ l_n^{(v)})|$$
$$i,\ n,\ u,\ v,\ l_n^{(u)} = l_n^{(v)},\quad \overline{p}'_u,\ \overline{p}''_v$$

unde $l_n^{(u)} = l_n^{(v)}$ conține starea j_0 cel puțin de p ori. [$i \in M$, n, u, $v \in N^*$, $l_n^{(u)} = l_n^{(v)} \in M^{x(n)}$ și în plus starea j_0 este conținută de cel puțin p ori, $\overline{p}'_u$ $\overline{p}''_v \in R^m$].

Tot așa se va nota :

$$a_p^{(k)} = \sup\ |P_i^{(k)}[\varphi(\overline{p}'_u,\ l_n^{(u)})] - P_i^{(k)}[\varphi(\overline{p}''_v,\ l_n^{(v)})]|$$
$$i,\ n,\ k,\ v,\ l_n^{(u)} = l_n^{(v)},\ \overline{P}'_u,\ \overline{P}''_v.$$

Evident,

$$a_p^{(1)} = a_p.$$

În cazul corespunzător teoremei din [2] și a îndeplinirii condiției 1° :

$$a_p^{(n_0,\,k+i)} < [1+(n_0-1)(m+1)]\,a_p + \frac{n_0\,(m+1)^{n_0}}{\delta}\sum_{u=0}^{s-1} a_{u+p},$$
$$i = 1,2,\ldots,(n_0-1).$$

Întrucît în cazul teoremei noastre $n_0 = 1$, inegalitatea devine :

$$a_p^{(k)} < a_p + \frac{m+1}{\delta}\sum_{u=0}^{k-1} a_{u+p} < a_p + \frac{m+1}{\delta}\sum_{u=0}^{\infty} a_{u+p}.$$

Condiția 2° a teoremei din [2] este o consecință a condiției 1° în cazul $n_0 = 1$ care ne interesează.

Vom stabili acest lucru folosind un procedeu care ar putea fi mult îmbunătățit.

Să considerăm două șiruri de probe oarecare pentru care cunoaștem rezultatele anterioare pasului u la primul șir și cele anterioare pasului v la al doilea șir. Ne fixăm atenția asupra evenimentelor de tipul următor. Primul eveniment constă din rezultatele viitoare ale experienței între pașii u și $(u+p-1)$ inclusiv la prima serie și cele dintre pașii v și $(v+$

$+ p - 1)$ la a doua serie. Al doilea va consta din rezultatele experienței între pașii $[u + p]$ și $[u + 2p - 1]$ la prima serie și între $[v + p]$ și $[v + 2p - 1]$ la a doua serie, ș.a.m.d., de fiecare dată fiind vorba de apariția stărei pe la fiecare din pașii corespunzători.

Probabilitatea ca un astfel de eveniment să aibă loc este evident mai mare ca δ^{2p} căci prin ipoteză fiecare probabilitate de tranziție e mai mare ca δ.

Probabilitatea ca un astfel de eveniment să nu aibă loc este deci mai mică decît $(1 - \delta^{2p})$.

Probabilitatea ca s evenimente succesive să nu aparțină nici unul tipului de evenimente de mai sus este evident mai mică ca $(1 - \delta^{2p})^s$.

Dacă șirul de probe începînd de la pasul u respectiv v este n, atunci $s = \left[\frac{n}{p}\right]$ iar probabilitatea ca să nu aibă loc nici un eveniment de tipul de mai sus este :

$$[1 - \delta^{2p}]^{\left[\frac{n}{p}\right]}.$$

Probabilitatea ca să aibă loc concomitent starea j_0 la p probe succesive corespunzătoare atît în prima serie de n evenimente începînd de la rangul u cît și n în a doua începînd de la rangul v este evident mai mare ca $[1 - (1 - \delta^{2p})^{\left(\frac{n}{\lambda}\right)}]^{\left[\frac{n}{p}\right]}$.

Dacă se urmărește demonstrația lemei II din [2] se vede că aici ceea ce se nota acolo cu x conține starea j_0 cel puțin de p ori, deci aici intervine numai prima subsumă iar

$$|\Sigma_1^{(1)} - \Sigma_1^{(2)}| < a_p + \frac{(m+1)}{\delta} \sum_{u=0}^{\infty} a_{u+p}.$$

În loc de ceea ce s-a notat acolo cu $|\Sigma_2^{(1)} - \Sigma_2^{(2)}|$, apare aici majoranta $[1 - \delta^{2p}]^{\left[\frac{n}{p}\right]}$, despre care am vorbit mai înainte.

Pe baza acestora se ajunge imediat la marginea superioară indicată în teoremă, care desigur poate fi îmbunătățită, procedîndu-se de exemplu ca în [1] combinat cu lema 2 din [2].

Primită la redacție la 22 noiembrie 1967

Centrul de statistică al Academiei Republicii
Socialiste România, Str. M. Eminescu nr. 47,
București

CHAINS WITH COMPLETE ERGODIC CONNECTIONS OF $[O-M]$ TYPE WITH FORTET DISTANCE

(ABSTRACT)

In this paper the following theorem with the notations from (1) is proved :

Let a nonhomogeneous chain with complete connections whose transitions probabilities $\varphi_{ij}^{(n)}(\overline{p})$; $1 \leqslant i, j \leqslant m + i$; $n \in N^x$ are defined into a domain (Δ) of points $\overline{p}$ from R^m be given by the relations :

$$0 \leqslant p_k \leqslant 1 ; \sum_{k=1}^{m} p_k \leqslant 1$$

and which satisfies the conditions :

a) $$\varphi i_{j_0}^{(n)}(\overline{p}) \geqslant \delta ; \quad 0 < \delta < 1 \text{ for every } \overline{p} \in R^m$$

$$i \in M = \{1,2,\dots (m+1)\}$$

b) $$|\,\varphi_i\,(\overline{p}_n', \; l_n^{(u)}) - \varphi_i(\overline{p}_v'', \; l_n^{(v)})\,| \leqslant a_p$$

if $l_n^{(u)} = l_n^{(v)}$; p being the number of times in which the state j_0 occurs along the $(n+1)$ states $l_n^{(u)}\, i = l_n^{(v)}\, i$ and this for every $u, v \in N^*\; l_n^{(u)} = l_n^{(v)} \in M^{x(n)}$, $i \in M$; $\overline{p}_u', \overline{p}_v'' \in R^m$, a_p being the general term of a convergent series independent of u, v, n; $\overline{p}_u', \overline{p}_v''$, $l_n^{(u)} = l_n^{(v)}$; i.

Then the chain is ergodic and

$$|\,P_i^{(u,\,n+u]}(\overline{p}) - P_i^{\infty}\,| < a_p + \frac{(m+1)}{\delta} \sum_{u=p}^{\infty} a_u + [1 - \delta^{2p}]^{\left[\frac{n}{p}\right]}$$

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Mihoc şi G. Theiler, Rev. Roum. de math. pures et appl., *8* (1967).
2. George Theiler, St. cerc. mat., **20**, *4* (1968).

ASUPRA OPERATORILOR A-COMPLET CONTINUI

DE

NICOLAE I. TIŢĂ

Se dau cîteva rezultate privind spectrul unui operator A-complet continuu în sensul lui Krein şi I. Gohgberg.

În această Notă se extind unele rezultate din [1], [4], [6], date pentru anumite clase de operatori, la operatorii A-complet continui [2].

În [1] se consideră spaţiul Hilbert H, în care acţionează operatorul liniar mărginit A cu parte imaginar complet continuă.

În aceste condiţii se obţine următorul rezultat :

Fie λ_0 *un număr imaginar astfel ca* :

$$(A - \lambda_0 I)\, g_n = f_n, \quad (n = 1,2,3,\ldots)$$

Dacă f_n *este un şir convergent şi* g_n *un şir mărginit, există un subşir* $\{g_{n_k}\}$ *convergent al lui* $\{g_n\}$. *Dacă* λ *nu este valoare proprie a lui* A, $\{g_n\}$ *este convergent.*

În demonstraţie se foloseşte faptul că operatorul A are partea imaginară complet continuă, iar cea reală autoadjunctă.

Din aceste observaţii pot fi deduse rezultate nelipsite de interes privind comportarea spectrală a operatorului A.

Aceste rezultate se extind în [4] şi [5] pentru operatorii cvasicompacţi şi respectiv α-cvasicompacţi, iar în [6] şi [7] pentru operatori regularizabili.

În lucrarea prezentă vom arăta că aceste rezultate rămîn valabile şi pentru operatori mai generali, folosind operatorii A-complet continui, introduşi de Gohgberg şi Krein în [2] şi [3].

Fie B un spaţiu Banach şi A un operator liniar şi închis care are cel puţin un număr regulat λ_0.

DEFINIŢIA 1. *Un operator liniar* (*nemărginit*) B *se numeşte* A-*complet continuu dacă* $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$[1]) *şi operatorul* $B(A - \lambda_0 I)^{-1}$ *este complet continuu* [2]).

---

[1]) $\mathcal{D}(A)$ este domeniul de definiţie al lui A.

[2]) Operatorul $B(A-\lambda I)^{-1}$ este complet continuu pentru orice λ regulat [3].

ST. CERC. MAT., 20, NR. 7, P. 1041–1043, BUCUREŞTI, 1968

În [3] se dă definiția A-complet continuității neținîndu-se seama de condiția ca λ_0 să fie număr regulat, însă se impune asupra lui B condiția de a fi mărginit.

În cele ce urmează se consideră H spațiu Hilbert.

În aceste condiții se poate da următoarea teoremă :

TEOREMA 1. *Fie B un operator A-complet continuu și*

$$(A - \lambda_0 I)\, g_n = f_n \qquad (n = 1,2,3,\ldots),$$

unde $\{f_n\}$ este un șir mărginit. Atunci șirul $\{Bg_n\}$ conține un subșir convergent.

Demonstrație. Condiția impusă se mai poate scrie :

$$g_n = (A - \lambda_0 \alpha)^{-1} f_n \,.$$

Aplicînd operatorul B se obține :

$$Bg_n = B(A - \lambda_0 I)^{-1} f_n .$$

Ținînd seama că B este A-complet continuu, rezultă că $\{Bg_n\}$ este compact și deci conține un subșir convergent [3]).

Se consideră apoi operatorul $A = L + T$, unde L este autoadjunct, iar T este L-complet continuu. Atunci se poate da :

TEOREMA 2. *Dacă A este operatorul considerat și λ_0 un număr imaginar, satisfăcînd relația*

$$(A - \lambda_0 I)\, g_n = f_n \qquad (n = 1, 2, 3,\ldots),$$

unde șirul $\{g_n\}$ este mărginit, iar $\{f_n\}$ este convergent, atunci $\{g_n\}$ conține un subșir convergent.

Demonstrație. Se poate scrie

$$(L - \lambda_0 I)\, g_n + Tg_n = f_n \qquad (n = 1, 2, 3,).$$

L fiind autoadjunct are spectrul real și deci se obține :

$$g_n = (L - \lambda_0 I)^{-1} f_n - T(L - \lambda_0 I)^{-1} g_n .$$

Ținînd seama că $\{f_n\}$ este convergent și T este L-complet continuu, rezultă $\{g\}$ compact.

În cazul în care $\lambda = 0$ este număr regulat pentru L, se obține :

$$L + T = (I + TL^{-1})\, L,$$

unde TL^{-1} este complet continuu.

Rezultă că L^{-1} joacă un rol asemănător regularizatorului [6], deoarece $AL^{-1} = I + S$, cu S complet continuu.

Astfel, rezultate asemănătoare celor din [6] se obțin și pentru operatorul $A = L + T$, demonstrațiile reproducîndu-se în mod asemănător [4]).

În cazul definirii operatorilor cvasicompacți [4] se poate presupune S nu compact, ci $(T - S)$-complet continuu. Și atunci teorema 1 din [4] se poate prezenta astfel.

---

[3]) În demonstrație nu s-a folosit faptul că H este spațiu Hilbert.

[4]) L^{-1} operează la dreapta, ceea ce nu îngreuiază reproducerea demonstrațiilor din [6].

TEOREMA 3. *Fie* T *un operator liniar astfel că* $\| T - S \| < 1$, *unde* S *este* $(T-S)$*-complet continuu. Atunci dacă* $\{g_n\}$ *este un șir mărginit și* $\{f_n\}$ *șir convergent, astfel ca să fie valabilă relația*

$$(T - I)\, g_n = f_n \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

șirul $\{g_n\}$ *conține un subșir convergent.*

Demonstrația. Se poate scrie

$$(T - S - I)g_n + Sq_n = f_n$$

sau

$$g_n = (T - S - I)^{-1} f_n - S\,(T-S-I)^{-1} g_n.$$

Cum $\{f_n\}$ este convergent și S este $(T - S)$-complet continuu, rezultă că $\{g_n\}$ este compact și deci conține un subșir convergent.

Tot pe baza celor prezentate în [1], folosind operatorul $A = T + L$ de mai sus, se poate da :

TEOREMA 4. *Dacă* λ_0 *este un număr imaginar, mulțimea*

$$H_0 = (A - \lambda_0 I)\, H$$

este închisă.

Demonstrația este asemănătoare cu cea din [1] și de aceea nu se mai reproduce aici.

Primită la redacție la 5 ianuarie 1967

Institutul Politehnic Brașov

ON A-COMPLETELY CONTINUOUS OPERATORS

(ABSTRACT)

In this note we give some results concerning the behaviour of spectra for the class of A-completely continuous operators of M. Krein and I. Gohgberg.

BIBLIOGRAFIE

1. БРОДСКИЙ, ЛИВШИЦ, *Спектральный анализ несамосопряженных операторов*. УМН, XIII, *1* (1958).
2. ГОХГБЕРГ, КРЕИН, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов*. Москва, 1965.
3. V. ISTRĂȚESCU, *Asupra operatorilor cvasicompacți* I. St. cerc. mat., *9* (1965).
4. — *Asupra operatorilor cvasicompacți II*. St. cerc. mat. **18**, *2* (1966).
5. — *Asupra operatorilor regularizabili I*. St. cerc. mat., **18**, *8* (1966).
6. — *Asupra operatorilor regularizabili II*. St. cerc. mat., **18**, *9* (1966).

SPERANȚE CONDIȚIONATE ȘI TEOREMA LUI SINAI

DE

LÁSZLÓ ZSIDÓ

Scopul acestei lucrări este de a da o demonstraţie detaliată teoremei lui Sinai despre scufundarea unei scheme Bernoulli într-o transformare ergodică cu entropie mai mare sau egală, folosind în locul teoriei partiţiilor măsurabile a lui Rohlin metoda speranţelor condiţionate a lui Halmos.

Lucrarea nu urmează strict linia demonstraţiei teoremei lui Sinai. Astfel pentru demonstraţia teoremei lui Sinai este suficientă doar o parte a demonstraţiei teoremei lui Rohlin şi Sinai şi nu sînt folosite transformările Kolmogorov.

Bibliografia cuprinde doar lucrările consultate de autor şi nu are pretenţia de a fi completă. Pentru o bibliografie mai amplă vezi [14].

Începuturile demonstraţiilor sînt marcate prin **D.**, iar sfîrşiturile prin **S.** În aliniatele de comentarii se fac observaţii în legătură cu conţinutul paragrafului respectiv şi trimiteri bibliografice.

I. TRANSFORMĂRI CU MĂSURĂ INVARIANTĂ INVERTIBILE

Remarcăm înainte de toate că vorbind despre un clan sau un trib de părţi ale unei mulţimi X, totdeauna presupunem că X îi aparţine.

Fie (X, Σ, μ) un spaţiu cu măsură finită. O aplicaţie $T : X \to X$ se numeşte *transformare cu măsură invariantă* dacă

$$A \in \Sigma \Rightarrow T^{-1} A \in \Sigma \text{ şi } \mu(T^{-1} A) = \mu(A).$$

Se verifică uşor că dacă $\mathcal{C}$ este un subclan al tribului Σ care generează pe Σ, iar $T : X \to X$ astfel încît

$$A \in \mathcal{C} \Rightarrow T^{-1} A \in \Sigma \text{ şi } \mu(T^{-1} A) = \mu(A),$$

atunci T este o transformare cu măsură invariantă. *În această lucrare prin transformare vom înţelege o transformare cu măsură invariantă invertibilă.*

La studiul unei transformări T nu acţiunea sa asupra punctelor din X este interesantă, ci cea asupra „evenimentelor” din Σ, adică aplicaţia $A \to T^{-1}A$ indusă în Σ. În limbaj de funcţii această apli-

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 7, P. 1045–1111, BUCUREŞTI, 1968

cație este $\chi_A \to \chi_{T^{-1}A} = \chi_A \circ T$. Pentru a lucra în spații Banach, căutăm să extindem aplicația de mai sus pe spațiile $L^p(X, \Sigma, \mu)$:

1. *Dacă* $T : X \to X$ *este o transformare și* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *atunci egalitatea*

$$U_T f = f \circ T$$

definește o izometrie pozitivă U_T *a lui* $L^p(X, \Sigma, \mu)$ *pe el însuși.*

D. În cazul $p = \infty$ propoziția este evidentă, iar în cazul $1 \leqslant p < \infty$ ea rezultă din următoarea afirmație : Dacă $A_i \in \Sigma$, $i = 1, \ldots, n$, sînt două cîte două disjuncte, c_i sînt numere complexe și $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}$, atunci

$$\| U_T f \|_p^p = \int \Sigma |c_i|^p \chi_{T^{-1}A_i} \, d\mu =$$

$$= \Sigma |c_i|^p \mu(T^{-1}A_i) = \Sigma |c_i|^p \mu(A_i) =$$

$$= \int \Sigma |c_i|^p \chi_{A_i} \, d\mu = \| f \|_p^p . \text{ S.}$$

Definim relații între transformări, folosind limbajul spațiilor $L^p(X, \Sigma, \mu)$:

Fie (X_1, Σ_1, μ_1), (X_2, Σ_2, μ_2) spații cu măsură finită, $L_1^p = L^p(X_1, \Sigma_1, \mu_1)$, $L_2^p = L^p(X_2, \Sigma_2, \mu_2)$ și T_1, T_2 transformări respectiv în X_1, X_2. Spunem că T_2 *se scufundă* în T_1 dacă există un operator liniar $V : L_2^1 \to L_1^1$ astfel încît :

(i) $V U_{T_2} = U_{T_1} V$,

(ii) pentru $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $V | L_2^p$ este o izometrie a lui L_2^p în L_1^p,

(iii) V este multiplicativ pe L_2^∞.

Dacă, în plus, pentru $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $V L_2^p = L_1^p$, T_1 și T_2 se numesc *echivalente.*

Următoarele două propoziții ne vor ajuta la demonstrația unui criteriu de scufundare respectiv echivalență :

2. *Fie* (X, Σ, μ) *un spațiu cu măsură finită și* $\mathcal{C}$ *un subclan al lui* Σ *care generează pe* Σ. *Atunci, pentru orice* $A \in \Sigma$, *există un șir* (A_n) *de mulțimi din* $\mathcal{C}$ *astfel încît* $\chi_{A_n} \to \chi_A$ *în orice* $L^p(X, \Sigma, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$.

D. Deoarece $\| \chi_{A_n} - \chi_A \|_p = \| \chi_{A_n} - \chi_A \|_1^{\frac{1}{p}}$, este suficient să considerăm cazul convergenței în $L^1(X, \Sigma, \mu)$. Fie Λ familia tuturor $A \in \Sigma$ pentru care există $A_n \in \mathcal{C}$ astfel încît $\chi_{A_n} \to \chi_A$ în $L^1(X, \Sigma, \mu)$. Din egalitatea $\| \chi_{\complement A_n} - \chi_{\complement A} \|_1 = \| \chi_{A_n} - \chi_A \|_1$ și inegalitatea $\| \chi_{A_n} \chi_{B_n} - \chi_A \chi_B \|_1 = \| (\chi_{A_n} - \chi_A) \chi_{B_n} + \chi_A (\chi_{B_n} - \chi_B) \|_1 \leqslant \| \chi_{A_n} - \chi_A \|_1 + \| \chi_{B_n} - \chi_B \|_1$ rezultă că Λ este un clan. Se verifică imediat că reuniunea unui șir crescător de mulțimi din Λ aparține lui Λ, deci Λ este un trib. Cum $\mathcal{C} \subset \Lambda \subset \Sigma$, $\Lambda = \Sigma$. S.

3. *Fie* (X_1, Σ_1, μ_1), (X_2, Σ_2, μ_2) *spații cu măsură finită,* $L_1^p = L^p(X_1, \Sigma_1, \mu_1)$, $L_2^p = L^p(X_2, \Sigma_2, \mu_2)$, A *un subinel al lui* L_2^∞, *dens în* L_2^1, *și* V *o izometrie multiplicativă a lui* A *cu norma indusă din* L_2^1 *în* L_1^1. *Atunci* V *se prelungește în mod unic pînă la un operator liniar* $V : L_2^1 \to L_1^1$ *care satisface condițiile* (ii), (iii). *Dacă* VA *este dens în* L_1^1, *atunci pentru* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $V L_2^p = L_1^p$.

D. Evident, V se prelungește în mod unic pînă la o izometrie $L_2^1 \to L_1^1$. Condițiile (ii), (iii) se verifică în mai multe etape:

a) Pentru $f \in A$, $g \in L_2^\infty$, $V(fg) = Vf \cdot Vg$.

Fie $g_n \in A$, $g_n \to g$ în L_2^1. Atunci $fg_n \to fg$ în L_2^1, de unde $V(fg_n) \to V(fg)$ în L_1^1. Pe de altă parte, $Vg_n \to Vg$ în L_1^1, deci pentru un subșir (n_i) al șirului numerelor naturale $V(fg_{n_i}) \to V(fg)$ și $Vg_{n_i} \to Vg$ aproape peste tot. Cum $V(fg_{n_i}) = Vf \cdot Vg_{n_i}$, obținem că $V(fg) = Vf \cdot Vg$.

b) V este multiplicativ pe L_2^∞.

Se aplică același procedeu ca mai sus și se folosește pe a).

c) Dacă $f \in L_2^p$, $1 \leqslant p < \infty$, atunci $V|f|^p = |Vf|^p$.

După b) pentru $B \in \sum_2$ $(V\chi_B)^2 = V\gamma_B$, deci există $\tau B \in \sum_1$ cu $V\chi_B = \chi_{\tau B}$. Dacă B, $C \in \sum_2$ sînt disjuncte, $\chi_{\tau B}\,\chi_{\tau C} = V\chi_B \cdot V\chi_C = V\chi_{B\cap C} = 0$, deci τB, τC sînt disjuncte. Astfel afirmația c) se verifică imediat pentru o funcție f simplă. Fie acum $f \in L_2^p$ oarecare. Pentru orice n natural alegem o funcție simplă f_n, nulă pe mulțimea unde $|f| \geqslant n$ și astfel încît pe complementara acestei mulțimi $|f_n - f| \leqslant \dfrac{1}{n}$. Atunci f_n converge aproape peste tot la f și $|f_n| \leqslant 1 + |f| \in L_2^p$, deci $|f_n|^p \to |f|^p$ în L_2^1, $V|f_n|^p \to V|f|^p$ în L_1^1. Pe de altă parte, $f_n \to f$ în L_2^1, $Vf_n \to Vf$ în L_1^1. Astfel există un subșir (n_i) al șirului numerelor naturale pentru care $V|f_{n_i}|^p \to V|f|^p$ și $Vf_{n_i} \to Vf$ aproape peste tot. Cum $V|f_{n_i}|^p = |Vf_{n_i}|^p$, obținem că $V|f|^p = |Vf|^p$.

d) Pentru $1 \leqslant p < \infty$, $V|L_2^p$ este o izometrie a lui L_2^p în L_1^p.

Se folosește pe c) și faptul că V este o izometrie a lui L_2^1 în L_1^1.

e) Pentru $f \in L_2^\infty$, $\|Vf\|_{L_1^\infty} \leqslant \|f\|_{L_2^\infty}$.

Într-adevăr, după d) pentru orice $n \geqslant 1$

$$\int |Vf|^n \, d\mu_1 = \|Vf\|_{L_1^n}^n = \|f\|_{L_2^n}^n \leqslant \|f\|_{L_2^\infty}^n \, \mu_2(X_2).$$

Dacă $\|Vf\|_{L_1^\infty} > \|f\|_{L_2^\infty}$ (eventual $\|Vf\|_{L_1^\infty} = +\infty$), există $a > \|f\|_{L_2^\infty}$ astfel încît

$$\mu_1(\{x \mid x \in X_1, \quad |Vf(x)| \geqslant a\}) = \varepsilon > 0,$$

deci

$$\int |Vf|^n \, d\mu_1 \geqslant a^n \varepsilon.$$

Prin urmare în acest caz

$$\|f\|_{L_2^\infty}^n \, \mu_2(X_2) \geqslant a^n \cdot \varepsilon,$$

$$\frac{\|f\|_{L_2^\infty}}{a} \geqslant \left(\frac{\varepsilon}{\mu_2(X_2)}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1,$$

$$\|f\|_{L_2^\infty} \geqslant a,$$

ceea ce contrazice alegerea lui a.

f) Pentru $f \in L_2^\infty$, $\| Vf \|_{L_1^\infty} = \| f \|_{L_2^\infty}$.

Presupunînd că $\| Vf \|_{L_1^\infty} < \| f \|_{L_2^\infty}$, se ajunge la contradicție la fel ca în e).

Cu aceasta condițiile (ii), (iii) sînt verificate. A doua afirmație rezultă aplicînd prima o dată lui A și V, apoi lui VA și V^{-1}. S.

Demonstrăm acum criteriul anunțat mai sus:

4. Cu notațiile din propoziția 3, *fie* T_1, T_2 *transformări respectiv în* X_1, X_2. *Presupunem că există un subclan* $\mathcal{C}_2$ *al lui* $\sum_2$ *care generează pe* $\sum_2$ *astfel ca* $T_2 \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_2$, *și o aplicație* $\tau : \mathcal{C}_2 \rightarrow \sum_1$ *cu următoarele proprietăți*:

$$— \tau (A_1 \cap A_2) = \tau A_1 \cap \tau A_2,$$

$$— \tau (A_1 \cup A_2) = \tau A_1 \cup \tau A_2,$$

$$— \tau (T_2 A) = T_1 (\tau A),$$

$$— \mu_1 (\tau A) = \mu_2 (A).$$

Atunci T_2 *se scufundă în* T_1. *Dacă* $\tau X_2 = X_1$ *și clanul* $\tau\, \mathcal{C}_2$ *generează pe* $\sum_1$, *atunci* T_1 *și* T_2 *sînt echivalente.*

D. Într-adevăr, după 2 inelul funcțiilor simple $\mathcal{C}_2$-măsurabile este dens în L_2^1. Punînd pentru o astfel de funcție $f = \sum c_i \chi_{A_i}$, $Vf = \sum c_i \chi_{\tau A_i}$, obținem o aplicație care satisface condițiile propoziției 3, deci se prelungește pînă la un operator liniar $V : L_2^1 \rightarrow L_1^1$ cu proprietățile (ii), (iii). Deoarece pentru f simplă și $\mathcal{C}_2$-măsurabilă $V U_{T_2} f = U_{T_1} Vf$, rezultă că V are și proprietatea (i). Afirmația a doua este imediată. S.

Relații mai slabe între transformări decît scufundarea și echivalența sînt scufundarea spectrală și echivalența spectrală: Spunem că T_2 se scufundă spectral în T_1 dacă există o izometrie V a lui L_2^2 în L_1^2 astfel încît $V U_{T_2} = U_{T_1} V$. Dacă în plus $V L_2^2 = L_1^2$, T_1 și T_2 se numesc spectral echivalente. Din 3 rezultă că dacă T_1 și T_2 sînt spectral echivalente și echivalența spectrală este realizată de un V multiplicativ pe L_2^∞, atunci T_1 și T_2 sînt echivalente.

Studiul spectral al transformărilor se încadrează în studiul spectral al operatorilor unitari în spații Hilbert. Vom face o scurtă trecere în revistă a principalelor rezultate din teoria spectrală a operatorilor unitari în spații Hilbert separabile.

Fie H un spațiu Hilbert și $U : H \rightarrow H$ un operator unitar. Spectrul lui U este inclus în circumferința unitate C a planului complex. Astfel măsura spectrală $E(A)$ asociată lui U poate fi definită pe părțile boreliene ale lui C. Există $h_0 \in H$ astfel încît măsura $(E(A)h \mid h)$ este absolut continuă în raport cu $(E(A)h_0 \mid h_0)$, oricare ar fi $h \in H$. Spunem că două măsuri definite pe un același trib sînt echivalente dacă fiecare este absolut continuă în raport cu cealaltă. Clasa de echivalență a lui $(E(A)h_0 \mid h_0)$ se numește tipul spectral al lui U. $E(A) = 0$ dacă și numai dacă A este neglijabilă după tipul spectral.

Numim un subspațiu vectorial închis K al lui H invariant la U dacă $UK = K$. Spunem că U este de multiplicitate spectrală n pe o mulțime $A \subset C$ măsurabilă după tipul spectral, $1 \leqslant n \leqslant \infty$, dacă oricare ar fi $m < n$ vectori în $E(A)H$, subspațiul vectorial închis invariant la U generat de aceştia nu coincide cu $E(A)H$, şi există n vectori în $E(A)H$ astfel încît subspaţiul vectorial închis invariant la U generat de ei coincide cu $E(A)H$. U se numeşte de multiplicitate spectrală uniformă n pe A dacă este de multiplicitate spectrală n pe orice mulţime $B \subset A$ măsurabilă şi neneglijabilă după tipul spectral.

Rezultatul fundamental în teoria spectrală a operatorilor unitari în spaţii Hilbert separabile este:

Teorema despre reprezentarea spectrală. *Fie U un operator unitar într-un spaţiu Hilbert separabil. Atunci există o partiţie $\{A_1, A_2, \dots, A_\infty\}$ măsurabilă după tipul spectral al lui U astfel încît U este de multiplicitate spectrală uniformă n pe A_n şi această partiţie împreună cu tipul spectral formează un invariant spectral complet al lui U. Într-o altă formulare: dacă σ este un reprezentant al tipului spectral, există o partiţie $\{A_1, A_2, \dots, A_\infty\}$ σ-măsurabilă a lui C astfel încît, punînd $\sigma_n(A) = \sigma(A_n \cap A)$, U este spectral echivalent cu operatorul de înmulţire cu argumentul ζ în*

$$L^2(\sigma_1) \oplus \bigoplus_1^2 L^2(\sigma_2) \oplus \dots \bigoplus_1^\infty L^2(\sigma_\infty).$$

Din această teoremă rezultă că dacă T_1, T_2 sînt transformări astfel încît T_1 se scufundă spectral în T_2 şi T_2 se scufundă spectral în T_1, atunci T_1 şi T_2 sînt spectral echivalente. Nu se ştie dacă din faptul că T_1 se scufundă în T_2 şi T_2 se scufundă în T_1 rezultă echivalenţa lor. Vom spune în acest caz că T_1 şi T_2 sînt slab echivalente.

Notăm prin m măsura Lebesgue normalizată pe C, prin δ_ζ măsura Dirac concentrată în ζ şi prin $\mathbf{C}$ cîmpul numerelor complexe. Spunem că un operator unitar într-un spaţiu Hilbert separabil are spectru Lebesgue de ordinul n, $1 \leqslant n \leqslant \infty$, dacă $m + \delta_1$ este un reprezentant al tipului spectral, $A_1 = \{1\}$, $A_n = C \setminus \{1\}$. Cu alte cuvinte: dacă este spectral echivalent cu operatorul în

$$\mathbf{C} \oplus \bigoplus_1^n L^2(m)$$

care pe $\mathbf{C}$ este identitatea, iar pe $\bigoplus_1^n L^2(m)$ operatorul de înmulţire cu argumentul ζ. Vom vedea că o clasă importantă de transformări are spectrul Lebesgue infinit.

Un exemplu important de transformare care permite interpretări probabilistice este aşa-numita schemă Bernoulli:

Considerăm un cîmp numărabil de probabilitate $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, $p(\omega_i) = p_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, format cel puţin din două elemente neneglijabile. Fie $X = \prod_{n=-\infty}^{\infty} X_n$, unde X_n sînt copii ale lui Ω, iar μ măsura produs a probabilităţilor p pe factori. μ este definit pe tribul Σ generat de mulţimile $\{\xi = (x_n) \mid x_{n_1} = \omega_{i_1}, \dots, x_{n_k} = \omega_{i_k}\}$ prin formula

$$\mu(\{\xi = (x_n) \mid x_{n_1} = \omega_{i_1}, \dots, x_{n_k} = \omega_{i_k}\}) = p_{i_1} \dots p_{i_k}.$$

Definind $P : X \to X$ prin

$$P\,\xi = \eta, \quad y_n = x_{n+1},$$

se vede ușor că P este o transformare.

Presupunem că un fenomen în evoluția lui poate să ia stările ω_1, $\omega_2, \ldots$ cu probabilitățile respective $p_1, p_2, \ldots$. Atunci X este mulțimea tuturor posibilităților de evoluție. P reprezintă acțiunea timpului asupra acestor posibilități.

În această lucrare printr-o schemă Bernoulli $p = (p_1, p_2, \ldots)$ vom înțelege o transformare construită ca mai sus.

Comentarii. În legătură cu teoria măsurii vezi [3], [4] capitolul III și [6]. Noțiunile de scufundare și echivalență țin să înlocuiască noțiunile de imagine homomorfă și izomorfism din lucrările matematicienilor sovietici (vezi de exemplu [14]). Propoziția 4 arată că ceea ce numim echivalența a două transformări este aceeași cu conjugarea din [7]. Definiția noastră este inspirată din [5]. Am preferat denumirea de echivalență pentru a avea un limbaj unitar: scufundare, echivalență, scufundare spectrală, echivalență spectrală. Demonstrația propoziției 3 a fost făcută după [19]. Pentru teoria spectrală a operatorilor normali vezi [4] capitolul X. Echivalența slabă corespunde izomorfismului slab din [17] și [18]. Existența și unicitatea unui produs infinit de cîmpuri de probabilitate este asigurată de teorema III. 11. 20 din [4].

II. ERGODICITATE, MIXING

Înainte de toate enunțăm o teoremă generală care ne va fi utilă și în paragrafele următoare:

Teorema de convergență. *Fie* (X, Σ, μ) *un spațiu cu măsură finită și* U *o contracție liniară pozitivă în* $L^1(X, \Sigma, \mu)$ *astfel încît* $U \mid L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ *este o contracție în* $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$. *Atunci pentru orice* $f \in L^1(X, \Sigma, \mu)$, *șirul* $\dfrac{f + \ldots + U^{n-1}f}{n}$ *converge atît în* $L^1(X, \Sigma, \mu)$, *cît și aproape peste tot.*

În particular, dacă T este o transformare în X, pentru orice $f \in L^1(X, \Sigma, \mu)$

$$\frac{f + \ldots + f \circ T^{n-1}}{n} \to f^*$$

în $L^1(X, \Sigma, \mu)$ și aproape peste tot. În plus $\int f\,d\mu = \int f^*\,d\mu$. Spunem că T este ergodică dacă singurele funcții din $L^1(X, \Sigma, \mu)$ invariante la acțiunea lui T sînt constantele, adică pentru orice $f \in L^1(X, \Sigma, \mu)$

$$\frac{f + \ldots + f \circ T^{n-1}}{n} \to \frac{1}{\mu(X)} \int f\,d\mu.$$

Se vede ușor că înlocuind în această definiție funcțiile din $L^1(X, \Sigma, \mu)$ cu funcții caracteristice, obținem o definiție echivalentă. În această lucrare toate relațiile între mulțimi din Σ vor fi înțelese modulo mulțimi neglijabile, adică ca relaţii între funcţii caracteristice concepute ca elemente din $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$. De exemplu, prin $A = B$ înţelegem că $\chi_A = \chi_B$ aproape peste tot. Spunem că A este invariantă la T dacă $A = T^{-1}A$. Astfel T este ergodică dacă singurele mulţimi invariante din Σ sînt $\emptyset$ şi X.

Din definiţia ergodicităţii rezultă imediat:

1. *Notînd prin* U_T *operatorul unitar indus în* $L^2(X, \Sigma, \mu)$ *de o transformare* T *în* X, T *este ergodică dacă şi numai dacă* 1 *este valoare proprie simplă a lui* U_T.

De aici rezultă imediat că dacă T_2 se scufundă spectral în T_1 şi T_1 este ergodică, atunci T_2 este ergodică. Un operator liniar care realizează această scufundare spectrală face să corespundă funcţiilor constante funcţii constante.

Următorul criteriu permite o interpretare probabilistică a ergodicităţii:

2. *T este ergodică dacă şi numai dacă pentru orice* $A, B \in \Sigma$,

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} \mu(T^{-i}A \cap B)}{n} \to \frac{\mu(A)\,\mu(B)}{\mu(X)}.$$

D. Într-adevăr, dacă T este ergodică,

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} \chi_{T^{-i}A}}{n} \to \frac{\mu(A)}{\mu(X)}$$

în $L^1(X, \Sigma, \mu)$, deci

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} \chi_{T^{-i}A}\,\chi_B}{n} \to \frac{\mu(A)}{\mu(X)}\,\chi_B$$

în $L^1(X, \Sigma, \mu)$. Astfel

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} \mu(T^{-i}A \cap B)}{n} \to \frac{\mu(A)\,\mu(B)}{\mu(X)}.$$

Reciproc, dacă această convergenţă are loc pentru orice $A, B \in \Sigma$ şi A este o mulţime invariantă la T din Σ, atunci luînd $B = \complement A$, obţinem $\mu(A)\,\mu(\complement A) = 0$, deci sau A, sau $\complement A$ este neglijabilă. S.

Fie A, B volume de lichid neneglijabile într-un vas cu lichid X, μ măsura volumelor şi T transformarea cauzată de o scuturare a vasului. Atunci $T^{-i}A \cap B$ este volumul de lichid care după i scuturări se mută din B în A. Criteriul 2 arată că dacă „scuturarea este ergodică”, după suficient de multe scuturări o cantitate neneglijabilă de lichid ajunge din B în A. Cu alte cuvinte T amestecă destul de omogen. Această proprietate de „amestecare” este reflectată şi de următoarea propoziţie:

3. *T este ergodică dacă şi numai dacă pentru orice $A \in \Sigma$ neneglijabilă,* $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-i}A$.

D. Dacă T este ergodică,

$$\frac{\sum_{i=0}^{n=1} \chi_{T^{-i}A}}{n} \to \frac{\mu(A)}{\mu(X)} > 0$$

aproape peste tot, deci

$$\sum_{i=0}^{n-1} \chi_{T^{-i}A} \to +\infty$$

aproape peste tot. De aici rezultă că aproape pentru orice $x \in X$ există i cu $x \in T^{-i} A$, deci $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-i} A$. Dacă T nu este ergodică, există $A \in \sum$ invariantă la T astfel încît $0 < \mu(A) < \mu(X)$. Atunci $\bigcup_{i=0}^{\infty} T^{-i} A = A \neq$ $\neq X$. **S.**

O clasă de transformări care amestecă şi mai bine decît cele ergodice este clasa aşa-numitelor mixinguri : T se numeşte mixing dacă pentru orice $A, B \in \sum$,

$$\mu(T^{-n} A \cap B) \to \frac{\mu(A)\,\mu(B)}{\mu(X)}.$$

Cu interpretarea de mai sus, dacă numărul scuturărilor depăşeşte o limită totdeauna găsim în A o cantitate neneglijabilă de lichid care iniţial a fost în B. După 2 orice mixing este ergodic. Se vede uşor că notînd prin u funcţia constantă de normă unitate din $L^2(X, \sum, \mu)$, adică $u = \frac{1}{\mu(X)^{\frac{1}{2}}}$ χ_X, T este mixing dacă pentru orice $f, g \in L^2(X, \sum, \mu)$,

$$(U_T^n f \mid g) \to (f \mid u)(u \mid g).$$

De aici rezultă că dacă T_2 se scufundă spectral în T_1 şi T_1 este mixing, atunci T_2 este mixing. Nu ştim să caracterizăm proprietatea de a fi mixing cu invarianţi spectrali ca în cazul ergodic. Totuşi

4. *Dacă T are spectrul Lebesgue, atunci ea este mixing.*

D. Presupunem că T are spectru Lebesgue de ordinul n, adică U_T în $L^2(X, \sum, \mu)$ este spectral echivalent cu operatorul U în $\mathbf{C} \oplus \bigoplus_1^n L^2(m)$ care pe $\mathbf{C}$ este identitatea, iar pe $\bigoplus_1^n L^2(m)$ operatorul de înmulţire cu argumentul ζ. Cum lui u îi corespunde $1 \in \mathbf{C}$, trebuie să arătăm că pentru orice $f, g \in \mathbf{C} \oplus \bigoplus_1^n L^2(m)$,

$$(U^n f \mid g) \to (f \mid 1)(1 \mid g).$$

Pentru aceasta este suficient să demonstrăm convergenţa pentru f, g dintr-o bază ortonormală, ceea ce se face imediat. **S.**

Se verifică uşor că dacă $\mathcal{C}$ este un subclan al lui Σ care generează pe Σ, iar T o transformare în X astfel încît pentru orice $A, B \in \mathcal{C}$,

$$\mu\,(T^{-n}A \cap B) \to \frac{\mu(A)\,\mu(B)}{\mu(X)},$$

atunci T este mixing. De aici se deduce imediat că schemele Bernoulli sînt mixinguri.

Comentarii. Partea teoremei de convergenţă referitoare la convergenţa în $L^1\,(X, \Sigma, \mu)$ este cunoscută sub numele de teorema lui E. Hopf, iar cea referitoare la convergenţa aproape peste tot, sub numele de teorema lui N. Dunford şi J. Schwartz. Pentru demonstraţii vezi [4], cap. VIII. Referinţa standardă pentru definiţiile şi proprietăţile fundamentale ale transformărilor ergodice şi ale mixingurilor este [7].

III. SUBTRIBURI ALE LUI Σ. INTRODUCEREA INTUITIVĂ A INFORMAŢIEI

Fie (X, Σ, μ) un spaţiu cu măsură finită, Γ şi Λ subtriburi ale lui Σ. Presupunem că cunoaştem locul unei întîmplări $x \in X$ în raport cu „evenimentele" din Λ şi cineva ne comunică locul său în raport cu „evenimentele" din Γ. Căutăm să exprimăm cantitatea de informaţie furnizată de interlocutor faţă de presupunerile noastre printr-o funcţie $\mathrm{I}(\Gamma\,|\,\Lambda)$. $\mathrm{I}(\Gamma\,|\,\Lambda)$ va măsura gradul de nedeterminare a locului unei întîmplări în raport cu Γ, cunoscînd locul său în raport cu Λ. În acest scop vom studia subtriburile lui Σ.

Remarcăm că după convenţia din paragraful II, relaţiile între mulţimi din Σ şi subtriburi ale lui Σ, precum şi relaţiile între subtriburi ale lui Σ vor fi înţelese modulo mulţimi neglijabile. De exemplu $A \in \Lambda$ înseamnă că există o mulţime B în Λ astfel încît $\chi_A = \chi_B$ aproape peste tot.

Dacă (Λ_α) este o familie de subtriburi ale lui Σ, notăm prin $\bigvee_\alpha \Lambda_\alpha$ subtribul generat de $\bigcup_\alpha \Lambda_\alpha$. Definim limita Λ_∞ a unui şir monoton (Λ_n) de subtriburi ale lui Σ în felul următor: dacă (Λ_n) este crescător, $\Lambda_\infty = \bigvee_n \Lambda_n$, iar dacă (Λ_n) este descrescător, $\Lambda_\infty = \bigcap_n \Lambda_n$. În primul caz notăm $\Lambda_n \nearrow \Lambda_\infty$, iar în al doilea $\Lambda_n \searrow \Lambda_\infty$.

Fie Λ un subtrib al lui Σ şi μ_Λ restricţia lui μ la Λ. Notăm $L^p\,(\Lambda) = L^p\,(X, \Lambda, \mu_\Lambda)$. Are loc propoziţia:

1. *Dacă* $\Lambda_n \nearrow \Lambda_\infty$, $L^p\,(\Lambda_\infty) = \bigcup_n L^p\,(\Lambda_n)$, *iar dacă* $\Lambda_n \searrow \Lambda_\infty$, $L^p\,(\Lambda_\infty) = \bigcap_n L^p\,(\Lambda_n)$, $1 \leqslant p < \infty$.

D. În primul caz $\bigcup_n \Lambda_n$ este un subclan al lui Λ_∞ care generează pe Λ_∞. Dacă $A \in \Lambda_\infty$, conform propoziţiei I.2, există $A_m \in \bigcup_n \Lambda_n$ astfel încît $\chi_{A_m} \to \chi_A$ în $L^p\,(\Sigma)$. Cum $\chi_{A_m} \in \bigcup_n L^p\,(\Lambda_n)$, $L^p\,(\Lambda_\infty) \subset \overline{\bigcup_n L^p\,(\Lambda_n)}$. Pe de altă parte, pentru orice n, $L^p\,(\Lambda_n) \subset L^p\,(\Lambda_\infty)$, deci $\overline{\bigcup_n L^p\,(\Lambda_n)} \subset L^p\,(\Lambda_\infty)$. Afirmaţia a doua este evidentă. **S.**

Spunem că un subtrib Λ al lui $\sum$ este numărabil generat, dacă este generat de o familie numărabilă de mulţimi. O definiţie echivalentă : Λ este numărabil generat dacă există subtriburi finite $\mathcal{A}_n$ ale lui $\sum$ astfel încît $\mathcal{A}_n \nearrow \Lambda$.

2. *Fie* $1 \leqslant p < \infty$. *Un subtrib* Λ *al lui* $\sum$ *este numărabil generat dacă şi numai dacă* $L^p(\Lambda)$ *are bază numărabilă.*

D. Dacă Λ este numărabil generat şi $\mathcal{A}_n \nearrow \Lambda$, unde $\mathcal{A}_n$ sînt finite, atunci după propoziţia 1, $L^p(\Lambda) = \overline{\bigcup\limits_n L^p(\mathcal{A}_n)}$, deci $L^p(\Lambda)$ are bază numărabilă. Reciproc, dacă $L^p(\Lambda)$ are bază numărabilă, există un şir (f_n) de funcţii simple din $L^p(\Lambda)$, dens în $L^p(\Lambda)$. Fie $f_n = \sum\limits_{i=1}^{k_n} c_{ni}\, \chi_{A_{ni}}$ şi Γ subtribul generat de familia numărabilă (A_{ni}). Atunci $L^p(\Lambda) = L^p(\Gamma)$, deci $\Lambda = \Gamma$. S.

De aici rezultă imediat că orice subtrib al unui subtrib numărabil generat al lui $\sum$ este numărabil generat.

Spunem că un subtrib al lui $\sum$ este de tip numărabil dacă este generat de mulţimile unei partiţii numărabile ale lui X. Evident, există o corespondenţă biunivocă între subtriburile Λ de tip numărabil ale lui $\sum$ şi partiţiile numărabile $\{A_1, A_2, \ldots\}$ ale lui X în mulţimi din $\sum$. De aceea vom folosi notaţia $\Lambda = \{A_1, A_2, \ldots\}$. Avem $\{A_1, A_2, \ldots\} \vee \{B_1, B_2, \ldots\} = \{A_i \cap B_j \mid i, j \geqslant 1\}$. În particular, subtriburile finite ale lui $\sum$ şi partiţiile finite ale lui X în mulţimi din $\sum$ se identifică.

Două mulţimi $A, B \in \sum$ se numesc independente dacă

$$\mu(A \cap B)\, \mu(X) = \mu(A)\, \mu(B).$$

Spunem că două subtriburi Γ, Λ ale lui $\sum$ sînt independente dacă orice $A \in \Gamma$ şi $B \in \Lambda$ sînt independente.

Spunem că un subtrib Λ al lui $\sum$ este crescător în raport cu o transformare T în X, sau, dacă nu e pericol de confuzie, simplu, crescător, dacă $\Lambda \subset T\Lambda$.

3. *Dacă* Λ *este un subtrib infinit al lui* $\sum$, *crescător în raport cu o transformare ergodică* T *în* X, *atunci* Λ *nu are atomi.*

D. Presupunem că Λ are un atom A. Atunci există un număr natural n astfel încît $A, TA, \ldots, T^n A$ sînt două cîte două disjuncte şi $A = T^{n+1} A$. După II.3, $X = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} T^i A = \bigcup\limits_{i=0}^{n} T^i A$, deci succesiv $\bigcup\limits_{i=1}^{n} T^i A \in \Lambda$, $\bigcup\limits_{i=0}^{n-1} T^i A \in T^{-1}\Lambda \subset \Lambda$, $T^n A \in \Lambda$. Astfel pentru $0 \leqslant i \leqslant n$, $T^i A$ este un atom al lui Λ, de unde rezultă că $\Lambda = \{A, TA, \ldots, T^n A\}$ este finit. S.

4. *Dacă* Λ *este un subtrib al lui* $\sum$ *fără atomi, atunci pentru orice* $A \in \Lambda$ *neneglijabilă şi* $\varepsilon > 0$ *există* $B \in \Lambda$ *neneglijabilă*, $B \subset A$ *cu* $\mu(B) < \varepsilon$.

D. Într-adevăr, A nefiind atom, se despică în două mulţimi neneglijabile din Λ. Fie A_1 una din acestea cu $\mu(A_1) \leqslant \frac{1}{2}\mu(A)$. Repetînd procedeul, la al n-lea pas găsim o mulţime $A_n \in \Lambda$, $A_n \subset A$ cu $\mu(A_n) \leqslant \frac{1}{2^n}\mu(A)$. Punem $B = A_n$, unde n este suficient de mare. S.

5. *Fie T o transformare ergodică în X, Λ un subtrib crescător infinit al lui Σ, $A \in \Lambda$ neneglijabilă şi l un număr natural. Atunci există $B \in \Lambda$ neneglijabilă, $B \subset A$, astfel încît B, $TB, \ldots, T^l B$ sînt două cîte două disjuncte.*

D. Conform propoziţiilor 3 şi 4 există $B_0 \in \Lambda$ neneglijabilă astfel încît $\mu(B_0) < \frac{\mu(X)}{l}$. Presupunem că pentru $i < l$ există un număr natural n_i şi o mulţime $B_i \in T^{n_i} \Lambda$ neneglijabilă, $B_i \subset B_0$, astfel încît B_i, $TB_i, \ldots, T^i B_i$ sînt două cîte două disjuncte. Dacă $B_i = T^{i+1} B_i$, atunci după II.3, $X = \bigcup_{j=0}^{\infty} T^j B_i = \bigcup_{j=0}^{i} T^j B_i$, deci $\mu(X) \leqslant \sum_{j=0}^{i} \mu(T^j B_i) < (i+1)\frac{\mu(X)}{l} \leqslant \mu(X)$, ceea ce este imposibil. Prin urmare $B_i \neq T^{i+1} B_i$, deci $B_{i+1} = B_i \setminus T^{i+1} B_i \in T^{i+1+n_i} \Lambda = T^{n_{i+1}} \Lambda$ este neneglijabilă. Evident, $B_{i+1} \subset B_0$ şi B_{i+1}, $TB_{i+1}, \ldots, T^{i+1} B_{i+1}$ sînt două cîte două disjuncte. În sfîrşit, găsim pe n_l şi B_l. Cum după II.3 $X = \bigcup_{j=n_l}^{\infty} T^{-j} B_l$, există $j_l \geqslant n_l$ astfel încît $B = T^{-j_l} B_l \cap A$ nu este neglijabilă. Atunci $T^{-j_l} B_l \in T^{-j_l+n_l} \Lambda \subset \Lambda$, deci $B \in \Lambda$ şi B, $TB, \ldots, T^l B$ sînt două cîte două disjuncte. **S.**

După acest studiu al subtriburilor lui Σ, analizînd un exemplu, încercăm să dăm o definiţie cît mai naturală funcţiei de informaţie :

Presupunem că X este un domeniu plan, iar μ măsura Lebesgue pe X. Fie $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_N\}$ o partiţie măsurabilă a lui X. Tragem cu puşca în X şi un observator ne comunică pe care A_i am nimerit. Probabilitatea să nimerim în A_i este $\frac{\mu(A_i)}{\mu(X)}$. Este natural să reprezentăm informaţia primită de comunicarea care ne asigură că glonţul a străpuns pe A_i printr-un număr pozitiv depinzînd doar de probabilitatea $\frac{\mu(A_i)}{\mu(X)}$. Astfel exprimăm cantitatea de informaţie furnizată de observator prin

$$\mathrm{I}(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{N} \chi_{A_i} f\left(\frac{\mu(A_i)}{\mu(X)}\right),$$

unde f este o funcţie pozitivă. Este de asemenea natural să presupunem că dacă partiţiile măsurabile $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_N\}$, $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_M\}$ sînt independente, atunci

$$\mathrm{I}(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = \mathrm{I}(\mathcal{A}) + \mathrm{I}(\mathcal{B}),$$

adică primind comunicări de la doi observatori relativ la locul glonţului în raport cu $\mathcal{A}$ respectiv $\mathcal{B}$, informaţia totală este aceeaşi, indiferent dacă comunicările ajung simultan la noi, sub forma unei singure comunicări, sau sînt făcute succesiv. Astfel

$$\sum_{i,j}\chi_{A_i\cap B_j} f\left(\frac{\mu(A_i\cap B_j)}{\mu(X)}\right) = \sum_{i}\chi_{A_i} f\left(\frac{\mu(A_i)}{\mu(X)}\right) + \sum_{j}\chi_{B_j} f\left(\frac{\mu(B_j)}{\mu(X)}\right) =$$

$$= \sum_{i,j}\chi_{A_i\cap B_j}\left[f\left(\frac{\mu(A_i)}{\mu(X)}\right)+f\left(\frac{\mu(B_j)}{\mu(X)}\right)\right],$$

deci $f(ts) = f(t) + f(s)$. Presupunînd pe f continuă, un raţionament binecunoscut de rezolvare a ecuaţiilor funcţionale ne arată că $f(t) = -c\log_2 t$, $c > 0$. Luînd $c = 1$, definim

$$\mathrm{I}(\mathcal{A}) = -\sum_{i=1}^{N}\chi_{A_i}\log_2\frac{\mu(A_i)}{\mu(X)}.$$

Considerăm acum un caz mai complicat. Presupunem că după ce am tras, ştim în care B_j am nimerit, iar locul glonţului în raport cu $\mathcal{A}$ ne este comunicat de observator ($\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ nu sînt neapărat independente). Exprimăm cantitatea de informaţie furnizată de observator faţă de presupunerile noastre bazate pe cele cunoscute printr-o funcţie $\mathrm{I}(\mathcal{A}\mid\mathcal{B})$. Presupunînd că locul glonţului în raport cu $\mathcal{B}$ ne-a fost comunicat de un alt observator, cantitatea de informaţie furnizată de cei doi observatori trebuie să fie exprimată prin $\mathrm{I}(\mathcal{A}\mid\mathcal{B}) + \mathrm{I}(\mathcal{B})$, deci

$$\mathrm{I}(\mathcal{A}\vee\mathcal{B}) = \mathrm{I}(\mathcal{A}\mid\mathcal{B}) + \mathrm{I}(\mathcal{B}).$$

Astfel definim

$$\mathrm{I}(\mathcal{A}\mid\mathcal{B}) = \mathrm{I}(\mathcal{A}\vee B) - \mathrm{I}(\mathcal{B}) =$$

$$= -\sum_{i,j}\chi_{A_i}\chi_{B_j}\left[\log_2\frac{\mu(A_i\cap B_j)}{\mu(X)} - \log_2\frac{\mu(B_j)}{\mu(X)}\right] =$$

$$= -\sum_{i,j}\chi_{A_i}\chi_{B_j}\log_2\frac{\mu(A_i\cap B_j)}{\mu(B_j)} = -\sum_{i}\chi_{A_i}\log_2\sum_{j}\chi_{B_j}\frac{\mu(A_i\cap B_j)}{\mu(B_j)}.$$

Notînd

$$E(\chi_{A_i}\mid\mathcal{B}) = \sum_{j}\chi_{B_j}\frac{\mu(A_i\cap B_j)}{\mu(B_j)},$$

avem

$$\mathrm{I}(\mathcal{A}\mid\mathcal{B}) = -\sum_{i}\chi_{A_i}\log_2 E(\chi_{A_i}\mid\mathcal{B}).$$

Deoarece $E(\chi_{A_i}\mid\mathcal{B})$ este definită de proprietăţile :

— $E(\chi_{A_i}\mid\mathcal{B})$ este $\mathcal{B}$-măsurabilă ;

— pentru orice $B\in\mathcal{B}$ $\int_B\chi_{A_i}\,\mathrm{d}\mu = \int_B E(\chi_{A_i}\mid\mathcal{B})\,\mathrm{d}\mu$, iar în acestea nu intervine finitudinea lui $\mathcal{B}$, formula de mai sus pentru $I(\mathcal{A} \mid \mathcal{B})$ ne va permite definirea ei şi pentru subtriburi $\mathcal{B}$ infinite, care la rîndul său va fi generalizată şi mai mult, definind $I(\mathcal{A} \mid \mathcal{B})$ pentru subtriburile $\mathcal{B}$ oarecari şi $\mathcal{A}$ numărabil generate. Vom dezvolta un aparat întreg legat de această funcţie de informaţie, care va fi utilizat la studiul transformărilor, dar care poate prezenta şi un interes de sine stătător.

Remarcăm că funcţia $E(\chi_A \mid \mathcal{B})$ are şi ea interpretare probabilistică. Dacă tragem în B_j, probabilitatea ca să nimerim în A este $\frac{\mu(A \cap B_j)}{\mu(B_j)}$. Astfel $E(\chi_A \mid \mathcal{B})$ exprimă speranţa de a nimeri în A cu condiţia că ştim să tragem în acea B_j în care vrem. De aceea $E(\chi_A \mid \mathcal{B})$ se numeşte speranţa condiţionată a lui χ_A în raport cu $\mathcal{B}$. Dacă $\mathcal{B} = \{X\}$, deci tragem în X la întîmplare, speranţa de a nimeri în A este tocmai probabilitatea $\frac{\mu(A)}{\mu(X)}$.

Comentarii. Este interesant de observat că deşi pentru definirea entropiei unei transformări este suficientă teoria lui $I(\mathcal{A})$ cu $\mathcal{A}$ finit şi în enunţul teoremei lui Sinai este folosită doar entropia transformărilor, pentru demonstraţie avem nevoie de intregul aparat semnalat mai sus.

IV. SPERANŢĂ CONDIŢIONATĂ

Fie (X, Σ, μ) un spaţiu cu măsură finită, Λ un subtrib al lui Σ şi $f \in L^1(\Sigma)$. Restricţia măsurii $\int_A f \, d\mu$ la Λ este absolut continuă în raport cu μ_Λ, deci după teorema Radon-Nikodym există $g \in L^1(\Lambda)$ astfel încît

$$\int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu_\Lambda, \quad A \in \Lambda.$$

g se numeşte speranţa condiţionată a lui f în raport cu Λ şi se notează $E(f \mid \Lambda)$. Notăm subtribul $\{X\}$, adică subtribul mulţimilor de măsură 0 şi $\mu(X)$ prin $\overset{1}{0}$. Atunci $E(f \mid \overset{1}{0}) = \frac{1}{\mu(X)} \int f \, d\mu$.

Se vede imediat că

1. *Dacă* Λ_1, Λ_2 *sînt subtriburi ale lui* Σ, $\Lambda_1 \supset \Lambda_2$ *şi* $f \in L^1(\Sigma)$, *atunci*

$$E(E(f \mid \Lambda_1) \mid \Lambda_2) = E(f \mid \Lambda_2)$$

Următoarea propoziţie ne va permite să verificăm proprietăţile speranţei condiţionate doar pe o mulţime densă sau totală din $L^1(\Sigma)$:

2. $f \to E(f \mid \Lambda)$ *este o contracţie liniară pozitivă a lui* $L^p(\Sigma)$ *în* $L^p(\Lambda)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

D. Notăm pentru comoditate $E(f) = E(f \mid \Lambda)$. Evident, E este o aplicaţie liniară pozitivă a lui $L^1(\Sigma)$ în $L^1(\Lambda)$.

Dacă $A_i \in \Sigma$, $i = 1, \ldots, n$, sînt două cîte două disjuncte, c_i sînt numere complexe, $f = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}$, $1 \leqslant p < \infty$ şi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, atunci, aplicînd inegalitatea lui Hölder pentru sume,

$$|E(f)|^p \leqslant (\sum_i |c_i| E(\chi_{A_i}))^p = (\sum_i [|c_i| E(\chi_{A_i})^{\frac{1}{p}}] [E(\chi_{A_i})^{\frac{1}{q}}])^p \leqslant$$

$$\leqslant (\sum_i |c_i|^p E(\chi_{A_i})) (\sum_i E(\chi_{A_i}))^{\frac{p}{q}} \leqslant E(\sum_i |c_i|^p \chi_{A_i}) = E(|f|^p).$$

De aici se deduce imediat că pentru funcţii f simple şi $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\|E(f)\|_p \leqslant \|f\|_p$.

Fie acum $f \in L^p(\Sigma)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, oarecare şi (f_k) un şir de funcţii simple, convergent în $L^p(\Sigma)$ la f. Deoarece $\|E(f_k) - E(f_l)\|_p \leqslant \|f_k - f_l\|_p$, şirul $(E(f_k))$ converge în $L^p(\Lambda)$ la o funcţie g. Pentru orice $A \in \Lambda$ şirul $\int_A f_k \, d\mu = \int_A E(f_k) \, d\mu$ tinde pe de o parte către $\int_A f \, d\mu$, iar pe de altă parte către $\int_A g \, d\mu$. Astfel $g = E(f)$. Trecînd la limită în $\|E(f_k)\|_p \leqslant \|f_k\|_p$, obţinem $\|E(f)\|_p \leqslant \|f\|_p$. S.

Fie φ o funcţie reală definită pe un interval I al dreptei reale. Spunem că φ este concavă dacă pentru orice $t_1, t_2 \in I$, $\frac{1}{2}(\varphi(t_1) + \varphi(t_2)) \leqslant \varphi\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)$. Dacă φ este şi continuă, se verifică prin inducţie că pentru orice $t_1, \ldots, t_n \in I$, $c_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i = 1$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi(t_i) \leqslant \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} c_i t_i\right).$$

Această inegalitate se numeşte inegalitatea lui Jensen. Se verifică de asemenea uşor că dacă φ este de două ori continuu derivabilă, ea este concavă dacă şi numai dacă $\varphi'' \leqslant 0$ pe I.

3. *Dacă $f \in L^\infty(\Sigma)$ este o funcţie reală, iar φ o funcţie concavă, continuă, definită pe un interval care include pe $f(X)$, atunci*

$$E(\varphi \circ f | \Lambda) \leqslant \varphi \circ E(f | \Lambda).$$

D. După 2 este suficient să considerăm cazul $f = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}$, unde A_i sînt mulţimi două cîte două disjuncte din Σ şi $\bigcup\limits_i A_i = X$. Atunci, deoarece $E(\chi_{A_i} | \Lambda) \geqslant 0$, $\sum\limits_i E(\chi_{A_i} | \Lambda) = 1$, conform inegalităţii lui Jensen avem

$$E(\varphi \circ f | \Lambda)(x) = \sum_i \varphi(c_i) E(\chi_{A_i} | \Lambda)(x) \leqslant$$

$$\leqslant \varphi(\sum_i c_i E(\chi_{A_i} | \Lambda)(x)) = \varphi \circ E(f | \Lambda))(x). \text{ S.}$$

4. *Dacă* $f \in L^p(\Sigma)$, $g \in L^q(\Lambda)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, *atunci*

$$E(fg \mid \Lambda) = E(f \mid \Lambda) \cdot g.$$

D. După 2 $(f, g) \to E(fg \mid \Lambda)$ şi $(f, g) \to E(f \mid \Lambda) g$ sînt aplicaţii biliniare continue ale lui $L^p(\Sigma) \times L^q(\Lambda)$ în $L^1(\Lambda)$, deci fără restrîngerea generalităţii putem presupune că $f = \chi_B$, $B \in \Sigma$ şi $g = \chi_C$, $C \in \Lambda$. În acest caz pentru orice $A \in \Lambda$

$$\int_A E(f \mid \Lambda) g \, d\mu = \int_{A \cap C} E(\chi_B \mid \Lambda) \, d\mu = \int_{A \cap C} \chi_B \, d\mu =$$

$$= \int_A \chi_B \chi_C \, d\mu = \int_A E(fg \mid \Lambda) \, d\mu. \text{ S.}$$

Pentru $f \in L^1(\Sigma)$ şi $A \in \Sigma$ numim restricţia lui f la A pe $f \cdot \chi_A$. Din propoziţia 4 rezultă că luarea speranţei condiţionate în raport cu Λ şi operaţia de restricţie la o mulţime din Λ comută.

5. *Fie* $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_M\}$, Λ *subtriburi ale lui* Σ *şi* $f \in L^1(\Sigma)$. *Atunci*

$$E(f \mid \mathcal{B} \vee \Lambda) = \sum_{j=1}^{M} \chi_{B_j} \frac{E(f \cdot \chi_{B_j} \mid \Lambda)}{E(\chi_{B_j} \mid \Lambda)}. \tag{1}$$

D. Remarcăm înainte de toate că formula (1) are sens deoarece

$$\mu(B_j \cap \{E(\chi_{B_j} \mid \Lambda) = 0\}) = \int_{\{E(\chi_{B_j} \mid \Lambda) = 0\}} \chi_{B_j} \, d\mu = \int_{\{E(\chi_{B_j} \mid \Lambda) = 0\}} E(\chi_{B_j} \mid \Lambda) \, d\mu = 0,$$

deci pe B_j, $E(\chi_{B_j} \mid \Lambda) > 0$. Din 2 rezultă că fără restrîngerea generalităţii putem considera pe f din $L^\infty(\Sigma)$. Cum orice mulţime din $\mathcal{B} \vee \Lambda$ este de forma $\bigcup_{j=1}^{M} (B_j \cap C_j)$ cu $C_j \in \Lambda$, este suficient să arătăm că integralele celor două părţi ale lui (1) pe mulţimi $B_{j_0} \cap C$ cu $C \in \Lambda$ sînt egale. Folosind pe 4 avem

$$\int_{B_{j_0} \cap C} E(f \mid \mathcal{B} \vee \Lambda) \, d\mu = \int_{B_{j_0} \cap C} f \, d\mu = \int_C f \chi_{B_{j_0}} \, d\mu =$$

$$= \int_C E(f \cdot \chi_{B_{j_0}} \mid \Lambda) \, d\mu = \int_C E(\chi_{B_{j_0}} \mid \Lambda) \cdot \frac{E(f \chi_{B_{j_0}} \mid \Lambda)}{E(\chi_{B_{j_0}} \mid \Lambda)} \, d\mu =$$

$$= \int_C E\left(\chi_{B_{j_0}} \frac{E(f \chi_{B_{j_0}} \mid \Lambda)}{E(\chi_{B_{j_0}} \mid \Lambda)}\right) d\mu = \int_C \chi_{B_{j_0}} \frac{E(f \chi_{B_{j_0}} \mid \Lambda)}{E(\chi_{B_{j_0}} \mid \Lambda)} \, d\mu =$$

$$= \int_{B_{j_0} \cap C} \sum_{j=1}^{M} \chi_{B_j} \frac{E(f \chi_{B_j} \mid \Lambda)}{E(\chi_{B_j} \mid \Lambda)} \, d\mu. \text{ S.}$$

Punînd în (1) $\Lambda = \overset{1}{0}$ şi $f = \chi_A$, obţinem formula care în paragraful III ne-a condus la definirea speranţei condiţionate :

$$E(\chi_A|\mathcal{B}) = \sum_{j=1}^{M} \chi_{B_j} \frac{\mu(A \cap B_j)}{\mu(B_j)}. \tag{2}$$

6. *Fie* Λ *un subtrib al lui* Σ, $f \in L^1(\Sigma)$ *şi* $T : X \to X$ *o transformare. Atunci*

$$E(f|\Lambda) \circ T = E(f \circ T|T^{-1}\Lambda).$$

D. Într-adevăr, folosind I.1 şi 4 pentru orice $C \in \Lambda$,

$$\int_{T^{-1}C} E(f|\Lambda) \circ T \,\mathrm{d}\mu = \int [E(f|\Lambda) \cdot \chi_C] \circ T \,\mathrm{d}\mu =$$

$$= \int E(f \circ \chi_C|\Lambda)\,\mathrm{d}\mu = \int f\chi_C \,\mathrm{d}\mu = \int [f\chi_C] \circ T \,\mathrm{d}\mu =$$

$$= \int_{T^{-1}C} f \circ T \,\mathrm{d}\mu = \int_{T^{-1}C} E(f \circ T|T^{-1}\Lambda)\,\mathrm{d}\mu. \text{ S.}$$

7. *Dacă* $\Lambda_n \nearrow \Lambda_\infty$ *şi* $f \in L^1(\Sigma)$, *atunci* $E(f|\Lambda_n) \to E(f|\Lambda_\infty)$ *în* $L^1(\Sigma)$.

D. Propoziţia este evidentă pentru $f \in \bigcup_n L^1(\Lambda_n)$, din 2 şi III. 1 rezultă pentru $f \in L^1(\Lambda_\infty)$, iar din 1 pentru $f \in L^1(\Sigma)$ oarecare. S.

Remarcăm că în condiţiile propoziţiei 7, $E(f|\Lambda_n) \to E(f|\Lambda_\infty)$ şi aproape peste tot. Această afirmaţie este un caz particular al teoremei de convergenţă a martingalelor. Propoziţia 7 permite extinderea unor proprietăţi ale speranţelor condiţionate în raport cu subtriburi finite pentru speranţe condiţionate în raport cu subtriburi numărabil generate :

8. *Dacă* Γ, Λ *sînt subtriburi ale lui* Σ, Λ *numărabil generat, atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente* :

— Γ *şi* Λ *sînt independente*;

— *pentru orice* $f \in L^1(\Gamma)$ $E(f|\Lambda) = E(f|\overset{1}{0})$.

D. Presupunem că Γ şi Λ sînt independente. Fie $\mathcal{B}_n \nearrow \Lambda$, unde $\mathcal{B}_n$ sînt finite. Din formula (2) rezultă că dacă $A \in \Gamma$, atunci $E(\chi_A|\mathcal{B}_n) = E(\chi_A|\overset{1}{0})$, deci după 7 $E(\chi_A|\Lambda) = E(\chi_A|\overset{1}{0})$. Aplicînd 2 obţinem pentru orice $f \in L^1(\Gamma)$ egalitatea $E(f|\Lambda) = E(f|\overset{1}{0})$. Reciproc, dacă afirmaţia a doua este adevărată, atunci pentru orice $A \in \Gamma$ şi $B \in \Lambda$

$$\mu(A \cap B) = \int_B \chi_A \,\mathrm{d}\mu = \int_B E(\chi_A|\Lambda)\,\mathrm{d}\mu = \int_B E(\chi_A|\overset{1}{0})\,\mathrm{d}\mu = \frac{\mu(A) \cdot \mu(B)}{\mu(X)},$$

deci Γ şi Λ sînt independente. S.

9. *Dacă* $\Lambda_n \searrow \Lambda\infty$ *şi* $f \in L^1(\Sigma)$, *atunci* $E(f|\Lambda_n) \to E(f|\Lambda_\infty)$ *în* $L^1(\Sigma)$.

D. Evident, este suficient să arătăm că şirul $E(f|\Lambda_n) = E_n f$ converge în $L^1(\Sigma)$, adică şirul de operatori E_n converge tare. Fie (a_n) un şir de numere reale astfel încît

$$0 = a_0 < a_1 < \ldots < 1.$$

Atunci operatorului

$$U = \sum_{n \geqslant 1} (a - a_{n-1}) E_n$$

i se poate aplica teorema de convergenţă din paragraful II, deci şirul

$$s_m(U) = \frac{1}{m}(U + \ldots + U^m)$$

converge tare. Însă după 1 pentru $n \geqslant m$, $E_m E_n = E_n E_m = E_n$, de unde

$$U^k = \sum_{n \geqslant 1} [(a_n)^k - (a_{n-1})^k] \cdot E_n.$$

Astfel

$$s_m(U) = \sum_{n \geqslant 1} \left[\frac{a_n + \ldots + (a_n)^m}{m} - \frac{a_{n-1} + \ldots + (a_{n-1})^m}{m} \right] \cdot E_n =$$

$$= \sum_{n \geqslant 1} [b_{nm} - b_{n-1}] \cdot E_n.$$

Acum luînd $m_1 = 1$ şi un a_1 suficient de aproape de 1,

$$\| s_{m_1}(U) - E_1 \| \leqslant 1.$$

Luăm acum pe m_2 suficient de mare pentru ca b_{1m_2} să fie mic, iar apoi pe a_2 suficient de aproape de 1 pentru ca b_{2m_2} să fie aproape de 1. Cu evaluări corespunzătoare

$$\| s_{m_2}(U) - E_2 \| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Prin inducţie găsim un şir a_n şi un şir de numere naturale m_n astfel încît

$$\| s_{m_n}(U) - E_n \| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

deci şirul E_n converge tare. S.

Remarcăm că deoarece şirul $s_m(U)$ converge şi aproape peste tot şi $\sum_{n \geqslant 1} \| s_{m_n}(U) - E_n \| < \infty$, $E(f \mid \Lambda_n) \to E(f \mid \Lambda_\infty)$ şi aproape peste tot.

În sfîrşit, dăm o teoremă de aproximare a funcţiilor din $L^\infty(\Lambda)$ cu funcţii de forma $E(\chi_A \mid \Lambda)$:

Teorema despre proprietatea lui Darboux. *Fie* (X, Σ, μ) *un spaţiu cu măsură finită,* Λ *un subtrib al lui* Σ, $A_1, A_2 \in \Sigma$, $A_1 \subset A_2$ *şi* $\varepsilon > 0$ *astfel încît pentru orice* $B \in \Sigma$ *neneglijabilă,* $B \subset A_2 \setminus A_1$, *există* $C \in \Sigma$ *neneglijabilă,* $C \subset B$ *cu* $E(\chi_C \mid \Lambda) \leqslant \varepsilon$. *Atunci pentru orice* $f \in L^\infty(\Lambda)$, $E(\chi_{A_1} \mid \Lambda) \leqslant f \leqslant E(\chi_{A_2} \mid \Lambda)$ *există* $A_0 \in \Sigma$, $A_1 \subset A_0 \subset A_2$ *astfel încît*

$$f - \varepsilon \leqslant E(\chi_{A_0} \mid \Lambda) \leqslant f.$$

D. Notăm

$$\mathcal{A} = \{A \mid A \in \Sigma,\ A_1 \subset A \subset A_2,\ E(\chi_A \mid \Lambda) \leqslant f\}$$

și ordonăm pe $\mathcal{A}$ cu relația $\subset$. Fie $\mathcal{T}$ o parte total ordonată a lui $\mathcal{A}$ și $\alpha = \sup\limits_{A \in \mathcal{T}} \mu(A)$. Considerăm un șir crescător (A_n) de mulțimi din $\mathcal{T}$ astfel încît $\mu(A_n) \to \alpha$ și punem $T = \bigcup\limits_n A_n$. Evident, $T \in \mathcal{A}$ și $\mu(T) = \alpha$. Dacă $A \in \mathcal{T}$, sau pentru un n, $A \subset A_n$, deci $A \subset T_n$, sau, $\mathcal{T}$ fiind total ordonată, pentru orice n $A_n \subset A$, deci $T \subset A$. Însă $\mu(T) = \alpha \geqslant \mu(A)$, deci în al doilea caz $T = A$. Astfel T este majorant pentru $\mathcal{T}$ și se vede imediat că este cel mai mic majorant. Prin urmare, conform lemei lui Zorn, $\mathcal{A}$ conține un element maximal A_0.

Presupunem că $E = \{E(\chi_{A_0} \mid \Lambda) < f - \varepsilon\} \in \Lambda$ este neneglijabilă. Atunci și $E \cap (A_2 \setminus A_0)$ este neneglijabilă. Într-adevăr, în caz contrar am avea

$$0 = \int_E (\chi_{A_2} - \chi_{A_0})\, d\mu = \int_E [E(\chi_{A_2} \mid \Lambda) - E(\chi_{A_0} \mid \Lambda)]\, d\mu,$$

deci pe E

$$E(\chi_{A_2} \mid \Lambda) = E(\chi_{A_0} \mid \Lambda) \leqslant f \leqslant E(\chi_{A_2} \mid \Lambda),$$

ceea ce ar contrazice definiția lui E. Astfel există $C \in \Sigma$ neneglijabilă, $C \subset E \cap (A_2 \setminus A_0)$ cu $E(\chi_C \mid \Lambda) \leqslant \varepsilon$. Cum $C \subset E$, pe $\complement E$, $E(\chi_C \mid \Lambda) = 0$, deci

$$E(\chi_{A_0 \cup C} \mid \Lambda) = E(\chi_{A_0} \mid \Lambda) + E(\chi_C \mid \Lambda) =$$
$$= \begin{cases} E(\chi_{A_0} \mid \Lambda) & \text{pe } \complement E \\ E(\chi_{A_0} \mid \Lambda) + E(\chi_C \mid \Lambda) & \text{pe } E. \end{cases} \leqslant f.$$

Prin urmare $A_0 \cup C \in \mathcal{A}$, ceea ce contrazice maximalitatea lui A_0. În concluzie E este neglijabilă, adică $E(\chi_{A_0} \mid \Lambda) \geqslant f - \varepsilon$. **S.**

Din această teoremă rezultă imediat că:

10. *Dacă* $A_1\ A_2 \in \Sigma$, $A_1 \subset A_2$, *și pentru orice* $\varepsilon > 0$ *și* $B \in \Sigma$ *neneglijabilă*, $B \subset A_2 \setminus A_1$, *există* $C \in \Sigma$ *neneglijabilă*, $C \subset B$ *cu* $E(\chi_C \mid \Lambda) \leqslant \varepsilon$, *atunci pentru orice* $f \in L^\infty(\Lambda)$, $E(\chi_{A_1} \mid \Lambda) \leqslant f \leqslant E(\chi_{A_2} \mid \Lambda)$, *există* $A_0 \in \Sigma$, $A_1 \subset A_0 \subset A_2$, *astfel încît*

$$f = E(\chi_{A_0} \mid \Lambda).$$

Această propoziție este o generalizare a cunoscutei proprietăți Darboux a măsurilor neatomice:

11. *Dacă* $A_1, A_2 \in \Sigma$, $A_1 \subset A_2$, *și* Σ *nu are atomi în* $A_2 \setminus A_1$, *atunci pentru orice număr* α, $\mu(A_1) \leqslant \alpha \leqslant \mu(A_2)$ *există* $A_0 \in \Sigma$, $A_1 \subset A_0 \subset A_2$, *astfel încît*

$$\alpha = \mu(A_0).$$

D. Într-adevăr, cum $E(\chi_A \mid \overset{1}{0}) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(X)}$, conform propoziției III.4 se poate aplica 10 cu $\Lambda = \overset{1}{0}$. **S.**

Comentarii. Proprietățile de bază ale speranțelor condiționate sînt tratate după [8]. Demonstrația propoziției 7, care se extinde și pentru cazul unei familii (Λ_α) filtrată crescător, se datorește lui C. Foiaș. Remarcăm că din această generalizare rezultă că în propoziția 8 condiția ca Λ să fie numărabil generat este de prisos. Acest lucru însă nu ne va deranja. Demonstrația propoziției 9 este luată din [12]. Pentru martingale și proprietatea Darboux a măsurilor neatomice vezi [3].

V. INFORMAȚIE ȘI ENTROPIE

În acest paragraf vom defini și vom studia informația și entropia unui subtrib finit în raport cu un subtrib oarecare.

Fie (X, Σ, μ) un spațiu cu măsură finită. Dacă $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_N\}$, Λ sînt subtriburi ale lui Σ, numim informația lui $\mathcal{A}$ în raport cu Λ funcția

$$\mathrm{I}(\mathcal{A}|\Lambda) = -\sum_{i=1}^{N} \chi_{A_i} \log_2 E(\chi_{A_i} | \Lambda).$$

În această lucrare pentru simplitate în loc de $\log_2$ vom scrie totdeauna log. Notăm $\mathrm{I}(\mathcal{A} | \overset{1}{0}) = \mathrm{I}(\mathcal{A})$.

Următoarele patru propoziții se intuiesc ușor cu ajutorul exemplului din paragraful III :

1. *Dacă* $T : X \to X$ *este o transformare, atunci*

$$\mathrm{I}(\mathcal{A} | \Lambda) \circ T = \mathrm{I}(T^{-1}\mathcal{A} | T^{-1}\Lambda).$$

D. Într-adevăr, aplicînd pe IV.6,

$$\mathrm{I}(\mathcal{A} | \Lambda) \circ T = -\sum_{i=1}^{N} \chi_{A_1} \circ T \log E(\chi_{A_i} | \Lambda) \circ T =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} \chi_{A_i} \circ T \log E(\chi_{A_i} \circ T | T^{-1}\Lambda) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} \chi_{T^{-1}A_i} \log E(\chi_{T^{-1}A_i} | T^{-1}\Lambda) = \mathrm{I}(T^{-1}\mathcal{A} | T^{-1}\Lambda). \text{ S.}$$

2. $\mathrm{I}(\mathcal{A} | \Lambda) = 0$ *dacă și numai dacă* $\mathcal{A} \subset \Lambda$.

D. Suficiența este imediată. Presupunem acum că $\mathrm{I}(\mathcal{A} | \Lambda) = 0$. Atunci $E(\chi_{A_i} | \Lambda) = 1$ pe A_i. Cum

$$\mu(A_i) = \int E(\chi_{A_i} | \Lambda)\, d\mu = \int_{A_i} E(\chi_{A_i} | \Lambda)\, d\mu +$$

$$+ \int_{\complement A_i} E(\chi_{A_i} | \Lambda)\, d\mu = \mu(A_i) + \int_{\complement A_i} E(\chi_{A_i} | \Lambda)\, d\mu,$$

$E(\chi_{A_i} | \Lambda) = 0$ pe $\complement A_i$, deci $\chi_{A_i} = E(\chi_{A_i} | \Lambda)$ este Λ-măsurabilă. **S.**

3. *Dacă* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, Λ *sînt subtriburi ale lui* Σ, $\mathcal{A}$ *și* $\mathcal{B}$ *finite, atunci*

$$I(\mathcal{A}\vee\mathcal{B}\mid\Lambda)=I(\mathcal{B}\mid\Lambda)+I(\mathcal{A}\mid\mathcal{B}\vee\Lambda).$$

D. Fie $\mathcal{A}=\{A_1,\ldots,A_N\}$, $\mathcal{B}=\{B_1,\ldots,B_M\}$. Utilizînd pe IV.5 putem scrie

$$I(\mathcal{A}\vee\mathcal{B}\mid\Lambda)=-\sum_{i,j}\chi_{A_i}\chi_{B_j}\log E(\chi_{A_i}\chi_{B_j}\mid\Lambda)=$$

$$=-\sum_{i,j}\chi_{A_i}\chi_{B_j}\log E(\chi_{B_j}\mid\Lambda)-\sum_{i,j}\chi_{A_i}\chi_{B_j}\log\frac{E(\chi_{A_i}\chi_{B_j}\mid\Lambda)}{E(\chi_{B_j}\mid\Lambda)}=$$

$$=-\sum_{j}\chi_{B_j}\log E(\chi_{B_j}\mid\Lambda)-\sum_{i}\chi_{A_i}\log\sum_{j}\chi_{B_j}\frac{E(\chi_{A_i}\chi_{B_j}\mid\Lambda)}{E(\chi_{B_j}\mid\Lambda)}=$$

$$=I(\mathcal{B}\mid\Lambda)-\sum_{i}\chi_{A_i}\log E(\chi_{A_i}\mid\mathcal{B}\vee\Lambda)=I(\mathcal{B}\mid\Lambda)+I(\mathcal{A}\mid\mathcal{B}\vee\Lambda).\ \mathbf{S.}$$

Luînd în 3 $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$, obținem:

4. *Dacă* $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$, *atunci*

$$I(\mathcal{B}\mid\Lambda)\leqslant I(\mathcal{A}\mid\Lambda).$$

Considerăm funcția

$$\varphi(t)=\begin{cases}0, & t=0,\\ -t\log t, & t\in(0,1].\end{cases}$$

Se verifică imediat că φ este continuă și concavă.

5. *Fie* $A\in\Sigma$ *și* Λ *un subtrib al lui* Σ. *Atunci* $-\chi_A\log E(\chi_A\mid\Lambda)\in L^1(\Sigma)$ *și*

$$E(-\chi_A\log E(\chi_A\mid\Lambda)\mid\Lambda)=\varphi\circ E(\chi_A\mid\Lambda).$$

D. Notăm pentru orice funcție reală f pe X

$$[f]_M^L(x)=\begin{cases}0, & f(x)<M,\\ f(x), & M\leqslant f(x)\leqslant L,\\ 0, & L<f(x).\end{cases}$$

Atunci, conform teoremei lui Beppo Levi și IV.4, pentru orice $C\in\Lambda$

$$\int_C\varphi\circ E(\chi_A\mid\Lambda)\,d\mu=\lim_{M\to-\infty}-\int_C E(\chi_A\mid\Lambda)\,[\log E(\chi_A\mid\Lambda)]_M^0\,d\mu=$$

$$=\lim_{M\to-\infty}-\int_C E(\chi_A\,[\log E(\chi_A\mid\Lambda)]_M^0\mid\Lambda)\,d\mu=$$

$$=\lim_{M\to-\infty}-\int_C\chi_A\,[\log E(\chi_A\mid\Lambda)]_M^0\,d\mu.$$

Aplicînd din nou teorema lui Beppo Levi, $-\chi_A\log E(\chi_A\mid\Lambda)\in L^1(\Sigma)$ și pentru orice $C\in\Lambda$,

$$\int_C\varphi\circ E(\chi_A\mid\Lambda)\,d\mu=-\int_C\chi_A\log E(\chi_A\mid\Lambda)\,d\mu.\ \mathbf{S.}$$

6. *Fie* $A \in \Sigma$, Λ_1, Λ_2 *subtriburi ale lui* Σ, $\Lambda_1 \supset \Lambda_2$. *Atunci*

$$-\int \chi_A \log E(\chi_A \mid \Lambda_1)\, d\mu \leqslant -\int \chi_A \log E(\chi_A \mid \Lambda_2)\, d\mu.$$

D. Într-adevăr, punînd în IV.3, $f = E(\chi_A \mid \Lambda_1)$ şi folosind pe IV.1 obţinem

$$E(\varphi \circ E(\chi_A \mid \Lambda_1) \mid \Lambda_2) \leqslant \varphi \circ E(E(\chi_A \mid \Lambda_1) \mid \Lambda_2) = \varphi \circ E(\chi_A \mid \Lambda_2),$$

deci după 5

$$-\int \chi_A \log E(\chi_A \mid \Lambda_1)\, d\mu = \int \varphi \circ E(\chi_A \mid \Lambda_1)\, d\mu =$$

$$= \int E(\varphi \circ E(\chi_A \mid \Lambda_1) \mid \Lambda_2)\, d\mu \leqslant \int \varphi \circ E(\chi_A \mid \Lambda_2)\, d\mu = -\int \chi_A \log E(\chi_A \mid \Lambda_2)\, d\mu. \text{ S.}$$

Din 5 rezultă că dacă $\mathcal{A}$, Λ sînt subtriburi ale lui Σ, $\mathcal{A}$ finit, atunci $I(\mathcal{A} \mid \Lambda) \in L^1(\Sigma)$. „Valoarea medie" a lui $I(\mathcal{A} \mid \Lambda)$ o numim entropia lui $\mathcal{A}$ în raport cu Λ:

$$H(\mathcal{A} \mid \Lambda) = \int I(\mathcal{A} \mid \Lambda)\, d\mu.$$

Notăm pe $H(\mathcal{A} \mid \overset{1}{0})$ simplu $H(\mathcal{A})$. Propoziţiile 1, 2, 3 şi 4 se transpun imediat pentru entropie. În plus, din 6 rezultă imediat că:

7. *Dacă* $\mathcal{A}$, Λ_1, Λ_2 *sînt subtriburi ale lui* Σ, $\mathcal{A}$ *finit şi* $\Lambda_1 \supset \Lambda_2$, *atunci*

$$H(\mathcal{A} \mid \Lambda_1) \leqslant H(\mathcal{A} \mid \Lambda_2).$$

Exemplul din paragraful III ne sugerează următoarea propoziţie:

8. *Dacă* $\mathcal{A}$, Λ *sînt subtriburi ale lui* Σ, $\mathcal{A}$ *finit iar* Λ *numărabil generat, atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente*:

— $\mathcal{A}$ şi Λ sînt independente;

— $I(\mathcal{A} \mid \Lambda) = I(\mathcal{A})$;

— $H(\mathcal{A} \mid \Lambda) = H(\mathcal{A})$.

D. Într-adevăr, dacă $\mathcal{A}$ şi Λ sînt independente, după IV.8 $I(\mathcal{A} \mid \Lambda) = I(\mathcal{A})$. Evident, afirmaţia a doua implică pe a treia. Presupunem acum că $H(\mathcal{A} \mid \Lambda) = H(\mathcal{A})$. Dacă $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$, după 6, pentru orice i şi $C \in \Lambda$,

$$-\int \chi_{A_i} \log E(\chi_{A_i} \mid \Lambda)\, d\mu = -\int \chi_{A_i} \log E(\chi_{A_i} \mid \overset{1}{0})\, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant -\int \chi_{A_i} \log E(\chi_{A_i} \mid \{C, \complement C\})\, d\mu \leqslant -\int \chi_{A_i} \log E(\chi_{A_i} \mid \Lambda)\, d\mu.$$

Aplicînd formula (2) din paragraful IV lui $E(\chi_{A_i} \mid \overset{1}{0})$ şi $E(\chi_{A_i} \mid \{C, \complement C\})$, obţinem

$$\mu(A_i \cap C)\log\frac{\mu(A_i\cap C)}{\mu(C)} + \mu(A_i\cap\complement C)\log\frac{\mu(A_i\cap\complement C)}{\mu(\complement C)} =$$

$$= \mu(A_i)\log\frac{\mu(A_i)}{\mu(X)},$$

adică

$$\mu(A_i \cap C)\log\frac{\mu(A_i\cap C)}{\mu(A_i)} + \mu(A_i\cap\complement C)\log\frac{\mu(A_i\cap\complement C)}{\mu(A_i)} =$$

$$= \mu(A_i\cap C)\log\frac{\mu(C)}{\mu(X)} + \mu(A_i\cap\complement C)\log\frac{\mu(\complement C)}{\mu(X)}.$$

Excludem cazurile triviale $\mu(A_i\cap C) = 0$, $\mu(A_i\cap\complement C) = 0$, cînd $C = \emptyset$ respectiv $C = X$. Punînd $\alpha = \mu(A_i \cap C)$, $\beta = \mu(A_i \cap \complement C)$ şi $f(t) = \alpha\log t + \beta\log(1-t)$, egalitatea de mai sus se scrie

$$f\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) = f\left(\frac{\mu(C)}{\mu(X)}\right),$$

Însă $f'(t) = \dfrac{\log e}{t\cdot(1-t)}\cdot[\alpha - (\alpha+\beta)t]$, deci f îşi atinge maximul pe $(0, 1)$ în $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$. Prin urmare

$$\frac{\mu(C)}{\mu(X)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{\mu(A_i\cap C)}{\mu(A_i)}.$$

Cum i şi $C \in \Lambda$ au fost arbitrare, $\mathcal{A}$ şi Λ sînt independente. S.

Fie $\mathcal{F}$ o familie de funcţii măsurabile pe X. Spunem că aceasta este uniform integrabilă dacă

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\{|f|\geqq t\}}|f|\,d\mu = 0$$

uniform în raport cu $f \in \mathcal{F}$. Evident, în acest caz funcţiile din $\mathcal{F}$ sînt integrabile. Se verifică uşor că dacă un şir uniform integrabil converge aproape peste tot, atunci el converge în $L^1(\Sigma)$.

9. *Dacă* $\mathcal{A}$ *este un subtrib finit al lui* Σ, *familia funcţiilor* $\mathrm{I}(\mathcal{A} \mid \Lambda)$, *unde* Λ *trece prin toate subtriburile lui* Σ, *este uniform integrabilă.*

D. Fie $\mathcal{A} = \{ A_1, \dots, A_N \}$, $\alpha < \beta$, $C = \{ \alpha \leqslant \mathrm{I}(\mathcal{A} \mid \Lambda) < B \}$. Deoarece pe $A_i \cap C$ $E(\chi_{A_i} \mid \Lambda) \leqslant 2^{-\alpha}$, avem

$$\mu(A_i \cap C) = \int_{A_i \cap C} \chi_{A_i} \, d\mu \leqslant \int_{\{ E(\chi_{A_i} \mid \Lambda) \leqslant 2^{-\alpha} \}} \chi_{A_i} \, d\mu =$$

$$= \int_{\{ E(\chi_{A_i} \mid \Lambda) \leqslant 2^{-\alpha} \}} E(\chi_{A_i} \mid \Lambda) \, d\mu \leqslant 2^{-\alpha} \mu(X).$$

Astfel pentru orice i

$$\int_{A_i \cap C} \mathrm{I}(\mathcal{A} \mid \Lambda) \, d\mu \leqslant \beta \cdot 2^{-\alpha} \cdot \mu(X),$$

de unde

$$\int_{\{ \alpha \leqslant \mathrm{I}(\mathcal{A} \mid \Lambda) < \beta \}} \mathrm{I}(\mathcal{A} \mid \Lambda) \, d\mu \leqslant N \cdot \beta \cdot 2^{-\alpha} \mu(X).$$

Luînd în această inegalitate consecutiv

$$\alpha = t, \quad t+1, \dots$$

$$\beta = t+1, \quad t+2, \dots$$

şi adunînd, obţinem

$$\int_{\{ \mathrm{I}(\mathcal{A} \mid \Lambda) \geqslant t \}} \mathrm{I}(\mathcal{A} \mid \Lambda) \, d\mu \leqslant N \cdot \mu(X) \cdot \sum_{n \geqslant 0} \frac{t+n+1}{2^{t+n}} \to 0,$$

uniform în raport cu Λ, cînd $t \to \infty$. S.

10. *Fie* $\mathcal{A}$ *un subtrib finit al lui* Σ, (Λ_n) *un şir monoton de subtriburi şi* Λ_∞ *limita sa. Atunci* $\mathrm{I}(\mathcal{A} \mid \Lambda_n) \to \mathrm{I}(\mathcal{A} \mid \Lambda_\infty)$ *în* $L^1(\Sigma)$. *În particular,* $H(\mathcal{A} \mid \Lambda_n) \to H(\mathcal{A} \mid \Lambda_\infty)$.

D. Din propoziţiile IV.7 şi IV.9 rezultă că din orice subşir al lui $\mathrm{I}(A \mid \Lambda_n)$ se poate extrage un subşir aproape peste tot convergent la $\mathrm{I}(\mathcal{A} \mid \Lambda_\infty)$. Acesta însă după 9 converge în $L^1(\Sigma)$, deci $\mathrm{I}(\mathcal{A} \mid \Lambda_n)$ converge în $L^1(\Sigma)$ la $\mathrm{I}(\mathcal{A} \mid \Lambda_\infty)$. S.

În sfîrşit, demonstrăm o proprietate de convergenţă a entropiei :

11. *Fie* $\mathcal{A}_n = \{ A_{n1}, \dots, A_{nN} \}$ *un şir de subtriburi finite ale lui* Σ *astfel încît pentru orice* i, $\chi_{A_{ni}} \to \chi_{A_i}$ *în* $L^1(\Sigma)$ *şi* Λ *un subtrib al lui* Σ. *Notăm* $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$. *Atunci* $H(\mathcal{A}_n \mid \Lambda) \to H(\mathcal{A} \mid \Lambda)$.

D. După IV.2 pentru un i fixat din orice subşir al lui $\varphi \circ E(\chi_{A_{ni}} \mid \Lambda)$, unde φ este funcţia definită înaintea lui 5, se poate extrage un subşir aproape peste tot convergent la $\varphi \circ E(\chi_{A_i} \mid \Lambda)$. Cum φ este mărginită, acesta converge în $L^1(\Sigma)$, deci $\varphi\circ E(\chi_{A_{ni}} \mid \Lambda) \to \varphi\circ E(\chi_{A_i} \mid \Lambda)$ în $L^1(\Sigma)$. În particular, conform lui 5,

$$H(\mathcal{A}_n \mid \Lambda) = \sum_{i=1}^{N} \int \varphi\circ E(\chi_{A_{ni}} \mid \Lambda)\, d\mu \to \sum_{i=1}^{N} \int \varphi\circ E(\chi_{A_i} \mid \Lambda)\, d\mu = H(\mathcal{A} \mid \Lambda).\text{S.}$$

Comentarii. La întocmirea acestui paragraf am folosit [8] şi convorbirile cu C. Foiaş.

VI. INFORMAŢIE ŞI ENTROPIE A UNUI SUBTRIB NUMĂRABIL GENERAT

Căutăm să extindem definiţia informaţiei din paragraful V pentru subtriburi infinite.

Fie (X, Σ, μ) un spaţiu cu măsură finită. Introducem în mulţimea tuturor funcţiilor reale măsurabile pe X, care pot să ia şi valorile $-\infty$ şi $+\infty$, relaţia de ordine

$$f \leqslant g \Leftrightarrow f(x) \leqslant g(x) \text{ aproape peste tot.}$$

Fie Γ, Λ subtriburi ale lui Σ, Γ numărabil generat. Dacă familia funcţiilor $\mathrm{I}(\mathcal{A} \mid \Lambda)$, unde $\mathcal{A}$ trece prin toate subtriburile finite ale lui Γ, are cel mai mic majorant, punem

$$\mathrm{I}(\Gamma \mid \Lambda) = \sup_{\mathcal{A} \subset \Gamma \text{ finit}} \mathrm{I}(\mathcal{A} \mid \Lambda).$$

Acest cel mai mic majorant există totdeauna:

1. *Dacă* $\mathcal{A}_n \nearrow \Gamma$, *unde* $\mathcal{A}_n$ *sînt subtriburi finite, atunci* $\mathrm{I}(A_n \mid \Lambda)$ *converge aproape peste tot la o funcţie* f *şi pentru orice subtrib finit* $\mathcal{A}$ *al lui* Γ, $\mathrm{I}(\mathcal{A} \mid \Lambda) \leqslant f$.

D. Într-adevăr, după V.4 şirul $\mathrm{I}(\mathcal{A}_n \mid \Lambda)$ este crescător, deci $\mathrm{I}(\mathcal{A}_n \mid \Lambda) \nearrow f$ aproape peste tot. Fie $\mathcal{A}$ un subtrib finit al lui Γ. Conform propoziţiilor V. 4 şi V. 3,

$$\mathrm{I}(\mathcal{A} \mid \Lambda) \leqslant \mathrm{I}(\mathcal{A} \vee \mathcal{A}_n \mid \Lambda) = \mathrm{I}(\mathcal{A}_n \mid \Lambda) + \mathrm{I}(\mathcal{A} \mid \mathcal{A}_n \vee \Lambda).$$

Cum $\mathcal{A}_n \vee \Lambda \nearrow \Gamma \vee \Lambda$, după V. 10 $\mathrm{I}(\mathcal{A} \mid \Lambda) \leqslant f + \mathrm{I}(\mathcal{A} \mid \Gamma \vee \Lambda)$, deci după V.2 $\mathrm{I}(\mathcal{A} \mid \Lambda) \leqslant f$. S.

După V.4 această definiţie este compatibilă cu definiţia informaţiei unui subtrib finit. Analoaga propoziţiei V.4 este o consecinţă imediată a definiţiei. Propoziţia 1 ne dă şi o metodă de calcul pentru $\mathrm{I}(\Gamma \mid \Lambda)$: dacă $\mathcal{A}_n \nearrow \Gamma$, unde $\mathcal{A}_n$ sînt subtriburi finite, atunci $\mathrm{I}(\Gamma \mid \Lambda) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{I}(\mathcal{A}_n \mid \Lambda)$. Se verifică uşor că dacă $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots\}$, atunci

$$\mathrm{I}(\Gamma \mid \Lambda) = -\sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i} \log E(\chi_{A_i} \mid \Lambda).$$

Analog cu informaţia se defineşte entropia unui subtrib numărabil generat în raport cu un subtrib oarecare. Evident, are loc analoaga propoziţiei 1, care de data aceasta nu este necesară la asigurarea existenţei lui $H(\Gamma \mid \Lambda)$, ci doar la calculul ei. Din teorema lui Beppo Levi rezultă că

$$H(\Gamma \mid \Lambda) = \int \mathrm{I}(\Gamma \mid \Lambda)\, d\mu.$$

Remarcăm că $\mathrm{I}(\Gamma \mid \Lambda)$ este o funcţie măsurabilă pozitivă nu neapărat integrabilă şi $H(\Gamma \mid \Lambda)$ poate să fie şi $+\infty$.

La baza studiului informaţiei şi entropiei unui subtrib numărabil generat stă propoziţia 1 sub următoarea formă mai generală :

2. *Dacă* $\Gamma_n \nearrow \Gamma$, *unde* Γ_n, Γ *sînt subtriburi numărabil generate ale lui* Σ, *şi* Λ *este un subtrib al lui* Σ, *atunci*

$$\mathrm{I}(\Gamma_n \mid \Lambda) \nearrow \mathrm{I}(\Gamma \mid \Lambda),$$

$$H(\Gamma_n \mid \Lambda) \nearrow H(\Gamma \mid \Lambda).$$

D. Într-adevăr, dacă $\mathcal{A}_{ni} \nearrow \Gamma_n$, unde $\mathcal{A}_{ni}$ sînt finite, atunci, punînd

$$\mathcal{A}_m \bigvee_{\substack{n \leqslant m \\ i \leqslant m}} \mathcal{A}_{ni},$$

$\mathcal{A}_m$ este finit şi $\mathcal{A}_m \nearrow \Gamma$. Astfel

$$\mathrm{I}(\Gamma \mid \Lambda) = \lim_{m \to \infty} \mathrm{I}(\mathcal{A}_m \mid \Lambda).$$

Cum şirul $\mathrm{I}(\Gamma_n \mid \Lambda)$ este crescător, $\lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{I}(\Gamma_n \mid \Lambda)$ există şi evident

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{I}(\Gamma_n \mid \Lambda) \leqslant \mathrm{I}(\Gamma \mid \Lambda).$$

Pe de altă parte, pentru $n \leqslant m$, $i \leqslant m$, $\mathcal{A}_{ni} \subset \Gamma_n \subset \Gamma_m$, de unde $\mathcal{A}_m \subset \Gamma_m$, deci

$$\mathrm{I}(\mathcal{A}_m \mid \Lambda) \leqslant \mathrm{I}(\Gamma_m \mid \Lambda) \leqslant \lim_{n \to \infty} \mathrm{I}(\Gamma_n \mid \Lambda).$$

Prin urmare

$$\mathrm{I}(\Gamma \mid \Lambda) \leqslant \lim_{n \to \infty} \mathrm{I}(\Gamma_n \mid \Lambda).$$

Astfel

$$\mathrm{I}(\Gamma \mid \Lambda) = \lim_{n \to \infty} \mathrm{I}(\Gamma_n \mid \Lambda)$$

şi după teorema lui Beppo Levi

$$H(\Gamma \mid \Lambda) = \lim_{n \to \infty} H(\Gamma_n \mid \Lambda). \text{ S.}$$

Proprietăţile algebrice ale informaţiei şi entropiei unui subtrib numărabil generat se deduc imediat din analoagele lor pentru subtriburi finite şi propoziţia 2 :

3. *Dacă* Γ, Λ *sînt subtriburi ale lui* Σ, Γ *numărabil generat, și* $T : X \to X$ *este o transformare, atunci*

$$\mathrm{I}(\Gamma|\Lambda)\circ T = \mathrm{I}(T^{-1}\Gamma|\, T^{-1}\Lambda),$$

$$H(\Gamma|\Lambda) = H(T^{-1}\Gamma|\, T^{-1}\Lambda).$$

4. *Dacă* Γ, Λ *sînt subtriburi ale lui* Σ, Γ *numărabil generat, atunci următoarele afirmații sînt echivalente*:

$$- \Gamma \subset \Lambda;$$

$$- \mathrm{I}(\Gamma|\Lambda) = 0;$$

$$- H(\Gamma|\Lambda) = 0.$$

5. *Dacă* Γ_1, Γ_2, Λ *sînt subtriburi ale lui* Σ, Γ_1 *și* Γ_2 *numărabil generate, atunci*

$$\mathrm{I}(\Gamma_1 \vee \Gamma_2|\Lambda) = \mathrm{I}(\Gamma_2|\Lambda) + \mathrm{I}(\Gamma_1|\Gamma_2 \vee \Lambda),$$

$$H(\Gamma_1 \vee \Gamma_2|\Lambda) = H(\Gamma_2|\Lambda) + H(\Gamma_1|\Gamma_2 \vee \Lambda).$$

6. *Dacă* Γ_1, Γ_2, Γ_3 *sînt subtriburi numărabil generate ale lui* Σ $\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \Gamma_3$, *atunci*

$$\mathrm{I}(\Gamma_1|\Gamma_3) = \mathrm{I}(\Gamma_1|\Gamma_2) + \mathrm{I}(\Gamma_2|\Gamma_3),$$

$$H(\Gamma_1|\Gamma_3) = H(\Gamma_1|\Gamma_2) + H(\Gamma_2|\Gamma_3).$$

7. *Dacă* Γ, Λ_1, Λ_2 *sînt subtriburi ale lui* Σ, Γ *numărabil generat, și* $\Lambda_1 \supset \Lambda_2$, *atunci*

$$H(\Gamma|\Lambda_1) \leqslant H(\Gamma|\Lambda_2).$$

Următoarele două propoziții pun în evidență importanța subtriburilor de tip numărabil:

8. *Fie* Γ, Λ *subtriburi numărabil generate ale lui* Σ, $\Gamma \supset \Lambda$, *și* f *o funcție reală* Γ*-măsurabilă pe* X *astfel încît* $f < \mathrm{I}(\Gamma|\Lambda)$. *Atunci există un subtrib de tip numărabil* Δ *al lui* Γ *astfel încît*

$$f \leqslant \mathrm{I}(\Delta|\Lambda) \leqslant \mathrm{I}(\Gamma|\Lambda).$$

D. Fie α_i un șir de numere > 0, convergent la 0. Considerăm un șir $\mathcal{A}_{ik}$ de subtriburi finite ale lui Γ astfel încît $\mathcal{A}_{ik} \nearrow \Gamma$. Atunci $\mathrm{I}(\mathcal{A}_{ik}|\Lambda) \nearrow \mathrm{I}(\Gamma|\Lambda)$, deci există $E_1 \in \Gamma$ și k_1 astfel încît

$$\mu(E_1) \leqslant \alpha_1$$

și pe $\complement E_1$

$$f \leqslant \mathrm{I}(\mathcal{A}_{1k_1}|\Lambda) \leqslant \mathrm{I}(\Gamma|\Lambda).$$

Notăm

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}_{1k_1} \vee \{E_1, \complement E_1\}.$$

Atunci $E_1 \in \mathcal{B}_1$ şi pe $\complement E_1$

$$f \leqslant \mathrm{I}(\mathcal{B}_1 \mid \Lambda) \leqslant \mathrm{I}(\Gamma \mid \Lambda).$$

Punînd acum $\mathcal{A}_{2k} = \mathcal{A}_{1k} \vee \mathcal{B}_1$, există $E_2 \in \Gamma$, $E_2 \subset E_1$, şi k_2 astfel încît

$$\mu(E_2) \leqslant \alpha_2$$

şi pe $\complement E_2$

$$f \leqslant \mathrm{I}(\mathcal{A}_{2k_2} \mid \Lambda) \leqslant \mathrm{I}(\Gamma \mid \Lambda).$$

Notăm

$$\mathcal{B}_2 = \begin{cases} \mathcal{B}_1 & \text{pe } \complement E_1. \\ \mathcal{A}_{2k_2} \vee \{E_2, \complement E_2\} & \text{pe } E_1, \end{cases}$$

Atunci $E_2 \in \mathcal{B}_2$ şi pe $\complement E_2$

$$f \leqslant \mathrm{I}(\mathcal{B}_2 \mid \Lambda) \leqslant \mathrm{I}(\Gamma \mid \Lambda).$$

Continuînd procedeul, obţinem un şir crescător de subtriburi finite $\mathcal{B}_i$ ale lui Γ şi un şir descrescător de mulţimi E_i din Γ astfel încît :

— $\mu(E_i) \leqslant \alpha_i$;

— $E_i \in \mathcal{B}_i$;

— pe $\complement E_i$ $\mathcal{B}_{i+1} = \mathcal{B}_i$;

— pe $\complement E_i$ $f \leqslant \mathrm{I}(\mathcal{B}_i \mid \Lambda) \leqslant \mathrm{I}(\Gamma \mid \Lambda)$.

Fie restricţia lui $\mathcal{B}_i$ la $\complement E_i \{A_1, \ldots, A_{n_i}\}$. Avem

$$\mu\left(X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(X \setminus \bigcup_{n=1}^{n_i} A_n) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i) \leqslant \lim_{i\to\infty} \alpha_i = 0,$$

deci $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Punînd $\Delta = \{A_1, A_2, \ldots\}$, pentru orice i

pe $\complement E_i$ $\mathrm{I}(\Delta \mid \Lambda) = \mathrm{I}(\mathcal{B}_i \mid \Lambda)$, deci pe $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} \complement E_i$,

$$f \leqslant \mathrm{I}(\Delta \mid \Lambda) \leqslant \mathrm{I}(\Gamma \mid \Lambda). \text{ S.}$$

9. *Dacă* Γ *este un subtrib numărabil generat al lui* Σ *astfel încît* $H(\Gamma) < \infty$, *atunci* Γ *este de tip numărabil.*

D. Fie $A_1, A_2, \ldots$ atomii lui Γ. Dacă Γ nu este de tip numărabil, $B = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ este neneglijabilă. Conform propoziţiei IV.11, pentru orice N natural, B este reuniunea unei familii $\{B_1, \ldots, B_N\}$ de mulţimi din Γ, două cîte două disjuncte şi de măsură $\frac{\mu(B)}{N}$. Punînd

$$\mathcal{B} = \left\{ B_1, \ldots, B_N, \complement \bigcup_{n=1}^{N} B_n \right\},$$

$$H(\Gamma) \geqslant H(\mathcal{B}) \geqslant - \sum_{n=1}^{N} \mu(B_n) \log \frac{\mu(B_n)}{\mu(X)} =$$

$$= - N \frac{\mu(B)}{N} \log \frac{\mu(B)}{N\,\mu(X)} = - \mu(B) \log \frac{\mu(B)}{\mu(X)} + \mu(B) \log N.$$

Cum N a fost arbitrar, $H(\Gamma) = + \infty$. S.

Propoziţia următoare se demonstrează exact la fel ca propoziţia V.8 :

10. *Dacă* Γ, Λ *sînt subtriburi numărabil generate ale lui* Σ, Γ *cu entropie finită, atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente* :

— Γ *şi* Λ *sînt independente*;

— $\mathrm{I}(\Gamma \mid \Lambda) = \mathrm{I}(\Gamma)$;

— $H(\Gamma \mid \Lambda) = H(\Gamma)$.

Proprietatea de convergenţă a informaţiei se extinde doar pentru subtriburi de tip numărabil :

11. *Fie* Γ *un subtrib de tip numărabil al lui* Σ, (Λ_n) *un şir monoton de subtriburi şi* Λ_∞ *limita sa, astfel încît* $\sup\limits_{1 \leqslant n \leqslant \infty} H(\Gamma \mid \Lambda_n) < \infty$. *Atunci* $\mathrm{I}(\Gamma \mid \Lambda_n) \to \mathrm{I}(\Gamma \mid \Lambda_\infty)$ în $L^1(\Sigma)$.

D. Fie $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots\}$ şi $\varepsilon > 0$. După V.6 şi condiţia $\sup\limits_{1 \leqslant n \leqslant \infty} H(\Gamma \mid \Lambda_n) < \infty$, există un număr natural J astfel încît pentru $1 \leqslant n \leqslant \infty$,

$$- \sum_{j > J} \int \chi_{A_j} \log E(\chi_{A_j} \mid \Lambda_n)\, d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pe de altă parte, conform propoziţiei V.10, există N astfel încît pentru $n \geqslant N$,

$$\sum_{j \leqslant J} \int | \chi_{A_j} \log E(\chi_{A_j} \mid \Lambda_n) - \chi_{A_j} \log E(\chi_{A_j} \mid \Lambda_\infty) |\, d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Prin urmare pentru $n \geqslant N$,

$$\| \mathrm{I}(\Gamma \mid \Lambda_n) - \mathrm{I}(\Gamma \mid \Lambda_\infty) \|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j \leqslant J} \int | \chi_{A_j} \log E(\chi_{A_j} \mid \Lambda_n) - \chi_{A_j} \log E(\chi_{A_j} \mid \Lambda_\infty) |\, d\mu -$$

$$- \sum_{j > J} \int \chi_{A_j} \log E(\chi_{A_j} \mid \Lambda_n)\, d\mu - \sum_{j > J} \int \chi_{A_j} \log E(\chi_{A_j} \mid \Lambda_\infty)\, d\mu \leqslant \varepsilon. \text{ S.}$$

Convergența entropiilor are loc în condiții mai generale :

12. *Dacă* Γ *este un subtrib numărabil generat al lui* Σ, $\Lambda_n \nearrow \Lambda_\infty$ *și* $H(\Gamma \mid \Lambda_1) < \infty$, *atunci* $H(\Gamma \mid \Lambda_n) \searrow H(\Gamma \mid \Lambda_\infty)$.

D. Fie $\varepsilon > 0$ și $\mathcal{A}$ un subtrib finit al lui Γ astfel încît $H(\Gamma \mid \Lambda_1) - H(\mathcal{A} \mid \Lambda_1) \leqslant \varepsilon$. Atunci, conform propozițiilor 5 și 7,

$$H(\Gamma \mid \Lambda_n) - H(\mathcal{A} \mid \Lambda_n) = H(\Gamma \mid \mathcal{A} \vee \Lambda_n) \leqslant$$
$$\leqslant H(\Gamma \mid \mathcal{A} \vee \Lambda_1) = H(\Gamma \mid \Lambda_1) - H(\mathcal{A} \mid \Lambda_1) \leqslant \varepsilon,$$

oricare ar fi n. Cum șirul $H(\Gamma \mid \Lambda_n)$ este descrescător, $\lim\limits_{n \to \infty} H(\Gamma \mid \Lambda_n)$ există. Însă după V.10 $H(\mathcal{A} \mid \Lambda_n) \to H(\mathcal{A} \mid \Lambda_\infty)$, deci

$$\lim_{n \to \infty} H(\Gamma \mid \Lambda_n) - H(\Gamma \mid \Lambda_\infty) \leqslant \lim_{n \to \infty} H(\Gamma \mid \Lambda_n) - H(\mathcal{A} \mid \Lambda_\infty) =$$
$$= \lim_{n \to \infty} [H(\Gamma \mid \Lambda_n) - H(\mathcal{A} \mid \Lambda_n)] \leqslant \varepsilon,$$

ε fiind arbitrar,

$$\lim_{n \to \infty} H(\Gamma \mid \Lambda_n) \leqslant H(\Gamma \mid \Lambda_\infty).$$

Cealaltă inegalitate este evidentă. S.

13. *Dacă* Γ *este un subtrib numărabil generat al lui* Σ *și* $\Lambda_n \searrow \Lambda_\infty$, *atunci* $H(\Gamma \mid \Lambda_n) \nearrow H(\Gamma \mid \Lambda_\infty)$.

D. Fie $\mathcal{A}_k \nearrow \Gamma$, unde $\mathcal{A}_k$ sînt subtriburi finite. După 7

$$H(\mathcal{A}_k \mid \Lambda_n) \leqslant H(\Gamma \mid \Lambda_n) \leqslant H(\Gamma \mid \Lambda_\infty).$$

Șirul $H(\Gamma \mid \Lambda_n)$ fiind crescător, $\lim\limits_{n \to \infty} H(\Gamma \mid \Lambda_n)$ există, și după V.10, $H(\mathcal{A}_k \mid \Lambda_n) \to H(\mathcal{A}_k \mid \Lambda_\infty)$. Astfel

$$H(\mathcal{A}_k \mid \Lambda_\infty) \leqslant \lim_{n \to \infty} H(\Gamma \mid \Lambda_n) \leqslant H(\Gamma \mid \Lambda_\infty).$$

Aplicînd acum propoziția 2, obținem

$$\lim_{n \to \infty} H(\Gamma \mid \Lambda_n) = H(\Gamma \mid \Lambda_\infty). \text{ S.}$$

Comentarii. Se poate arăta că mulțimea tuturor funcțiilor reale măsurabile pe X, care pot să ia și valorile $-\infty$ și $+\infty$, cu ordinea introdusă la începutul paragrafului formează o latice completă cu proprietatea că orice familie de elemente din această latice are o subfamilie numărabilă cu același cel mai mic majorant (vezi de exemplu [2]). Astfel putem defini informația și entropia unui subtrib oarecare în raport cu un subtrib oarecare. Ignorînd în toate propozițiile din acest paragraf atributul „numărabil generat", ele rămîn adevărate. Și în următoarele două paragrafe am putea lucra cu subtriburi oarecare. Nu facem acest lucru deoarece cu subtriburi numărabil generate se lucrează mai ușor și scopul definiției informației și entropiei unui subtrib infinit este de a exprima entropia unei transformări prin entropia relativ la un subtrib crescător, pentru care subtriburile numărabil generate sînt suficiente.

VII. DENSITATEA INFORMAŢIONALĂ

Fie (X, Σ, μ) un spaţiu cu măsură finită. Uneori este avantajos ca în loc de informaţia unui subtrib numărabil generat Γ în raport cu un subtrib Λ să lucrăm cu funcţia

$$\mu(\Gamma \mid \Lambda) = 2^{-I(\Gamma \mid \Lambda)}.$$

Numim această funcţie densitatea informaţională a lui Γ în raport cu Λ. $\mu(\Gamma \mid \Lambda)$ este o funcţie măsurabilă şi $0 \leqslant \mu(\Gamma \mid \Lambda) \leqslant 1$. Pe $\mu(\Gamma \mid 0)$ o notăm simplu $\mu(\Gamma)$. Dacă $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, \}$,

$$\mu(\Gamma \mid \Lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i} E(\chi_{A_i} \mid \Lambda).$$

Proprietăţile informaţiei se transpun imediat pentru densitatea informaţională. Cu toate că nu le vom folosi pe toate, le enunţăm :

1. *Dacă* Γ, Λ *sînt subtriburi ale lui* Σ, Γ *numărabil generat, şi* $T : X \to X$ *este o transformare, atunci*

$$\mu(\Gamma \mid \Lambda) \circ T = \mu(T^{-1}\Gamma \mid T^{-1}\Lambda).$$

2. *Dacă* Γ, Λ *sînt subtriburi ale lui* Σ, Γ *numărabil generat, atunci* $\mu(\Gamma \mid \Lambda) = 1$ *dacă şi numai dacă* $\Gamma \subset \Lambda$.

3. *Dacă* Γ, Λ *sînt subtriburi numărabil generate ale lui* Σ, Γ *cu entropie finită, atunci* $\mu(\Gamma \mid \Lambda) = \mu(\Gamma)$ *dacă şi numai dacă* Γ *şi* Λ *sînt independente.*

4. *Dacă* Γ_1, Γ_2, Λ *sînt subtriburi ale lui* Σ, Γ_1 *şi* Γ_2 *numărabil generate, atunci*

$$\mu(\Gamma_1 \vee \Gamma_2 \mid \Lambda) = \mu(\Gamma_2 \mid \Lambda) \cdot \mu(\Gamma_1 \mid \Gamma_2 \vee \Lambda).$$

5. *Dacă* Γ_1, Γ_2, Γ_3 *sînt subtriburi numărabil generate ale lui* Σ $\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \Gamma_3$, *atunci*

$$\mu(\Gamma_1 \mid \Gamma_3) = \mu(\Gamma_1 \mid \Gamma_2)\, \mu(\Gamma_2 \mid \Gamma_3).$$

6. *Dacă* $\Gamma_n \nearrow \Gamma$, *unde* Γ_n, Γ *sînt subtriburi numărabil generate, şi* Λ *este un subtrib al lui* Σ, *atunci*

$$\mu(\Gamma_n \mid \Lambda) \searrow \mu(\Gamma \mid \Lambda).$$

7. *Fie* Γ, Λ *subtriburi numărabil generate ale lui* Σ, $\Gamma \supset \Lambda$, *şi* g *o funcţie pozitivă* Γ*-măsurabilă pe* X *astfel încît* $\mu(\Gamma \mid \Lambda) < g$. *Atunci există un subtrib de tip numărabil* Δ *al lui* Γ *astfel încît*

$$\mu(\Gamma \mid \Lambda) \leqslant \mu(\Delta \mid \Lambda) \leqslant g.$$

8. *Fie* Γ *un subtrib de tip numărabil al lui* Σ, (Λ_n) *un şir monoton de subtriburi şi* Λ_∞ *limita sa. Atunci* $\mu(\Gamma \mid \Lambda_n) \to \mu(\Gamma \mid \Lambda_\infty)$ *în* $L^1(\Sigma)$.

Demonstrăm acum şi o proprietate specifică densităţii informaţionale :

9. *Fie* Γ, Λ *subtriburi ale lui* Σ, Γ *numărabil generat, şi* f *o funcţie pozitivă din* $L^1(\Sigma)$. *Atunci*

$$\mu(\Gamma \mid \Lambda) \cdot E(f \mid \Gamma \vee \Lambda) \leqslant E(f \mid \Lambda).$$

D. După propoziţiile IV.7 şi 6 este suficient să considerăm cazul cînd Γ este finit. Fie $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_N\}$. Atunci conform propoziţiei IV.5,

$$E(f|\Gamma \vee \Lambda) = \sum_{i=1}^{N} \chi_{A_i} \frac{E(f\cdot\chi_{A_i}|\Lambda)}{E(\chi_{A_i}|\Lambda)} \leqslant \sum_{i=1}^{N} \chi_{A_i} \frac{E(f|\Lambda)}{\mu(\Gamma|\Lambda)} = \frac{E(f|\Lambda)}{\mu(\Gamma|\Lambda)},$$

deci

$$\mu(\Gamma|\Lambda)\cdot E(f|\Gamma \vee \Lambda) \leqslant E(f|\Lambda). \text{ S.}$$

Comentarii. Densitatea informaţională corespunde funcţiei $\mu(x;\xi,\eta) = \mu(C_\xi(x)|C_\eta(x))$ din [18]. Remarcăm că şi ea admite interpretări probabilistice şi, aşa cum am dezvoltat teoria funcţiei $I(\Gamma|\Lambda)$, se poate dezvolta teoria lui $\mu(\Gamma|\Lambda)$, independent de informaţie.

VIII. ENTROPIA UNEI TRANSFORMĂRI

Fie (X, Σ, μ) un spaţiu cu măsură finită şi $T: X \to X$ o transformare. În această lucrare pentru orice subtrib numărabil generat Γ al lui Σ şi $1 \leqslant m, n \leqslant \infty$ vom nota

$$^{m}\Gamma = \bigvee_{i=1}^{m} T^{-i}\Gamma,$$

$$\Gamma^{n} = \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{i}\Gamma,$$

$$^{m}\Gamma^{n} = {}^{m}\Gamma \vee \Gamma^{n} = \bigvee_{i=-m}^{n-1} T^{i}\Gamma.$$

Dacă lucrăm şi cu alte transformări, pentru evitarea confuziilor vom specifica transformarea în felul următor: $^{m}\Gamma_{T}$, Γ^{n}_{T}, $^{m}\Gamma^{n}_{T}$.

Notăm entropia lui T relativ la un subtrib numărabil generat Γ al lui Σ,

$$h(T, \Gamma) = H(\Gamma|^{\infty}\Gamma),$$

iar entropia lui T,

$$h(T) = \sup_{\Gamma} h(T, \Gamma),$$

unde Γ trece prin toate subtriburile numărabil generate ale lui Σ.

$h(T, \Gamma)$ exprimă cantitatea medie de informaţie furnizată de aflarea locului unei întîmplări în raport cu Γ în prezent, presupunînd că ştim ce loc în raport cu Γ a ocupat în trecut. $h(T)$ este cantitatea medie de informaţie maximă la care putem spera.

1. $$h(T) = \sup_{\mathcal{A}} h(T, \mathcal{A}),$$

unde $\mathcal{A}$ *trece prin toate subtriburile finite ale lui* Σ.

D. Într-adevăr,

$$\sup_{\mathcal{A}} H(\mathcal{A}\,|\,{}^{\infty}\mathcal{A}) \leqslant \sup_{\Gamma} H(\Gamma\,|\,{}^{\infty}\Gamma) = \sup_{\Gamma}\sup_{\mathcal{A}\subset\Gamma} H(\mathcal{A}\,|\,{}^{\infty}\Gamma) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\Gamma}\sup_{\mathcal{A}\subset\Gamma} H(\mathcal{A}\,|\,{}^{\infty}\mathcal{A}) = \sup_{\mathcal{A}} H(\mathcal{A}\,|\,{}^{\infty}\mathcal{A}).\ \text{S.}$$

Demonstrăm acum trei propoziţii fundamentale în studiul entropiei unei transformări:

2. *Fie* Γ, Δ *subtriburi numărabil generate ale lui* Σ *astfel încît*

$$-\ \textit{or}\ \ \Delta \subset \Gamma\ \ \textit{şi}\ \ H(\Gamma\,|\,{}^{\infty}\Delta) < \infty;$$

$$-\ \textit{or}\ \ \Gamma \subset \Delta\ \ \textit{şi}\ \ H(\Delta\,|\,{}^{\infty}\Gamma) < \infty.$$

Atunci

$$\frac{1}{n} H(\Gamma^{n}\,|\,{}^{\infty}\Delta) \to h(T,\ \Gamma).$$

D. Considerăm primul caz. Notăm $\Lambda_0 = {}^{\infty}\Delta$ şi $\Lambda_n = T^{-n}(\Gamma^{n} \vee {}^{\infty}\Delta)$, $n \geqslant 1$. Deoarece $\Lambda_n \nearrow {}^{\infty}\Gamma$, după VI.12,

$$H(\Gamma\,|\,\Lambda_n) \to H(\Gamma\,|\,{}^{\infty}\Lambda).$$

Pe de altă parte

$$H(\Gamma^{n}\,|\,{}^{\infty}\Delta) = \sum_{k=0}^{n} H(\Gamma\,|\,\Lambda_k),$$

deci

$$\frac{1}{n} H(\Gamma^{n}\,|\,{}^{\infty}\Delta) \to H(\Gamma\,|\,{}^{\infty}\Gamma).$$

Pentru demonstraţia convergenţei în cel de-al doilea caz folosim convergenţa în primul caz. Pe de o parte,

$$\overline{\lim}\,\frac{1}{n} H(\Gamma^{n}\,|\,{}^{\infty}\Delta) \leqslant \lim \frac{1}{n} H(\Gamma^{n}\,|\,{}^{\infty}\Gamma) = H(\Gamma\,|\,{}^{\infty}\Gamma),$$

iar pe de altă parte

$$\underline{\lim}\,\frac{1}{n} H(\Gamma^{n}\,|\,{}^{\infty}\Delta) = \underline{\lim}\left[\frac{1}{n} H(\Delta^{n}\,|\,{}^{\infty}\Delta) - \frac{1}{n} H(\Delta^{n}\,|\,\Gamma^{n} \vee {}^{\infty}\Delta)\right] \geqslant$$

$$\geqslant H(\Delta\,|\,{}^{\infty}\Delta) - \overline{\lim}\,\frac{1}{n} H(\Delta^{n}\,|\,\Gamma^{n} \vee {}^{\infty}\Gamma) = \underline{\lim}\left[\frac{1}{n} H(\Delta^{n}\,|\,{}^{\infty}\Gamma) -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{n} H(\Delta^{n}\,|\,\Gamma^{n} \vee {}^{\infty}\Gamma)\right] = \lim \frac{1}{n} H(\Gamma^{n}\,|\,{}^{\infty}\Gamma) = H(\Gamma\,|\,{}^{\infty}\Gamma).\ \text{S.}$$

O consecință imediată a propoziției 2 este că dacă Γ este un subtrib numărabil generat cu entropie finită al lui Σ, atunci

$$h(T,\ \Gamma) = \lim \frac{1}{n} H(\Gamma^n).$$

Este remarcabil că, folosind propoziția 1 și această formulă, putem defini entropia unei transformări doar cu ajutorul entropiei subtriburilor finite.

3. *Fie* Γ, Δ *subtriburi numărabil generate ale lui* Σ *astfel încît*

$$H(\Gamma \vee \Delta \mid {}^{\infty}\Gamma) < \infty.$$

Atunci

$$h(T,\ \Gamma \vee \Delta) - h(T,\ \Gamma) = H(\Delta \mid {}^{\infty}\Gamma^{\infty} \vee {}^{\infty}\Delta).$$

D. Conform propoziției 2,

$$h(T,\ \Gamma \vee \Delta) - h(T,\ \Gamma) = \lim \left[\frac{1}{n} H(\Gamma^n \vee \Delta^n \mid {}^{\infty}\Gamma \vee {}^{\infty}\Delta) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{n} H(\Gamma^n \mid {}^{\infty}\Gamma \vee {}^{\infty}\Delta) \right] = \lim \frac{1}{n} H(\Delta^n \mid {}^{\infty}\Gamma^n \vee {}^{\infty}\Delta).$$

Însă

$$H(\Delta^n \mid {}^{\infty}\Gamma^n \vee {}^{\infty}\Delta) = \sum_{k=1}^{n} H(\Delta \mid {}^{\infty}\Gamma^k \vee {}^{\infty}\Delta)$$

și după VI.12,

$$H(\Delta \mid {}^{\infty}\Gamma^k \vee {}^{\infty}\Delta) \to H(\Delta \mid {}^{\infty}\Gamma^{\infty} \vee {}^{\infty}\Delta),$$

deci

$$\lim \frac{1}{n} H(\Delta^n \mid {}^{\infty}\Gamma^n \vee {}^{\infty}\Delta) = H(\Delta \mid {}^{\infty}\Gamma^{\infty} \vee {}^{\infty}\Delta). \text{ S.}$$

4. *Fie* Γ, Δ, Θ *subtriburi numărabil generate ale lui* Σ *astfel încît*

$$\Gamma \subset \Delta,\ H(\Delta \vee \Theta \mid {}^{\infty}\Delta) < \infty.$$

Atunci

$$H(\Gamma \mid {}^{\infty}\Delta \vee T^{-n}\, {}^{\infty}\Theta) \nearrow H(\Gamma \mid {}^{\infty}\Delta).$$

D. Evident, șirul $H(\Gamma \mid {}^{\infty}\Delta \vee T^{-n}\, {}^{\infty}\Theta)$, este crescător, deci are limită. Presupunem că $\Gamma = \Delta$. Deoarece

$$\sum_{k=0}^{n-1} H(\Delta \mid {}^{\infty}\Delta \vee T^{-k}\, {}^{\infty}\Theta) = H(\Delta^n \mid {}^{\infty}\Delta \vee {}^{\infty}\Theta),$$

avem

$$\lim H(\Delta \mid {}^{\infty}\Delta \vee T^{-n}\, {}^{\infty}\Theta) = \lim \frac{1}{n} H(\Delta^n \mid {}^{\infty}\Delta \vee {}^{\infty}\Theta).$$

Aplicînd 2,

$$\lim H(\Delta \mid {}^{\infty}\Delta \vee T^{-n}\,{}^{\infty}\Theta) = H(\Delta \mid {}^{\infty}\Delta).$$

În general, folosind cazul precedent,

$$\lim H(\Gamma \mid {}^{\infty}\Delta \vee T^{-n}\,{}^{\infty}\Theta) =$$
$$= \lim H(\Delta \mid {}^{\infty}\Delta \vee T^{-n}\,{}^{\infty}\Theta) - \lim H(\Delta \mid \Gamma \vee {}^{\infty}\Delta \vee T^{-n}\,{}^{\infty}\Theta) \geqslant$$
$$\geqslant H(\Delta \mid {}^{\infty}\Delta) - H(\Delta \mid \Gamma \vee {}^{\infty}\Delta) = H(\Gamma \mid {}^{\infty}\Delta).$$

Cealaltă inegalitate este evidentă. S.

Primele două din aceste trei propoziţii vor fi utilizate la stabilirea unui şir de proprietăţi ale lui $h(T, \Gamma)$ şi $h(T)$, iar a treia va constitui un instrument de bază în paragraful următor.

5. *Dacă* Γ, Δ *sînt subtriburi numărabil generate cu entropie finită ale lui* Σ *astfel încît*

$$\Delta \subset {}^{\infty}\Gamma^{\infty},$$

atunci

$$h(T, \Delta) \leqslant h(T, \Gamma).$$

D. Într-adevăr, aplicînd 3 de două ori,

$$h(T, \Delta) \leqslant h(T, \Delta) + H(\Gamma \mid {}^{\infty}\Delta^{\infty} \vee {}^{\infty}\Gamma) = h(T, \Gamma \vee \Delta) =$$
$$= h(T, \Gamma) + H(\Delta \mid {}^{\infty}\Gamma^{\infty} \vee {}^{\infty}\Delta) = h(T, \Gamma). \text{ S.}$$

În particular, funcţia $h(T, \Gamma)$, definită pentru subtriburi numărabil generate cu entropie finită, este crescătoare.

6. *Pentru orice întreg* n,

$$h(T^{n}) = |n| \cdot h(T).$$

D. Propoziţia este evidentă pentru $n = 0$. Pentru orice subtrib finit $\mathcal{A}$ al lui Σ,

$$h(T, \mathcal{A}) = \lim \frac{1}{k} H(\mathcal{A}_{T}^{k}) = \lim \frac{1}{k} H(\mathcal{A}_{T^{-1}}^{k}) = h(T^{-1}, \mathcal{A}),$$

deci $h(t) = h(T^{-1})$. În sfîrşit, dacă $n \geqslant 1$,

$$nh(T, \mathcal{A}) = nH(\mathcal{A} \mid {}^{\infty}\mathcal{A}_{T}) = H(\mathcal{A}_{T}^{n} \mid {}^{\infty}\mathcal{A}_{T}) = H(\mathcal{A}_{T}^{n} \mid {}^{\infty}(\mathcal{A}_{T}^{n})_{T}^{n}) = h(T^{n}, \mathcal{A}_{T}^{n}),$$

şi cum $\mathcal{A}_{T}^{n}$ formează o familie cofinală de subtriburi finite ale lui Σ,

$$nh(T) = n \sup_{\mathcal{A}} h(T, \mathcal{A}) = \sup_{\mathcal{A}} h(T^{n}, \mathcal{A}_{T}^{n}) = h(T^{n}). \text{ S.}$$

7. *Dacă* $\Gamma_{n} \nearrow \Gamma$, *unde*, Γ_{n}, Γ *sînt subtriburi numărabil generate cu entropie finită, atunci*

$$h(T, \Gamma_{n}) \nearrow h(T, \Gamma).$$

D. Într-adevăr,

$$H(\Gamma_{n} \mid {}^{\infty}\Gamma) \leqslant H(\Gamma_{n} \mid {}^{\infty}\Gamma_{n}) = h(T, \Gamma_{n}) \leqslant h(T, \Gamma).$$

Deoarece $H(\Gamma_n|^{\infty}\Gamma) \nearrow H(\Gamma|^{\infty}\Gamma) = h(T, \Gamma)$,

$$\lim h(T, \Gamma_n) = h(T, \Gamma). \text{ S.}$$

Următoarele două propoziţii ne servesc la calculul lui $h(T)$:

8. *Dacă* $\Gamma_n \nearrow \Sigma$, *unde* Γ_n *sînt subtriburi numărabil generate cu entropie finită, atunci*

$$h(T, \Gamma_n) \nearrow h(T).$$

D. Într-adevăr, folosind 3, pentru orice subtrib finit $\mathcal{A}$ al lui Σ şi orice n,

$$h(T, \mathcal{A}) \leqslant h(T, \mathcal{A} \vee \Gamma_n) = h(T, \Gamma_n) + H(\mathcal{A}\,|\,{}^{\infty}\Gamma_n^{\infty} \vee {}^{\infty}\mathcal{A}).$$

Şirul $h(T, \Gamma_n)$ creşte, deci $\lim h(T, \Gamma_n)$ există, şi cum $H(\mathcal{A}\,|\,{}^{\infty}\Gamma_n^{\infty} \vee {}^{\infty}\mathcal{A}) \to$ $\to H(\mathcal{A}\,|\,\Sigma) = 0$,

$$h(T, \mathcal{A}) \leqslant \lim h(T, \Gamma_n).$$

$\mathcal{A}$ fiind arbitrar,

$$h(T) \leqslant \lim h(T, \Gamma_n).$$

Inegalitatea reciprocă este trivială. S.

9. *Dacă* Γ *este un subtrib numărabil generat cu entropie finită al lui* Σ *astfel încît*

$${}^{\infty}\Gamma^{\infty} = \Sigma,$$

atunci

$$h(T, \Gamma) = h(T).$$

D. Într-adevăr, după 5 pentru orice subtrib finit $\mathcal{A}$ al lui Σ, $h(T, \mathcal{A}) \leqslant h(T, \Gamma)$, deci $h(T) \leqslant h(T, \Gamma) \leqslant h(T)$. S.

Notăm entropia unei scheme Bernoulli $p = (p_1, p_2, \ldots)$ prin $H(p)$.

10. $H(p) = -\sum_{i=1}^{\infty} p_i \log p_i$.

D. Cu notaţiile din paragraful I, $H(p)$ este tocmai $h(P)$. Fie

$$A_i = \{\xi = (x_n) \mid x_0 = \omega_i\}$$

şi

$$\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots\}.$$

Deoarece Γ şi ${}^{\infty}\Gamma$ sînt independente,

$$h(P, \Gamma) = H(\Gamma|^{\infty}\Gamma) = H(\Gamma) = -\sum_{i=1}^{\infty} p_i \log p_i.$$

Dacă $H(\Gamma) < \infty$, cum ${}^{\infty}\Gamma^{\infty} = \Sigma$, după 9 $h(P) = h(P, \Gamma)$.

Dacă $H(\Gamma) = \infty$, $h(P) \geqslant h(P, \Gamma) = \infty$, deci $h(P) = h(P, \Gamma)$.

În ambele cazuri $h(P) = -\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i \log p_i \cdot$S.

Iată în sfîrşit legătura entropiei cu scufundarea:

11. *Fie* (X_1, Σ_1, μ_1), (X_2, Σ_2, μ_2) *spaţii cu măsură finită şi* T_1, T_2 *transformări respectiv în* X_1, X_2. *Dacă* T_2 *se scufundă în* T_1, *atunci*

$$h(T_2) \leqslant h(T_1).$$

D. Fie $V : L^1(X_2, \Sigma_2, \mu_2) \to L^1(X_1, \Sigma_1, \mu_1)$ un operator liniar care realizează scufundarea. Pentru $A \in \Sigma_2$, $V\chi_A$ este o funcţie caracteristică, deci există $\tau A \in \Sigma_1$ astfel încît $V\chi_A = \chi_{\tau A}$. Se verifică uşor că aplicaţia $\tau : \Sigma_2 \to \Sigma_1$ are următoarele proprietăţi:

- $\tau(A_1 \cap A_2) = \tau A_1 \cap \tau A_2$;
- $\tau(A_1 \cup A_2) = \tau A_1 \cup \tau A_2$;
- $\tau(T_2 A) = T_1(\tau A)$;
- $\mu_1(\tau A) = \mu_2(A)$.

Fie acum $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_N\}$ un subtrib finit al lui Σ_2. Atunci $\mathcal{B} = \{\tau A_1, \ldots, \tau A_N, \complement \tau X_2\}$ este un subtrib finit al lui Σ_1. Deoarece $\mu_1(X_1) \geqslant \mu_1(\tau X_2) = \mu_2(X_2)$ şi τX_2 este invariantă la T_1 avem

$$H(\mathcal{A}^n_{T_2}) = -\sum_{i_0, \ldots, i_{n-1}} \mu_2(A_{i_0} \cap \ldots \cap T_2^{n-1} A_{i_{n-1}}) \log \frac{\mu_2(A_{i_0} \cap \ldots \cap T_2^{n-1} A_{i_{n-1}})}{\mu_2(X_2)} \leqslant$$

$$\leqslant -\sum_{i_0, \ldots, i_{n-1}} \mu_1(\tau A_{i_0} \cap \ldots \cap T_1^{n-1} \tau A_{i_{n-1}}) \log \frac{\mu_1(\tau A_{i_0} \cap \ldots \cap T_1^{n-1} \tau A_{i_{n-1}})}{\mu_1(X_1)} \leqslant$$

$$\leqslant H(\mathcal{B}^n_{T_1}).$$

Însă de aici

$$h(T_2, \mathcal{A}) = \lim \frac{1}{n} H(\mathcal{A}^n_{T_2}) \leqslant \lim \frac{1}{n} H(\mathcal{B}^n_{T_1}) = h(T_1, \mathcal{B}) \leqslant h(T_1),$$

şi cum $\mathcal{A}$ a fost arbitrar,

$$h(T_2) \leqslant h(T_1).\ \text{S.}$$

Remarcăm că dacă T_1 este ergodică şi $\mu_2(X_2) > 0$, atunci $\tau X_2 = X_1$, deci $\mu_1(X_1) = \mu_2(X_2)$. Astfel într-o eventuală reciprocă a propoziţiei 11, în care T_1 este presupusă ergodică, nu este restrictivă ipoteza $\mu_1(X_1) = \mu_2(X_2)$.

Din propoziţia 11 rezultă că entropia este un invariant de echivalenţă slabă.

Comentarii. Entropia unei transformări a fost introdusă în [9], [10] şi [16]. Introducerea ei constituie un moment crucial în dezvoltarea teoriei transformărilor, fiind primul invariant nealgebric de echivalenţă distinct de invarianţii spectrali. În paragraful X vom da exemplu de transformări spectral echivalente şi cu entropii diferite. Propoziţiile 2, 3 şi 4 sînt expuse după [15].

IX. SUBTRIBUL PINSKER

Fie (X, Σ, μ) un spaţiu cu măsură finită şi $T : X \to X$ o transformare. În acest paragraf vom presupune că Σ este numărabil generat.

Definim

$$\Pi(T) = \{A \mid A \in \Sigma,\, h(T, \{A, \complement A\}) = 0\}.$$

1. $\Pi(T)$ *este un subtrib al lui* Σ *şi pentru orice subtrib cu entropie finită* Γ *al lui* Σ,

$$\Gamma \subset \Pi(T) \Leftrightarrow h(T, \Gamma) = 0.$$

D. Evident, $X \in \Pi(T)$ şi dacă $A \in \Pi(T)$, atunci $\complement A \in \Pi(T)$. Fie $A, B \in \Pi(T)$, $\mathcal{A} = \{A, \complement A\}$ şi $\mathcal{B} = \{B, \complement B\}$. După VIII. 3,

$$h(T, \{A \cup B, \complement(A \cup B)\}) \leqslant h(T, \mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = h(T, \mathcal{A}) + H(\mathcal{B} \mid {}^{\infty}\mathcal{A}^{\infty} \vee {}^{\infty}\mathcal{B}) \leqslant$$

$$\leqslant h(T, \mathcal{A}) + h(T, \mathcal{B}) = 0,$$

deci $A \cup B \in \Pi(T)$. Fie acum (A_i) un şir crescător de mulţimi din $\Pi(T)$,

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ \mathcal{A}_i = \{A_i, \complement A_i\},\ \mathcal{B}_n = \bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i \text{ şi } \mathcal{A} = \{A, \complement A\}.$$

Ca şi mai sus,

$$h(T, \mathcal{B}_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n} h(T, \mathcal{A}_i) = 0.$$

Aplicînd pe VIII.3 de două ori,

$$h(T, \mathcal{A}) = H(\mathcal{A} \mid {}^{\infty}\mathcal{B}_n^{\infty} \vee {}^{\infty}\mathcal{A}) + h(T, \mathcal{B}_n) - H(\mathcal{B}_n \mid {}^{\infty}\mathcal{A}^{\infty} \vee {}^{\infty}\mathcal{B}_n),$$

şi cum $H(\mathcal{B}_n \mid {}^{\infty}\mathcal{A}^{\infty} \vee {}^{\infty}\mathcal{B}_n) \leqslant h(T, \mathcal{B}_n) = 0$,

$$h(T, \mathcal{A}) = H(\mathcal{A} \mid {}^{\infty}\mathcal{B}_n^{\infty} \vee {}^{\infty}\mathcal{A}).$$

Însă $H(\mathcal{A} \mid {}^{\infty}\mathcal{B}_n^{\infty} \vee {}^{\infty}\mathcal{A}) \searrow H(\mathcal{A} \mid \bigvee_{i=1}^{\infty} {}^{\infty}\mathcal{A}_i^{\infty} \vee {}^{\infty}\mathcal{A})$, deci

$$h(T, \mathcal{A}) = H(\mathcal{A} \mid \bigvee_{i=1}^{\infty} {}^{\infty}\mathcal{A}_i^{\infty} \vee {}^{\infty}\mathcal{A}).$$

După V. 11,

$$H(\mathcal{A} \mid \bigvee_{i=1}^{\infty} {}^{\infty}\mathcal{A}_i^{\infty} \vee {}^{\infty}\mathcal{A}) = \lim_{k\to\infty} H(\mathcal{A}_k \mid \bigvee_{i=1}^{\infty} {}^{\infty}\mathcal{A}_i^{\infty} \vee \mathcal{A}) \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}\, h(T, \mathcal{A}_k) = 0,$$

de unde rezultă că $A \in \Pi(T)$. Astfel $\Pi(T)$ este un trib.

Fie $\Gamma = \{A_1, A_2, \dots\}$ cu entropie finită. Dacă $\Gamma \subset \Pi(T)$, cum

$$h(T, \{A_1, \dots, A_n, \complement \bigcup_{i=1}^{n} A_i\}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} h(T, \{A_i, \complement A_i\}) = 0,$$

după VIII.7, $h(T, \Gamma) = 0$. Reciproc, dacă $h(T, \Gamma) = 0$, pentru orice n

$$h(T, \{A_n, \complement A_n\}) \leqslant h(T, \Gamma) = 0,$$

deci $A_n \in \Pi(T)$. S.

$\Pi(T)$ se numeşte subtribul Pinsker al lui Σ în raport cu T. Din propoziţia 1 rezultă că el este cel mai mare din subtriburile Λ ale lui Σ cu $T\Lambda = \Lambda$ pentru care restricţia lui T la Λ are entropie nulă.

Fie Λ un subtrib al lui Σ. Considerăm următoarele patru proprietăţi:

(i) Λ este crescător;

(ii) ${}^{\infty}\Lambda^{\infty} = \Sigma$;

(iii) $\bigcap_{i=-\infty}^{\infty} T^i \Lambda = \Pi(T)$;

(iv) $h(T, \Lambda) = h(T)$.

Cercetăm relaţiile între aceste proprietăţi:

2. *Dacă* Λ *satisface pe* (i), (ii), *atunci*

$$\bigcap_{i=-\infty}^{\infty} T^i \Lambda \supset \Pi(T).$$

D. Punem $\Lambda_0 = \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} T^i \Lambda$. Fie $\mathcal{A} = \{A, \complement A\} \subset \Pi(T)$.

Vom arăta că pentru orice $\mathcal{B} = \{B, \complement B\} \subset \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} T^i \Lambda$,

$$H(\mathcal{B} \mid \Lambda_0 \vee {}^{\infty}\mathcal{A}^{\infty}) = H(\mathcal{B} \mid \Lambda_0). \tag{1}$$

Atunci, conform propoziţiilor 1.2 şi V.11, (1) are loc pentru orice

$\mathcal{B} = \{B, \complement B\} \subset \bigvee_{i=-\infty}^{\infty} T^i \Lambda = \Sigma$, şi cum $\mathcal{A} \subset \Lambda_0 \vee {}^{\infty}\mathcal{A}^{\infty}$, după V.2, $\mathcal{A} \subset \Lambda_0$.

În concluzie, $\Pi(T) \subset \Lambda_0$.

Demonstrăm acum ceea ce ne-am propus.

Pentru orice întreg $p \geqslant 1$,

$$H(\mathcal{B} \mid \Lambda_0) \geqslant H(\mathcal{B} \mid \Lambda_0 \vee {}^{\infty}\boldsymbol{\mathcal{A}}_T^{\infty}) \geqslant H(\mathcal{B} \mid {}^{\infty}\mathcal{B}_{T^p} \vee \Lambda_0 \vee {}^{\infty}\boldsymbol{\mathcal{A}}_T^{\infty}). \tag{2}$$

Evident, Λ_0 este invariant la T, şi deoarece $\mathcal{A} \subset \Pi(T)$, după V.2, $\mathcal{A} \subset {}^{\infty}\boldsymbol{\mathcal{A}}_T$, deci ${}^{\infty}(\mathcal{A}_T^p)_{T^p} = {}^{\infty}\mathcal{A}_T = {}^{\infty}\mathcal{A}_T^{\infty}$. Aplicînd propoziţia VIII.4 cu T^p în loc de T, $\Gamma = \mathcal{B}$, $\Delta = \mathcal{B} \vee \Lambda_0$ şi $\Theta = \mathcal{A}_T^p$, obţinem

$$H(\mathcal{B} \mid {}^{\infty}\mathcal{B}_{T^p} \vee \Lambda_0 \vee {}^{\infty}\mathcal{A}_T^{\infty}) = H(\mathcal{B} \mid {}^{\infty}\mathcal{B}_{T^p} \vee \Lambda_0).$$

Astfel (2) se transformă în

$$H(\mathcal{B} \mid \Lambda_0) \geqslant H(\mathcal{B} \mid \Lambda_0 \vee {}^{\infty}\mathcal{A}_T^{\infty}) \geqslant H(\mathcal{B} \mid {}^{\infty}\mathcal{B}_{T^p} \vee \Lambda_0). \tag{3}$$

Însă $\mathcal{B} \subset \bigcup\limits_{i=-\infty}^{\infty} T^i \Lambda$, deci există i_0 cu $\mathcal{B} \subset T^{i_0} \Lambda$. Avem

$${}^{\infty}\mathcal{B}_{T^p} \vee \Lambda_0 \subset {}^{\infty}(T^{i_0} \Lambda)_{T^p} \vee \Lambda_0 \subset T^{-p+i_0} \Lambda \vee \Lambda_0 = T^{-p+i_0} \Lambda.$$

Astfel, cînd p trece prin 1, 2, 4, 8, ..., ${}^{\infty}\mathcal{B}_{T^p} \vee \Lambda_0$ descreşte şi

$$\Lambda_0 \subset \bigcap_p ({}^{\infty}\mathcal{B}_{T^p} \vee \Lambda_0) \subset \bigcap_p T^{-p+i_0} \Lambda = \Lambda_0,$$

deci trecînd la limită în (3),

$$H(\mathcal{B} \mid \Lambda_0) \geqslant H(\mathcal{B} \mid \Lambda_0 \vee {}^{\infty}\mathcal{A}_T^{\infty}) \geqslant H(\mathcal{B} \mid \Lambda_0) \cdot \mathbf{S}.$$

3. *Dacă $h(T) < \infty$ şi Λ satisface pe (i), (iv), atunci*

$$\bigcap_{i=-\infty}^{\infty} T^i \Lambda \subset \Pi(T).$$

D. Fie $\mathcal{A} = \{A, \complement A\} \subset \Lambda_0 = \bigcap\limits_{i=-\infty}^{\infty} T^i \Lambda$. Considerăm un şir de subtriburi finite $\mathcal{C}_n$ ale lui Λ astfel încît $\mathcal{C}_n \nearrow \Lambda$. Aplicînd pe VIII.3 de două ori,

$$h(T, \mathcal{A}) = H(\mathcal{A} \mid {}^{\infty}\mathcal{C}_n^{\infty} \vee {}^{\infty}\mathcal{A}) + h(T, \mathcal{C}_n) - H(\mathcal{C}_n \mid {}^{\infty}\mathcal{A}^{\infty} \vee {}^{\infty}\mathcal{C}_n).$$

Cum $\mathcal{A} \subset \Lambda_0$, $H(\mathcal{A} \mid {}^{\infty}\mathcal{C}_n^{\infty} \vee {}^{\infty}\mathcal{A}) \searrow H(\mathcal{A} \mid {}^{\infty}\Lambda^{\infty} \vee {}^{\infty}\boldsymbol{\mathcal{A}}) = 0$. Pe de altă parte, Λ_0 fiind invariant la T, ${}^{\infty}\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\infty} \subset \Lambda_0$, deci

$$h(T, \mathcal{C}_n) - H(\mathcal{C}_n \mid {}^{\infty}\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\infty} \vee {}^{\infty}\mathcal{C}_n) \leqslant h(T) - H(\mathcal{C}_n \mid \Lambda_0 \vee {}^{\infty}\mathcal{C}_n) \leqslant$$

$$\leqslant h(T) - H(\mathcal{C}_n \mid {}^{\infty}\Lambda) \to h(T) - h(T, \Lambda) = 0.$$

Astfel $h(T, \boldsymbol{\mathcal{A}}) = 0$, deci $\boldsymbol{\mathcal{A}} \subset \Pi(T)$. **S.**

Din propoziţiile 2 şi 3 rezultă că dacă $h(T) < \infty$, atunci proprietăţile (i), (ii), (iv) implică pe (iii).

Demonstrăm acum rezultatul principal din acest paragraf :

Teorema lui V. A. Rohlin şi Ya. G. Sinai. *Fie* (X, Σ, μ) *un spaţiu cu măsură finită astfel încît* Σ *este numărabil generat şi* $T : X \to X$ *o transformare. Atunci există un subtrib* Λ *al lui* Σ *care satisface pe* (*i*), (*ii*), (*iii*), (*iv*),

D. Fie $\mathcal{C}_n \nearrow \Sigma$, $\mathcal{C}_n$ finite, şi $n_1 < n_2 < \ldots$ întregi.

Punem

$$\Gamma_p = \bigvee_{i=1}^{p} T^{-n_i} \mathcal{C}_i, \; \Gamma = \bigvee_{p=1}^{\infty} \Gamma_p = \bigvee_{i=1}^{\infty} T^{-n_i} \mathcal{C}_i, \; \Lambda = {}^{\infty}\Gamma.$$

Evident, Λ este crescător şi ${}^{\infty}\Lambda^{\infty}$ conţine pe orice $\mathcal{C}_i$, deci (i) şi (ii) sînt satisfăcute.

Putem alege pe $n_1, n_2, \ldots$ astfel ca

$$\lim_{p \to \infty} [h(T, \Gamma_p) - H(\Gamma_p \mid {}^{\infty}\Gamma)] = 0. \tag{4}$$

Pentru aceasta facem alegerea astfel încît pentru $p < q$,

$$H(\Gamma_p \mid {}^{\infty}\Gamma_{q-1}) - H(\Gamma_p \mid {}^{\infty}\Gamma_q) \leqslant \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{2^{q-p}}. \tag{5}$$

Presupunînd că $n_1, \ldots, n_{q-1}$ sînt alese, alegem pe n_q astfel încît (5) să aibă loc pentru $p = 1, \ldots, q - 1$. O astfel de alegere este posibilă, deoarece după propoziţia VIII.4, pentru orice $p < q$

$$\lim_{n \to \infty} H(\Gamma_p \mid {}^{\infty}\Gamma_{q-1} \vee T^{-n}\, {}^{\infty}\mathcal{C}_q) = H(\Gamma_p \mid {}^{\infty}\Gamma_{q-1}).$$

Din propoziţia 2 rezultă că $\bigcap_{i=-\infty}^{\infty} T^i \Lambda \supset \Pi(T)$. Arătăm că are loc şi incluziunea inversă :

Fie $\mathcal{A} = \{A, \complement A\} \subset \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} T^i \Lambda$. Aplicînd pe VIII.3 de două ori,

$$h(T, \mathcal{A}) = H(\mathcal{A} \mid {}^{\infty}\Gamma_p^{\infty} \vee {}^{\infty}\mathcal{A}) + h(T, \Gamma_p) - H(\Gamma_p \mid {}^{\infty}\mathcal{A}^{\infty} \vee {}^{\infty}\Gamma_p).$$

Cum ${}^{\infty}\Gamma_p^{\infty} \supset \mathcal{C}_p$, ${}^{\infty}\Gamma_p^{\infty} \vee {}^{\infty}\mathcal{A} \nearrow \Sigma$, deci

$$H(\mathcal{A} \mid {}^{\infty}\Gamma_p^{\infty} \vee {}^{\infty}\mathcal{A}) \searrow H(\mathcal{A} \mid \Sigma) = 0.$$

Pe de altă parte, $\bigcap_{i=-\infty}^{\infty} T^i \Lambda$ fiind invariant la T, ${}^{\infty}\mathcal{A}^{\infty} \subset \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} T^i \Lambda \subset \Lambda$, deci ${}^{\infty}\mathcal{A}^{\infty} \vee {}^{\infty}\Gamma_p \subset \Lambda = {}^{\infty}\Gamma$. Conform relaţiei (4),

$$h(T, \Gamma_p) - H(\Gamma_p \mid {}^{\infty}\mathcal{A}^{\infty} \vee {}^{\infty}\Gamma_p) \leqslant h(T, \Gamma_p) - H(\Gamma_p \mid {}^{\infty}\Gamma) \to 0.$$

În concluzie, $h(T, \mathcal{A}) = 0$, adică $\mathcal{A} \subset \Pi(T)$.

În sfîrşit arătăm că şi (iv) este satisfăcută :

Deoarece ${}^{\infty}\Gamma_p^{\infty} = {}^{\infty}\mathcal{C}_p^{\infty}$, după VIII.5

$$h(T, \Gamma_p) = h(T, \mathcal{C}_p),$$

iar cum $\mathcal{C}_p \nearrow \Sigma$, după VIII.8

$$h(T, \mathcal{C}_p) \nearrow h(T).$$

Astfel

$$h(T, \Gamma_p) \to h(T).$$

Pe de altă parte, $\Gamma_p \nearrow \Gamma$, de unde

$$H(\Gamma_p \mid {}^{\infty}\Gamma) \to H(\Gamma \mid {}^{\infty}\Gamma) = H(T\Lambda \mid \Lambda) = h(T, \Lambda).$$

Din (4) rezultă acum că $h(T) = h(T, \Lambda)$. S.

Propoziția următoare ne dă o metodă de a modifica un subtrib crescător Λ cu păstrarea acelor proprietăți din (i), (ii), (iii), (iv) pe care îi satisface :

4. *Dacă* Λ, Λ' *sînt subtriburi ale lui* Σ *astfel încît* $\Lambda \subset \Lambda' \subset T\Lambda$, *atunci* Λ' *este crescător, și dacă* Λ *satisface pe una din proprietățile* (*ii*), (*iii*), (*iv*), *atunci și* Λ' *o satisface.*

D. Într-adevăr, $\Lambda' \subset T\Lambda \subset T\Lambda'$. Pentru (ii) și (iii) afirmația este evidentă, iar pentru (iv) rezultă din egalitățile

$$h(T, \Lambda) = H(T\Lambda \mid \Lambda) = H(\Lambda' \mid \Lambda) + H(T\Lambda \mid \Lambda') =$$

$$= H(\Lambda' \mid \Lambda) + H(\Lambda \mid T^{-1}\Lambda') = H(\Lambda' \mid T^{-1}\Lambda') = h(T, \Lambda'). \text{ S.}$$

După o propoziție ajutătoare vom indica rolul subtribului Pinsker în studiul spectral al transformărilor :

5. *Dacă* Λ *este un subtrib crescător al lui* Σ *și* $\Lambda \neq T\Lambda$, *atunci* $L = L^2(T\Lambda) \ominus L^2(\Lambda)$ *este infinit-dimensional.*

D. Presupunînd contrariul, fie $\{e_1, \dots, e_N\}$ o bază a lui L. Se verifică ușor că dacă $\{B_1, \dots, B_M\}$ este un subtrib al lui Λ, atunci $e_i \cdot \chi_{B_j} \in L$, și cum pentru i fixat $e_i \cdot \chi_{B_j}, 1 \leqslant j \leqslant M$, sînt liniar independente, cel mult N sînt nenule. Astfel dacă $M > N^2$, există B_j pe care se anulează orice funcție din L.

Fie acum

$$\mathcal{F} = \{B \mid B \in \Lambda, \text{ pe } B \text{ se anulează orice funcție din } L\},$$

$$\alpha = \sup \{\mu(B) \mid B \in \mathcal{F}\},$$

$$(B_n) \text{ un șir de mulțimi din } \mathcal{F} \text{ cu } \mu(B_n) \to \alpha,$$

$$B_0 = \bigcup_n B_n.$$

Atunci $B_0 \in \mathcal{F}$ și $\mu(B_0) = \alpha$. Deoarece $\Lambda \neq T\Lambda$, $\complement B_0$ este neneglijabilă, și cum nu conține mulțime neneglijabilă din Λ pe care se anulează orice funcție din L, $\complement B_0 = A_1 \cup \dots \cup A_P$, unde $A_1, \dots, A_P$ sînt atomi doi cîte doi disjuncți în Λ și $P \leqslant N^2$.

Dacă pentru orice întreg $n \geqslant 1$, $A_1 \neq T^n A_1$, atunci $A_1, TA_1, \dots$ sînt două cîte două disjuncte, ceea ce contrazice faptul că $\mu(X) < \infty$. Astfel există $n_1 \geqslant 1$ cu proprietatea că A_1 este invariantă la T^{n_1}. Prin urmare A_1 este atom în $T^{n_1}\Lambda$, și cu atît mai mult în $T\Lambda$. Astfel funcțiile din $L^2(T\Lambda)$ sînt constante pe A_1, deci cele ortogonale la $L^2(\Lambda)$ se anulează pe A_1. În concluzie, $B_0 \cup A_1 \in \mathcal{F}$ şi $\mu(B_0 \cup A_1) = \mu(B_0) + \mu(A_1) > \alpha$, ceea ce ne contrazice. S.

6. *Dacă* $h(T) > 0$, *operatorul* U_T *în* $L^2(\Sigma) \ominus L^2(\Pi(T))$ *este spectral echivalent cu operatorul de înmulţire cu argumentul* ζ *în* $\bigoplus_{1}^{\infty} L^2(m)$, *m fiind măsura Lebesgue normalizată pe* C.

D. Fie Λ un subtrib al lui Σ ales conform teoremei lui Rohlin şi Sinai. Atunci

$$L^2(\Sigma) = L^2(\Pi(T)) \oplus \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} [L^2(T^{n+1}\Lambda) \ominus L^2(T^{n}\Lambda)],$$

adică, notînd $L = L^2(T\Lambda) \ominus L^2(\Lambda)$,

$$L^2(\Sigma) = L^2(\Pi(T)) \oplus \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} U_T^n L.$$

Astfel

$$L^2(\Sigma) \ominus L^2(\Pi(T)) = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} U_T^n L.$$

Cum $h(T, \Lambda) = h(T) > 0$, $\Lambda \neq T\Lambda$, deci după 5 L este infinit-dimensional. Fie $\{l_1, l_2, \ldots\}$ o bază ortonormală în L. Atunci $\{U_T^n l_i\}_{-\infty<n<\infty,\, i\geqslant 1}$, este o bază ortonormală în $\bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} U_T^n L$. Făcînd să-i corespundă lui $U_T^n l_i$, ζ^n din componenta a i-a a lui $\bigoplus_{1}^{\infty} L^2(m)$, obţinem un operator unitar $V: \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} U_T^n L \to \bigoplus_{1}^{\infty} L^2(m)$. Deoarece pentru orice n şi i

$$(VU_T)(U_T^n l_i) = V(U_T^{n+1} l_i) = (\zeta^{n+1})_i = \zeta \cdot (\zeta^n)_i = (\zeta V)(U_T^n l_i),$$

avem

$$VU_T = \zeta V,$$

deci V realizează echivalenţa spectrală dorită. S.

Propoziţia 6 reduce studiul spectral al transformărilor la studiul spectral al celor cu entropie nulă.

Comentarii. Subtribul Pinsker a fost introdus în [13], însă propoziţiile 2, 3 şi teorema lui Rohlin şi Sinai sînt demonstrate în [15]. Pentru propoziţia 6 vezi [14].

X. TRANSFORMĂRI KOLMOGOROV

Fie (X, Σ, μ) un spaţiu cu măsură finită astfel încît Σ este numărabil generat şi diferit de $\overset{1}{0}$.

Spunem că $T: X \to X$ este o transformare Kolmogorov dacă $\Pi(T) = \overset{1}{0}$.

1. *T este o transformare Kolmogorov dacă și numai dacă există un subtrib* Λ *al lui* Σ *astfel încît*

— Λ *este crescător,*

— ${}^{\infty}\Lambda^{\infty} = \Sigma$,

— $\bigcap\limits_{i=-\infty}^{\infty} T^i \Lambda = \overset{1}{0}$.

D. Necesitatea rezultă din teorema lui Rohlin și Sinai, iar suficiența din IX.2.S.

2. *Orice transformare Kolmogorov are spectru Lebesgue infinit.*

D. Într-adevăr, deoarece $\Pi(T) = \overset{1}{0} \neq \Sigma$, $h(T) > 0$, deci după IX.6, U_T în $L^2(\Sigma) \ominus L^2(\overset{1}{0})$ este spectral echivalent cu operatorul de înmulțire cu argumentul ζ în $\bigoplus\limits_{1}^{\infty} L^2(m)$. Pe de altă parte, U_T în $L^2(\overset{1}{0})$ este spectral echivalent cu identitatea în C.S.

De aici și din II.4 rezultă că:

3. *Orice transformare Kolmogorov este mixing.*

Următoarea propoziție ne dă exemple de transformări Kolmogorov:

4. *Schemele Bernoulli sînt transformări Kolmogorov.*

D. Fie $p = (p_1, p_2, \ldots)$ o schemă Bernoulli. Cu notațiile din paragraful I punem

$$A_i = \{\xi = (x_n) \mid x_0 = \omega_i\},$$

$$\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots\},$$

$$\Lambda = {}^{\infty}\Gamma.$$

Atunci Λ este crescător și ${}^{\infty}\Lambda^{\infty} = \Sigma$. Dacă $A \in \bigcap\limits_{i=-\infty}^{\infty} P^i \Lambda$ și $B \in {}^{k}\Gamma^{k}$ pentru un întreg $k \geqslant 1$, atunci

$$\mu(A \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B),$$

și cum ${}^{k}\Gamma^{k} \nearrow {}^{\infty}\Gamma^{\infty} = \Sigma$, egalitatea de mai sus are loc pentru orice $A \in \bigcap\limits_{i=-\infty}^{\infty} P^i \Lambda$ și $B \in \Sigma$. În particular, pentru orice $A \in \bigcap\limits_{i=-\infty}^{\infty} P^i \Lambda$, $\mu(A) = \mu(A)^2$, deci sau $\mu(A) = 0$, sau $\mu(A) = 1$. Astfel $\bigcap\limits_{i=-\infty}^{\infty} P^i \Lambda = \overset{1}{0}$ și după 1, P este o transformare Kolmogorov. S.

Putem da acum exemplu de transformări spectral echivalente și cu entropii diferite. Într-adevăr, după 2 schemele Bernoulli $p^2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ și $p^3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ sînt spectral echivalente și după VIII.10, $H(p^2) = \log 2 < \log 3 = H(p^3)$.

Se conjecturează că entropia este un invariant complet de echivalență pentru transformările Kolmogorov în spații cu măsură cu aceeași măsură totală. Nu se cunoaşte decît că există scheme Bernoulli distincte echivalente, de exemplu $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ şi $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$. Vom arăta că entropia este un invariant complet de echivalenţă slabă pentru scheme Bernoulli.

Comentarii. Transformările Kolmogorov au fost introduse în [9] sub numele de automorfisme cvasiregulate. Remarcăm că în [9] ele se definesc prin proprietatea din propoziţia 1. Echivalenţa acestei definiţii cu a noastră a fost arătată în [15]. Echivalenţa schemelor Bernoulli $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ şi $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$ este demonstrată în [11].

XI. TEOREMA LUI CRAMER

Pentru uşurarea expunerii în acest paragraf vom folosi un limbaj probabilistic :

Un spaţiu cu măsură $(Y, \mathcal{C}, P)$ astfel încît $P(Y) = 1$ se numeşte cîmp de probabilitate. Numim variabilă aleatoare pe Y o funcţie reală măsurabilă definită pe Y. Spunem că o variabilă aleatoare ξ pe Y ia valoarea x cu probabilitatea π dacă $P(\{\xi = x\}) = \pi$. ξ se numeşte simplă dacă există un număr finit de numere reale $x_1, \ldots, x_k$ astfel încît $P\left(\bigcup_{j=1}^{k} \{\xi = x_j\}\right) = 1$. În acest caz numărul $\sum_{j=1}^{k} x_j P(\{\xi = x_j\})$ se numeşte valoarea medie a lui ξ. Variabilele aleatoare simple $\xi_1, \ldots, \xi_n$ pe Y se numesc independente dacă pentru orice numere reale $x_1, \ldots, x_n$,

$$P(\{\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n\}) = P(\{\xi_1 = x_1\}) \ldots P(\{\xi_n = x_n\}).$$

Cu această pregătire demonstrăm

Teorema lui Cramer. *Fie* $\pi_1, \ldots, \pi_k \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{k} \pi_j = 1$, $x_1, \ldots, x_k$ *numere reale şi* $\eta > 0$. *Atunci există* $c > 0$ *cu următoarea proprietate* :

Dacă $(Y, \mathcal{C}, P)$ *este un cîmp de probabilitate,* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *variabile aleatoare simple independente pe* Y, *luînd valorile* $x_1, \ldots, x_k$ *cu probabilităţile* $\pi_1, \ldots, \pi_k$ şi $M = \sum_{j=1}^{k} x_j \pi_j$ *valoarea lor medie, atunci*

$$P\left(\left\{\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \geqslant M + \eta\right\}\right) \leqslant 2^{-cn}.$$

D. Evident, pentru orice h real există un cîmp de probabilitate $(Y_h, \mathcal{C}_h, P_h)$ şi variabile aleatoare simple independente $\xi_{h1}, \ldots, \xi_{hn}$ pe Y_h, care iau valorile $x_1, \ldots, x_k$ cu probabilităţile

$$\frac{\Pi_1 e^{hx_1}}{\sum_j \pi_j e^{hx_j}}, \ldots, \frac{\Pi_k e^{hx_k}}{\sum_j \pi_j e^{hx_j}}.$$

Atunci pentru orice x real

$$P(\{\xi_1 + \ldots + \xi_n = x\}) = \sum_{x_{j_1} + \ldots + x_{j_n} = x} P(\{\xi_1 = x_{j_1}, \ldots, \xi_n = x_{j_n}\}) =$$

$$= \sum_{x_{j_1} + \ldots + x_{j_n} = x} P(\{\xi_1 = x_{j_1}\}) \ldots P(\{\xi_n = x_{j_n}\}) =$$

$$= \sum_{x_{j_1} + \ldots + x_{j_n} = x} P_h(\{\xi_{h1} = x_{j_1}\}) \ldots P_h(\{\xi_{hn} = x_{j_n}\}) \frac{(\sum_j \pi_j e^{hx_j})^n}{e^{h(x_{j_1} + \ldots + x_{j_n})}} =$$

$$= e^{-hx} (\sum_j \pi_j e^{hx_j})^n P_h(\{\xi_{h1} + \ldots + \xi_{hn} = x\}).$$

Astfel

$$P\left(\left\{\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \geqslant M + \eta\right\}\right) = P(\{\xi_1 + \ldots + \xi_n \geqslant n(M + \eta)\}) \leqslant$$

$$\leqslant e^{-hn(M+\eta)} (\sum_j \pi_j e^{hx_j})^n P_h(\{\xi_{h1} + \ldots + \xi_{hn} \geqslant n(M + \eta)\}) \leqslant$$

$$\leqslant (e^{-h(M+\eta)} \sum_j \pi_j e^{hx_j})^n.$$

Punînd

$$f(h) = e^{-h(M+\eta)} \sum_j \pi_j e^{hx_j},$$

remarcăm că f depinde doar de $\pi_1, \ldots, \pi_k$, $x_1, \ldots, x_k$, η, deci ceea ce urmează nu depinde de realizarea variabilelor aleatoare $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Cum $f'(0) = -\eta < 0$, pe o vecinătate V a lui 0 $f' < 0$, deci pe V f descreşte strict. Însă $f(0) = 1$, de unde rezultă că există h_0 astfel încît $f(h_0) < 1$. Atunci $f(h_0) = 2^{-c}$ cu $c > 0$. Această valoare c ne satisface : după calculele de mai sus

$$P\left(\left\{\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \geqslant M + \eta\right\}\right) \leqslant (f(h_0))^n = 2^{-cn}. \text{ S.}$$

Comentarii. Ceea ce am numit teorema lui Cramer este de fapt o formă mai slabă a rezultatului din [1].

XII. CINCI LEME

În acest paragraf expunem cinci propoziţii care sînt de fapt etape din demonstraţia teoremei centrale din această lucrare, teorema din paragraful XIII, dar care ar putea să fie folositoare şi în alte ocazii.

Fie (X, Σ, μ) un spaţiu cu măsură finită.

Lema informației. *Fie* $T : X \to X$ *o transformare ergodică,* Λ *un subtrib numărabil generat crescător al lui* Σ, $H < h(T, \Lambda)$ *și* $\alpha > 0$. *Notăm pentru orice* N *natural*

$$E_N = \left\{ \frac{\mathrm{I}(T^n \Lambda | \Lambda)}{n} \leqslant H \text{ pentru un } n \geqslant N \right\},$$

$$F_N = \{ E(\chi_{E_N} | \Lambda) \leqslant \alpha \}.$$

Atunci

$$\lim_{N \to \infty} \mu(F_N) = \mu(X).$$

D. Cum

$$\mathrm{I}(T^n \Lambda | \Lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{I}(T^{i-1} \Lambda | T^i \Lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{I}(T \Lambda | \Lambda) \circ T^{-i},$$

după teorema de convergență și ergodicitatea lui T

$$\frac{\mathrm{I}\, T^n \Lambda | \Lambda)}{n} \to H(T \Lambda | \Lambda) = h(T, \Lambda)$$

aproape peste tot. Remarcăm că această convergență are loc și dacă $h(T, \Lambda) = +\infty$. Astfel pentru orice $\varepsilon > 0$ începînd de un rang

$$\mu(E_N) \leqslant \alpha \varepsilon.$$

Pe de altă parte, cum $F_N \in \Lambda$,

$$\mu(E_N) \geqslant \mu(E_N \setminus F_N) = \int_{\complement F_N} \chi_{E_N} \, d\mu = \int_{\complement F_N} E(\chi_{E_N} | \Lambda) \, d\mu \geqslant \alpha \, \mu(\complement F_N).$$

Prin urmare, începînd de la un rang

$$\mu(\complement F_N) \leqslant \varepsilon,$$

$$\mu(F_N) \geqslant \mu(X) - \varepsilon. \text{ S.}$$

Lema densității informaționale. *Fie* $T : X \to X$ *o transformare ergodică,* Λ *un subtrib numărabil generat crescător al lui* Σ *astfel încît* $h(T, \Lambda), > 0$, *și* $\beta > 0$. *Notăm pentru orice* N *natural*

$$G_N = \{ E(\mu(T^n \Lambda | \Lambda) | \Lambda) \leqslant \beta \text{ pentru orice } n \geqslant N \}. \textit{ Atunci}$$

$$\lim_{N \to \infty} \mu(G_N) = \mu(X).$$

D. Am văzut în demonstrația lemei informației că

$$\frac{\mathrm{I}(T^n \Lambda | \Lambda)}{n} \to h(T, \Lambda)$$

aproape peste tot, deci obţinem succesiv următoarele convergenţe aproape peste tot:

$$I(T^n \Lambda \mid \Lambda) \nearrow +\infty,$$

$$\mu(T^n \Lambda \mid \Lambda) \searrow 0,$$

$$E(\mu(T^n \Lambda \mid \Lambda) \mid \Lambda) \searrow 0.$$

Din ultima rezultă afirmaţia noastră. S.

Fenomenul Darboux. *Fie* $\pi_1. \ldots, \pi_k \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{k} \pi_j = 1$, $\{A_1, \ldots, A_k\}$ *şi* Λ *subtriburi ale lui* Σ, $D \in \Sigma$ şi $\gamma > 0$ *astfel încît*

— $E(\chi_{A_1} \mid \Lambda) \geqslant \pi_1$, $E(\chi_{A_j} \mid \Lambda) \leqslant \pi_j$ pentru $j \geqslant 2$;

— $E(\chi_{A_1} \mid \Lambda \vee \{D, \complement D\}) \leqslant \pi_1 + \gamma$ pe D;

— *orice mulţime neneglijabilă din* Σ, *inclusă în* $\complement D$, *conţine o mulţime neneglijabilă din* Σ, *speranţa condiţionată a funcţiei caracteristice a căreia în raport cu* Λ *este* $\leqslant \dfrac{\gamma}{k-1}$.

Atunci există un subtrib $\{B_1, \ldots, B_k\}$ *al lui* Σ *astfel încît*

— $B_1 \subset A_1$, $B_1 \cap D = A_1 \cap D$, $B_j \supset A_j$ *pentru* $j \geqslant 2$,

— $\pi_1 \leqslant E(\chi_{B_1} \mid \Lambda) \leqslant \pi_1 + \gamma$;

$\pi_j - \gamma \leqslant E(\chi_{B_j} \mid \Lambda) \leqslant \pi_j$ *pentru* $j \geqslant 2$.

D. Înainte de toate, conform propoziţiei IV.5 pe D

$$E(\chi_{A_1} \mid \Lambda \vee \{D, \complement D\}) = \frac{E(\chi_{A_1 \cap D} \mid \Lambda)}{E(\chi_D \mid \Lambda)},$$

deci

$$E(\chi_{A_1 \cap D} \mid \Lambda) \leqslant (\pi_1 + \gamma)\, E(\chi_D \mid \Lambda) \leqslant \pi_1 + \gamma.$$

Astfel

$$A_1 \cap D \subset D \subset D_0 = \{E(\chi_{A_1 \cap D} \mid \Lambda) \leqslant \pi_1 + \gamma\} \in \Lambda$$

de unde

$$\int_{\complement D_0} E(\chi_{A_1 \cap D} \mid \Lambda)\, d\mu = \int_{\complement D_0} \chi_{A_1 \cap D}\, d\mu = 0,$$

deci $E(\chi_{A_1 \cap D} \mid \Lambda)$ se anulează în afara lui D_0. De aici rezultă că $D_0 = X$, adică pe întregul X

$$E(\chi_{A_1 \cap D} \mid \Lambda) \leqslant \pi_1 + \gamma.$$

Notăm

$$X_2 = A_2 \cup (A_1 \setminus D).$$

Atunci

$$E(\chi_{X_2} \mid \Lambda) = E(\chi_{A_2} \mid \Lambda) + E(\chi_{A_1} \mid \Lambda) - E(\chi_{A_1 \cap D} \mid \Lambda) =$$

$$= 1 - \sum_{j \neq 1,2} E(\chi_{A_j} \mid \Lambda) - E(\chi_{A_1 \cap D} \mid \Lambda) \geqslant 1 - \sum_{j \neq 1,2} \pi_j - \pi_1 - \gamma = \pi_2 - \gamma.$$

Fie

$$E_2 = \{ E (\chi_{X_2} | \Lambda) \leqslant \pi_2 \} \in \Lambda.$$

Pe $\complement E_2$

$$E (\chi_{A_2 \setminus E_2} | \Lambda) \leqslant \pi_2 < E (\chi_{X_2 \setminus E_2} | \Lambda).$$

Aplicînd teorema despre proprietatea lui Darboux, există $C_2 \in \Sigma$

$$A_2 \setminus E_2 \subset C_2 \subset X_2 \setminus E_2,$$

astfel încît pe $\complement\, E_2$

$$\pi_2 - \frac{\gamma}{k-1} \leqslant E (\chi_{C_2} | \Lambda) \leqslant \pi_2.$$

Punem

$$B_2 = (X_2 \cap E_2) \cup C_2.$$

Atunci :

$$- B_2 \supset (X_2 \cap E_2) \cup (A_2 \setminus E_2) \supset A_2 ;$$

$$- A_1 \cap B_2 \cap D \subset A_1 \cap [(X_2 \cap E_2) \cup (X_2 \setminus E_2)] \cap D =$$

$$= A_1 \cap X_2 \cap D = (A_1 \cup A_2 \cap D) \cup [A_1 \cap (A_1 \setminus D) \cap D] = \emptyset$$

$$\text{deci } (A_1 \setminus B_2) \cap D = A_1 \cap D.$$

Cum

$$E (\chi_{B_2} | \Lambda) = \begin{cases} E (\chi_{X_2} | \Lambda) & \text{pe} \quad E_2, \\ E (\chi_{C_2} | \Lambda) & \text{pe} \quad \complement E_2, \end{cases}$$

avem :

$$- \pi_2 - \gamma \leqslant E (\chi_{B_2} | \Lambda) \leqslant \pi_2 ;$$

$$- \text{pe } \complement E_2, \; E (\chi_{B_2} | \Lambda) \geqslant \pi_2 - \frac{\gamma}{k-1} ;$$

$$- \text{pe } E_2, E (\chi_{A_1 \cap B_2} | \Lambda) = E (\chi_{A_1 \cap B_2 \cap E_2} | \Lambda) =$$

$$= E (\chi_{A_1 \cap X_2 \cap E_2} | \Lambda) = E (\chi_{A_1 \cap X_2} | \Lambda) =$$

$$= E(\chi_{A_1 \setminus D} | \Lambda),$$

deci

$$E(\chi_{A_1 \setminus B_2} | \Lambda) = E (\chi_{A_1} | \Lambda) - E (\chi_{A_1 \cap B_2} | \Lambda) =$$

$$= E (\chi_{A_1} | \Lambda) - E (\chi_{A_1 \setminus D} | \Lambda) = E (\chi_{A_1 \cap D} | \Lambda) \leqslant \pi_1 + \gamma.$$

Considerăm acum pe $\{ A_1 \setminus B_2, B_2, A_3, \ldots, A_k \}$ şi repetăm raţionamentul, punînd în loc de A_1, A_2 respectiv pe $A_1 \setminus B_2$, A_3 etc.

În sfîrşit, primim pe $\{A_1 \setminus \bigcup_{i\geqslant 2} B_i, B_2, \dots, B_k\}$ şi mulţimile $E_j \in \Lambda$, $j \geqslant 2$, astfel încît pentru $j \geqslant 2$:

— $B_j \supset A_j$;

— $(A\setminus \bigcup_{i\geqslant 2} B_i) \cap D = A_1 \cap D$;

— $\pi_j - \gamma \leqslant E(\chi_{B_j} \mid \Lambda) \leqslant \pi_j$;

— pe $\complement E_j$, $E(\chi_{B_j} \mid \Lambda) \geqslant \pi_j - \frac{\gamma}{k-1}$;

— pe E_j, $E(\chi_{A_1\setminus \bigcup_{2\leqslant i\leqslant j} B_i} \mid \Lambda) \leqslant \pi_1 + \gamma$.

Astfel pe $\bigcap_{i\geqslant 2} \complement E_i$,

$$E(\chi_{A_1\setminus \bigcup_{i\geqslant 2} B_i} \mid \Lambda) = 1 - \sum_{i\geqslant 2} E(\chi_{B_i} \mid \Lambda) \leqslant$$

$$\leqslant 1 - \sum_{i\geqslant 2} \left(\pi_i - \frac{\gamma}{k-1}\right) = \pi_1 + \gamma,$$

iar pe fiecare E_j,

$$E(\chi_{A_1\setminus \bigcup_{i\geqslant 2} B_i} \mid \Lambda) \leqslant E(\chi_{A_1\setminus \bigcup_{2\leqslant i\leqslant j} B_i} \mid \Lambda) \leqslant \pi_1 + \gamma,$$

deci, punînd $B_1 = A_1 \setminus \bigcup_{i\geqslant 2} B_i$,

$$E(\chi_{B_1} \mid \Lambda) \leqslant \pi_1 + \gamma.$$

Cum

$$E(\chi_{B_1} \mid \Lambda) = 1 - \sum_{i\geqslant 2} E(\chi_{B_i} \mid \Lambda) \geqslant 1 - \sum_{i\geqslant 2} \pi_i = \pi_1,$$

$\{B_1, \dots, B_k\}$ ne satisface. S.

Fenomenul Cramer. *Fie* $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)$ *o schemă Bernoulli şi* $h > 0$. *Atunci există* δ_0, $d > 0$, $\delta_0 < \min_j \Pi_j$, *astfel încît pentru orice* $0 < \delta \leqslant \delta_0$, *punînd*

$$\varphi(\delta) = \max_j \log \frac{\pi_j}{\pi_j - \delta},$$

$$H = H(\pi) + h + \varphi(\delta),$$

următoarea propoziţie este adevărată:

Dacă $\mathcal{A}_i = \{A_i^1, \dots, A_i^k\}$ $1 \leqslant i \leqslant n$, *şi* Λ *sînt subtriburi ale lui* Σ, *iar* $K \in \Sigma$, *astfel încît pentru* $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant k$ pe K:

$$|E(\chi_{A_i^j} \mid \mathcal{A}_1 \vee \dots \vee \mathcal{A}_{i-1} \vee \Lambda) - \pi_j| \leqslant \delta,$$

atunci

$$E\left(\chi_{K\cap\left\{\frac{I(\mathcal{A}_1\vee\ldots\vee\mathcal{A}_n\mid\Lambda)}{n}\geqslant H-\frac{h}{2}\right\}}\mid\Lambda\right)\leqslant 2^{-dn}.$$

D. Căutăm să reducem propoziția noastră la teorema lui Cramer. Vom efectua întîi calculele, care ne vor sugera o alegere pentru δ_0 și d. Se va vedea că această alegere depinde doar de π și de h și putea să fie efectuată și înaintea calculelor, renunțînd însă la motivarea ei.

Notăm prin $[1, k]$ mulțimea numerelor naturale j, $1\leqslant j\leqslant k$, iar prin Y produsul cartezian a n astfel de mulțimi. Definim pe $[1, k]$ o măsură, atribuind lui j masa π_j și notăm prin P măsura produs pe Y. Obținem astfel un cîmp de probabilitate $(Y, \mathcal{C}, P)$, unde prin $\mathcal{C}$ am notat tribul tuturor părților lui Y. Notăm prin B_i^j mulțimea tuturor $(j_1, \ldots, j_n)$ cu $j_i = j$ și punem $\mathcal{B}_i = \{B_i^1, \ldots, B_i^k\}$. Atunci pentru orice i, $\mathcal{B}_i$ și $\mathcal{B}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{B}_{i-1}$ sînt independente, deci

$$I(\mathcal{C}) = I(\mathcal{B}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{B}_n) = \sum_{i=1}^{n} I(\mathcal{B}_i | \mathcal{B}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{B}_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} I(\mathcal{B}_i).$$

Considerăm aplicația $f: X \to Y$ care unui $x \in X$ îi asociază pe acel $(j_1, \ldots, j_n)$ pentru care $x \in A_1^{j_1} \cap \ldots \cap A_n^{j_n}$. Folosind inegalitățile din enunț, pentru $1 \leqslant i \leqslant n$ pe K

$$|I(\mathcal{A}_i | \mathcal{A}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{A}_{i-1} \vee \Lambda) - I(\mathcal{B}_i) \circ f| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} \chi_{A_i^j} \cdot \left| \log \frac{E(\chi_{A_i^j} | \mathcal{A}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{A}_{i-1} \vee \Lambda)}{\pi_j} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} \chi_{A_i^j} \cdot \varphi(\delta) = \varphi(\delta).$$

Cum $I(\mathcal{A}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{A}_n | \Lambda) = \sum_{i=1}^{n} I(\mathcal{A}_i | \mathcal{A}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{A}_{i-1} \vee \Lambda)$, pe K

$$(1) \qquad |I(\mathcal{A}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{A}_n | \Lambda) - \sum_{i=1}^{n} I(\mathcal{B}_i) \circ f| \leqslant n \circ \varphi(\delta)$$

Astfel, ținînd seamă de expresia lui H,

$$K \cap \left\{ \frac{I(\mathcal{A}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{A}_n | \Lambda)}{n} \geqslant H - \frac{h}{2} \right\} \subset$$
$$\subset K \cap \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} I(\mathcal{B}_i) \circ f}{n} \geqslant H - \frac{h}{2} - \varphi(\delta) \right\} =$$
$$= K \cap \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} I(\mathcal{B}_i) \circ f}{n} \geqslant H(\pi) + \frac{h}{2} \right\} = K \cap f^{-1} C,$$

unde am notat

$$C = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} I(\mathcal{B}_i)}{n} \geqslant H(\pi) + \frac{h}{2} \right\}.$$

Ca să putem utiliza teorema lui Cramer pentru scopul nostru, majorăm pe $E(\chi_{K \cap f^{-1} C} \mid \Lambda)$ cu o expresie în care figurează $P(C)$:

(1) se scrie și sub forma

$$| I(\mathcal{A}_1 \vee \dots \vee \mathcal{A}_n \mid \Lambda) - I(\mathcal{C}) \circ f \mid \leqslant n \cdot \varphi(\delta).$$

Astfel, notînd $A^{j_1 \dots j_n} = A_1^{j_1} \cap \dots \cap A_n^{j_n}$, pentru orice $(j_1, \dots, j_n)$ pe $K \cap A^{j_1 \dots j_n}$

$$| \log E(\chi_{A^{j_1 \dots j_n}} \mid \Lambda) - \log(\pi_{j_1} \dots \pi_{j_n}) | \leqslant n \cdot \varphi(\delta),$$

$$(2) \qquad \pi_{j_1} \dots \pi_{j_n} . \, 2^{-n\varphi(\delta)} \leqslant E(\chi_{A^{j_1 \dots j_n}} \mid \vee) \leqslant \pi_{j_1} \dots \pi_{j_n} \cdot 2^{n\varphi(\delta)}$$

Din (2) rezultă că pe $K \cap A^{j_1 \dots j_n}$,

$$E(\chi_{K \cap A^{j_1 \dots j_n}} \mid \Lambda) \leqslant \pi_{j_1} \dots \pi_{j_n} \cdot 2^{n\varphi(\delta)}.$$

Cum mulțimea tuturor punctelor în care această inegalitate are loc aparține lui Λ și conține pe $K \cap A^{j_1 \dots j_n}$, deci în afara ei $E(\chi_{K \cap A^{j_1 \dots j_n}} \mid \Lambda) = 0$, ea coincide cu X. Cu alte cuvinte, pe tot X

$$E(\chi_{K \cap A^{j_1 \dots j_n}} \mid \Lambda) \leqslant \pi_{j_1} \dots \pi_{j_n} \cdot 2^{n\varphi(\delta)}.$$

Sumînd după toate $(j_1, \dots, j_n) \in C$, obținem

$$E(\chi_{K \cap f^{-1} C} \mid \Lambda) \leqslant P(C) \cdot 2^{n \cdot \varphi(\delta)}.$$

Fie acum $c > 0$ corespunzător conform teoremei lui Cramer valorilor $x_j = -\log \pi_j$, $1 \leqslant j \leqslant k$, și $\eta = \frac{h}{2}$. Alegem pe δ_0, $0 < \delta_0 < \min\limits_j \pi_j$ astfel încît

$$\varphi(\delta_0) \leqslant \frac{c}{2}$$

și punem $d = \frac{c}{2}$. Atunci, cum variabilele aleatoare simple $I(\mathcal{B}_1), \dots, I(\mathcal{B}_n)$ sînt independente, iar valorile -log $\pi_1, \dots,$ - log π_k cu probabilitățile $\pi_1, \dots, \pi_k$ și valoarea lor medie este $H(\pi)$, avem

$$P(C) \leqslant 2^{-cn}.$$

După cele de mai sus

$$E\left(\chi_{K \cap \left\{ \frac{I(\mathcal{A}_1 \vee \dots \vee \mathcal{A}_n \mid \Lambda)}{n} \geqslant H - \frac{h}{2} \right\}} \mid \Lambda\right) \leqslant$$

$$\leqslant E(\chi_{K \cap f^{-1} C} \mid \Lambda) \leqslant P(C) \, 2^{n \cdot \varphi(\delta)} \leqslant 2^{-[c - \varphi(\delta_0)] n} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-dn}. \text{ S.}$$

Remarcăm că dacă $K \in \Lambda$, din (2) rezultă că pe K

$$E(\chi_{A}^{j_1 \ldots j_n} \mid \Lambda) \geqslant \pi_{j_1} \ldots \pi_{j_n} \, 2^{-n \cdot \varphi(\delta)},$$

oricare ar fi $(j_1, \ldots, j_n)$, deci pe K

$$\mu(\mathcal{A}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{A}_n \mid \Lambda) \geqslant \min_{j_1, \ldots, j_n} \pi_{j_1} \ldots \pi_{j_n} \cdot 2^{-n \cdot \varphi(\delta)}.$$

Lema de regularizare. *Fie* Γ, Λ *subtriburi ale lui* $\sum$, Λ *numărabil generat,* $\Gamma \supset \Lambda$, $f \in L^{\infty}(\sum)$, $0 \leqslant f \leqslant 1$, $L \in \Gamma$ *și* $\theta > 0$, *astfel încît pe* L

$$E(f \mid \Gamma) \geqslant \theta.$$

Atunci punînd

$$\overline{L} = L \cap \left\{ f \geqslant \frac{\theta}{2} \right\},$$

avem

$$E(\chi_L \mid \Lambda) \leqslant \frac{2}{\theta} E(\chi_{\overline{L}} \mid \Lambda).$$

D. După propoziția IV.7 este suficient să considerăm cazul cînd Λ este finit, caz care conform formulei (2) din paragraful IV se reduce la verificarea inegalității

$$\mu(L) \leqslant \frac{2}{\theta} \cdot \mu(\overline{L}).$$

Avem

$$f \cdot \chi_L = f \cdot \chi_{\overline{L}} + f \cdot \chi_{L \setminus \overline{L}},$$

deci

$$\int_L f \, d\mu = \int_{\overline{L}} f \, d\mu + \int_L f \cdot \chi_{L \setminus \overline{L}} \, d\mu \leqslant \mu(\overline{L}) + \frac{\theta}{2} \mu(L).$$

Pe de altă parte, cum $L \in \Gamma$,

$$\int_L f \, d\mu = \int_L E \; (f \mid \Lambda) \, d\mu \geqslant \theta \, \mu(L).$$

Astfel

$$\theta \cdot \mu(L) \leqslant \mu(\overline{L}) + \frac{\theta}{2} \cdot \mu(L),$$

$$\mu(L) \leqslant \frac{2}{\theta} \cdot \mu(\overline{L}) \, \mathrm{S}.$$

Această lemă a primit numele de lema de regularizare, fiindcă elimină inconvenientul că mulțimea $\left\{ f \geqslant \frac{\theta}{2} \right\}$ nu aparține neapărat lui Γ.

Într-adevăr, ea arată că luînd în locul mulțimii $\left\{f \geqslant \frac{\theta}{2}\right\}$ mulțimea $\{E(f \mid \Gamma) \geqslant \theta\} \in \Gamma$, pe o parte suficient de mare a acesteia $f \geqslant \frac{\theta}{2}$.

Comentarii. Lemele informației și a densității informaționale sînt de fapt 1° și 6° din demonstrația lemei de aproximare din [18]. Fenomenul Darboux corespunde lui 4°, iar fenomenul Cramer lui 2° și 3° din aceeași demonstrație. Lema de regularizare nu apare în acel context. S.

XIII. TEOREMA DE APROXIMARE

Scopul acestui paragraf este demonstrația unei teoreme care stă în centrul preocupărilor noastre, fiind de importanță primordială pentru demonstrația teoremei lui Sinai :

Teorema de aproximare. *Fie* (X, Σ, μ), *un spațiu cu măsură finită,* $T : X \rightarrow X$ *o transformare ergodică,* Λ *un subtrib numărabil generat crescător al lui* Σ, $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$ *o schemă Bernoulli cu* $H(\pi) < h(T, \Lambda)$ *și* $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_k\}$ *un subtrib al lui* $T\Lambda$ *astfel încît*

$$E(\chi_{B_1} \mid \Lambda) \geqslant \pi_1, E(\chi_{B_j} \mid \Lambda) \leqslant \pi_j \text{ pentru } j \geqslant 2.$$

Atunci pentru orice $\lambda, \varepsilon, \eta > 0$, *există un subtrib crescător* Λ' *al lui* Λ *cu* $h(T, \Lambda') = h(T, \Lambda)$ *și un subtrib* $\mathcal{B}' = \{B'_1 \ldots, B'_k\}$ *al lui* $T\Lambda'$ *astfel încît :*

$$- E(\chi_{B'_1} \mid \Lambda') \geqslant \pi_1, E(\chi_{B'_j} \mid \Lambda') \leqslant \pi_j \textit{ pentru } j \geqslant 2;$$

$$- \mu(\{\textit{ nu are loc } \pi_1 \leqslant E(\chi_{B'_1} \mid \Lambda') \leqslant \pi_1 + \lambda\}) \leqslant \varepsilon;$$

$$\mu(\{\textit{nu are loc } \pi_j - \lambda \leqslant E(\chi_{B'_j} \mid \Lambda') \leqslant \pi_j\}) \leqslant \varepsilon \textit{ pentru } j \geqslant 2;$$

$$- \mu(\{\textit{ nu are loc } \chi_{B'_1} \leqslant \chi_{B_1} \chi\}) \leqslant \eta;$$

$$\mu(\{\textit{ nu are loc } \chi_{B'_j} \geqslant \chi_{B_j}\}) \leqslant \eta \textit{ pentru } j \geqslant 2.$$

Dacă Λ *satisface una din condițiile* (*ii*), (*iii*) *din paragraful* IX, *și* Λ' *o satisface.*

Demonstrăm în patru etape : în prima etapă vom pregăti terenul pentru o construcție inductivă, în a doua vom efectua construcția, în a treia vom ajunge la niște concluzii care în a patra etapă ne vor furniza pe Λ' și pe $\mathcal{B}'$.

Prima etapă. Alegem pe $h > 0$ astfel încît

$$H(\pi) + h < h(T, \Lambda).$$

Fie δ_0, d asociate lui π și h conform fenomenului Cramer. Considerăm pe $0 < \delta \leqslant \delta_0$ astfel încît

$$H = H(\pi) + h + \varphi(\delta) < h(T, \Lambda).$$

Punem

$$\gamma = \min(\delta, \lambda)$$

şi

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{16 \cdot \mu(X)} \left(\frac{\gamma}{k-1}\right)^2.$$

După lema informaţiei putem alege un N_1 natural astfel încît

$$\mu(F_{N_1}) > 0.$$

Fie N_2 un număr natural cu proprietatea

$$\sum_{n=N_2+1}^{\infty} 2^{-dn} \leqslant \frac{\varepsilon}{4\,\mu(X)}.$$

Considerăm un număr natural l' astfel ca

$$\frac{h}{2} + \frac{1}{l'} \cdot \log\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\gamma}{k-1}\right)^2 (\min_j \pi_j - \gamma)\right] \geqslant 0$$

şi punem

$$l = \max(N_1, N_2, l').$$

Notăm

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{k-1}\right)^2 (\min_{j_1, \ldots, j_l} \pi_{j_1} \ldots \pi_{j_l} \cdot 2^{-l \cdot \varphi(\delta)})^2$$

şi folosind lema densităţii informaţionale, alegem pe N_3 astfel încît

$$\mu(F_{N_1} \cap G_{N_3}) > 0.$$

Deoarece $h(T, \Lambda) > 0$, Λ este infinit, deci conform propoziţiilor III.5 şi III.4 există $M \in \Lambda$ neneglijabilă astfel încît

$$M \subset F_{N_1} \cap G_{N_3},$$

$$\mu(M) \leqslant \frac{\eta}{N_3 - 1}$$

şi $M, TM, \ldots, T^{N_3+l-1} M$ sînt două cîte două disjuncte.

Etapa a doua. Fie $\mathscr{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$, Γ subtriburi ale lui $\sum$, iar $C \in \sum$. Spunem că perechea $(\mathscr{C}, \Gamma)$ este bună pe C dacă pe C

$$\pi_1 \leqslant E(\chi_{C_1} | \Gamma) \leqslant \pi_1 + \gamma,$$

$$\pi_j - \gamma \leqslant E(\chi_{C_j} | \Gamma) \leqslant \pi_j \text{ pentru } j \geqslant 2.$$

Punem

$$\Lambda_1 = \begin{cases} \Lambda & \text{pe } M, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ T^{N_3-2}\Lambda & \text{pe } T^{N_3-2} M, \\ T^{N_3-1}\Lambda & \text{pe rest.} \end{cases}$$

Atunci

$$T\Lambda_1 = \begin{cases} T\,\Lambda & \text{pe } TM, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ T^{N_3-1}\,\Lambda & \text{pe } T^{N_3-1}\,M, \\ T_{N_3}\,\Lambda \text{ pe rest, în particular pe } M, \text{ deci } \Lambda_1 & \end{cases}$$

este crescător. Aplicînd propoziția IX.4 de $N_3 - 1$ ori, obținem că $h(T, \Lambda_1) = h(T, \Lambda)$ și dacă Λ satisface una din condițiile (ii), (iii), și Λ_1 o satisface.

Pe M

$$\mu\,(T\,\Lambda_1 \mid \Lambda_1) = \mu\,(T^{N_3}\,\Lambda \mid \Lambda),$$

deci conform alegerii lui N_3 pe $M \subset G_{N_3}$,

$$E\,(\mu\,(T\,\Lambda_1 \mid \Lambda_1) \mid \Lambda_1) = E\,(\mu\,(T^{N_3}\,\Lambda \mid \Lambda) \mid \Lambda) \mid \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{k-1}\right)^2.$$

După VII. 7 există un subtrib de tip numărabil $\Delta = \{A_1, A_2, \ldots\}$ al lui $T\,\Lambda_1$ astfel încît

$$\mu\,(\Delta \mid \Lambda_1) \leqslant \mu\,(T\,\Lambda_1 \mid \Lambda_1) + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{k-1}\right)^2,$$

de unde pe M

$$E\,(\mu\,(\Delta \mid \Lambda_1) \mid \Lambda_1) \leqslant \left(\frac{\gamma}{k-1}\right)^2.$$

Însă

$$E\,(\mu\,(\Delta \mid \Lambda_1) \mid \Lambda_1) = \sum_{i=1}^{\infty} (E\,(\chi_{A_i} \mid \Lambda_1))^2,$$

deci pentru orice i

$$E\,(\chi_{M \cap A_i} \mid \Lambda_1) \leqslant \frac{\gamma}{k-1}.$$

Cum $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} (M \cap A_i)$, orice mulțime neneglijabilă din $T\Lambda_1$ inclusă în M conține o mulțime neneglijabilă din $T\Lambda_1$, speranța condiționată a funcției caracteristice a căreia în raport cu Λ_1 este $\leqslant \frac{\gamma}{k-1}$. Punem

$$\mathcal{B}_0 = \begin{cases} \mathcal{B} & \text{pe } M, \\ \quad \cdots\cdots\cdots & \\ T^{N_3-2}\,\mathcal{B} & \text{pe } T^{N_3-2}\,M, \\ T^{X_3-1}\,\mathcal{B} & \text{pe rest.} \end{cases}$$

Atunci $\mathcal{B}_0 = \{B_{01}, \ldots, B_{0k}\} \subset T\,\Lambda_1$ și

$$E\,(\chi_{B_{01}} \mid \Lambda_1) \geqslant \pi_1,\ E\,(\chi_{B_{0j}} \mid \Lambda_1) \leqslant \pi_j \text{ pentru } j \geqslant 2,$$

deci fenomenul Darboux funcționează pe $(M,\ T\Lambda_1,\ \mu)$ cu $D = \emptyset$. Astfel există un subtrib $\mathcal{B}_1 = \{ B_{11}, \ldots , B_{1k} \}$ al lui $T\Lambda_1$ astfel încît :

— $E(\chi_{B_{11}} \mid \Lambda_1) \geqslant \pi_1, (E\chi_{B_{1j}} \mid \Lambda_1) \leqslant \pi_j$ pentru $j \geqslant 2$;

— pe $M_1 = M(\mathcal{B}_1, \Lambda_1)$ este bună ;

— $B_{11} \subset B_{01}, B_{1j} \supset B_{0j}$ pentru $j \geqslant 2$.

Presupunem acum că pentru $i \leqslant n$ avem subtriburile Λ_i, $\mathcal{B}_i = \{B_{i1}, \ldots, B_{ik}\} \subset T\Lambda_1$ și mulțimea $M_i \in \mathcal{B}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{B}_{i-1} \vee \Lambda$ astfel încît :

— $E(\chi_{B_{i1}} \mid \Lambda_i) \geqslant \pi_1 E(\chi_{B_{ij}} \mid \Lambda_i) \leqslant \pi_j$ pentru $j \geqslant 2$;

— $\Lambda_i \supset \mathcal{B}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{B}_{i-1} \vee \Lambda$;

— pe $M_i\ \Lambda_i = \mathcal{B}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{B}_{i-1} \vee \Lambda$;

— $D_i = M_i \cup TM_{i-1} \cup \ldots \cup T^{i-1} M_1 \in \Lambda_i$;

— pe $D_i\ (B_i, \Lambda_i)$ este bună

și dacă $i \geqslant 2$:

— $\Lambda_{i-1} \subset \Lambda_i \subset T\Lambda_{i-1}$;

— $B_{i1} \subset TB_{i-1,1}$, $B_{ij} \supset TB_{i-1,j}$ pentru $j \geqslant 2$;

— $M_i \subset M_{i-1}$;

— pe $M_{i-1} \setminus M_i$

$$E(\chi_{\complement TD_{i-1}} \cdot \mu(T\Lambda_i) \mid \mathcal{B}_{i-1} \vee \Lambda_{i-1}) \mid \mathcal{B}_{i-1} \vee \Lambda_{i-1}) > \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{k-1}\right)^2;$$

— pe $\complement TD_{i-1}\ T\Lambda_i = T^i \Lambda_1$.

Punem

$$M_{n+1} = M_n \cap \{E(\chi_{\complement TD_n} \cdot \mu(T^2 \Lambda_n \mid \mathcal{B}_n \vee \Lambda_n) \mid \mathcal{B}_n \vee \Lambda_n) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{k-1}\right)^2\Bigg\} \in \mathcal{B}_n \vee \Lambda_n$$

și

$$\Lambda_{n+1} = \begin{cases} T\Lambda_n & \text{pe } \complement M_{n+1}, \\ \mathcal{B}_n \vee \Lambda_n & \text{pe } M_{n+1}. \end{cases}$$

Se verifică imediat că :

— $\Lambda_{n+1} \supset \mathcal{B}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{B}_n \vee \Lambda$;

— $D_{n+1} = M_{n+1} \cup TD_n \in \Lambda_{n+1}$;

— $\Lambda_n \subset \Lambda_{n+1} \subset T\Lambda_n$;

— $M_{n+1} \subset M_n$.

Cum $M_{n+1} \subset M_n \in \mathcal{B}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{B}_{n-1} \vee \Lambda$ și pe M_n, $\Lambda_n = \mathcal{B}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{B}_{n-1} \vee \Lambda$, $M_{n+1} \in \mathcal{B}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{B}_n \vee \Lambda$ și pe M_{n+1}, $\Lambda_{n+1} = \mathcal{B}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{B}_n \vee \Lambda$. Pe

$\complement TM_{n+1}$ $T\Lambda_{n+1} = T^2\Lambda_n$, și cum $\complement TD_n \subset \complement TM_{n+1}$, pe $\complement TD_n$ de asemenea $T\Lambda_{n+1} = T^2\Lambda_n$.

Astfel pe de o parte

$$\chi_{\complement TD_n}\, \mu(T\Lambda_{n+1} \mid B_n \vee \Lambda_n) = \chi_{\complement TD_n}\, \mu(T^2\Lambda_n \mid \mathcal{B}_n \vee \Lambda_n),$$

deci pe $M_n \setminus M_{n+1}$

$$E(\chi_{\complement TD_n} \cdot \mu(T\Lambda_{n+1}) \mid \mathcal{B}_n \vee \Lambda_n) \mid \mathcal{B}_n \vee \Lambda_n) > \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{k-1}\right)^2,$$

iar pe de altă parte, ținînd cont că $\complement TD_n \subset \complement T^2D_{n-1}$ și pe $\complement T^2D_{n-1}$, $T^2\Lambda_n = T^{n+1}\Lambda_1$, obținem că pe $\complement TD_n$, $T\Lambda_{n+1} = T^{n+1}\Lambda_1$.

Deoarece pe M_{n+1}, $\Lambda_{n+1} = \mathcal{B}_n \vee \Lambda_n$, pe M_{n+1},

$$E(\chi_{\complement TD_n} \cdot \mu(T\Lambda_{n+1} \mid \Lambda_{n+1}) \mid \Lambda_{n+1}) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{k-1}\right)^2.$$

Folosind propoziția VII.7 ca mai sus, de aici rezultă că orice mulțime neneglijabilă din $T\Lambda_{n+1}$ inclusă în $D_{n+1} \setminus TD_n = M_{n+1} \setminus TD_n$ conține o mulțime neneglijabilă din $T\Lambda_{n+1}$, speranța condiționată a funcției caracteristice a căreia în raport cu Λ_{n+1} este $\leqslant \frac{\gamma}{k-1}$. Deoarece (B_n, Λ_n) este bună pe D_n, $(T\mathcal{B}_n, T\Lambda_n)$ este bună pe TD_n. De aici rezultă că $(T\mathcal{B}_n, \Lambda_{n+1} \vee \{TD_n, \complement TD_n\})$ este bună pe TD_n. Evident,

$$E(\chi_{TB_{n1}} \mid \Lambda_{n+1}) \geqslant \pi_1, \quad E(\chi_{TB_{nj}} \mid \Lambda_{n+1}) \leqslant \pi_j \text{ pentru } j \geqslant 2,$$

deci fenomenul Darboux funcționează pe $(D_{n+1}, T\Lambda_{n+1}, \mu)$ cu $D = TD_n$. Astfel există un subtrib $\mathcal{B}_{n+1} = \{B_{n+1,1}, \ldots, B_{n+1,k}\}$ al lui $T\Lambda_{n+1}$ astfel încît :

— $E(\chi_{B_{n+1,1}} \mid \Lambda_{n+1}) \geqslant \pi_1$, $E(\chi_{B_{n+1,j}} \mid \Lambda_{n+1}) \leqslant \pi_j$ pentru $j \geqslant 2$;

— pe D_{n+1}, $\mathcal{B}_{n+1}$, Λ_{n+1}) este bună;

— $B_{n+1,1} \subset TB_{n1}$, $B_{n+1,j} \supset TB_{nj}$ pentru $j \geqslant 2$.

Astfel obținem pentru orice i subtriburile Λ_i, $\mathcal{B}_i$ și mulțimea M_i care satisfac condițiile enunțate mai sus. În plus, $M_1 = \ldots = M_{l+1} = M$.

Într-adevăr, $M_1 = M$. Presupunem că pentru un $n \leqslant l$, $M_n = M$. Cum $M, \ldots, T^{N_3+n-1}M$ sînt două cîte două disjuncte,

$$M \subset \complement \bigcup_{i=2}^{N_3+n-1} T^iM = \complement T^2D_{n-1} \cap T^{n+1} \complement \bigcup_{i=0}^{N_3-2} T^iM.$$

Însă pe $\complement T^2D_{n-1}$, $T^2\Lambda_n = T^{n+1}\Lambda_1$, iar pe $T^{n+1} \complement \bigcup_{i=0}^{N_3-2} T^iM$,

$T^{n+1}\Lambda_1 = T^{N_3+n}\Lambda$, deci pe M, $T^2\Lambda_n = T^{N_3+n}\Lambda$. Astfel pe M

$$E(\mu(T^2\Lambda_n \mid \mathcal{B}_n \vee \Lambda_n) \mid \mathcal{B}_n \vee \Lambda_n) =$$

$$= E(\mu(T^{N_3+n}\Lambda \mid \mathcal{B}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{B}_n \vee \Lambda) \mid \mathcal{B}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{B}_n \vee \Lambda).$$

Însă conform propoziţiei VII.4,

$$\mu(T^{N_3+n}\Lambda \mid \mathcal{B}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{B}_n \vee \Lambda) = \frac{\mu(T^{N_3+n}\Lambda \mid \Lambda)}{\mu(\mathcal{B}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{B}_n \mid \Lambda)},$$

iar după remarca de după fenomenul Cramer din paragraful XII pe M

$$\mu(\mathcal{B}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{B}_n \mid \Lambda) \geqslant \min_{j_1, \ldots, j_n} \pi_{j_1} \ldots \pi_{j_n} \cdot 2^{-n\varphi(\delta)},$$

deci pe M

$$E(\mu(T^2\Lambda_n \mid \mathcal{B}_n \vee \Lambda_n) \mid \mathcal{B}_n \vee \Lambda_n) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{E(\mu(T^{N_3+n}\Lambda \mid \Lambda) \mid \mathcal{B}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{B}_n \vee \Lambda)}{\min\limits_{j_1, \ldots, j_n} \pi_{j_1} \ldots \pi_{j_n} \cdot 2^{-n \cdot \varphi(\delta)}}.$$

Punînd în VII.9 $f = \mu(T^{N_3+n}\Lambda \mid \Lambda)$ şi $\Gamma = \mathcal{B}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{B}_n$, obţinem că

$$E(\mu\ (T^{N_3+n}\Lambda \mid \Lambda) \mid \mathcal{B}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{B}_n \vee \Lambda) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{E(\mu(T^{N_3+n}\Lambda \mid \Lambda) \mid \Lambda)}{\mu(\mathcal{B}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{B}_n \mid \Lambda)},$$

deci pe M

$$E(\mu(T^2\Lambda_n \mid \mathcal{B}_n \vee \Lambda_n) \mid \mathcal{B}_n \vee \Lambda_n) \leqslant \frac{E(\mu(T^{N_3+n}\Lambda \mid \Lambda) \mid \Lambda)}{(\min\limits_{j_1, \ldots j_n} \pi_{j_1} \ldots \pi_{j_n} \cdot 2^{-n \cdot \varphi(\delta)})^2}$$

Cum $M \subset G_{N_3}$, pe M

$$E(\chi_{\complement TD_n} \cdot \mu(T^2\Lambda_n \mid \mathcal{B}_n \vee \Lambda_n \mid \mathcal{B}_n \vee \Lambda_n) \leqslant E(\mu(T^2\Lambda_n \mid \mathcal{B}_n \vee \Lambda_n) \mid \mathcal{B}_n \vee \Lambda_n) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\beta}{(\min\limits_{j_1, \ldots, j_n} \pi_{j_1} \ldots \pi_{j_n} \cdot 2^{-n\varphi(\delta)})^2} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{k-1}\right)^2,$$

şi din definiţia lui M_{n+1} rezultă că $M_{n+1} = M$.

Etapa a treia. M fiind neneglijabilă, conform propoziţiei II.3 există N natural astfel încît

$$\mu\left(\complement \sum_{n=0}^{N} T^n M\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fie $O_n = T^n M \setminus \bigcup\limits_{j=0}^{n-1} T^j M$. Evident, $T^{-n}O_n \in \Lambda$ şi

$$X = \mathop{}\limits_{n=0}^{N} O_n \cup \complement \bigcup_{n=0}^{N} T^n M =$$
$$= \bigcup_{n=0}^{N} (O_n \cap T^n M_{N-n}) \cup \bigcup_{n=0}^{N} [O_n \cap T^n(M \setminus M_{N-n})] \cup \complement \bigcup_{n=0}^{N} T^n M.$$

Deoarece

$$O_n \cap T^n M_{N-n} \subset T^n M_{N-n},$$

avem

$$\bigcup_{n=0}^{N}(O_n \cap T^n M_{N-n}) \subset D_N,$$

deci arătînd că

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{N}[O_n \cap T^n(M \setminus M_{N-n})]\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

va rezulta

$$\mu(\complement D_N) \leqslant \varepsilon.$$

Deoarece

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{N}[O_n \cap T^n(M \setminus M_{N-n})]\right) = \sum_{n=0}^{N}\mu(O_n \cap T^n(M \setminus M_{N-n})) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{N}\mu(T^{-n}O_n \cap (M \setminus M_N)) = \sum_{n=0}^{N}\int_{T^{-n}O_n}\chi_{M \setminus M_N}\,\mathrm{d}\mu =$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\int_{T^{-n}O_n}E(\chi_{M \setminus M_N} \mid \Lambda)\,\mathrm{d}\mu,$$

este suficient să arătăm că

$$E(\chi_{M \setminus M_N} \mid \Lambda) \leqslant \frac{\varepsilon}{2 \cdot \mu(X)}.$$

Punem $L_n = M_n \setminus M_{n+1}$. Atunci $L_1 = \ldots = L_l = \varnothing$ şi $M \setminus M_N = \bigcup_{n=1}^{N=1} L_n$. Notăm

$$L_n^1 = L_n \cap \left\{\frac{\mathrm{I}(\Lambda_n \mid \Lambda)}{n} \geqslant H - \frac{h}{2}\right\},$$

$$L_n^2 = L_n \cap \left\{\frac{\mathrm{I}(\Lambda_n \mid \Lambda)}{n} < H - \frac{h}{2}\right\}.$$

Deoarece pe $L_n \subset M_n$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant k$,

$$|E(\chi_{B_{ij}} \mid \mathcal{B}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{B}_{i-1} \vee \Lambda) - \pi_j| \leqslant \gamma \leqslant \delta,$$

conform fenomenului Cramer

$$E(\chi_{L_n^1} \mid \Lambda) \leqslant 2^{-dn}.$$

Cum $L_1^1 = \ldots = L_l^1 = \varnothing$ şi $l \geqslant N_2$,

$$E(\chi_{\bigcup_{n=1}^{N-1} L_n^1} \mid \Lambda) \leqslant \sum_{n=N_2+1}^{\infty} E(\chi_{L_n^1} \mid \Lambda) \leqslant \sum_{n=N_2+1}^{\infty} 2^{-nd} \leqslant \frac{\varepsilon}{4 \cdot \mu(X)}.$$

Fie

$$\overline{L_n^2} = L_n^2 \cap \left\{\chi_{\complement TD_n} \cdot \mu(T\Lambda_{n+1} \mid \mathcal{B}_n \vee \Lambda_n) \geqslant \frac{1}{4}\left(\frac{\gamma}{k-1}\right)^2\right\}.$$

Cum pe $L_n^2 \in \mathcal{B}_n \vee \Lambda_n$,

$$E(\chi_{\complement TD_n} \cdot \mu(T\Lambda_{n+1} \mid \mathcal{B}_n \vee \Lambda_n) \mid \mathcal{B}_n \vee \Lambda_n) > \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{k-1}\right)^2,$$

aplicînd lema de regularizare cu $f = \chi_{\complement TD_n} \cdot \mu(T\Lambda_{n+1} \mid \mathcal{B}_n \vee \Lambda_n)$, $\Gamma = \mathcal{B}_n \vee \Lambda_n$, $L = L_n^2$ şi $\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{k-1}\right)^2$, obţinem că

$$E(\chi_{L_n^2} \mid \Lambda) \leqslant 4 \cdot \left(\frac{k-1}{\gamma}\right)^2 E(\chi_{\overline{L_n^2}} \mid \Lambda).$$

După definiţia lui $\overline{L_n^2}$, $\overline{L_n^2} \subset \complement\, TD_n$, deci pe ea $T\Lambda_{n+1} = T^{n+1}\Lambda_1$. Astfel pe $\overline{L_n^2}$,

$$\mu(T^{n+1}\Lambda_1 \mid \mathcal{B}_n \vee \Lambda_n) \geqslant \frac{1}{4}\left(\frac{\gamma}{k-1}\right)^2.$$

Deoarece $\overline{L_n^2} \subset D_n$, pe ea $(\mathcal{B}_n, \Lambda_n)$ e bună, deci pe $\overline{L_n^2}$

$$\mu(\mathcal{B}_n \vee \Lambda_n \mid \Lambda_n) = \mu(\mathcal{B}_n \mid \Lambda_n) = \sum_{j=1}^{k} \chi_{B_{nj}} \cdot E(\chi_{B_{nj}} \mid \Lambda_n) \geqslant \min_j \pi_j - \gamma.$$

În sfîrşit, ţinînd cont că $\overline{L_n^2} \subset L_n^2$, pe $\overline{L_n^2}$

$$I(\Lambda_n \mid \Lambda) < n \cdot \left(H - \frac{h}{2}\right),$$

adică

$$\mu(\Lambda_n \mid \Lambda) > 2^{-n\left(H - \frac{h}{2}\right)}.$$

Astfel, deoarece $T^n\Lambda \subset T^{n+1}\Lambda_1$, pe $\overline{L_n^2}$

$$\mu(T^n\Lambda \mid \Lambda) \geqslant \mu(T^{n+1}\Lambda_1 \mid \Lambda) =$$
$$= \mu(T^{n+1}\Lambda_1 \mid \mathcal{B}_n \vee \Lambda_n) \cdot \mu(\mathcal{B}_n \vee \Lambda_n \mid \Lambda_n) \cdot \mu(\Lambda_n \mid \Lambda) >$$
$$> \frac{1}{4}\left(\frac{\gamma}{k-1}\right)^2 (\min_j \Pi_j - \gamma) \cdot 2^{-n\left(H - \frac{h}{2}\right)}.$$

Cu alte cuvinte, pe $\overline{L_n^2}$

$$I(T^n\Lambda \mid \Lambda) < n\left(H - \frac{h}{2}\right) - \log\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\gamma}{k-1}\right)^2 (\min_j \pi_j - \gamma)\right],$$

$$\frac{I(T^n\Lambda \mid \Lambda)}{n} < H - \left(\frac{h}{2} + \frac{1}{n}\log\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\gamma}{k-1}\right)^2 (\min_j \pi_j - \gamma)\right]\right).$$

Cum $\overline{L_1^2} = \ldots = \overline{L_l^2} = \varnothing$ şi $l \geqslant l'$, pe $\bigcup_{n=1}^{N-1} L_n^2$ pentru un $n > l$

$$\frac{\mathrm{I}(T^n\Lambda \mid \Lambda)}{n} < H.$$

Însă $l \geqslant N_1$, deci (vezi lema informației)

$$\bigcup_{n=1}^{N-1} \overline{L_n^2} \subset E_{N_1}.$$

Avînd în vedere că $\bigcup_{n-1}^{N-1} \overline{L_n^2} \subset M \subset F_{N_1}$, de aici deducem că

$$E(\chi_{\bigcup_{n=1}^{N-1} \overline{L_n^2}} \mid \Lambda) = \chi_{F_{N_1}} \cdot E(\chi_{\bigcup_{n=1}^{N-1} \overline{L_n^2}} \mid \Lambda) \leqslant \chi_{F_{N_1}} \cdot E(\chi_{F_{N_1}} \mid \Lambda) \leqslant \alpha.$$

Astfel

$$E(\chi_{\bigcup_{n=1}^{N-1} L_n^2} \mid \Lambda) \leqslant 4 \left(\frac{k-1}{\gamma}\right)^2 \alpha = \frac{\varepsilon}{4 \cdot \mu(X)}\,.$$

În concluzie

$$E(\chi_{M \setminus M_N} \mid \Lambda) = E(\chi_{\bigcup_{n+1}^{N-1} L_n^1} \mid \Lambda) + E(\chi_{\bigcup_{n=1}^{N-1} L_n^2} \mid \Lambda) \leqslant \frac{\varepsilon}{2 \cdot \mu(X)}\,,$$

Etapa a patra. Deoarece pe $D_N(\mathcal{B}_N, \Lambda_N)$ e bună, pe $T^{-N_3-N+2}D_N$ $(T^{-N_3-N+2}\mathcal{B}_N, T^{-N_3-N+2}\Lambda_N)$ e bună. Punînd

$$\Lambda' = T^{-N_3-N+2}\Lambda_N, \ \mathcal{B}' = T^{-N_3-N+2}\mathcal{B}_N,$$

$\Lambda' \subset \Lambda$ și conform propoziției IX. 4 Λ' este crescător, $h(T, \Lambda') = h(T, \Lambda_N) = \ldots = h(T, \Lambda_1) = h(T, \Lambda)$, dacă Λ satisface una din condițiile (ii), (iii), atunci și Λ' o satisface. Evident,

$$E(\chi_{B_1'} \mid \Lambda') \geqslant \pi_1, \ E(\chi_{B_j'} \mid \Lambda') \leqslant \pi_j \text{ pentru } j \geqslant 2.$$

Cum $(\mathcal{B}', \Lambda')$ este bună pe $D' = T^{-N_3-N+2}D_N$ și $\mu(\complement D') = \mu(\complement D_N) \leqslant \varepsilon$,

$$\mu(\{\text{nu are loc } \pi_1 \leqslant E(\chi_{B_1'} \mid \Lambda') \leqslant \pi_1 + \lambda\}) \leqslant \varepsilon,$$

$$\mu(\{\text{nu are loc } \pi_j - \lambda \leqslant E(\chi_{B_j'} \mid \Lambda') \leqslant \pi_j\}) \leqslant \varepsilon \text{ pentru } j \geqslant 2.$$

În sfîrșit, pe $\complement(T^{-1}M \cup \ldots \cup T^{-N_3+1}M)$

$$\mathcal{B} = T^{-N_3+1}\mathcal{B}_0,$$

deci pe ea

$$B_1 = T^{-N_3+1}B_{01} \supset T^{-N_3+1}B_{11} \supset \ldots \supset T^{-N_3-N+2}B_{N1} = B_1',$$

$$B_j = T^{-N_3+1}B_{0j} \subset T^{-N_3+1}B_{1j} \subset \ldots \subset T^{-N_3-N+2}B_{Nj} = B_1' \text{ pentru } j \geqslant 2.$$

Astfel

$$\{\text{nu are loc } \chi_{B_1'} \leqslant \chi_{B_1}\} \subset T^{-1}M \cup \ldots \cup T^{-N_3+1}M,$$

deci

$$\mu(\{\text{nu are loc } \chi_{B_1'} \leqslant \chi_{B_1}\}) \leqslant \sum_{i=1}^{N_3-1} \mu(T^{-i}M) = (N_3 - 1)\,\mu(M) \leqslant \eta,$$

şi analog

$$\mu(\{\text{nu are loc } \chi_{B'_j} \geqslant \chi_{B_j}\}) \leqslant \eta \text{ pentru } j \geqslant 2.$$

Cu aceasta teorema este demonstrată.

Comentarii. Teorema de aproximare este lema de aproximare din [18] sub o formă uşor modificată. Primele două etape ale demonstraţiei noastre corespund lui 7° şi 9° din demonstraţia acesteia din urmă, etapa a treia lui 8°, 10° şi 11°, iar a patra etapă lui 12°. Este instructiv să reflectăm asupra rolului fiecărei leme din paragraful XII în demonstraţia teoremei de aproximare.

XIV. TEOREMA LUI SINAI

Înainte de toate generalizăm puţin teorema de aproximare :

1. *Fie* (X, Σ, μ) *un spaţiu cu măsură finită,* $T : X \to X$ *o transformare ergodică,* Λ *un subtrib numărabil generat crescător al lui* Σ, $p = (p_1, p_2, \ldots)$ *o schemă Bernoulli cu* $H(p) < h(T, \Lambda)$ *și* $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots\}$ *un subtrib al lui* $T\Lambda$ *astfel încît*

$$E(\chi_{A_1} \mid \Lambda) \geqslant p_1,\ E(\chi_{A_j} \mid \Lambda) \leqslant p_j \text{ pentru } j \geqslant 2.$$

Atunci pentru orice $\lambda, \varepsilon, \eta > 0$, *există un subtrib crescător* Λ' *al lui* Λ *cu* $h(T, \Lambda') = h(T, \Lambda)$ *și un subtrib* $\Gamma' = \{A'_1, A'_2, \ldots\}$ *al lui* $T\Lambda'$ *astfel încît*

$$- E(\chi_{A'_1} \mid \Lambda') \geqslant p_1,\ E(\chi_{A'_j} \mid \Lambda') \leqslant p_j \text{ pentru } j \geqslant 2\,;$$

$$- \mu(\{\text{nu are loc } p_1 \leqslant E(\chi_{A'_1} \mid \Lambda') \leqslant p_1 + \lambda\}) \leqslant \varepsilon\,;$$

$$\mu(\{\text{nu are loc } p_j - \lambda \leqslant E(\chi_{A'_j} \mid \Lambda') \leqslant p_j\}) \leqslant \varepsilon \text{ pentru } j \geqslant 2\,;$$

$$- \mu(\{\text{nu are loc } \chi_{A'_1} \leqslant \chi_{A_1}\}) \leqslant \eta\,;$$

$$\mu(\{\text{nu are loc } \chi_{A'_j} \geqslant \chi_{A_j}\}) \leqslant \eta \text{ pentru } j \geqslant 2.$$

Dacă Λ *satisface una din condiţiile (ii), (iii) din paragraful IX, atunci și* Λ' *o satisface.*

D. Fie k un întreg $\geqslant 1$ astfel încît

$$\sum_{j>k} p_j \leqslant \frac{\lambda}{2},$$

şi

$$\mu\Big(\bigcup_{j>k} A_j\Big) \leqslant \frac{\eta}{2}.$$

Punem

$$\pi_1 = p_1 + \sum_{j>k} p_j,\ \pi_2 = p_2, \ldots, \pi_k = p_k,$$

$$\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k),$$

$$B_1 = A_1 \cup \bigcup_{j>k} A_j,\ B_2 = A_2, \ldots, B_k = A_k,$$

$$\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_k\}.$$

Atunci $H(\pi) \leqslant H(p) < h(T, \Lambda)$, $\mathcal{B} \subset T\Lambda$ şi

$$E(\chi_{B_1} \mid \Lambda) \geqslant \pi_1, \quad E(\chi_{B_j} \mid \Lambda) \leqslant \pi_j \text{ pentru } 2 \leqslant j \leqslant k.$$

Conform teoremei de aproximare există un subtrib crescător Λ' al lui Λ cu $h(T, \Lambda') = h(T, \Lambda)$, satisfăcînd o dată cu Λ condiţiile (ii), (iii), şi un subtrib $\mathcal{B}' = \{B_1', \ldots, B_k'\}$ al lui $T\Lambda'$ astfel încît

$$— E(\chi_{B_1'} \mid \Lambda') \geqslant \pi_1, \quad E(\chi_{B_j'} \mid \Lambda') \leqslant \pi_j \text{ pentru } 2 \leqslant j \leqslant k;$$

$$— \mu\left(\left\{\text{nu are loc } \pi_1 \leqslant E(\chi_{B_1'} \mid \Lambda') \leqslant \pi_1 + \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \leqslant \varepsilon;$$

$$\mu\left(\left\{\text{nu are loc } \pi_j - \frac{\lambda}{2} \leqslant E(\chi_{B_j'} \mid \Lambda') \leqslant \pi_j\right\}\right) \leqslant \varepsilon \text{ pentru } 2 \leqslant j \leqslant k,$$

$$— \mu(\{\text{nu are loc } \chi_{B_1'} \leqslant \chi_{B_1}\}) \leqslant \frac{\eta}{2};$$

$$\mu(\{\text{nu are loc } \chi_{B_j'} \geqslant \chi_{B_j}\}) \leqslant \frac{\eta}{2} \text{ pentru } 2 \leqslant j \leqslant k.$$

Punînd pentru $1 \leqslant j \leqslant k$, $A_j' = B_j'$, iar pentru $j > k$, $A_j' = \emptyset$, atunci $\Gamma' = \{A_1', A_2', \ldots\}$, care este tot subtribul $\mathcal{B}'$, însă cu o altă partiţie generatoare, satisface condiţiile din enunţ. S.

Demonstrăm acum o propoziţie care se deosebeşte foarte puţin de teorema lui Sinai :

2. *Fie* (X, Σ, μ) *un spaţiu cu măsură finită,* $T : X \to X$ *o transformare ergodică şi* $p = (p_1, p_2, \ldots)$ *o schemă Bernoulli. Dacă există un subtrib numărabil generat crescător* Λ *al lui* Σ *astfel încît* $H(p) \leqslant h(T, \Lambda)$, *atunci există un subtrib* $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots\}$ *al lui* Σ *astfel încît pentru orice* j,

$$E(\chi_{A_j} \mid^{\infty} \Gamma) = p_j.$$

D. Fie pentru orice întreg $n \geqslant 1$, $p^n = (p_1^n, p_2^n, \ldots)$ o schemă Bernoulli astfel încît

$$— p_1^n \searrow p_1, \quad p_j^n \nearrow p_j \text{ pentru } j \geqslant 2,$$

$$— H(p^n) < H(p),$$

$\Gamma_0 = \{A_{01}, A_{02}, \ldots\}$ cu $A_{01} = X$, $A_{0j} = \emptyset$ pentru $j \geqslant 2$, şi λ_n, ε_n, $\eta_n > 0$ astfel încît

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n < \infty.$$

Aplicînd succesiv pe 1, obţinem un şir descrescător (Λ_n) de subtriburi ale lui Λ cu $h(T, \Lambda_n) = h(T, \Lambda)$ şi un şir $\Gamma_n = \{A_{n1}, A_{n2}, \ldots\} \subset T\Lambda_n$

astfel încît

— $E(\chi_{A_{n1}} \mid \Lambda_n) \geqslant p_1^n \geqslant p_1^{n+1}$, $E(\chi_{A_{nj}} \mid \Lambda_n) \leqslant p_j^n \leqslant p_j^{n+1}$ pentru $j \geqslant 2$,

— $\mu(\{$nu are loc $p_1^n \leqslant E(\chi_{A_{n1}} \mid \Lambda_n) \leqslant p_1^n + \lambda_n\}) \leqslant \varepsilon_n$,

μ ($\{$nu are loc $p_j^n - \lambda_n \leqslant E(\chi_{A_{nj}} \mid \Lambda_n) \leqslant p_j^n\}) \leqslant \varepsilon_n$ pentru $j \geqslant 2$,

— $\mu(\{$nu are loc $\chi_{A_{n+1,1}} \leqslant \chi_{A_{n1}}\}) \leqslant \eta_n$,

$\mu(\{$ nu are loc $\chi_{A_{n+1,j}} \geqslant \chi_{A_{nj}}\}) \leqslant \eta_n$ pentru $j \geqslant 2$.

Notînd

$$D_{n1} = \{p_1^n \leqslant E(\chi_{A_{n1}} \mid \Lambda_n) \leqslant p_1^n + \lambda_n\},$$

avem

$$\mu(A_{n1}) = \int E(\chi_{A_{n1}} \mid \Lambda_n)\, \mathrm{d}\mu = \int_{D_{n1}} E(\chi_{A_{n1}} \mid \Lambda_n)\, \mathrm{d}\mu +$$

$$+ \int_{\complement D_{n1}} E(\chi_{A_{n1}} \mid \Lambda_n)\, \mathrm{d}\mu \leqslant (p_1^n + \lambda_n)\, \mu(X) + \varepsilon_n .$$

Pe de altă parte,

$$\mu(A_{n+1,1}) = \int E(\chi_{A_{n+1,1}} \mid \Lambda_{n+1})\, \mathrm{d}\mu \geqslant p_1^{n+1} \cdot \mu(X).$$

Astfel

$$\| \chi_{A_{n1}} - \chi_{A_{n+1,1}} \|_1 = \mu(A_{n1}) - \mu(A_{n+1,1}) + 2\mu(A_{n+1,1} \setminus A_{n1}) \leqslant$$

$$\leqslant (p_1^n - p_1^{n+1} + \lambda_n) \cdot \mu(X) + \varepsilon_n + 2 \cdot \eta_n ,$$

deci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| \chi_{A_{n1}} - \chi_{A_{n+1,1}} \|_1 < \infty .$$

De aici rezultă că $\chi_{A_{n1}} \to \chi_{A_1}$ în $L^1(\Sigma)$. Fie $\Lambda' = \bigcap_n \Lambda_n$. Atunci Λ' este un subtrib crescător, $A_1 \in T\Lambda'$ şi după IV.2 şi IV.9

$$\| E(\chi_{A_1} \mid \Lambda') - p_1 \|_1 \leqslant \| E(\chi_{A_1} \mid \Lambda') - E(\chi_{A_1} \mid \Lambda_n) \|_1 +$$

$$+ \| E(\chi_{A_1} \mid \Lambda_n) - E(\chi_{A_1} \mid \Lambda_n) \|_1 + \| E(\chi_{A_{n1}} \mid \Lambda_n) - p_1^n \|_1 +$$

$$+ \| p_1^n - p_1 \|_1 \leqslant \| E(\chi_{A_1} \mid \Lambda') - E(\chi_{A_1} \mid \Lambda_n) \|_1 + \| \chi_{A_1} - \chi_{A_{n1}} \|_1 +$$

$$+ \lambda_n \mu(X) + \varepsilon_n + (p_1^n - p_1)\mu(X) \to 0.$$

Astfel

$$E(\chi_{A_1} \mid \Lambda') = p_1 .$$

Analog se arată că pentru $j \geqslant 2$, $\chi_{A_{nj}} \to \chi_{A_j}$ în $L^1(\Sigma)$, $A_j \in T\Lambda'$ şi

$$E(\chi_{A_j} \mid \Lambda') = p_j .$$

Prin urmare, punînd $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots\}$, $\Gamma \subset T\ \Lambda'$, deci ${}^{\infty}\Gamma \subset \Lambda'$, de unde rezultă că pentru orice j

$$E(\chi_{A_j} \mid {}^{\infty}\Gamma) = E(E(\chi_{A_j} \mid \Lambda') \mid {}^{\infty}\Gamma) = p_j \cdot \mathrm{S}.$$

Iată-ne în sfîrșit în fața teoremei lui Sinai :

Teorema lui Ya. G. Sinai. *Fie* (X, Σ, μ) *un cîmp de probabilitate,* $T : X \to X$ *o transformare ergodică și* $p = (p_1, p_2, \ldots)$ *o schemă Bernoulli. Dacă* $H(p) \leqslant h(T)$, *atunci* p *se scufundă în* T.

D. Fie $(\mathcal{A}_n)$ un șir de subtriburi finite ale lui Σ astfel încît $h(T, \mathcal{A}_n) \to h(T)$ și $\Sigma' = \bigvee_{n=1}^{\infty} {}^{\infty}\mathcal{A}_n^{\infty}$. Atunci Σ' este numărabil generat și $T\Sigma' = \Sigma'$. După teorema lui Rohlin și Sinai există un subtrib crescător Λ al lui Σ' astfel încît $h(T, \Lambda)$ este egală cu entropia restricției lui T la Σ'. Însă după definiția lui Σ' aceasta este tocmai $h(T)$, deci am găsit un subtrib numărabil generat crescător Λ al lui Σ astfel încît $H(p) \leqslant h(T) = h\ (T, \Lambda)$. Conform propoziției 2, există un subtrib $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots\}$ al lui Σ astfel încît pentru orice j,

$$E(\chi_{A_j} \mid {}^{\infty}\Gamma) = p_j .$$

Pentru întregi oarecari $n_1 < \ldots < n_k$,

$$\mu(T^{-n_1} A_{i_1} \cap \ldots \cap T^{-n_k} A_{i_k}) = \mu(A_{i_1} \cap T^{n_1 - n_2} A_{i_2} \cap \ldots \cap T^{n_1 - n_k} A_{i_k}) =$$

$$= \int\limits_{T^{n_1-n_2} A_{i_2} \cap \ldots \cap T^{n_1-n_k} A_{i_k}} \chi_{A_{i_1}} \mathrm{d}\mu = \int\limits_{T^{n_1-n_2} A_{i_2} \cap \ldots \cap T^{n_1-n_k} A_{i_k}} E(\chi_{A_{i_1}} \mid {}^{\infty}\Gamma)\, \mathrm{d}\mu =$$

$$= p_{i_1} \cdot \mu(T^{n_1-n_2} A_{i_2} \cap \ldots \cap T^{n_1-n_k} A_{i_k}) = p_{i_1} \cdot \mu(T^{-n_2} A_{i_2} \cap \ldots \cap T^{-n_k} A_{i_k}) =$$

$$= \ldots = p_{i_1} \ldots p_{i_k} .$$

Cu notațiile din paragraful I, fie $\mathcal{C}$ clanul mulțimilor de forma $\{\xi = (x_n) \mid x_{n_1} = \omega_{i_1}, \ldots, x_{n_k} = \omega_{i_k}\}$. Punînd

$$\tau\{\xi = (x_n) \mid x_{n_1} = \omega_{i_1} \ldots, x_{n_k} = \omega_{i_k}\} =$$

$$= T^{-n_1} A_{i_1} \cap \ldots \cap T^{-n_k} A_{i_k},$$

condițiile propoziției I.4 sînt satisfăcute, deci p se scufundă în T. S.

Din teorema lui Sinai rezultă imediat că

3. *Două scheme Bernoulli cu aceeași entropie* (*finită sau infinită*) *sînt slab echivalente.*

Comentarii. Teorema lui Sinai a fost enunțată prima dată în [17]. Demonstrația ei a apărut în [18] și pînă acum nu a fost reprodusă nicăieri. Demonstrația noastră este în esență aceeași ca cea din [18].

Primită la redacție la 3 decembrie 1967

Universitatea din București
Facultatea de matematică-mecanică,
str. Academiei nr. 14.

1883

CONDITIONAL EXPECTATIONS AND SINAI'S THEOREM

(ABSTRACT)

The purpose of this paper is to give a detailed proof of Sinai's theorem (see [17] and [18]) using Halmos's method of conditional expectations rather than Rohlin's theory of measurable partitions.

Using the basic properties of conditional expectations, of information, of informational density, the Darboux property (§ IV) and the theorem of Cramer (§ XI), we prove in §XII five lemmas which are used in § XIII for the proof of the main theorem of this paper :

Approximation theorem. Let (X, Σ, μ) be a finite measure space, $T : X \to X$ an ergodic transformation, Λ a countably generated increasing subtribe of Σ, $\pi=(\pi_1, \dots \pi_k)$ a Bernoulli system with $H(\pi) < h(T, \Lambda)$ and $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_k\}$ a subtribe of $T\Lambda$ such that

$$E(\chi_{B'_1} \mid \Lambda') \geqslant \pi_1, \quad E(\chi_{B_j} \mid \Lambda) \leqslant \pi_j \text{ for } j \geqslant 2,$$

Then for every $\lambda, \varepsilon, \eta > 0$ there exist an increasing subtribe Λ' of Λ with $h(T, \Lambda') = h(T, \Lambda)$ and a subtribe $\mathcal{B}' = \{B'_1, \dots, B'_k\}$ of $T\Lambda'$ such that

a) $E(\chi_{B'_1} \mid \Lambda') \geqslant \pi_1, \quad E(\chi_{B'_j} \mid \Lambda') \leqslant \pi_j$ for $j \geqslant 2$,

b) $\mu(\complement\{\pi_1 \leqslant E(\chi_{B'_1} \mid \Lambda') \leqslant \pi_1 + \lambda\}) \leqslant \varepsilon$,

$\mu(\complement\{\pi_j < \lambda \leqslant E(\chi_{B'_j} \mid \Lambda') \leqslant \pi_j\}) \leqslant \varepsilon$ for $j \geqslant 2$,

c) $\mu(\complement\{\chi_{B'_1} \leqslant \chi_{B_1}\}) \leqslant \eta$,

$\mu(\complement\{\chi_{B'_j} \geqslant \chi_{B_j}\}) \leqslant \eta$ for $j \geqslant 2$.

If Λ has one of the properties (ii), (iii) of the theorem of Rohlin and Sinai, then Λ' has this property too.

Using the theorem of Rohlin and Sinai (§.IX) and the approximation theorem we prove in §. XIV. the Sinai's theorem :

Theorem of Sinai. Let (X, Σ, μ) be a probability space, $T : X \to X$ an ergodic transformation and $p = (p_1, p'_2, \dots)$ a Bernoulli system. If $H(p) \leqslant h(T)$ (the entropies may be infinite), the p can be imbedded in T.

BIBLIOGRAFIE

1. H. Cramer, *Sur un nouveau théorème — limite de la théorie des probabilités.* Actualités sci. et ind., No 736.
2. R. Cristescu, *Spaţii liniare ordonate*, Bucureşti, 1959.
3. N. Dinculeanu, *Vector measures*, Berlin, 1966.
4. N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators*, Part. 1, New York & London, 1958, Part 2, New York & London, 1964.
5. C. Foiaş, *Automorphisms of compact abelian groups, as models for measure-preserving invertible transformations.* Michigan Math. J., **13**, 349—352 (1966).
6. P. R. Halmos, *Measure theory*, New York, 1950.
7. P. R. Halmos, *Lectures on ergodic theory*, New York, 1956.
8. P. R. Halmos, *Entropy in ergodic theory*. University of Chicago, 1959.
9. А. Н. Колмогоров, *Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега.* ДАН, **119**, *5*, 861—864 (1958).

10. А. Н. Колмогоров, *Об энтропии на единицу времени, как метрическом инварианте автоморфизмов*. ДАН, **124**, *4*, 754—755 (1959).

11. Л. Д. Мешалкин, *Один случай изоморфизма схем Бернулли*. ДАН, **128**, *1*, 41—44 (1959).

12. J. Neveu, *Relations entre la théorie des martingales et la théorie ergodique*, Ann. Inst. Fourier, **15**, *1*, 31—42 (1965).

13. М. С. Пинскер, *Динамические системы с вполне положительной и нулевой энтропией*. ДАН **133**, *5*, 1025—1026 (1960).

14. В. А. Рохлин, *Лекции по энтропийной теории преобразований*, УМН, **22**, *5* (137), 3—56 (1967).

15. В. А. Рохлин, Я. Г. Синай, *Построение и свойства инвариантных измеримых разбиений*. ДАН, **141**, *5*, 1038—1041 (1961).

16. Я. Г. Синай, *О понятии энтропии динамической системы*, ДАН, **124**, *4*, 768—771 (1959).

17. Я. Г. Синай, *Слабый изоморфизм преобразований с инвариантной мерой*. ДАН, **147**, *4*, 797—800 (1962).

18. Я. Г. Синай, *О слабом изоморфизме преобразований с инвариантной мерой*. Матем. сб., **63** (**105**), *1*, 23—42 (1964).

19. L. Zsidó, *Un criteriu de conjugare*. St. cerc. mat., **19**, *10*, 1537—1538 (1967).

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date din text în tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor din text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale. Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

1968 SEP 10

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, A. DELEANU, M. JURCHESCU, **Topologie, Categorii, Suprafeţe riemanniene**, 1967, 394 p., 21,50 lei.

ROMULUS CRISTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.

PETRU CARAMAN, **Homeomorfisme evasiconforme n-dimensionale**, 1968, 516 p., 23,50 lei.

Scrierile matematice ale lui Gheorghe Lazăr, ediţie îngrijită şi adnotată de Axente Creangă, 1968, 150 p., 6 lei.

I. CUCULESCU, **Procese Markov şi funcţii excesive**, 1968, 356 p., 19 lei.

N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.

ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, **Metode matematice în hidrogazodinamica subterană**, 1966, 582 p., 31 lei.

AL. GHIKA, **Analiza funcţională**, 1967, 594 p., 31 lei.

S. GUIAŞU şi R. THEODORESCU, **Teoria matematică a informaţiei**, 1966, 227 p., 8,25 lei.

M. IOSIFESCU şi P. TĂUTU, **Procese stohastice şi aplicaţii în medicină şi biologie**, 1968, 345 p., 22 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, 1966, 669 p., 38 lei.

S. SANIELEVICI, **Opera matematică**, 1968, 297 p., 15.50 lei.

I. SINGER, **Cea mai bună aproximare în spaţii vectoriale normate prin elemente din subspaţii vectoriale**, 1967, 386 p., 23 lei.

M. I. STOKA, **Geometria integrală**, 1967, 239 p., 9,75 lei.

S. STOÏLOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 7, P. 947–1112, BUCUREŞTI, 1968

I. P. „Informaţia" – c. 5395

43831 **Lei 12.–**

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

8

TOMUL 20

1968

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACŢIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAŞ — secretar de redacţie.

La revue „STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE" paraît 10 fois par an. Le prix d'un abonnement annuel est de $ 10. —; FF 49. —; D.M. 40.—.
Toute commande de l'étranger sera adressée à CARTIMEX, Boîte postale 134—135 Bucarest, Roumanie, ou à ses représentants à l'étranger.
En Roumanie, vous pourrez vous abonner par les bureaux de poste ou chez votre facteur.
În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondenţă, se trimit la Comitetul de redacţie al revistei pe adresa: Str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

F 762

TOM. 20, Nr. 8
1968

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

SUMAR

Pag.

C. APOSTOL și F. GÎNDAC, Proprietăți algebrice ale rădăcinilor operatorilor spectrali 1115
KARIN BRANTSCH și DORINA PASCU, Asupra mersului la întîmplare restrîns 1119
ION CUCUREZEANU, Imposibilitatea rezolvării ecuației diofantice $1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (m-1)^n = m^n$, unde $m,n > 1$ 1125
L. DINU, Asupra mișcării Couette magnetice cu un perete permeabil 1131
IRINEL DRĂGAN, Un algoritm lexicografic pentru rezolvarea programelor polinomiale în variabile binare 1135
D. FIRESCU, A. MUJA și A. DOBRE, Un model de așteptare pentru o problemă de aprovizionare 1147
ELENA FRĂȚILĂ, O metodă statistică pentru calculul lungimii unui arc de curbă plană 1153
VASILE ISTRĂȚESCU, Operatori hyponormali (III) 1159
B. JANKÓ, F. FORNVALD și A. GAIDICI, Asupra metodei lui Newton aplicată la rezolvarea ecuațiilor funcționale neliniare 1169
RADU MIRON, Derivata Lie a obiectelor geometrice Ω^(ξ,T) 1175
IOAN POP, Mișcarea hidromagnetică nestaționară cu sucțiune deasupra unui perete 1183
ELENA STROESCU, Ecuația lui Pfaff în sensul teoriei distribuțiilor (I) 1189
MIHAI ȘABAC, Asupra structurii operatorilor liniari și continui definiți pe $\mathcal{D}'$, cu valori în $\mathcal{D}'$, care invariază subspațiul liniar al distribuțiilor definite de funcții local integrabile . . . 1193
MIHAI ȘABAC, Asupra structurii idealelor maximale ale unei algebre de funcții mărginite 1203
I. VĂDUVA, Contribuții la teoria estimațiilor statistice ale densităților de repartiție și aplicații 1207
G. G. VRĂNCEANU, Asupra grupului de mișcare a spațiului octavelor 1277

ST.CERC. MAT. TOM. 20, NR. 8, P. 1113–1284, BUCUREȘTI, 1968

PROPRIETĂŢI ALGEBRICE ALE RĂDĂCINILOR OPERATORILOR SPECTRALI

DE

C. APOSTOL şi F. GÎNDAC

Fie $\mathfrak{X}$ un spaţiu Banach, f o funcţie olomorfă şi S un operator spectral. Se studiază proprietăţile algebrice ale mulţimilor comutative de soluţii ale ecuaţiei $f(X) = S$.

Introducere. Fie $\mathfrak{X}$ un spaţiu Banach, $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ algebra operatorilor liniari şi mărginiţi în $\mathfrak{X}$ şi $S \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ un operator spectral (scalar) în sensul lui Dunford. Fie f o funcţie complexă, analitică într-o mulţime deschisă G, astfel încît $f'(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in G$ şi $\sigma(S) \subset f(G)$. În această notă se arată că algebra uniform închisă generată de o mulţime finită de rădăcini ale ecuaţiei $f(X) = S$, care comută între ele, este o algebră de operatori de aceeaşi natură cu S (teorema 2).

*

Fie $S \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ un operator spectral (scalar). Vom nota cu $f^{-1}(S) = \{T \mid T \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}),\ \sigma(T) \subset G,\ f(T) = S\}$. De asemenea prin $|S|$ vom nota norma lui S, iar prin $|S|_{sp}$ raza spectrală a lui S (VII.3.5 [3]).

1. LEMĂ. *Fie $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ un operator spectral (scalar), $\{f_n\}_1^\infty$ un şir de funcţii analitice într-o vecinătate a lui $\sigma(T)$. Dacă $f_n(T) \to U$, în topologia normei, atunci U este un operator spectral (scalar).*

Demonstraţie. Vom considera întîi că T este un operator scalar şi vom arăta că U este scalar. Într-adevăr, avem $f_n \xrightarrow{\text{unif.}} \varphi$ pe $\sigma(T)$ (VII.5.32 [3]). Notînd cu E rezoluţia identităţii lui T, deoarece φ este continuă, $\varphi(T) = \int \varphi(\lambda) E(d\lambda)$ va fi un operator scalar (lema 4.6[2]) şi, folosind inegalităţile :

$$|U - \varphi(T)| \leqslant |U - f_n(T)| + |\int (f_n(\lambda) - \varphi(\lambda)) E(d\lambda)| \leqslant$$
$$\leqslant |U - f_n(T)| + \text{var. } E \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |f_n(\lambda) - \varphi(\lambda)|$$

obţinem $U = \varphi(T)$, deci U este operator scalar.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 8, P. 1115–1117, BUCUREŞTI, 1968

Dacă T este spectral, atunci $T = S + N$, unde S este operator scalar iar N un nilpotent generalizat care comută cu S (Th.3.8 [2]). Cum avem $f_n(T) = f_n(S) + N_n$, unde N_n este un nilpotent generalizat ce comută cu S şi T, din inegalităţile :

$$\begin{aligned} &| U - \varphi(S) |_{sp} \leqslant | U - f_n(T) |_{sp} + | f_n(T) - \varphi(S) |_{sp} = | U - f_n(T) |_{sp} + \\ &\quad + | f_n(S) + N_n - \varphi(S) |_{sp} = | U - f_n(T) |_{sp} + | f_n(S) - \varphi(S) |_{sp} \leqslant \\ &\quad \leqslant | U - f_n(T) | + | f_n(S) - \varphi(S) |. \end{aligned}$$

rezultă $| U - \varphi(S) |_{sp} = 0$. Notînd $U - \varphi(S) = Q$, avem $U = \varphi(S) + Q$, cu Q nilpotent generalizat ce comută cu $\varphi(S)$, deci U este operator spectral (Th. 3.8 [2]). c.c.t.d.

2. TEOREMĂ. *Fie $S \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ un operator spectral (scalar), $\mathfrak{F} \subset f^{-1}(S)$ o mulţime finită de operatori care comută între ei. Atunci algebra uniform închisă generată de $\mathfrak{F}$ este o algebră de operatori spectrali (scalari).*

Demonstraţie. Se ştie (teorema 3 [1]) că $(\forall) T \in f^{-1}(S)$ este un operator spectral (scalar). Fie $\{T_i\} = \mathfrak{F}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Trebuie să arătăm că orice polinom $p(T_1, T_2, \ldots, T_m)$ şi limite de astfel de polinoame sînt operatori spectrali. Vom arăta mai întîi că putem presupune că $\sigma(T_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ este conţinut într-un domeniu simplu conex pe care f este biunivocă. Într-adevăr, fie $\bigcup_{i=1}^{n_1} \sigma_i = \sigma(T_1)$ o acoperire finită a lui $\sigma(T_1)$ cu mulţimi boreliene disjuncte şi avînd diametrele $d(\sigma_i)$ mai mici decît distanţa de la $\sigma(T_1)$ la $\complement G$. Să luăm acum un disc $D_i \subset G$, cu raza r_i, unde $d(\sigma_i) < r_i < d$, astfel ca $\sigma'_i \subset \text{int. } D_i$. Deoarece $f'(\lambda) \neq 0$ pentru orice $\lambda \in G$, vom putea lua $d(\sigma_i)$ şi r_i suficient de mici astfel ca $f | D_i$ să fie biunivocă. Să notăm cu E_i măsura spectrală a lui $T_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Deoarece T_j comută cu E_i, $(\forall)\, i$ şi j (Th. 3.5 [2]). vom avea :

$T_j = \bigoplus_{i=1}^{n_1} (T_j | E_1(\sigma_i)\mathfrak{X})$ şi $f(T_j | E_1(\sigma_i)\mathfrak{X}) = S | E_1(\sigma_i)\mathfrak{X}$ $(j = 1, 2, \ldots, n;$ $i = 1, 2, \ldots, n_1)$. Însă $p(T_1, T_2, \ldots, T_n) = \bigoplus_{i=1}^{n_1} (p(T_1, \ldots, T_n) | E_1(\sigma_i)\mathfrak{X}) = \bigoplus_{i=1}^{n_1} p(T_1 | E_1(\sigma_i)\mathfrak{X}, \ldots, T_n | E_1(\sigma_i)\mathfrak{X})$ şi deci este suficient să arătăm că $p(T_1 | E_1(\sigma_i)\mathfrak{X}, \ldots, T_n | E_1(\sigma_i)\mathfrak{X})$ şi limite de astfel de polinoame sînt spectrali pentru $1 \leqslant i \leqslant n_1$, fixat.

Deoarece avem $\sigma(T_1 | E_1(\sigma_i)\mathfrak{X}) \subset \bar{\sigma}_i \subset D_i$, am redus problema la cazul cînd $\sigma(T_1) \subset G_1$ cu G_1 simplu conex şi $f | G_1$ biunivocă. Continuînd raţionamentul, după un număr finit de paşi vom obţine rezultatul dorit. Deci putem presupune $\sigma(T_i) \subset G_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ cu G_i simplu conex şi $f | G_i$ aplicaţie biunivocă. Să notăm cu $f_i = f | G_i$. Deoarece f_i sînt biunivoce, avem $f_1(T_1) = S$, $T_j = f_j^{-1}(S)$ $(j = 2, \ldots, n)$. Rezultă $p(T_1, T_2, \ldots, T_n) = p(T_1, f_2^{-1}(f_1(T_1)), \ldots, f_n^{-1}(f_1(T_1)) = F(T_1)$, cu F funcţie analitică. Deci $p(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ este operator spectral (scalar) (lema 4.5 [2]).

Să arătăm acum că limita oricărui şir de operatori de forma de mai sus este un operator spectral (scalar). Cum unui şir $\{p_k\}_1^\infty$ de polinoame în $(T_1, \ldots, T_n)$ îi va corespunde conform raţionamentului precedent un șir de funcții analitice $\{F_k\}_1^\infty$ astfel ca $p_k(T_1,\ldots,T_n) = F_k(T_1)$ și $F_k(T_1) \to U$, din lema 1 rezultă că U este spectral (scalar) și demonstrația este terminată.

Primită la redacție la 9 martie 1968

— Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
str. M. Eminescu nr. 47, București
— Institutul politehnic
,,Gheorghe Gheorghiu-Dej'',
București, Str. Polizu nr. 1

ALGEBRAIC PROPERTIES OF THE ROOTS OF SPECTRAL OPERATORS

(ABSTRACT)

Let $\mathfrak{X}$ be a Banach space, f an analytic complex function and S a given spectral operator. We show that a finite set of commuting roots of the equation $f(X) = S$, generates an algebra of spectral operators.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Apostol, *On the roots of spectral operator-valued analytic functions.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **13** (1968).
2. N. Dunford, *Spectral operators.* Pac. Journ. Math., **4**, 321–3 (1954).
3. N. Dunford, J. P. Schwartz, *Linear Operators.* I. Interscience Publ., New York, 1958.
4. S. Kurepa, *Logarithms of spectral type operators.* Glas. Mat. Fiz., **18**, 53–57 (1963).
5. — *On operator-roots of analytic functions.* Glas. Mat. Fiz., **18**, 49–57 (1963).
6. J. G. Stampeli, *Roots of scalar operators.* Proc. Amer. Math. Soc., **13**, 696–798 (1962).

ASUPRA MERSULUI LA ÎNTÎMPLARE RESTRÎNS

DE

KARIN BRANTSCH ȘI DORINA PASCU

În această Notă se arată că ecuația cu diferențe caracterizînd mersul la întîmplare pe o rețea bidimensională, își păstrează forma cînd se trece la o rețea tridimensională.

1. Mersul la întîmplare restrîns se poate aplica cu rezultate importante în studiul problemelor de fizică sau de chimie fizică, cum sînt acelea ale corpurilor cu mare polimerizare. Ideea inițială a acestor modele de mers la întîmplare aparține lui W. Kuhn, care în articolul său, [1], a propus-o pentru studiul structurii macromoleculelor filiforme din anumite soluții.

O. Onicescu [2] a definit un model de mers la întîmplare restrîns pentru lanțurile chimice de polimeri. Ecuația cu diferențe stabilită în [2], p. 156, pentru cazul unei rețele bidimensionale și care definește mersul la întîmplare corespunzător, este de ordinul doi în variabila timp și de ordinul patru în variabila spațială.

2. Fie o rețea echidistantă în spațiul cu trei dimensiuni și fie $M(i, j, k)$ un nod al acestei rețele la care trebuie să ajungem prin drumuri simple. Un astfel de drum este caracterizat prin aceea că „particula" nu mai trece printr-un punct în care a fost, iar probabilitatea de a ajunge într-unul din punctele accesibile este aceeași.

Să notăm cu $M_1(i, j, k+1)$, $M_2(i, j, +1, k)$, $M_3(i, j, k-1)$, $M_4(i, j-1, k)$, $M_5(i-1, j, k)$ și $M_6(i+1, j, k)$ punctele vecine cu M. Împărțim drumurile simple de lungime n, care pornesc dintr-un punct inițial O și ajung în M în două părți : drumuri care duc în $n-1$ pași de la O la $M_i (1 \leqslant i \leqslant 6)$ și drumuri care duc de la M_i la M. Facem raționamentul doar pentru unul dintre punctele vecine cu M. În mod analog se obțin celelalte drumuri.

Drumurile care duc din punctul O în $n-1$ pași în punctul M_1 se împarte la rîndul lor în următoarele părți :

(I) $E_{M N_1 N_2 N_3 N_4}(n-1, M_1)$ drumuri care pornesc din O și ajung în M_1 trecînd prin L_1 ; indicii inferiori indică punctele care n-au fost atinse în cei $n-1$ pași. Sînt în total $C_5^4 = 5$ astfel de drumuri.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 8, P. 1119–1123, BUCUREȘTI, 1968

(II) $E^{N_4}_{M N_1 N_2 N_3}(n-1, M_1)$, $E^{L_1}_{M N_1 N_2 N_3}(n-1, M_1)$, unde $E^{N_4}_{M N_1 N_2 N_3}(n-1\ M_1)$ sînt drumurile care pornesc din O şi ajung în M_1 după $n-1$ paşi, trecînd prin N_4, iar într-un moment anterior prin L_1 fără să treacă prin punctele M, N_1, N_2, N_3. Sînt în total $C_5^3 \cdot C_2^1 = 20$ astfel de drumuri.

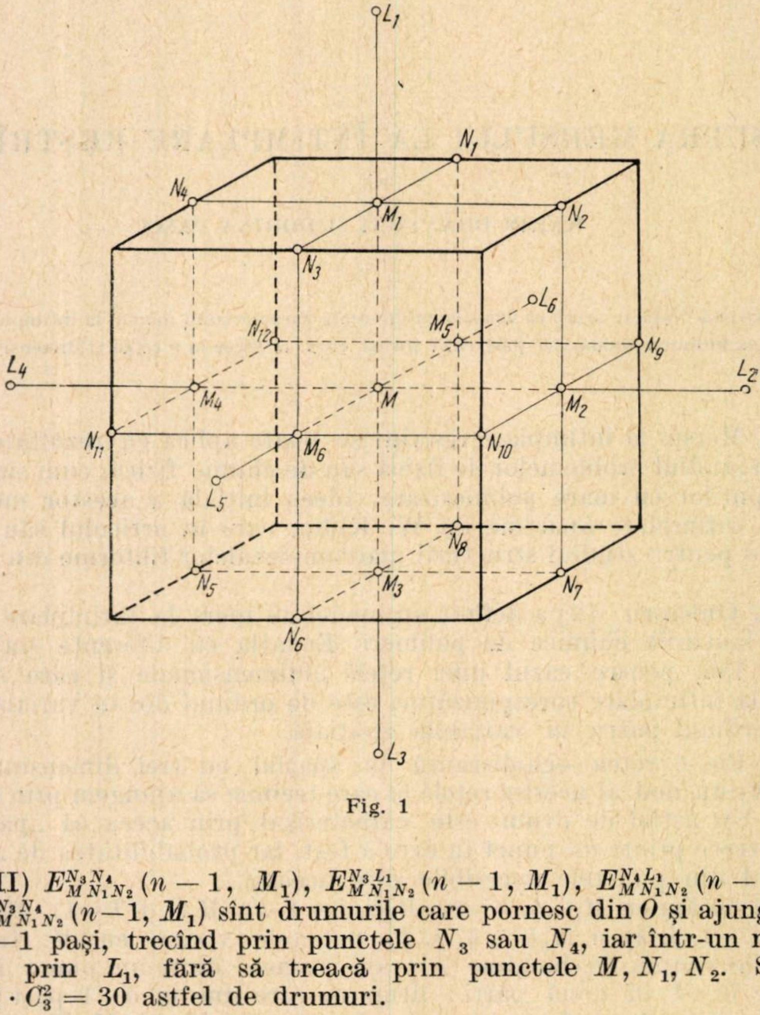


Fig. 1

(III) $E^{N_3 N_4}_{M N_1 N_2}(n-1,\ M_1)$, $E^{N_3 L_1}_{M N_1 N_2}(n-1, M_1)$, $E^{N_4 L_1}_{M N_1 N_2}(n-1, M_1)$, unde $E^{N_3 N_4}_{M N_1 N_2}(n-1, M_1)$ sînt drumurile care pornesc din O şi ajung în M_1 după $n-1$ paşi, trecînd prin punctele N_3 sau N_4, iar într-un moment anterior prin L_1, fără să treacă prin punctele M, N_1, N_2. Sînt în total $C_5^2 \cdot C_3^2 = 30$ astfel de drumuri.

(IV) $E^{N_2 N_3 N_4}_{M N_1}(n-1, M_1)$, $E^{N_2 N_3 L_1}_{M N_1}(n-1, M_1)$, $E^{N_3 N_4 L_1}_{M N_1}(n-1, M_1)$, unde $E^{N_2 N_3 N_4}_{M N_1}(n-1, M_1)$ sînt drumurile care pornesc din O şi ajung în M_1 după $n-1$ paşi, trecînd prin unul din punctele N_2, N_3, N_4, iar în momente anterioare prin celelalte puncte, fără să treacă prin punctele M, N_1. Sînt în total $C_5^1 \cdot C_4^3 = 20$ astfel de drumuri.

(V) $E^{N_1 N_2 N_3 N_4}_{M}(n-1, M_1)$ drumuri care pornesc din O şi ajung în M_1 în $n-1$ paşi, trecînd prin unul din punctele N_1, N_2, N_3, N_4, iar în momente anterioare prin celelalte puncte, fără să treacă prin M. Sînt în total $C_5^0 \cdot C_5^4 = 5$ astfel de drumuri.

3. Probabilitatea drumurilor din (I) este

$$P[E_{MN_1N_2N_3N_4}(n-1, M_1)] = P\{E_M(n-1, M_1) \cap E_{N_1}(n-1, M_1) \cap$$
$$\cap E_{N_2}(n-1, M_1) \cap E_{N_3}(n-1, M_1) \cap E_{N_4}(n-1, M_1)\}.$$

dar

$$E_M(n-1, M_1) = E(n-1, M_1) - E^M(n-1, M_1) = E(n-1, M_1) -$$
$$- E(n-2, M) \cap E(n-1, M_1).$$

Relații analoge se obțin și pentru drumurile situate între acolade.

Iar

$$P[E_M(n-1, M_1)] = P[E(n-1, M_1)] - P[E(n-2, M)] \cdot P[E(n-1, M_1)] =$$
$$= P[E(n-1, M_1)]\{1 - P[E(n-2, M)\}.$$

Notăm

$$P[E(n-1, M_1)] = P(n-1, M_1);$$

atunci

$$P[E_M(n-1, M_1)] = P(n-1, M_1)[1 - P(n-2, M)].$$

Înlocuind pe M respectiv cu N_1, N_2, N_3, N_4, obținem probabilitățile celorlalte drumuri. Ținînd seama de faptul că probabilitatea unei intersecții de evenimente independente este egală cu produsul probabilităților evenimentelor respective, avem

$$P[E_{MN_1N_2N_3N_4}(n-1, M_1)] = P^5(n-1, M_1)[1 - P(n-2, M)] \cdot$$
$$\cdot [1 - P(n-2, N_1)] \cdot [1 - P(n-2, N_2)] \cdot [1 - P(n-2, N_3)] \cdot [1 - P(n-2, N_4)].$$

Pentru a afla probabilitățile drumurilor din (II), (III), (IV), (V) procedăm în mod analog și obținem

$$\text{II } P[E^{N_4}_{MN_1N_2N_3}(n-1, M_1)] = P^5(n-1, M_1)[1 - P(n-2, M)][1 - P(n-2, N_1)] \cdot$$
$$\cdot [1 - P(n-2, N_2)][1 - P(n-2, N_3)] \cdot P(n-2, N_4)$$

$$\text{III } P[E^{N_3N_4}_{MN_1N_2}(n-1, M_1) = P^5(n-1, M_1)[1 - P(n-2, M)[1 - P(n-2, N_1)] \cdot$$
$$\cdot [1 - P(n-2, N_2)] \cdot P(n-2, N_3) \cdot P(n-2, N_4)$$

$$\text{IV } P[E^{N_2N_3N_4}_{MN_1}(n-1, M_1) = P^5(n-1, M_1) \cdot [1 - P(n-2, M)] \cdot$$
$$\cdot [1 - P(n-2, N_1)] \cdot P(n-2, N_2) \cdot P(n-2, N_3) \cdot P(n-2, N_4)$$

$$\text{V } P[E^{N_2N_3N_4}_{MN_1}(n-1, M_1) = P^5(n-1, M_1)[1 - P(n-2, M)] \cdot P(n-2, N_1) \cdot$$
$$\cdot P(n-2, N_2) \cdot P(n-2, N_3) \cdot P(n-2, N_4).$$

4. Să observăm acum că drumurile care ajung în M trecînd prin M_1 se pot scrie ca o reuniune de forma

$$G_1 = \{[\cup E_{MN_1N_2N_3N_4}(n-1, M_1)] \cup [\cup E^{N_4}_{MN_1N_2N_3}(n-1, M_1)] \cup$$
$$\cup [\cup E^{N_3N_4}_{MN_1N_2}(n-1, M_1)] \cup [\cup E^{N_2N_3N_4}_{MN_1}(n-1, M_1)] \cup$$
$$\cup [\cup E^{N_1N_2N_3N_4}_{M}(n-1, M_1)]\} \cap E(M_1, M)$$

şi deci probabilitatea corespunzătoare este egală cu

$$P(G_1) = P^5(n-1, M_1)\left\{\frac{1}{5}\Sigma P[E_{MN_1N_2N_3N_4}(n-1, M_1)] + \right.$$

$$+ \frac{1}{4}\Sigma P[E^{N_4}_{MN_1N_2N_3}(n-1, M_1)] + \frac{1}{3}\Sigma P[E^{N_3N_4}_{MN_1N_2}(n-1, M_1)] +$$

$$\left. + \frac{1}{2}\Sigma P[E^{N_2N_3N_4}_{MN_1}(n-1, M_1) + \Sigma P[E^{N_1N_2N_3N_4}_{M}(n-1, M_1)]\right\}$$

unde sumele se referă la toate drumurile din categoriile respective.

Vom scrie această relaţie sub forma :

$$P(G_1) = P^5(n-1, M_1) \cdot Q(n-2, M_1)$$

Considerînd acum în mod analog drumurile ce vin în M prin M_2^2, M_3, M_4, M_5, M_6, obţinem

$$E(n, M) = \bigcup_{i=1}^{6} G_i .$$

Deci

$$P(n, M) = \sum_{i=1}^{6} P^5(n-1, M_i)\, Q(n-2, M_i) .$$

Această ecuaţie cu diferenţe determină probabilităţile căutate din aproape în aproape. Deoarece această ecuaţie conţine probabilităţile la momentele n, $n-1$, $n-2$, ea este de ordinul doi în variabila temporală. Datorită faptului că în această ecuaţie apar cele şase puncte vecine cu M şi punctele $N_1(i-1, j, k+1)$ $N_2(i, j+1, k+1)$, $N_3(i+1, j, k+1)$, $N_4(i, j-1, k+1)$, $N_5(i, j-1, k-1)$, $N_6(i+1, j, k-1)$, $N_7(i, j+1, k-1)$, $N_8(i-1, j, k-1)$, $N_9(i-1, j+1, k)$, $N_{10}(i+1, j+1, k)$, $N_{11}(i+1, j-1, k)$, $N_{12}(i-1, j-1, k)$, $L_1(i, j, k+2)$, $L_2(i, j+2, k)$, $L_3(i, j, k-2)$, $L_4(i, j-2, k)$, $L_5(i+2, j, k)$, $L_6(i-2, j, k)$, ea este de ordinul patru în variabila spaţială.

5. Printr-un procedeu analog se poate arăta că această ecuaţie în spaţiul cu N-dimensiuni devine

$$P(n, M) = \sum_{i=1}^{2N} P^{2N-1}(n-1, M_i) \cdot Q(n-2, M_i)$$

deoarece în acest caz în jurul punctului M vor fi $2N$ puncte vecine. Numărul termenilor din expresia probabilităţii $Q(n-2, M_i)$, stabilit prin recurenţă, este dat de suma

$$C^{2N-2}_{2N-1}\, C^0_1 + C^{2N-3}_{2N-1} \cdot C^1_2 + \ldots + C^0_{2N-1} \cdot C^{2N-2}_{2N-1}$$

Primită la redacţie la 20 decembrie 1967

Institutul politehnic Braşov

BESCHRÄNKTE ZUFÄLLIGE WEGE

(ZUSAMMENFASSUNG)

In diesem Bericht haben wir die Wahrscheinlichkeitsformel eines Körpers, der sich auf einem Netz im dreidimensionalen Raume befindet und der die Entfernung zwischen einem festen Punkt 0 und einem beliebigen Punkt M durch einfache Wege zurücklegt, abgeleitet.

Wir haben festgestellt, daß die Gleichung mit Differenzen, die die zufälligen Wege auf einem zweidimensionalen Netz charakterisiert, ihre Form beibehält, wenn man zu einem dreidimensionalen Netz übergeht.

Darauf haben wir die Anzahl der Glieder der Wahrscheinlichkeitsformel für den allgemeinen Fall eines Netzes im n-dimensionalen Raum berechnet.

BIBLIOGRAFIE

1. W. Kuhn, *Über die Gestalt fadenförmiger Moleküle in Lösungen.* Kolloid. Zeitschr., **68**, 2–24 (1934).
2. O. Onicescu, *Numere şi sisteme aleatoare.* Ed. Academiei, Bucureşti, 1962, p. 127–165.

IMPOSIBILITATEA REZOLVĂRII ECUAȚIEI DIOFANTICE $1^n + 2^n + 3^n + \cdots + (m-1)^n = m^n$, UNDE $m, n > 1$

DE

ION CUCUREZEANU
(Constanța)

Se demonstrează că ecuația

$$1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (m-1)^n = m^n$$

nu admite soluții în numere naturale m, $n > 1$.

P. Erdös a enunțat ipoteza că ecuația de mai sus nu admite soluții în numere naturale m și $n > 1$.

L. Moser a demonstrat în [2] că nu există astfel de soluții dacă $m \leqslant 10^{10^6}$ și oricare ar fi $n > 1$.

Problema dacă ecuația respectivă admite sau nu soluții figurează de asemenea în lista celor 100 probleme dificile de aritmetică întocmită de W. Sierpinski la numărul 80 din [1].

În cele ce urmează ne propunem să demonstrăm că această ecuație nu admite soluții pentru m și $n > 1$ întregi.

Demonstrație. Dacă $m = 4k + 1$ și oricare ar fi n ecuația nu admite soluții fiindcă membrul stîng al ecuației este un număr par obținut din adunarea a $2k$ termeni pari și $2k$ termeni impari în timp ce membrul drept este impar.

Dacă $m = 4k + 2$ și oricare ar fi n ecuația de asemenea nu admite soluții, membrul drept fiind număr par iar membrul stîng număr impar.

Pentru ceea ce urmează vom avea nevoie de următoarea :

Observație. Dacă n este par, atunci

$$2^p \nmid 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (2^p)^n$$

oricare ar fi p.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 8, P. 1125–1129, BUCUREȘTI, 1968

Într-adevăr, fie

$$S_p = 1^n + 2^n + 3^n + \dots + (2^p)^n.$$

Avem

$$S_p = 1^n + 2^n + \dots + (2^{p-1})^n + (2^{p-1} + 1)^n + (2^{p-1} + 2)^n + \dots +$$
$$+ (2^{p-1} + 2^{p-1})^n = 2\,[1^n + 2^n + 3^n + \dots + (2^{p-1})^n] +$$
$$+ \mathcal{M}2^p = 2S_{p-1} + \mathcal{M}2^p.$$

De asemenea

$$(2^{p-1} + k)^n = (2^{p-1})^n + C_n^1 (2^{p-1})^{n-1} k + \dots + C_n^{n-1} 2^{p-1} k^{n-1} +$$
$$+ k^n \ (k = 1, 2, 3, \dots, 2^{p-1}).$$

Deoarece primii $n-1$ termeni din dezvoltarea după binomul lui Newton conţin pe 2^{p-1} la putere $\geqslant 2$ iar termenul $C_n^{n-1} 2^{p-1} k^{n-1}$ se divide prin 2^p fiindcă C_n^{n-1} este par, n fiind par deducem

$$(2^{p-1} + k)^n = \mathcal{M}2^p + k^n$$

Deci

$$S_p = 2S_{p-1} + \mathcal{M}2^p$$

oricare ar fi p.

Obţinem prin recurenţă :

$$S_p = 2^2 S_{p-2} + \mathcal{M}2^p = 2^3 S_{p-3} + \mathcal{M}2^p = \dots = 2^{p-1} S_1 + \mathcal{M}2^p =$$
$$= 2^{p-1}(1 + 2^n) + \mathcal{M}2^p = 2^{p-1} + 2^p A = 2^{p-1}(2A + 1)$$

de unde se vede că $2^p \times S_p$.

Fie $m = 4k$ şi n impar. Ecuaţia este :

$$1^n + 2^n + 3^n + \dots + (4k-2)^n + (4k-1)^n = (4k)^n.$$

Primii $4k-2$ termeni din membrul stîng îi grupăm în $2k-1$ grupe de cîte doi termeni egal depărtaţi de extremi şi ţinînd seamă că dacă n este impar, $a + b / a^n + b^n$ avem :

$$p^n + (4k-p-1)^n = (4k-1) A_p \qquad p = 1, 2, \dots, 2k-1.$$

Găsim deci că membrul stîng al ecuaţiei se divide prin $4k-1$ în timp ce membrul drept nu se divide. (Avem $(4k)^n = (4k-1+1)^n = \mathcal{M}(4k-1) + 1$). Deci ecuaţia nu admite soluţii nici în acest caz.

Fie $m = 4k$ şi n par.

Putem scrie pe m astfel : $m = 2^p q$, unde q este impar.

Ecuația este în acest caz

$$1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (2^p q-1)^n = (2^p q)^n$$

sau

$$(*)\quad 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (2^p q)^n = 2\,(2^p q)^n.$$

Membrul stîng îl scriem în q grupe de cîte 2^p termeni și folosind dezvoltarea după binomul lui Newton găsim :

$$1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (2^p q)^n = 1^n + 2^n + \ldots + (2^p)^n + (2^p + 1)^n +$$
$$+ (2^p + 2)^n + \ldots + (2^p + 2^p)^n + \ldots + [2^p(q-1) + 1]^n +$$
$$+ [2^p(q-1) + 2]^n + \ldots + [2^p(q-1) + 2^p]^n = q\,[1^n + 2^n +$$
$$+ 3^n + \ldots + (2^p)]^n + \mathcal{M}2^p \text{ (fiindcă } (2^p r + s)^n = \mathcal{M}2^p + s^n \text{, unde avem}$$
$$1 \leqslant r \leqslant q-1 \text{ și } s = 1, 2, \ldots, 2^p).$$

Deci membrul stîng al ecuației $(*)$, conform observației, nu se divide prin 2^p, q fiind impar, în timp ce membrul drept este evident divizibil prin 2^p. Deci ecuația nu admite soluții nici în acest caz.

Fie $m = 4k + 3$ și n impar.

Ecuația este

$$1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (4k)^n + (4k + 1)^n + (4k + 2)^n = (4k + 3)^n.$$

Grupăm termenii impari de pînă la $(4k)^n$ din membrul stîng și care sînt în număr de $2k$ în grupe de cîte doi egal depărtați de extremi și ținînd seamă că $a + b/a^n + b^n$ pentru n impar, găsim că membrul stîng este $\mathcal{M}4 + (4k + 1)^n = \mathcal{M}4 + 1$. Membrul drept este : $(4k + 3)^n = (4k + 4-1)^n = \mathcal{M}4-1$, n fiind impar. Și cum nu putem avea $\mathcal{M}4 + 1 = \mathcal{M}4-1$, ecuația nu admite soluții nici în acest caz.

Fie $m = 4k + 3$ și n par.

Avem $m = 2^p q + 3$, unde q este impar iar $p \geqslant 2$.

Ecuația este în acest caz :

$$1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (2^p q)^n + (2^p q + 1)^n + (2^p q + 2)^n = (2^p q + 3)^n$$

sau

$$(**)\ 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (2^p q)^n = (2^p q + 3)^n - (2^p q + 1)^n - (2^p q + 2)^n.$$

Membrul stîng al acestei ecuații este același cu membrul stîng al ecuației $(*)$ de la cazul $m = 4k$ și n par și conform raționamentului de acolo, el nu se divide prin 2^p oricare ar fi p.

Membrul drept al ecuației $(**)$ se divide prin 2^n. Într-adevăr, primii doi termeni ai membrului drept dau:

$$(2^pq+3)^n-(2^pq+1)^n=(2^pq+3)^{2n'}-(2^pq+1)^{2n'}=2^{n'}(2^{p+1}q+4)^{n'}=$$
$$=2^{2n'}(2^pq+2)^{n'}=2^n(2^pq+2)^{n'},$$

unde $n=2n'$.

Cum membrul stîng al ecuației $(**)$ nu se divide prin 2^p, iar membrul drept se divide prin 2^n, obținem o contradicție întrucît $n \geqslant p$ oricare ar fi p.

Într-adevăr, din ecuația $(**)$ deducem:

$$(2^pq+3)^n > (2^pq+2)^n+(2^pq+1)^n+(2^pq)^n$$

sau

$$\left(1+\frac{3}{2^pq}\right)^n > \left(1+\frac{2}{2^pq}\right)^n+\left(1+\frac{1}{2^pq}\right)^n+1>3.$$

Logaritmăm

$$n\ln\left(1+\frac{3}{2^pq}\right)>\ln 3>1. \tag{1}$$

Însă

$$\frac{1}{k+1}<\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)<\frac{1}{k} \text{ oricare ar fi } k \text{ natural.} \tag{2}$$

Din (1) și 2) găsim:

$$n\frac{3}{2^pq}>1$$

sau

$$3n>2^pq\geqslant 2^p \Rightarrow n>\frac{2^p}{3}>\frac{2^p}{4}=2^{p-2}$$

deci

$$n>2^{p-2}.$$

Din ultima inegalitate deducem că pentru $p\geqslant 2$ avem $n\geqslant p$ și deci contradicția anunțată.

Primită la redacție la 2 februarie 1968

Institutul pedagogic Constanța

L'IMPOSSIBILITÉ À RÉSOUDRE L'ÉQUATION DIOPHANTINE

$1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (m-1)^n = m^n$ où $m, n > 1$

(RÉSUMÉ)

On y donne une démonstration élémentaire de l'impossibilité à résoudre l'équation diophantine :

$$1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (m-1)^n = m^n$$

en nombre naturels m, $n > 1$.

BIBLIOGRAFIE

1. W. Sierpinski, *Ce știm și ce nu știm despre numerele prime.* Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1966, pg. 190.
2. L. Moser, *On the diophantine equation* $1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (m-1)^n = m^n$. Scripta Math., **19**, 84–88 (1953).
3. J. Scaffer, *The equation* $1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p = m^q$. Acta mathematica, **95**, 156–189 (1956).

ASUPRA MIȘCĂRII COUETTE MAGNETICE CU UN PERETE PERMEABIL

DE

L. DINU

În lucrarea [1] se dă o generalizare a studiului mișcării Couette presupunîndu-se unul din pereți permeabil. Aici se va considera în plus acțiunea cîmpului magnetic.

Problema este următoarea : unul dintre pereți se deplasează cu viteza U, iar celălalt perete este fix și prin el are loc un proces uniform de sucțiune sau injecție. Fluidul este presupus incompresibil iar mișcarea, staționară.

Vom aplica acestui caz ecuațiile stratului limită (numere Reynolds magnetice mari) presupunînd că ne aflăm în condiții care permit acest lucru [2], [3] :

$$u\frac{\partial H_x}{\partial x}+v\frac{\partial H_x}{\partial y}+H_x\frac{\partial v}{\partial y}-H_y\frac{\partial u}{\partial y}=\nu_m\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} \tag{1}$$

$$u\frac{\partial H_y}{\partial x}+v\frac{\partial H_y}{\partial y}-H_x\frac{\partial v}{\partial x}+H_y\frac{\partial u}{\partial x}=-\nu_m\frac{\partial^2 H_x}{\partial x\partial y} \tag{2}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\mu}{\rho}H_y\frac{\partial H_x}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p_0}{dx}+\frac{\mu}{\rho}H_x\frac{\partial H_x}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{4}$$

unde s-a notat

$$p+\frac{1}{2}\mu H_x^2=p_0(x). \tag{5}$$

Aici $p_0(x)$ este presiunea în afara stratului limită și se presupune cunoscută pentru studiul stratului limită.

S-au făcut următoarele notații : ν este coeficientul de vîscozitate cinematică, ν_m coeficientul de vîscozitate magnetică, iar μ, permeabilitatea magnetică a fluidului.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 8, P. 1131–1133 BUCUREȘTI, 1968

Vom trece la variabilele adimensionale :

$$\overline{u} = \frac{u}{U}, \ \overline{v} = \frac{v}{U}, \ \overline{x} = \frac{x}{a}, \ y = \frac{y}{a}, \ \overline{H}_x = \frac{H_x}{H_0}, \ \overline{H}_y = \frac{H_y}{H_0},$$

$$\mathcal{R}e = \frac{U_a}{\nu}, \ M = \mu H_0 a \left(\frac{\sigma}{\rho\nu}\right)^{\frac{1}{2}}, \ \mathcal{R}e_m = \frac{U_a}{\nu_m}, \tag{6}$$

$$c = \frac{aU}{\rho\nu}\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}x} - \frac{a^2H_0^2}{\nu_m}\,\overline{H}_x\,\overline{H}_y\,\overline{v},$$

unde H_0 este cîmpul transversal uniform în care are loc curgerea, $\mathcal{R}e_m$ este numărul Reynolds magnetic, M este numărul lui Hartmann, iar a este distanţa între peretele mobil şi cel fix.

Vom mai nota cu V_0 viteza de sucţiune (respectiv injecţie) prin peretele fix permeabil.

Pentru acest caz ecuaţiile stratului limită devin :

$$\frac{\mathrm{d}^2\overline{u}}{\mathrm{d}\overline{y}^2} - \overline{v}\,\mathcal{R}e\,\frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}\overline{y}} + 4\,\pi\,M^2\,\overline{H}_y^2\,\overline{u} + c = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\overline{H}_x}{\mathrm{d}\overline{y}^2} - \overline{v}\,\mathcal{R}e_m\,\frac{\mathrm{d}\overline{H}_x}{\mathrm{d}\overline{y}} + \mathcal{R}e_m\,\overline{H}_y^2\,\frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}\overline{y}} = 0 \tag{8}$$

$$\overline{v}\,\frac{\mathrm{d}\overline{H}_y}{\mathrm{d}\overline{y}} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}\overline{y}} = 0. \tag{10}$$

Să observăm mai întîi că în absenţa cîmpului magnetic ecuaţiile (7) şi (10) sînt ecuaţiile scrise în [1].

Pe cei doi pereţi vom pune condiţiile

$$\text{pe} \quad \overline{y} = 0: \quad \overline{u} = 0, \quad \overline{v} = \frac{\mathrm{V}_0}{U} = \overline{v}_0, \ \overline{H}_x = 0, \ \overline{H}_y = 1. \tag{11}$$

$$\text{pe} \quad \overline{y} = 1: \quad \overline{u} = 1.$$

Ecuaţiile (7)—(10) dau atunci :

$$\overline{u} = \frac{\dfrac{c}{v\,\mathcal{R}e} - 1}{\exp\left\{-\dfrac{\sqrt{(\overline{v}\,\mathcal{R}e)^2 - 16\,\pi\,M^2\,\overline{H}_y^2}}{2\,\overline{v}\,\mathcal{R}e}\right\}}\left[\exp\left\{-\frac{\sqrt{(\overline{v}\,\mathcal{R}e)^2 - 16\,\pi\,M^2\,\overline{H}_y^2}}{2\,\overline{v}\,\mathcal{R}e}\,\mathrm{y}\right\} - \right.$$

$$\left. - \exp\left\{-\frac{\sqrt{(\overline{v}\,\mathcal{R}e)^2 - 16\,\pi\,M^2\,\overline{H}_y^2}}{2\,\overline{v}\,\mathcal{R}e}\right\}\right] + \frac{c}{\overline{v}\,\mathcal{R}e}\,[\overline{y} - 1] + 1. \tag{12}$$

Acum, pentru componenta $\overline{H}_x$ a cîmpului, se poate scrie ecuaţia

$$\frac{\mathrm{d}^2\overline{H}_x}{\mathrm{d}^2\overline{y}^2} - \overline{v}\mathcal{R}e_m\frac{\mathrm{d}\overline{H}_x}{\mathrm{d}\overline{y}} + \mathcal{R}e_m\,\overline{H}_y^2\left[\left(\frac{c}{\overline{v}\mathcal{R}e-1}\right)\exp\left(-\frac{\sqrt{(\overline{v}\mathcal{R}e)^2-16\,\pi\,M^2\,\overline{H}_y^2}}{2\,\overline{v}\,\mathcal{R}e}\overline{y}\right)+ \right.$$

$$\left. + \frac{c}{\overline{v}\,\mathcal{R}e}\right] = 0. \tag{13}$$

În afară de aceasta, s-a presupus fireşte că $\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}x}$ este în aproximaţia dată constant, deci că c nu introduce $\overline{x}$.

Studiul acestei probleme depinde, după cum se vede, în mod esenţial de mărimea $\overline{v}\mathcal{R}e$ care caracterizează şi cazul hidrodinamic obişnuit, şi de mărimile care caracterizează prezenţa cîmpului magnetic. Ambele aceste tipuri de mărimi apar în expresia lui c.

Primită la redacţie la 14 decembrie 1967

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

SUR LE MOUVEMENT DE COUETTE MAGNÉTIQUE AYANT UNE PAROI PERMÉABLE

(RÉSUMÉ)

On étudie le mouvement Couette magnétique, dans le cas d'une paroi (la paroi fixe) perméable, l'autre paroi étant imperméable, avec une vitesse de translation U.

Un tel mouvement a été étudié par K. Cramer [1], dans le cas hydrodynamique non magnétique.

On déduit les paramètres qui déterminent le champ du mouvement, en observant que ce problème peut être réduit au problème de Cramer, quand les effets magnétiques son négligeables.

BIBLIOGRAFIE

1. K. R. Cramer, J. A. S., **26**, *2* (1959).
2. A. G. Kulikovski, Д.А.Н. С.С.С.Р., **117**, *2*, 199–202. (1957).
3. Z. O. Bleviss, J. A. S., **25**, *10*, 601–609 (1958).

UN ALGORITM LEXICOGRAFIC PENTRU REZOLVAREA PROGRAMELOR POLINOMIALE ÎN VARIABILE BINARE

IRINEL DRĂGAN

(Iaşi)

În lucrare se formulează un algoritm pentru rezolvarea programelor polinomiale în variabile binare. Ideia centrală a algoritmului este următoarea : se cercetează succesiv mulţimea vectorilor binari, pentru a se distinge soluţia problemei, eliminîndu-se din cercetare anumiţi vectori binari, cu ajutorul unui anumit criteriu. Se arată că procedeul converge.

Fie mulţimea

$$B_n = \{x \mid x = (x_i),\ x_i \in \{0,1\},\ (i = 1,\ldots,n)\};$$

fie polinoamele cu coeficienţi întregi $p_h(x)$, definite pe mulţimea B_n, şi numerele întregi b_h, $(h = 1,\ldots,p)$, care determină submulţimea

$$Z = \{x \mid x \in B_n,\ p_h(x) \geqslant b_h,\ (h = 1,\ldots,p)\},$$

a mulţimii B_n. Vom formula un algoritm pentru rezolvarea problemei (A) : Să se găsească $\hat{x} \in B_n$, astfel ca

$$p_0(\hat{x}) = \sup_{x \in Z} p_0(x),$$

unde $p_0(x)$ este un polinom cu coeficienţi întregi definit pe mulţimea B_n. Cazul cînd toate polinoamele considerate sînt funcţii liniare a fost considerat într-o Notă anterioară, (v. [1]).

§. 1. CÎTEVA DEFINIŢII ŞI PROPRIETĂŢI PRELIMINARE

Fie funcţia

$$N(x) = 2^{n-1} x_1 + 2^{n-2} x_2 + \ldots + 2^0 x_n, \tag{1.1}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 8, P. 1135–1146, BUCUREŞTI, 1968

care realizează o corespondență biunivocă între mulțimea B_n și mulțimea numerelor întregi din intervalul $[0,2^n)$. Mulțimea B_n poate fi ordonată în modul următor:

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow N(x) \leqslant N(y); \tag{1.2}$$

această relație de ordine o vom numi ordinea lexicografică a mulțimii B_n, deoarece are loc propoziția: x precedă y atunci și numai atunci cînd $x_1=y_1,\ldots, x_{i-1}=y_{i-1}$, $x_i \neq y_i$, implică $x_i < y_i$, adică $x_i = 0$, $y_i = 1$.

Funcția $f(x)$ se va numi lexicografic monoton crescătoare (pe scurt l.m.c.) dacă $x \preccurlyeq y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$. Cîteva proprietăți sînt evidente:

P$_1$: Dacă funcțiile $f_k(x)$, $(k = 1,\ldots, s)$, sînt funcții l.m.c. definite pe mulțimea B_n, iar α_k sînt numere reale nenegative, funcția $f(x) = \sum_1^s \alpha_k f_k(x)$ va fi o funcție l.m.c.

P$_2$: Dacă funcțiile $f_k(x)$, $(k = 1,\ldots, s)$, sînt funcții l.m.c. definite pe mulțimea B_n și $f_k(0) \geqslant 0$, $(k = 1,\ldots,s)$, funcția $f(x) = \prod_1^s f_k(x)$ va fi o funcție l.m.c.

P$_3$: Dacă $P(u_1,\ldots, u_s)$ este un polinom cu coeficienți nenegativi și $u_k = f_k(x)$ sînt funcții l.m.c. definite pe mulțimea B_n, astfel ca $f_k(0) \geqslant 0$, $(k = 1,\ldots, s)$, funcția $P[f_1(x),\ldots, f_s(x)]$ va fi o funcție l.m.c. definită pe mulțimea B_n.

Să considerăm funcțiile liniare

$$F_1(x) = x_1,\ F_2(x) = 2^0 x_1 + x_2,\ldots,\ F_n(x) = 2^{n-2} x_1 + \ldots + 2^0 x_{n-1} + x_n, \tag{1.3}$$

definite pe mulțimea B_n.

Funcțiile $F_i(x)$, $(i = 1,\ldots, n)$, sînt funcții l.m.c.

Într-adevăr, fie o funcție oarecare $F_i(x)$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$, și o pereche de elemente x, y din B_n, aflate în situația $x \preccurlyeq y$; există indicele k astfel ca $x_1 = y_1,\ldots, x_{k-1} = y_{k-1}$, $x_k = 0$, $y_k = 1$, de unde deducem

$$F_i(y) - F_i(x) = \begin{cases} 0 & k > i, \\ 1 & k = i, \\ 1 + y_i - x_i & k = i-1, \\ 2^{i-k-1} + \sum\limits_{k+1}^{i-1} 2^{i-h-1}(y_h - x_h) + y_i - x_i & k < i-1. \end{cases} \tag{1.4}$$

Avem

$$\begin{cases} 1 + y_i - x_i \geqslant 0, \\ 2^{i-k-1} + \sum\limits_{k+1}^{i-1} 2^{i-h-1}(y_h - x_h) + y_i - x_i \geqslant 2^{i-k-1} - \sum\limits_{k+1}^{i-1} 2^{i-h-1} - 1 = 0, \end{cases} \tag{1.5}$$

căci $y_h - x_h \geqslant -1$, $(h = 1, \dots, n)$; deci $x \leqslant y$ implică $F_i(y) - F_i(x) \geqslant 0$.

TEOREMA 1. *Orice polinom $p(x)$ cu coeficienți întregi și cu $p(o) = o$ poate fi reprezentat sub forma*

$$p(x) = L(x) - M(x), \tag{1.6}$$

unde $L(x)$ și $M(x)$ sînt polinoame l.m.c. cu coeficienți întregi și cu $L(o) = o$, $M(o) = o$.

Vom demonstra această teoremă în mod constructiv. Funcțiile $F_i(x)$, $(i = 1, \dots, n)$, date de formulele (1.3), definesc transformarea liniară

$$u_i = F_i(x), \qquad (i = 1, \dots, n). \tag{1.7}$$

Se poate verifica faptul că transformarea liniară inversă este dată de formulele

$$x_1 = u_1,\ x_2 = u_2 - u_1,\ x_3 = u_3 - u_1 - u_2, \dots,\ x_n = u_n - \sum_{i<n} u_i. \tag{1.8}$$

Fie $\overline{p}(u)$ polinomul cu coeficienți întregi obținut în urma transformării liniare (1.8); fie $\overline{l}(u)$ suma termenilor cu coeficienți pozitivi și $-\overline{m}(u)$ suma termenilor cu coeficienți negativi. Putem scrie

$$\overline{p}(u) = \overline{l}(u) - \overline{m}(u), \tag{1.9}$$

unde, conform definițiilor, polinoamele $\overline{l}(u)$ și $\overline{m}(u)$ sînt polinoame cu coeficienți întregi și pozitivi. Dacă se aplică acum polinoamelor din membrii drepți ai egalităților (1.9) transformarea liniară (1.7), se va obține egalitatea (1.6), în care, după propoziția P_3, polinoamele $L(x)$ și $M(x)$ vor fi niște polinoame l.m.c. cu coeficienți întregi și cu $L(0) = 0$, $M(0) = 0$. Demonstrația teoremei 1 oferă și mijlocul de aflare a polinoamelor $L(x)$ și $M(x)$; dar, trebuie să facem observația că atunci cînd se adaugă polinoamelor $L(x)$ și $M(x)$ același polinom l.m.c. cu coeficienți întregi, se obține o nouă descompunere a polinomului $p(x)$, cu aceleași proprietăți.

§ 2. CÎTEVA PROBLEME AJUTĂTOARE

PROBLEMA (B): Să se găsească ultimul element al mulțimii

$$U = \{x \mid x \in B_n,\ L(x) < b\}, \tag{2.1}$$

unde $L(x)$ este un polinom l.m.c. cu coeficienți întregi și cu $L(0) = 0$, iar b este un număr întreg pozitiv.

Fie $\overline{x} = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)$ soluția necunoscută a problemei (B). Procedeul pe care îl vom expune, pentru rezolvarea problemei (B), va permite determinarea succesivă a componentelor vectorului $\overline{x}$. Să presupunem că trebuie determinată componenta $\overline{x}_{i+1}$, $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, componentele $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_i$ fiind cunoscute, în cazul $i > 0$. Fie

$$\begin{cases} x^{(i+1)} = (x_{i+1}, \dots, x_n),\ L^{(1)}(x^{(1)}) = L(x), \\ L^{(i+1)}(x^{(i+1)}) = L(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_i,\ x_{i+1}, \dots, x_n), \qquad (0 < i < n), \\ B_{n-i} = \{x^{(i+1)} \mid x^{(i+1)} = x(_{i+1}, \dots, x_n),\ x_j \in \{0,1\},\ (i+1 \leqslant j \leqslant n)\}; \end{cases} \tag{2.2}$$

să presupunem că mulţimea B_{n-i} este ordonată în acelaşi mod ca mulţimea B_n.

TEOREMA 2. *Dacă* $(\widetilde{x}_{i+1}, \ldots, \widetilde{x}_n)$, $(0 < i < n)$, *este ultimul element al mulţimii*

$$U^{(i+1)} = \{x^{(i+1)} \mid x^{(i+1)} \in B_{n-i},\ L^{(i+1)}(x^{(i+1)}) < b\}, \tag{2.3}$$

vectorul $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_i, \widetilde{x}_{i+1}, \ldots, \widetilde{x}_n)$ *va fi ultimul element al mulţimii* U.

Într-adevăr, avem implicaţiile

$$\begin{cases} (\widetilde{x}_{i+1}, \ldots, \widetilde{x}_n) \in U^{(i+1)} \Rightarrow (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_i, \widetilde{x}_{i+1}, \ldots, \widetilde{x}_n) \in U \Rightarrow \\ \Rightarrow (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_i, \widetilde{x}_{i+1}, \ldots, \widetilde{x}_n) \leqslant (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n), \end{cases} \tag{2.4}$$

şi

$$\begin{cases} (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \in U \Rightarrow (\overline{x}_{i+1}, \ldots, \overline{x}_n) \in U^{(i+1)} \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow (\overline{x}_{i+1}, \ldots, \overline{x}_n) \leqslant (\widetilde{x}_{i+1}, \ldots, \widetilde{x}_n) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \leqslant (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_i, \widetilde{x}_{i+1}, \ldots, \widetilde{x}_n), \end{cases} \tag{2.5}$$

care dau împreună $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_i, \widetilde{x}_{i+1}, \ldots, \widetilde{x}_n)$.

TEOREMA 3. *Dacă* $(\widetilde{x}_{i+1}, \ldots, \widetilde{x}_n)$, $(o \leqslant i < n)$, *este ultimul element al mulţimii* $U^{(i+1)}$, *vom avea implicaţiile următoare*:

$$L^{(i+1)}(1, 0, \ldots, 0) < b \Leftrightarrow \widetilde{x}_{i+1} = 1, \tag{2.6}$$

şi

$$L^{(i+1)}(1, 0, \ldots, 0) \geqslant b \Leftrightarrow \widetilde{x}_{i+1} = 0. \tag{2.7}$$

Într-adevăr, avem implicaţiile

$$\begin{cases} L^{(i+1)}(1, 0, \ldots, 0) < b \Leftrightarrow (1, 0, \ldots, 0) \in U^{(i+1)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (1, 0, \ldots, 0) \leqslant (\widetilde{x}_{i+1}, \ldots, \widetilde{x}_n) \Leftrightarrow \widetilde{x}_{i+1} = 1, \end{cases} \tag{2.8}$$

şi

$$\begin{aligned} & L^{(i+1)}(1, 0, \ldots, 0) \geqslant b \Leftrightarrow (1, 0, \ldots, 0) \notin U^{(i+1)} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\widetilde{x}_{i+1}, \ldots, \widetilde{x}_n) \leqslant [1, 0, \ldots, 0), (\widetilde{x}_{i+1}, \ldots, \widetilde{x}_n) \neq (1, 0, \ldots, 0) \Leftrightarrow \\ & \qquad \Leftrightarrow \widetilde{x}_{i+1} = 0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

care justifică teorema.

Deci, pentru a se determina componenta $\overline{x}_{i+1}$, va trebui să se stabilească dacă $L^{(i+1)}(1, 0, \ldots, 0) < b$, sau $L^{(i+1)}(1, 0, \ldots, 0) \geqslant b$; în ambele cazuri, componenta $\overline{x}_{i+1}$ va fi determinată prin aplicarea teoremei 3. Dacă $i + 1 < n$, va trebui să se stabilească dacă $L^{(i+2)}(1, 0, \ldots, 0) < b$, sau $L^{(i+2)}(1, 0, \ldots, 0) \geqslant b$ şi se va obţine $\overline{x}_{i+2}$, ş.a.m.d. Teorema 2 arată că vectorul obţinut pe această cale va fi soluţia problemei (B).

Trebuie să remarcăm că în cazul $L(x) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, avem

$$L^{(i+1)}(x^{(i+1)}) = \begin{cases} a_1x_1 + \ldots + a_nx_n & i = 0, \\ a_1\overline{x}_1 + \ldots + a_i\overline{x}_i + a_{i+1}x_{i+1} + \ldots + a_nx_n & 0 < i < n; \end{cases} \tag{2.10}$$

deci, punînd

$$b_{i+1} = \begin{cases} b & i = 0, \\ b - a_1\overline{x}_1 - \ldots - a_i\overline{x}_i & 0 < i < n, \end{cases} \tag{2.11}$$

pentru a se determina componenta $\overline{x}_{i+1}$, va trebui să se stabilească dacă $a_{i+1} < b_{i+1}$ sau $a_{i+1} \geqslant b_{i+1}$. Apoi, în cazul $i + 1 < n$, va trebui să se calculeze $b_{i+2} = b_{i+1} - a_{i+1}\ \overline{x}_{i+1}$ şi să se stabilească dacă $a_{i+2} < b_{i+2}$ sau $a_{i+2} \geqslant b_{i+2}$, pentru a se obţine $\overline{x}_{i+2}$ ş.a.m.d.

Problema (C) : Să se găsească primul element al mulţimii

$$V = \{x \mid x \in B_n,\ L(x) - M(x) \geqslant b,\ x \succcurlyeq x^+\}, \tag{2.12}$$

unde $L(x)$ şi $M(x)$ sînt polinoame l.m.c. cu coeficienţi întregi şi cu $L(0) = 0$, $\mathcal{M}(0) = 0$, apoi b este un număr întreg şi x^+ este un vector dat.

Fie $\widetilde{x}$ soluţia necunoscută a problemei (C). Dacă avem $M(x) \equiv \equiv 0$, se va rezolva problema (C) într-un mod foarte simplu, cu ajutorul procedeului deja enunţat; acum vom da un procedeu pentru rezolvarea problemei (C), în ambele cazuri: $M(x) \equiv 0$ şi $M(x) \not\equiv 0$.

Vectorul $y \in B_n$ va fi numit vector de plecare pentru rezolvarea problemei (C), dacă $y = x^+$ sau $x^+ \preccurlyeq x \preccurlyeq y,\ x \neq y \Rightarrow x \notin V$.

O iteraţie k a procedeului de rezolvare a problemei (C) începe cu un vector de plecare $x^k \in B_n$; se ia $x^1 = x^+$. Fie mulţimea

$$U(x^k) = \{x \mid x \in B_n,\ L(x) < b + M(x^k)\}, \tag{2.13}$$

determinată de vectorul de plecare x^k, şi problema ataşată (B^k): Să se găsească ultimul element al mulţimii $U(x^k)$. Atunci, operaţiile iteraţiei considerate pot fi enunţate în modul următor:

(α^k) Se stabileşte alternativa (α_1^k) $x^k \notin U(x^k)$, sau (α_2^k) $x^k \in U(x^k)$; în primul caz problema (C) este rezolvată, căci $\widetilde{x} = x^k$, în cazul al doilea avem $L(x^k) < b + M(x^k)$, ceea ce asigură $b + M(x^k) > 0$, deci se poate trece la operaţia următoare;

(β^k) Se rezolvă problema (B^k); fie $\overline{x}^k$ soluţia obţinută cu ajutorul procedeului cunoscut; se va trece la operaţia următoare;

(γ^k) Se stabileşte alternativa (γ_1^k) $\overline{x}^k = (1, \ldots, 1)$, sau (γ_2^k) $\overline{x}^k \neq \neq (1, \ldots, 1)$; în primul caz problema (C) este rezolvată, căci $V = \emptyset$, în cazul al doilea vectorul $x^{k+1} = \overline{x}^k + \mathrm{e}_n$ va fi un nou vector de plecare şi va trebui să se treacă la iteraţia următoare.

Concluziile formulate după operaţia (γ^k) sînt justificate de teorema următoare:

Teorema 4. *Dacă* $x^k \in B_n$ *este un vector de plecare pentru rezolvarea problemei* (C) *şi vectorul* $\overline{x}^k \succcurlyeq x^k$ *aparţine mulţimii* $U(x^k)$, *atunci* $x \preccurlyeq \overline{x}^k$ *va implica* $x \notin V$.

Într-adevăr, avem implicaţiile

$$x^k \leqslant x \leqslant \overline{x}^k \Rightarrow L(x) - M(x) \leqslant L(\overline{x}^k) - M(x^k), \tag{2.14}$$

şi

$$\overline{x}^k \in U(x^k) \Rightarrow L(\overline{x}^k) - M(x^k) < b, \tag{2.15}$$

care dau împreună implicaţia

$$x^k \leqslant x \leqslant \bar{x}^k \Rightarrow x \notin V; \tag{2.16}$$

implicaţia $x \leqslant x^k$, $x \neq x^k \Rightarrow x \notin V$ este adevărată pentru că x^k este un vector de plecare.

Procedeul este convergent, conform teoremei următoare:

TEOREMA 5. *Problema* (C) *va fi rezolvată cu ajutorul procedeului formulat, după un număr finit de iteraţii.*

Într-adevăr, după o iteraţie care nu va conduce nici la soluţia problemei, nici la concluzia că aceasta nu există, vom obţine un nou vector de plecare, mai depărtat decît cel cu care s-a început iteraţia, în şirul finit al elementelor mulţimii B_n. Deci, problema (C) va fi rezolvată după un număr finit de iteraţii ale procedeului; fiecare iteraţie cuprinde rezolvarea unei probleme (B^k).

§ 3. UN ALGORITM AJUTĂTOR

PROBLEMA (D): Să se găsească primul element al mulţimii

$$W = \{x \mid x \in B_n,\ L_h(x) - M_h(x) \geqslant b_h,\ (h = 0,1,\ldots,p)\}, \tag{3.1}$$

unde $L_h(x)$ şi $M_h(x)$ sînt polinoame l.m.c. cu coeficienţi întregi şi cu $L_h(0) = 0$, $M_h(0) = 0$, iar b_h sînt numere întregi, $(h = 0,1,\ldots,p)$.

Vectorul $y \in B_n$ se va numi vector de plecare pentru rezolvarea problemei (D), dacă $y = (0,\ldots,0)$ sau $x \leqslant y$, $x \neq y \Rightarrow x \notin W$.

Se consideră o anumită ordine a inecuaţiilor sistemului care determină mulţimea W; vom presupune că indicii inecuaţiilor desemnează această ordine.

O iteraţie s pentru rezolvarea problemei (D) este determinată de un anumit număr h, $(0 \leqslant h \leqslant p)$, şi un anumit vector de plecare $x^{sh} \in B_n$. Dispunem de asemenea de un număr j, care a fost mărit cu o unitate după fiecare iteraţie începută cu acelaşi vector de plecare ca iteraţia precedentă şi a fost redus la zero după fiecare iteraţie urmată de o iteraţie începută cu un nou vector de plecare (înainte de prima iteraţie se ia $j = 0$). Cu alte cuvinte, înainte de începerea unei iteraţii ştim că vectorul de plecare al acelei iteraţii verifică j inecuaţii ale sistemului ce determină mulţimea W; evident, numărul inecuaţiilor verificate de acest vector ar putea fi mai mare decît j, dar vom afla acest fapt abia în urma iteraţiilor desfăşurate mai departe.

Se consideră problema $C_h(x^{sh})$: Să se găsească primul element al mulţimii

$$V_h(x^{sh}) = \{x \mid x \in B_n,\ L_h(x) - M_h(x) \geqslant b_h,\ x \not\geqslant x^{sh}\}; \tag{3.2}$$

se aplică procedeul deja cunoscut pentru rezolvarea problemei $C_h(x^{sh})$, întrebuinţîndu-se mulţimea auxiliară

$$U_h(x^{sh}) = \{x \mid x \in B_n,\ L_h(x) < b_h + M_h(x^{sh})\}. \tag{3.3}$$

Vom enunţa operaţiile iteraţiei s :

(α^{sh}) Se stabileşte alternativa (α_1^{sh}) $x^{sh} \notin U_h(x^{sh})$, sau ($\alpha_2^{sh}$) $x^{sh} \in U_h(x^{sh})$; în primul caz, problema $C_h(x^{sh})$ este rezolvată, iar vectorul x^{sh} este soluţia problemei, va trebui să trecem la operaţia (δ^{sh}); în cazul al doilea, avem $b_h + M_h(x^{sh}) > 0$ şi vom trece la operaţia următoare;

(β^{sh}) Să se găsească ultimul element al mulţimii $U_h(x^{sh})$; fie $\overline{x}^{sh}$ acest ultim element, cu care se va trece la operaţia următoare;

(γ^{sh}) Se stabileşte alternativa (γ_1^{sh}) $\overline{x}^{sh} = (1, \ldots, 1)$ sau (γ_2^{sh}) $\overline{x}^{sh} \neq (1, \ldots, 1)$; în primul caz, problema (D) este rezolvată, căci $W = \emptyset$, în cazul al doilea, vectorul $x^{s+1,h} = \overline{x}^{sh} + e_n$ va fi un nou vector de plecare pentru rezolvarea problemei (D), problema $C_h(x^{sh})$ nu este încă rezolvată, dar se va trece la iteraţia $s + 1$, în care se va considera problema $C_h(x^{s+1,h})$ în locul problemei $C_h(x^{sh})$;

(δ^{sh}) Se va stabili alternativa (δ_1^{sh}) $j < p$ sau (δ_2^{sh}) $j = p$; în primul caz, va trebui să se adauge o unitate numărului j şi să se treacă la iteraţia $s + 1$, cu numărul $h + 1$ şi vectorul de plecare $x^{s+1,h+1} = x^{sh}$, atunci cînd $h < p$, sau cu numărul 0 şi vectorul de plecare $x^{s+1,0} = x^{sh}$, atunci cînd $h = p$; în cazul al doilea, vectorul x^{sh} este o soluţie a problemei (D), căci el verifică toate inecuaţiile şi este un vector de plecare, aşa că rezolvarea problemei a luat sfîrşit.

Succesul operaţiilor formulate este justificat de teorema următoare :

TEOREMA 6. *Problema (D) va fi rezolvată, cu ajutorul algoritmului formulat, după un număr finit de iteraţii.*

Într-adevăr, după cel mult $p + 1$ iteraţii succesive, sau problema (D) va fi rezolvată, sau se va obţine un vector de plecare nou, mai depărtat decît cel cu care s-a început acest grup de iteraţii, în şirul finit al elementelor mulţimii B_n.

§ 4. REZOLVAREA PROGRAMELOR POLINOMIALE ÎN VARIABILE BINARE

Fie polinoamele $p_h(x)$, $(h = 1, \ldots, p)$, cu coeficienţi întregi şi cu $p_h(0) = 0$, şi numerele întregi b_h, $(h = 1, \ldots, p)$, care determină mulţimea

$$Z = \{x \mid x \in B_n,\ p_h(x) \geqslant b_h,\ (h = 1, \ldots, p)\}; \tag{4.1}$$

în continuare vom formula un algoritm pentru rezolvarea problemei (A) : să se găsească $\hat{x} \in B_n$, astfel ca

$$p_0(\hat{x}) = \sup_{x \in Z} p_0(x), \tag{4.2}$$

unde $p_0(x)$ este un polinom cu coeficienţi întregi şi cu $p_0(0) = 0$.

Rezolvarea problemei (A) poate fi realizată, fie prin rezolvarea unei probleme de tip (D) care conţine două restricţii noi şi noi variabile binare, fie prin rezolvarea unui număr finit de probleme de tip (D) care conţin o restricţie nouă şi nu conţin noi variabile binare. Prima cale pare eficace, mai ales în cazul cînd se pot determina cu uşurinţă numerele

$$\xi = \inf_{x \in B_n} p_0(x), \quad \eta = \sup_{x \in B_n} p_0(x) \tag{4.3}$$

aşa cum se întîmplă în cazul liniar, (v. [1]). Dar, în cazul general, a doua cale pare mai eficace. Vom expune acum această a doua cale.

Pentru a aduce rezolvarea problemei (A) la rezolvarea unui număr finit de probleme de tip (D), va trebui ca, în prealabil, să se găsească polinoamele l.m.c. cu coeficienţi întregi $L_0(x)$, $M_0(x)$, $L_h(x)$ şi $M_h(x)$, astfel ca :

$$(4.4)\qquad \begin{cases} p_0(x) = L_0(x) - M_0(x), \\ p_h(x) = L_h(x) - M_h(x), \qquad (h = 1, \ldots, p). \end{cases}$$

Acum, problema (A) poate fi formulată în modul următor : Să se găsească $\hat{x} \in B_n$, astfel ca

$$(4.5)\qquad L_0(\hat{x}) - M_0(\hat{x}) = \sup_{x \in Z} [L_0(x) - M_0(x)],$$

unde

$$(4.6)\qquad Z = \{x \mid x \in B_n,\ L_h(x) - M_h(x) \geqslant b_h,\ (h = 1, \ldots, p)\}.$$

Se începe cu rezolvarea problemei (D_0) : Să se găsească primul element al mulţimii Z. După rezolvarea problemei (D_0), cu ajutorul algoritmului expus în paragraful precedent, fie se obţine concluzia $Z = \emptyset$, iar problema (A) este rezolvată, fie se obţine $\hat{x}_0 \in Z$, cu proprietatea $x \leqslant \hat{x}_0$, $x \neq \hat{x}_0 \Rightarrow x \notin Z$. Să presupunem că s-a obţinut situaţia a doua. Elementului $\hat{x}_0$ i se ataşează valoarea $\lambda_0 = p_0(\hat{x}_0)$ a funcţiei obiectiv. Dacă $\hat{x}_0 = (1, \ldots, 1)$, avem $\hat{x} = \hat{x}_0$ şi problema (A) este rezolvată ; dacă $\hat{x}_0 \neq (1, \ldots, 1)$, se va trece la rezolvarea problemei (D_1) : Să se găsească primul element al mulţimii

$$(4.7)\qquad Z_1 = \{x \mid x \in B_n,\ L_h(x) - M_h(x) \geqslant b_h^1,\ (h = 0, 1, \ldots, p)\},$$

unde $b_h^1 = b_h$, $(h > 0)$ $b_0^1 = \lambda_0 + 1$. Vectorul $\hat{x}_0$ este un vector de plecare pentru rezolvarea problemei (D_1). După rezolvarea problemei (D_1), fie se obţine concluzia $Z_1 = \emptyset$, şi problema (A) este rezolvată, căci $\hat{x} = \hat{x}_0$, fie se obţine $\hat{x}_1 \in Z_1$, astfel ca $x \leqslant \hat{x}_1$, $x \neq \hat{x}_1 \Rightarrow x \notin Z_1$. Evident, avem $\hat{x}_1 \geqslant \hat{x}_0$, $\hat{x}_1 \neq \hat{x}_0$; se ataşează elementului $\hat{x}_1$ valoarea $\lambda_1 = p_0(\hat{x}_1)$ a funcţiei obiectiv. Să presupunem că se întîlneşte a doua situaţie. Dacă $\hat{x}_1 = (1, \ldots, 1)$, avem $\hat{x} = \hat{x}_1$ şi problema (A) este rezolvată, dacă $\hat{x}_1 \neq (1, \ldots, 1)$, se va trece la rezolvarea problemei (D_2) : Să se găsească primul element al mulţimii :

$$(4.8)\qquad Z_2 = \{x \mid x \in B_n,\ L_h(x) - M_h(x) \geqslant b_h^2,\ (h = 0, 1, \ldots, p)\},$$

unde $b_0^2 = \lambda_1 + 1$, $b_h^2 = b_h$, $(h > 1)$.

Să presupunem că am obţinut un vector $\hat{x}_i$, $(i \geqslant 0)$, astfel ca

$$(4.9)\qquad \lambda_i = p_0(\hat{x}_i) = \sup_{x \in V \cap B_{ni}} p_0(x),$$

unde

$$B_{ni} = \{x \mid x \in B_n,\ x \leqslant \hat{x}_i\}. \tag{4.10}$$

Atunci, dacă $\hat{x}_i = (1, \ldots, 1)$, avem $\hat{x} = \hat{x}_i$, căci $B_{ni} = B_n$ şi problema (A) este rezolvată; dacă $\hat{x}_i \neq (1, \ldots, 1)$, se va trece la rezolvarea problemei (D_{i+1}): Să se găsească primul element al mulţimii

$$Z_{i+1} = \{x \mid x \in B_n,\ L_h(x) - M_h(x) \geqslant b_h^{i+1},\ (h = 0, 1, \ldots, p)\}, \tag{4.11}$$

unde $b_0^{i+1} = \lambda_i + 1$ $b_h^{i+1} = b_k$, $(h > 0)$. Evident, $x \in B_{ni} \Rightarrow x \notin Z_{i+1}$, deci $\hat{x}_i$ este un vector de plecare pentru rezolvarea problemei (D_{i+1}) şi se va începe aplicarea procedeului dat în paragraful precedent, pentru rezolvarea acestui tip de problemă. După rezolvarea problemei (D_{i+1}) fie se va obţine concluzia $Z_{i+1} = \emptyset$, caz în care problema (A) este rezolvată, căci $\hat{x} = \hat{x}_i$, fie se va obţine un vector $\hat{x}_{i+1} \in Z_{i+1}$ astfel ca $x \leqslant \hat{x}_{i+1}$, $x \neq \hat{x}_{i+1} \Rightarrow x \notin Z_{i+1}$. Evident, $\hat{x}_{i+1} \geqslant \hat{x}_i$, $\hat{x}_{i+1} \neq \hat{x}_i$ şi

$$\lambda_{i+1} = p_0(\hat{x}_{i+1}) = \sup_{x \in V \cap B_{n,i+1}} p_0(x), \tag{4.12}$$

unde

$$B_{n,i+1} = \{x \mid x \in B_n,\ x \leqslant \hat{x}_{i+1}\}, \tag{4.13}$$

deci, dacă problema (A) nu este încă rezolvată, vom putea trece la rezolvarea unei probleme (D_{i+2}), în aceleaşi condiţii în care s-a început rezolvarea problemei (D_{i+1}).

Şirul de vectori distincţi $\hat{x}_0 \leqslant \hat{x}_1 \leqslant \ldots \leqslant \hat{x}_i \leqslant \ldots$ este finit, căci mulţimea B_n este finită; deci am demonstrat în mod constructiv teorema următoare:

TEOREMA 7. *Problema* (A) *va fi rezolvată, cu ajutorul algoritmului formulat, prin rezolvarea unui număr finit de probleme de tipul* (D), *dacă* $Z \neq \emptyset$.

§ 5. OBSERVAŢII

1°. Algoritmul formulat în paragraful precedent poate fi aplicat pentru rezolvarea problemei umătoare: Să se găsească numărul

$$\eta = \sup_{x \in B_n} p_0(x), \tag{5.1}$$

unde $p_0(x)$ este un polinom cu coeficienţi întregi şi cu $p_0(0) = 0$. Întradevăr, rezolvarea problemei enunţate se reduce la rezolvarea succesivă a problemelor (D_i): Să se găsească primul element al mulţimii

$$T_i = \{x \mid x \in B_n,\ p_0(x) \geqslant b^i\}, \tag{5.2}$$

unde $b^i = p_0(\hat{x}_{i-1}) + 1$, şi vectorul $\hat{x}_{i-1}$ reprezintă soluţia problemei (D_{i-1}), pentru $i > 1$, iar $\hat{x}_0 = (0, \ldots, 0)$.

Evident, pe aceeaşi cale se va putea obţine numărul

$$\xi = -\sup_{x\in B_n} [-p_0(x)] = \inf_{x\in B_n} p_0(x). \tag{5.3}$$

2°. Fie problema (A′) : Să se găsească $\hat{x}' \in B_n$, astfel ca

$$p_0'(\hat{x}') = \inf_{x\in Z'} p_0'(x), \tag{5.4}$$

unde

$$Z' = \{x \mid x \in B_n,\ p_h(x) \geqslant b_h,\ (h = 1,\ldots, p)\}; \tag{5.5}$$

$p_0'(x)$ şi $p_h(x)$ sînt polinoame cu coeficienţi întregi şi cu $p_0'(0) = 0$, $p_h(0) = 0$, iar b_h sînt numere întregi, ($h = 1,\ldots, p$). Evident, egalitatea $p_0'(x) = -p_0(x)$ asigură echivalenţa problemelor (A) şi (A′); cu alte cuvinte, $\hat{x}' = \hat{x}$.

Fie numerele

$$\xi' = \inf_{x\in B_n} p_0'(x), \qquad \eta' = \sup_{x\in B_n} p_0'(x), \tag{5.6}$$

legate de numerele corespunzătoare ale polinomului $p_0(x)$ prin relaţiile $\xi' = -\eta$, $\eta' = -\xi$; fie r numărul întreg determinat de inegalitatea $2^r \leqslant \eta' - \xi' < 2^{r+1}$, şi funcţia

$$F(z) = 2^r z_1 + \ldots + 2z_r + 2^\circ z_{r+1}, \tag{5.7}$$

care conţine noile variabile binare $z_1,\ldots,z_{r+1}$. Fie mulţimea

$$\begin{aligned} B_{n+r+1} = \{(z, x) \mid (z_j\ x_i),\ z_j \in \{0,1\},\ x_i \in \{0,1\}, \\ (j = 1,\ldots, r+1;\ i = 1,\ldots, n)\}, \end{aligned} \tag{5.8}$$

ordonată cu ajutorul funcţiei

$$N(z, x) = 2^{n+r} z_1 + \ldots + 2^n z_{r+1} + 2^{n-1} x_1 + \ldots + 2^\circ x_n. \tag{5.9}$$

PROBLEMA (A⁺) : Să se găsească $(z^+.\ x^+) \in B_{n+r+1}$, astfel ca

$$F(z^+) = \inf_{(z,\, x)\in + Z} F(z), \tag{5.10}$$

unde

$$\begin{aligned} Z^+ = \{(z, x) \mid (z, x) \in B_{n+r+1},\ F(z) - p_0'(x) \geqslant -\xi', \\ p_0'(x) - F(z) \geqslant \xi',\ p_h(x) \geqslant b_h,\ (h = 1,\ldots, p)\}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

TEOREMA 8. *Dacă vectorul* (z^+, x^+) *reprezintă soluţia problemei* (A^+), *vectorul* (x^+) *reprezintă soluţia problemei* (A).

Într-adevăr, pentru fiecare $(z, x) \in Z^+$, avem relaţiile

$$F(z^+) \leqslant F(z),\quad F(z^+) = p_0'(x^+) - \xi',\quad F(z) = p_0'(x) - \xi', \tag{5.12}$$

care implică $p_0'(x^+) \leqslant p_0'(x)$; de asemenea, avem implicaţia $(z, x) \in Z^+ \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in Z'$. Dar, pentru fiecare $x \in Z'$ există un z astfel ca $(z, x) \in Z^+$, deci nu există un $z'' \in Z'$, astfel ca $p_0'(x'') < p_0'(x^+)$.

TEOREMA 9. *Dacă* (z^+, x^+) *este primul element al mulţimii* Z^+, *vectorul* x^+ *va fi soluţia problemei* (A).

Într-adevăr, funcţia $F(z)$ este o funcţie l.m.c. definită pe mulţimea B_{n+r+1}, deci dacă vectorul (z^+, x^+) este primul element al mulţimii Z^+, el va reprezenta soluţia problemei (A$^+$); atunci, după teorema 9, el va fi de asemenea soluţia problemei (A′), adică soluţia problemei (A).

Prin urmare, rezolvarea problemei (A) se reduce la rezolvarea problemelor următoare : a) Să se găsească numerele ξ, η, r; b) Să se găsească primul element al mulţimii

$$\begin{aligned} &Z^+ = \{(z, x) \mid (z, x) \in B_{n+r+1},\ F(z) + p_0(x) \geqslant \eta, \\ (5.13)\qquad &-F(z) - p_0(x) \geqslant -\eta,\ p_h(x) \geqslant b_h,\ (h = 1, \ldots, p)\}. \end{aligned}$$

Aceasta este a doua cale pentru rezolvarea problemei (A), enunţată în paragraful precedent.

3°. Eficacitatea rezolvării unui program polinomial în variabile binare, cu ajutorul algoritmului lexicografic, depinde de ordinea variabilelor, şi de ordinea inecuaţiilor programului considerat; dar, această dependenţă mai trebuie încă studiată, pentru a se da rezultate teoretice sau practice asupra eficacităţii. Desigur, va trebui să se realizeze o comparaţie între algoritmul propus şi algoritmul lui E. L. Lawler şi M. D. Bell, (v. [2]), sau între algoritmul propus şi alte metode binecunoscute. Există în prezent unele observaţii deduse pe baza experienţii rezultate din rezolvarea manuală a unei serii de probleme test, dar nu putem enunţa afirmaţiile corespunzătoare, datorită faptului că au rezultat dintr-o serie relativ mică de exemple.

Primită la redacţie la 2 ianuarie 1968

Academia Republicii Socialiste România
Filiala Iaşi
Institutul de matematică

UN ALGORITHME LEXICOGRAPHIQUE POUR LA RÉSOLUTION DES PROGRAMMES POLYNÔMIAUX EN VARIABLES BINAIRES

(RÉSUMÉ)

Soit B_n l'ensemble des vecteurs $x = (x_i)$, $(i = 1, \ldots, n)$, dont les composantes peuvent prendre seulement les valeurs 0 ou 1 ; soient les polynômes $P_j(x)$, $(j = 0, 1, \ldots, s)$, à coefficients entiers, et b_h, $(h = 1, \ldots, s)$, des nombres entiers. Nous avons considéré le problème suivant : trouver $\hat{x} \in B_n$, tel que

$$P_0(\hat{x}) = \max_{x \in Z} P_0(x),$$

où

$$Z = \{x \mid x \in B_n,\ P_h(x) \geqslant b_h, (h = 1, \ldots, s)\}.$$

Nous avons développé un algorithme pour la résolution du problème. Une autre variante de l'algorithme, pour la résolution du problème dans le cas linéaire, a été donnée dans une note antérieure (An. sc. Univ. Jassy, T. XIV, 1968, f. 1). L'algorithme est fondé sur l'idée suivante : on recherche les éléments de l'ensemble B_n, ordonnés de la manière lexicographique, tel que chaque fois cn établira si l'élément considéré appartient à l'ensemble Z et dans le cas affirmatif s'il donne une valeur du polynôme $P_0(x)$, supérieure aux valeurs correspondantes aux éléments de Z déjà obtenus. Pendant cette recherche on omet certains éléments, en utilisant un critère d'élimination construit à l'aide de la notion de fonction lexicographique monotone croissante. La recherche des autres éléments, organisée d'une manière algorithmique,demande seulement des additions, des multiplications et des comparaisons. On montre la convergence de l'algorithme et on donne quelques observations sur l'efficacité de l'algorithme.

BIBLIOGRAFIE

1. I. Drăgan, *Asupra funcţiilor lexicografic monoton crescătoare şi aplcaţiilor lor la rezolvarea programelor liniare în variabile bivalente.* An. sci. Univ. Iaşi, **XIV**, *1* (1968).
2. E. L. Lawler, M. D. Bell, *A Method for Solving Discrete Optimization problems.* Op. Res., **14**, *6*, 1098–1112 (1966).

UN MODEL DE AŞTEPTARE PENTRU O PROBLEMĂ DE APROVIZIONARE

DE

D. FIRESCU, A. MUJA şi A. DOBRE

Se consideră un proces de aprovizionare cu materiale şi utilaje a unei întreprinderi industriale, care este interpretat ca un fenomen de aşteptare. Studiul procesului se face cu ajutorul unui sistem (model) de aşteptare cu i ($i = 1, 2, \ldots, k$) faze succesive, fiecare fază fiind alcătuită din C_i canale paralele.

Se scriu ecuaţiile diferenţiale ale sistemului şi se rezolvă în cazul regimului permanent; apoi se calculează numărul mediu de unităţi din faza i.

În ultima parte a lucrării, considerîndu-se drept funcţie economică a fenomenului, valoarea medie a cheltuielilor provocate de aşteptarea staţiilor şi a cerinţelor, se găsesc condiţiile pentru care aceasta este minimă.

1. Fenomenele de aşteptare, atît de des întîlnite în cele mai diverse domenii, impun adoptarea unei atitudini ştiinţifice faţă de întîmplare. Cu astfel de probleme ne întîlnim în economie, în probleme de organizare a muncii şi a producţiei, unde este necesară alegerea unei funcţii economice a unui fenomen de aglomerare, care să corespundă intenţiilor celui care decide.

În cazul fenomenelor de aşteptare se consideră drept funcţie economică, în general, valoarea medie a cheltuielilor provocate de aşteptarea cerinţelor şi a staţiilor de serviciu.

În cele ce urmează ne propunem să examinăm din acest punct de vedere, un proces de aprovizionare cu materiale şi utilaje a unei întreprinderi industriale sau cu mărfuri a unui magazin de desfacere.

Considerăm cazul cînd aprovizionarea se face pe mai multe canale şi în mai multe faze, ceea ce corespunde fenomenului real de aprovizionare. Avem, deci, un sistem de aşteptare cu un număr oarecare $i\,(i = 1, 2, \ldots, k)$ de faze succesive, fiecare fază fiind alcătuită din C_i canale paralele.

Să presupunem că:

— Intrările în sistem şi în fiecare fază $i\,(i = 1, 2, \ldots, k)$ sînt întîmplătoare şi urmează o lege Poisson cu parametrul λ;

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 8, P. 1147–1152, BUCUREŞTI, 1968

— Serviciile urmează o lege exponenţială negativă cu parametrii

$$\mu_i \, (i = 1, 2, \ldots, k);$$

— Se formează şir de aşteptare în faţa fiecărei staţii, iar unităţile sînt servite în ordinea venirii.

Fie $x_i \, (i = 1, 2, \ldots, k)$ numărul de unităţi care se află la un moment oarecare t, în faza i. Dacă $x_i < C_i$, nu se formează şir de aşteptare şi sînt $C_i - x_i$ canale inactive în faza i; dacă $x_i \geqslant C_i$, se formează şir în faţa staţiei i.

Fie de asemenea $E_{x_1 . x_2 . \ldots . x_k}$ starea în care sînt x_1 unităţi în faza întîi, x_2 unităţi în faza a doua etc., $\ldots$, x_k unităţi în faza k şi $P(x_1, x_2, \ldots, x_k; t)$ probabilitatea corespunzătoare.

În intervalul de timp $(t, \, t + \Delta t)$ există următoarele posibilităţi:

(i) Sistemul să rămînă în starea $E_{x_1 x_2 . \ldots . x_k}$ în care se află la momentul t, cu probabilităţile

$$1 - \left(\lambda + \sum_{i=1}^{k} x_i \mu_i\right) \Delta t + o(\Delta t), \text{ dacă } x_i < C_i$$

şi

$$1 - \left(\lambda + \sum_{i=1}^{k} C_i \mu_i\right) \Delta t + o(\Delta t), \text{ dacă } x_i \geqslant C_i;$$

(ii) Sistemul să treacă în starea $E_{x_1 . x_2 . \ldots . x_k}$ cu probabilităţile

$$(x_i + 1) \mu_i \Delta t + o(\Delta t) \quad \text{dacă } x_i < C_i$$

şi

$$C_i \mu_i \Delta t + o(\Delta t) \quad \text{dacă } x_i \geqslant C_i$$

ştiind că la momentul t se găsea în starea $E_{x_i . x_2 . \ldots . x_i + 1 . x_{i+1} - 1 . \ldots . x_k}$;

(iii) Sistemul să treacă în starea $E_{x_1 . x_2 . \ldots . x_k}$ cu probabilitatea

$$\lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

ştiind că la momentul t se găsea în starea $E_{x_1 - 1 . x_2 . \ldots . x_k}$.

În baza lui (i) — (iii) putem scrie

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(0, \ldots, 0; t) = -\lambda P(0, \ldots, 0; t) + \mu_k P(0, \ldots, 0, 1; t) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0) \\ & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(x_1, x_2, \ldots, x_k; t) = -\left(\lambda + \sum_{i=1}^{k} x_i \mu_i\right) P(x_1, x_2, \ldots, x_k; t) + \\ & \quad + \sum_{i=1}^{k} (x_i + 1) \mu_i P(x_1, x_2, \ldots, x_i + 1, x_{i+1} - 1, \ldots, x_k; t) + \\ & \quad + \lambda P(x_1 - 1, x_2, \ldots, x_k; t) \qquad\qquad (1 \leqslant x_i < C_i) \\ & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(x_1 \, x_2, \ldots, x_k; t) = -\left(\lambda + \sum_{i=1}^{k} C_i \mu_i\right) P(x_1, x_2, \ldots, x_k; t) + \\ & \quad + \sum_{i=1}^{k} C_i \mu_i P(x_1, x_2, \ldots, x_i + 1, x_{i+1} - 1, \ldots, x_k; t) + \\ & \quad + \lambda P(x_1 - 1, x_2, \ldots, x_k; t) \qquad\qquad (x_i \geqslant C_i). \end{aligned} \right.$$

În regim permanent, deci cînd există

$$\lim_{t\to\infty} P(x_1, x_2, \ldots, x_k; t) = p(x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

sistemul (1.1) devine

$$\lambda p(0, \ldots, 0) = \mu_k p(0, \ldots, 0,1) \; (x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0)$$

$$\left(\lambda + \sum_{i=1}^{k} x_i\mu_i\right) p(x_1, x_2, \ldots, x_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (x_i + 1)\,\mu_i\, p\,(x_1, x_2, \ldots x_i + 1, x_{i+1} - 1, \ldots, x_k) +$$

$$+ \lambda p(x_1 - 1, x_2, \ldots, x_k) \qquad (1 \leqslant x_i < C_i)$$

$$(1.2) \qquad \left(\lambda + \sum_{i=1}^{k} C_i\mu_i\right) p(x_1, x_2, \ldots, x_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} C_i\mu_i p\,(x_1, x_2, \ldots x_i + 1, x_{i+1} - 1, \ldots, x_k) +$$

$$+ \lambda p\,(x_1 - 1, x_2, \ldots, x_k). \qquad (x_i \geqslant C_i).$$

Introducînd factorul de trafic definit de relația

$$\rho_i = \frac{\lambda}{C_i\mu_i} \qquad (i = 1,2, \ldots, k)$$

soluțiile sistemului (1.2) sînt

$$(1.3) \qquad p(x_1, x_2, \ldots, x_k) = p(0, \ldots, 0) \prod_{i=1}^{k} \frac{(\rho_i C_i)^{x_i}}{x_i\,!} \qquad (x_i < C_i)$$

și

$$(1.3') \qquad p(x_1, x_2, \ldots, x_k) = p(0, \ldots, 0) \prod_{i=1}^{k} \frac{(\rho_i C_i)^{C_i} \rho_i^{\,x_i - C_i}}{C_i\,!} \qquad (x_i \geqslant C_i).$$

Deoarece

$$\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{x_k=0}^{\infty} p(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 1,$$

avem

$$1 = p(0, \ldots, 0) \left\{ \sum_{x_1=0}^{C_1-1} \sum_{x_2=0}^{C_2-1} \cdots \sum_{x_k=0}^{C_k-1} \left[\prod_{i=1}^{k} \frac{(\rho_i C_i)^{x_i}}{x_i\,!} \right] + \sum_{x_1=C_1}^{\infty} \sum_{x_2=C_2}^{\infty} \cdots \right.$$

$$\left. \cdots \sum_{x_k=C_k}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^{k} \frac{(\rho_i C_i)^{C_i} \rho_i^{\,x_i - C_i}}{C_i\,!} \right] \right\},$$

de unde rezultă

$$p(0, \ldots, 0) = \left\{ \prod_{i=1}^{k} \frac{(C_i\rho_i)^{C_i}}{C_i\,!\,(1 - \rho_i)} + \sum_{x_1=0}^{C_1-1} \sum_{x_2=0}^{C_2-1} \cdots \sum_{x_k=0}^{C_k-1} \left[\prod_{i=1}^{k} \frac{(\rho_i C_i)^{x_i}}{x_i\,!} \right] \right\}^{-1}.$$

2. Ținînd seama de natura procesului de aprovizionare, este interesant să se cunoască unele caracteristici referitoare la diversele faze ale sistemului.

Notînd cu $p_i(x_i)$ $(x_i = 0, 1, 2, \ldots ; i = 1, 2, \ldots , k)$ probabilitatea ca în faza i, formată din C_i canale, să fie x_i unităţi indiferent ce valori iau celelalte variabile, avem

$$p_i(x_i) = \sum_{x_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{x_{i-1}=0}^{\infty} \sum_{x_{i+1}=0}^{\infty} \cdots \sum_{x_k=0}^{\infty} p(x_1, x_2, \ldots , x_k).$$

Din relaţiile (1.3) şi (1.3′) obţinem

$$p_i(x_i) = p_i(0) \frac{(\rho_i C_i)^{x_i}}{x_i!} \qquad (1 \leqslant x_i < C_i)$$

şi

$$p_i(x_i) = p_i(0) \frac{\rho_i^{x_i} C_i^{C_i}}{C_i!} \qquad (x_i \geqslant C_i),$$

unde am notat

$$p_i(0) = \frac{1}{\dfrac{(\rho_i C_i)^{C_i}}{C_i!\,(1-\rho_i)} + \displaystyle\sum_{x_i=0}^{C_i-1} \frac{(\rho_i C_i)^{x_i}}{x_i!}}.$$

Numărul mediu de unităţi în şirul de aşteptare din faza i este

$$M(x_i) = \sum_{x_i=C_i}^{\infty} (x_i - C_i)\, p_i(x_i)$$

adică

$$M(x_i) = p_i(0) \frac{\rho_i}{(1-\rho_i)^2} \cdot \frac{(\rho_i C_i)^{C_i}}{C_i!}.$$

Tot astfel numărul mediu de canale inactive din faza i este

$$A(C_i) = \sum_{x_i=0}^{C_i-1} (C_i - x_i)\, p_i(x_i),$$

adică

$$A(C_i) = C_i(1-\rho_i).$$

Aşadar, numărul mediu de unităţi din faza i este

$$C_i + M(x_i) - A(C_i) = p_i(0) \frac{\rho_i}{(1-\rho_i)^2} \cdot \frac{(\rho_i - C_i)^{C_i}}{C_i!} + \rho_i C_i .$$

În particular, dacă faza i constă dintr-un singur canal $(C_i = 1)$ regăsim

$$p_i(x_i) = p_i(0)\, \rho_i^{x_i},$$

unde acum

$$p_i(0) = 1 - \rho_i .$$

Rezultă deci

$$M(x_i) = \frac{\rho_i^2}{1-\rho_i} .$$

3. Valoarea medie a cheltuielilor provocate de aşteptarea cerinţelor şi a staţiilor constituie funcţia economică a fenomenului considerat. Fie $G_i(C_i)$ costul total pe unitatea de timp al aşteptării în faza $i(i = 1, 2, \ldots, k-1)$, iar a şi b costul pe unitatea de timp a unei cerinţe respectiv a unei staţii care aşteaptă.

În acest caz funcţia de minimizat se scrie

$$G_i(C_i) = aM(x_i) + bA(C_i)$$

sau

$$G_i(C_i) = a \frac{\rho_i}{(1-\rho_i)^2} \frac{(\rho_i C_i)^{C_i}}{C_i!} p_i(0) + bC_i(1-\rho_i).$$

În cazul $i = k$, avem $C_k = 1$ şi deci funcţia de minimizat devine

$$G(x_k) = \alpha \sum_{x=0}^{x_k} (x_k - x)\, p(x) + \beta \sum_{x=x_k+1}^{\infty} (x - x_k)\, p(x)$$

unde $p(x)$ este probabilitatea ca la momentul t să fie x unităţi în faza k. Aici α reprezintă pierderea unitară în cazul $x < x_k$ iar β pierderea în cazul $x > x_k$.

Observăm că

$$G(x_k + 1) = \alpha \sum_{x=0}^{x_k+1} (x_k + 1 - x)\, p(x) + \beta \sum_{x=x_k+2}^{\infty} (x - x_k - 1)\, p(x) =$$

$$= \alpha \sum_{x=0}^{x_k} (x_k - x)\, p(x) + \alpha \sum_{x=0}^{x_k} p(x) + \beta \sum_{x=x_k+1}^{\infty} (x - x_k)\, p(x) - \beta \sum_{x=x_k+1}^{\infty} p(x).$$

Ţinînd seama că

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = 1,$$

avem

$$G(x_k + 1) = G(x_k) + (\alpha + \beta)\, p(x \leqslant x_k) - \beta$$

unde $p(x \leqslant x_k)$ este probabilitatea unei cereri mai mici sau egală cu x_k.

În mod analog obţinem

$$G(x_k - 1) = G(x_k) - (\alpha + \beta)\, p\ (x \leqslant x_k - 1) + \beta.$$

Fie x_{0k} valoarea lui x_k pentru care $G(x_k)$ este minim, adică

$$G(x_{0k} - 1) > G(x_{0k}) > G(x_{0k} + 1).$$

Se deduce

$$p(x \leqslant x_{0k} - 1) < \frac{\beta}{\alpha + \beta} < p(x \leqslant x_{0k})$$

unde aici $p(x \leqslant x_{0k} - 1) = p(0) + \ldots + p(x_{0k})$ şi se obţine x_{0k} şi deci $G_{\min} = G(x_{0k})$.

Dacă x_{0k} este astfel încît

$$p(x \leqslant x_{0k}-1) < \frac{\beta}{\alpha+\beta} = p(x \leqslant x_{0k}),$$

atunci rezultă

$$G(x_{0k}+1) = G(x_{0k})$$

și deci minimul corespunde sau lui x_{0k} sau lui $x_{0k}+1$.

Similar, dacă x_{0k} este astfel încît

$$p(x \leqslant x_{0k}-1) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} < p(x \leqslant x_{0k}),$$

atunci minimul corespunde sau lui $x_{0k}-1$ sau lui x_{0k}.

Primită la redacție la 20 decembrie 1967

Facultatea de chimie
București
Catedra de matematică

A WAITING MODEL FOR A SUPPLYING PROBLEM

(ABSTRACT)

A supplying process of an enterprise with materials and equipments is considered as a waiting model.

The study of this process is fulfilled by means of a waiting system with $i = 1, 2, \ldots, k$ successive phases, each phase being made up of C_i parallel channels.

It is assumed that enterings into the system are accidental observing a Poisson law and the services observe a negative exponential of their arrival.

The differential equations of the system are found and solved in steady-state conditions.

Then some characteristics referring to various phases of the system (the mean number of units in the waiting series in *i* phase, the mean number of inactive channels during the same phase, and so on) are calculated.

In the last part of the paper, considering the mean value of the expenses caused by the waiting of demands and stations as an economic function, the conditions in which this function is minimum are established.

BIBLIOGRAFIE

1. D. R. Cox, W. L. Smith, *Queues*. Methuen Company, London, 1961.
2. P. Le Gall, *Les systèmes avec ou sans attente et les processus stochastiques*. tom. 1, Dunod, Paris, 1962.
3. A. Kaufmann, R. Cruon, *Les phénomènes d'attente*, Dunod, Paris, 1961.
4. A. Kaufmann, *Metode și modele ale cercetării operaționale*. vol. I. Ed. științifică, București, 1967.
5. Gh. Mihoc, G. Ciucu, *Introducere în teoria așteptării*. Ed. tehnică, București, 1967.
6. E. Rawdin, *A New Measure of Effectiveness for Queueing Problems*. Opns. Res., **8**, *2*, 278—280 (1960).
7. T. L. Saaty, *Resume of Useful Formulas in Queueing Theory*. Opns. Res., **5**, 161—200 (1957).

O METODĂ STATISTICĂ PENTRU CALCULUL LUNGIMII UNUI ARC DE CURBĂ PLANĂ

DE

ELENA FRĂŢILĂ

Se dă o metodă statistică de evaluare a lungimii unui arc de curbă plană bazată pe problema lui Buffon, prin înlocuirea arcului considerat cu o linie poligonală înscrisă în acest arc. Pentru fiecare segment al liniei poligonale considerat ca un ac, se calculează probabilitatea de a intersecta o dreaptă a unei familii de drepte paralele, de direcţii diferite. De aici se obţine lungimea liniei poligonale prin evaluarea probabilistică a unor expresii interpretate ca probabilităţi tot de tipul celor din problema lui Buffon.

Evaluarea lungimii unui arc de curbă plană se poate face plecînd de la problema lui Buffon [1]. De asemenea, P. A. P. Moran [2] măsoară lungimea unui arc de curbă plană (C) proiectînd arcul considerat pe o anumită dreaptă şi obţine lungimea acestui arc prin integrarea unei funcţii indicator al numărului de puncte ale curbei (C) care se proiectează într-un punct al dreptei de proiecţie.

În cele ce urmează vom da o altă metodă pentru evaluarea lungimii unui arc de curbă plană, bazată tot pe problema lui Buffon.

Să calculăm lungimea unui arc regulat al curbei (C) de ecuaţie $y = f(x)$ cuprins între punctele $A(a, f, (a))$ şi $B(b, f(b))$. Fie A', respectiv B' proiecţiile ortogonale ale punctelor A şi B pe axa OX. Se împarte segmentul $A'B'$ în n părţi egale prin punctele $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Punctele $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ de pe curba C, corespunzătoare absciselor $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, determină linia poligonală

$$\overline{AM_1}, \overline{M_1M_2}, \dots, \overline{M_{n-1}B} \qquad (A = M_0,\ B = M_n)$$

înscrisă în arcul AB. Fiecare segment $M_{i-1}M_i\ (i = 1, \dots, n)$ poate fi considerat ca un ac de lungime $2l_i$:

$$\overline{M_{i-1}M_i} = 2l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

Notăm cu $\alpha_i\ (i = 1, \dots, n)$ unghiul format de direcţia axei OX cu direcţia segmentului $\overline{M_{i-1}M_i}$.

ST. CERC. MAT., TOM., 20, NR. 8, P. 1153–1157 BUCUREŞTI, 1968

Se consideră o familie de drepte Γ paralele cu direcţia lui $\overline{M_{i-1}M_i}$, echidistante, distanţa între două drepte consecutive ale familiei Γ fiind $2k$. Mărimea $2k$ este astfel încît :

$$2k \geqslant \max_i . \, 2l_i$$

se alege $2k = (x_i - x_{i-1}) + \max_i . \, | y_i - y_{i-1} |$

Probabilitatea P_i ca aruncînd un ac de lungime $2l_i$ pe o reţea de drepte de înclinaţie α_i faţă de OX, echidistante de modul $2k$, să intersecteze o dreaptă a reţelei este, conform definiţiei probabilităţii geometrice bazat pe teorema lui Deltheil [3],

$$P_i = \frac{\mu(\mathcal{N})}{\mu(\mathcal{M})} = \frac{\nu(D)}{\nu(D_0)} = \frac{\iint_D \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}h}{\iint_{D_0} \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}h},$$

unde $\mathcal{M}$ este mulţimea segmentelor de lungime $2l_i$, $\mathcal{N}$ mulţimea segmentelor de lungime $2l_i$ care intersectează o dreaptă a reţelei de modul $2k$, iar D şi D_0 domeniile respective de variaţie ale parametrilor θ şi h, corespunzătoare mulţimilor $\mathcal{N}$ şi $\mathcal{M}$. Parametrii : θ reprezintă unghiul pe care direcţia acului de lungime $2l_i$ îl face cu o perpendiculară pe direcţia dreptelor reţelei, iar h distanţa de la mijlocul acului pînă la cea mai apropiată dreaptă a reţelei.

Se observă că domeniul D_0 este determinat de relaţiile :

$$0 \leqslant h \leqslant k, \ -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Deci măsura lui D_0 este :

$$\nu(D_0) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^k \mathrm{d}h = k\pi.$$

Domeniul D este determinat de :

$$0 \leqslant h \leqslant l_i \cos \theta$$

$$-\frac{\pi}{2} + \alpha_i \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} + \alpha_i$$

şi măsura lui D este :

$$\nu(D) = \int_{-\frac{\pi}{2}+\alpha_i}^{\frac{\pi}{2}+\alpha_i} \mathrm{d}\theta \int_0^{l_i \cos \theta} \mathrm{d}h = 2l_i | \cos \alpha_i |.$$

Prin urmare :

$$P_i = \frac{2l_i | \cos \alpha_i |}{k\pi} \tag{1}$$

Considerînd suma :

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} 2l_i \frac{|\cos\alpha_i|}{k\pi}$$

se observă că în expresia acesteia intervine suma $\sum_{i=1}^{n} 2l_i$ care pentru n suficient de mare este o aproximare a lungimii arcului AB.

Ținînd seama că :

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} = \gamma \qquad (i = 1,2, \ldots, n),$$

unde a și b sînt respectiv abscisele punctelor A' și B', expresia lui P se poate scrie :

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma\sqrt{1+m_i^2}}{k\pi\sqrt{1+m_i^2}} = \frac{b-a}{k\pi},$$

unde

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \operatorname{tg}\alpha_i = m_i .$$

Pe de altă parte,

$$P_i = 2l_i \frac{\left(2\cos^2\frac{\alpha_i}{2} - 1\right)}{k\pi}$$

iar

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} 2l_i \frac{2\cos\frac{\alpha_i}{2}}{k\pi} - \sum_{i+1}^{n} \frac{2l_i}{k\pi},$$

Notînd $\sum_{i=1}^{n} 2l_i = L$ se obține :

$$L = 2k\pi \sum_{i=1}^{n} P_i' - k\pi P, \tag{2}$$

unde :

$$P_i' = \frac{2l\cos^2\frac{\alpha_i}{2}}{k\pi} \qquad (i = 1,2, \ldots, n).$$

P'_i poate fi interpretat ca probabilitatea ca un ac de lungime $2l_i \cos^2\frac{\alpha_i}{2}$ să intersecteze o dreaptă a unei rețele de drepte paralele cu OX de modul $2k$. Aceste probabilități P_i' se pot calcula cu ajutorul unui anumit model aleator utilizînd numerele aleatoare [1].

Se observă că

$$P'_i = \frac{\gamma(1+\sqrt{1+m_i^2})}{2k\pi} = \frac{\gamma + 2l_i}{2k\pi} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Din triunghiul dreptunghic de catete γ şi $|y_i - y_{i-1}|$ (paralele, respectiv, cu OX şi OY) şi ipotenuza $2l_i$, avem:

$$2l_i < \gamma + |y_i - y_{i-1}|.$$

Atunci

$$P'_i < \frac{2\gamma + |I_i - I_{i-1}|}{2k\pi}.$$

Fie acum un şir de numere aleatoare cu repartiţie uniformă în intervalul $[0,1]$:

$$(3) \qquad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r.$$

Amplificăm aceste numere cu $2k\pi$ şi obţinem:

$$\lambda_j = 2k\pi\beta_j \qquad (j = 1,2, \ldots, r).$$

Asociem acestui şir de numere aleatoare o variabilă aleatoare bernoulliană prin introducerea evenimentelor date de inegalităţile:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_j < 2\gamma + |y_i - y_{i-1}| \\ \lambda_j \geqslant 2\gamma + |y_i - y_{i-1}| \end{array}\right| \quad (j = 1, \ldots, r).$$

Presupunem că această variabilă aleatoare ia valoarea 1 cînd are loc prima inegalitate şi zero în celălalt caz. În primul caz considerăm că acul de lungime $2l_i \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ intersectează o dreaptă a reţelei de modul $2k$, iar în celălalt caz, că nu intersectează o dreaptă a reţelei. Atunci probabilitatea P'_i va fi aproximată de:

$$P'_i = \frac{r_i}{r}, \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

unde r_i este numărul cazurilor în care variabila aleatoare considerată ia valoarea 1, iar r este numărul total de cazuri.

Folosind acelaşi şir de numere aleatoare [3] pentru toate segmentele de lungime $2l_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, se obţin probabilităţile P'_i. Prin urmare o evaluare a lungimii arcului AB al curbei (C) este dată de formula:

$$(4) \qquad L = k\pi\left(2\sum_{i=1}^{n} P'_i - P\right).$$

Eroarea comisă prin această evaluare este

$$\delta_{n,r} = \left|\int_b^a \mathrm{d}s - L\right|,$$

unde

$$ds = \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx,$$

iar L este dat de [4]. Evident, aceasta descrește odată cu creșterea lui n și r.

Observație. Procedeul descris se poate folosi și în cazul unei curbe închise, descompunînd curba, în mod convenabil, în arce parțiale regulate.

Primită la redacție la 27 ianuarie 1968

Universitatea „Babeș-Bolyai" Cluj
Facultatea de matematică-mecanică

UNE MÉTHODE STATISTIQUE POUR CALCULER LA LONGUEUR D'UN ARC DE COURBE PLANE

(RÉSUMÉ)

On donne une méthode statistique d'évaluer la longueur d'un arc régulier de courbe plane fondée sur le problème de Buffon en remplaçant l'arc considéré par une ligne polygonale inscrite dans cet arc. Pour chaque segment de la ligne polygonale, considéré comme une aiguille, on calcule la probabilité d'intersection avec une ligne d'une famille des droites parallèles. D'ici on obtient la longueur de la ligne polygonale par une évaluation probabilistique des quelques expressions interprétées comme des probabilités de type Buffon.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Mihoc, V. Urseanu, *Matematici aplicate în statistică.* Ed. Academiei, București, 1962.
2. P. A.P. Moran, *Measuring the length of a curve.* Biometrica, **53**, 359—364 (1966).
3. M. Stoka, *Geometrie integrală.* Ed. Academiei, București, 1967.

OPERATORI HYPONORMALI (III)

DE

VASILE ISTRĂŢESCU

În această parte a lucrării se expun noi rezultate obţinute în teoria operatorilor hyponormali cît şi a generalizărilor lor.

I. RANGUL NUMERIC ŞI OPERATORII HYPONORMALI

Fie T un operator definit pe un spaţiu Hilbert H. Prin rang numeric se înţelege mulţimea definită prin

$$W(T) = \{ < Tx, x >, \quad \|x\| = 1 \}.$$

Rangul numeric al unui operator este, conform teoremei lui Hausdorff-Toeplitz, o mulţime convexă.

Lema 1.1. *Spectrul unui operator este inclus în închiderea rangului numeric.*

Demonstraţie. Spectrul unui operator îl vom nota cu $\sigma(T)$. Dacă $\lambda \in \partial_{\sigma(T)}$, atunci el este în spectrul aproximativ al lui T şi deci există x_n, $\|x_n\| = 1$ astfel ca

$$Tx_n - \lambda x_n \to 0$$

ceea ce arată că afirmaţia lemei este adevărată pentru astfel de puncte. Fie acum μ un punct arbitrar din $\sigma(T)$ şi L o dreaptă arbitrară care trece prin μ şi fie $A = \sigma(T) \cap L$. Dacă μ_1, μ_2 sînt capetele celui mai mic segment care conţine pe A, atunci $\mu_i \in \partial_{\sigma(T)}$ şi cum $W(T)$ este convex, rezultă că μ aparţine închiderii mulţimii $W(T)$ şi lema este astfel demonstrată.

Pentru operatori normali era cunoscută afirmaţia că înfăşurătoarea convexă a spectrului con $\sigma(T) = \overline{W(T)}$.

Definiţie. Un operator T satisface condiţia G_1 dacă pentru orice x, $\|x\| = 1$,

$$\|(T-z)^{-1} x\| \leqslant \frac{1}{\mathrm{d}(z, \sigma(T))},$$

oricare ar fi $z \in \rho(T)$, $(\rho(T) = C\sigma(T))$.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 8, P. 1159–1168 BUCUREŞTI, 1968

LEMA 1.2. *Orice operator hyponormal satisface condiția* G_1.

Demonstrație. Operatorul $T_z = T - zI$, oricare ar fi $z \in \rho(T)$ este hyponormal și inversabil. Dar cum orice operator hyponormal este de clasă (N), $(T-z)^{-1}$ este de asemenea de clasă (N). Deci

$$\|(T-z)^{-1}x\| \leqslant \|(T-z)^{-1}\| = \max\{|w|,\ w \in \sigma((T-z)^{-1})\} =$$

$$= \frac{1}{\min\{|w|,\ w \in \sigma(T-z)\}} = \frac{1}{\mathrm{d}(z, \sigma(T))}.$$

REMARCĂ. Demonstrația acestei leme este mult mai simplă decît cea dată în [3] care utilizează faptul că $(T-z)^{-1}$ este hyponormal.

Cu ajutorul acestei leme se demonstrează

TEOREMA 1.1. *Pentru orice operator hyponormal*

$$\text{con}\,\sigma(T) = \overline{W(T)}.$$

Demonstrație. Din lema 1 rezultă că

$$\text{con}\,\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$$

și deci pentru a demonstra teorema va fi suficient să arătăm că $\overline{W(T)} \subset \text{con}\,\sigma(T)$. Fie L suportul liniar al mulțimii con $\sigma(T)$. Putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că L este axa y, și con $\sigma(T)$ este în $\mathrm{Re}\, z \geqslant 0$.

Pentru a demonstra teorema va fi suficient să arătăm că dacă

$$a + ib \in W(T),$$

atunci $a \leqslant 0$.

Să presupunem că nu este așa. Rezultă că există $x \in H$, $\|x\| = 1$, cu $Tx = (a + ib)x + y$, $\langle x, y\rangle = 0$, $a > 0$. Fie $c > 0$ arbitrar. În acest caz, din lema 2 rezultă

$$c^2 \leqslant \|(T-c)x\|^2 = (a-c)^2 + b^2 + \|y\|^2$$

sau

$$2ac \leqslant a^2 + b^2 + \|y\|^2$$

ceea ce este absurd, căci c este arbitrar.

Teorema este demonstrată.

Posibilitatea ca teorema 1 să fie adevărată în cazul operatorilor hyponormali a fost exprimată de S. K. Berberian.

REMARCĂ. În demonstrația teoremei 1, ipoteza de hyponormalitate a intervenit numai prin condiția G_1.

Un fapt cunoscut pentru operatori normali este și următorul : dacă $W(T)$ este închis, atunci orice punct extrem este o valoare proprie. Extensia acestei teoreme la operatori hyponormali a fost dată în [2], [3].

Pentru demonstrație vom avea nevoie de cîteva proprietăți pe care le vom nota sub formă de leme.

LEMA 1.3. *Dacă* Re $W(T) \geqslant 0$ *și* $\langle Tx, x\rangle = 0$ *atunci* $Tx = -T^* x$.

Demonstrație. Într-adevăr, avem

$$\langle (T + T^*)\, x, x\rangle = 2 \operatorname{Re} \langle Tx, x\rangle \geqslant 0$$

și astfel $T + T^* \geqslant 0$. Cum $\langle Tx, x\rangle = 0$ implică $(T + T^*)\, x = 0$, lema este demonstrată.

LEMA 1.4. *Dacă* Re $W(T) \geqslant 0$ *și* 0 *este un punct extrem pentru* $W(T)$, *atunci* $M = \{x, \langle Tx, x\rangle = 0\}$ *este un subspațiu închis.*

Demonstrație. Toate afirmațiile sînt evidente exceptînd liniaritatea. Fie $x, y \in M$. Vom avea

$$\langle T(x + y), x + y\rangle = \langle Tx, y\rangle - \langle \overline{Tx, y}\rangle = 2\operatorname{Im} \langle Tx, y\rangle = a.$$

Să presupunem că $a \neq 0$. În acest caz, cum $\langle (T(e^{i\theta}x + y), e^{i\theta}x + y) = 2 \operatorname{Im} e^{i\theta} \langle Tx, y\rangle = a_\theta$, pentru $e^{i\theta} = \pm 1$, deducem că 0 nu este punct extrem.

Fie $N = \{x, Tx = -T^*x\}$ care este un subspațiu închis.

LEMA 1.5. *Dacă* T *este hyponormal și*

$$K_\theta = \{x, Tx = e^{i\theta}\, T^*x\},$$

atunci K_θ *reduce pe* T *și deci* T/K_θ *este normal*

Demonstrație. Fie $x \in K$; avem $\|Tx\| = \|T^*x\|$ și deci

$$T^*Tx = TT^*x.$$

Deci

$$T(Tx) = T(e^{i\theta}\, T^*x) = e^{i\theta}TT^*x = e^{i\theta}\, T^*Tx = e^{i\theta}\, T^*(Tx).$$

și

$$T(T^*x) = T^*Tx = e^{i\theta}\, T^*(T^*x)$$

adică K_θ reduce pe T. Este evident că T/K_θ este normal.

Lema este demonstrată.

TEOREMA 1.2. *Dacă* T *este hyponormal*, Re $W(T) \geqslant 0$, 0 *este un punct extrem pentru* $W(T)$ *și* $\langle Tx, x\rangle = 0$, *atunci* $Tx = 0$, *iar* $M = \{x, \langle Tx, x\rangle = 0\}$ *reduce pe* T.

Demonstrație. Avem evident că $x \in M \subset N$ și cum T este normal pe N, rezultă că $Tx = 0$ și din lema 1.5 rezultă afirmația teoremei.

TEOREMA 1.3. *Dacă* T *este un operator hyponormal*, A *este un operator liniar și mărginit arbitrar astfel ca* $0 \,\overline{\in}\, \mathrm{cl}(W(A))$ (cl$(W(A))$ *înseamnă închiderea mulțimii* $W(A)$) *și*

1°. $AT^p = T^{*p}A$

$$2.^\circ\ \lambda, \mu \in \sigma(T),\ 1 + \frac{\bar{\lambda}}{\mu} + \dots + \left(\frac{\bar{\lambda}}{\mu}\right)^{p-1} \neq 0$$

adjunct.

atunci T este Este suficient să demonstrăm că spectrul operatoru-

Demonstrație. supunem că acest lucru nu este adevărat și deci

lui T este real. Să al ca Im $z \neq 0$. Vom arăta că există puncte

există puncte $z \in \sigma(T)$ a ntiera mulțimii $\sigma(T)$ pe care o vom nota

cu această proprietate pe

$\partial_{\sigma(T)}$. Într-adevăr, fie L o dreaptă care trece prin z şi să notăm cu L_T intersecţia lui L cu spectrul $\sigma(T)$. Dacă μ_1, μ_2 sînt capetele celui mai mic segment care conţine pe L_T, atunci este evident că μ_i sînt puncte pe frontiera $\partial_{\sigma(T)}$ şi cum z este pe L, rezultă că există puncte pe frontieră cu proprietatea menţionată.

Fie deci $z_0 \in \partial_{\sigma(T)}$, $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$. Există un şir $\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$ astfel ca

$$T x_n - z_0 x_n \to 0 .$$

Rezultă imediat că

$$T^p x_n - z_0^p x_n \to 0$$

$$T^{*p} x_n - \bar{z}_0^p x_n \to 0$$

Cum $0 \overline{\in} (\mathrm{cl}\, W(A)$, A^{-1} există. Din 1° rezultă că

$$A T^p A^{-1} x_n - \bar{z}_0^p A A^{-1} x_n \to 0$$

sau

$$T^p y_n - z_0^p y_n \to 0,$$

unde $y_n = A^{-1} x_n$.

Dar aceasta se mai scrie

$$(T^{p-1} + \dots + \bar{z}_0^{p-1})(T - \bar{z}_0) y_n \to 0$$

şi din 2° rezultă că

$$(T - \bar{z}_0) y_n \to 0.$$

Această relaţie şi

$$T x_n - z_0 x_n \to 0$$

implică faptul că

$$\langle x_n, y_n \rangle \to 0$$

care se mai scrie

$$\left\langle \frac{A \cdot A^{-1} x_n}{\|A^{-1} x_n\|}, \frac{A^{-1} x_n}{\|A^{-1} x_n\|} \right\rangle \to 0$$

ceea ce reprezintă o contradicţie şi teorema este demonstrată.

REMARCĂ. Este natural să punem problema dacă condiţia 2° poate fi slăbită.

Fie A şi B doi operatori definiţi pe un spaţiu Hilbert iar $A \otimes B$ produsul lor tensorial. Problema care se pune este aceea a legăturii dintre $W(A)$, $W(B)$ şi $W(A \otimes B)$.

TEOREMA 1.4. *Dacă*

$$\mathrm{cl}\,(W(A \otimes B)) = \mathrm{con}\,(\sigma\,(A \otimes B))$$

(con E = *înfăşurătoarea convexă a mulţimii* E), *atunci*

$$\mathrm{cl}\,(W(A \otimes B)) = \mathrm{cl}\,(\mathrm{con}\,(W(A) \cdot W(B)).$$

Demonstrație. Într-adevăr, dacă $\lambda \in W(A)$, $\mu \in W(B)$, fie $x, y \in H$ astfel ca $\langle A x, x \rangle = \lambda$, $\langle By, y \rangle = \mu$. În acest caz

$$\langle (A \otimes B)(x \otimes y), x \otimes y \rangle = \langle Ax, x \rangle \langle By, y \rangle = \lambda \mu$$

și deci

$$\text{cl}\ (\text{con}\ W(A) \cdot W(B)) \subset \text{cl}\ (W(A \otimes B)$$

și deci

$$\text{cl}\ (\text{con}\ (W(A) \cdot W(B)) \subset \text{cl}\ (W(A \otimes B))$$

Pentru demonstrația teoremei, reamintim că A. Brown și C. Pearcy au demonstrat că

$$\sigma(A \otimes B) = \sigma(A).\ \sigma(B).$$

și deci

$$\text{con}\ (\sigma(A \otimes B)) = \text{con}\ (\sigma(A) \cdot \sigma(B)) \subseteq \text{con}\ (\text{con}\ (\sigma(A)).\ \text{con}\ (\sigma(B))).$$

Însă

$$\text{con}\ (\sigma(A))\ \text{con}\ \sigma(B) \subseteq \text{cl}\ (\text{con}\ (\text{cl}\ W(A).\text{cl}\, W(B))) =$$
$$= \text{cl}\ (\text{con}\ W(A) \cdot W(B))$$

și teorema este demonstrată.

COROLAR. *Dacă A și B sînt hyponormali, concluzia teoremei 3 este adevărată.*

Demonstrație. Se verifică imediat că $A \otimes B$ este un operator hyponormal și afirmația rezultă din teorema 1.

REMARCĂ. Există operatori pentru care relația din teorema 3 este falsă.

2. CLASE DE OPERATORI CARE GENERALIZEAZĂ OPERATORII HYPONORMALI

În această parte a lucrării au fost considerați operatori pentru care are loc relația

$$\| Tx \|^2 \leqslant \| T^2 x \|$$

oricare ar fi $x \in H$, $\|x\| = 1$, remarcîndu-se faptul că orice operator hyponormal satisface o astfel de relație. Un operator care satisface relația de mai sus a fost numit operator de clasă (N).

Următoarea teoremă arată o proprietate foarte importantă a clasei introduse.

TEOREMA 2.1. *Dacă T este de clasă (N), atunci pentru orice întreg n, T^n este de asemenea de clasă (N).*

Demonstrație. Avem relațiile

$$\| T \| \geqslant \ldots \geqslant \frac{\| T^{n+1} x \|}{\| T^n x \|} \geqslant \ldots \frac{\| T^5 x \|}{\| T^4 x \|} \geqslant \frac{\| T^4 x \|}{\| T^3 x \|} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\| T^3 x \|}{\| T^2 x \|} \geqslant \frac{\| T^2 x \|}{\| T x \|} \geqslant \frac{\| T x \|}{\| x \|}$$

care se deduc din definiția clasei (N). Acestea implică imediat că pentru $x \in H$, $\|x\| = 1$ avem

$$\| T^{2^n} x \| \geqslant \| T^n x \|^2$$

și teorema este demonstrată.

COROLAR. *Există operatori de clasă (N) care nu sînt hyponormali.*

Demonstrație. P.R. Halmos a construit un exemplu de operator hyponormal T și astfel încît T^2 nu este hyponormal. Din teorema de mai sus rezultă că T^2 este de clasă (N) și deci corolarul este demonstrat.

Vom arăta acum că putem construi subspații invariante pentru operatori hyponormali folosind teorema de mai sus, subspații care au o importanță deosebită în diferite teoreme de structură. Teorema de mai jos generalizează o teoremă dată pentru operatori autoadjuncți de Lengyel și M. Stone iar pentru operatori normali de P. Halmos.

TEOREMA 2.2. *Dacă T este de clasă (N) și $\mathcal{J}(T)$ este mulțimea elementelor din H astfel ca $\| T^n x \| \leqslant \| x \|$, oricare ar fi n întreg, atunci $\mathcal{J}(T)$ este un subspațiu închis, invariant pentru T și pentru orice operator care comută cu T.*

Demonstrație. Fie $\mathfrak{m}(T)$ mulțimea elementelor $x \in H$ astfel ca $\{\|T^m x\|\}$ este mărginit.

Este evident că $\mathfrak{m}(T)$ este un subspațiu. Într-adevăr, dacă α, β sînt numere complexe, x și $y \in \mathfrak{m}(T)$ avem

$$\| T^m (\alpha x + \beta y) \| \leqslant |\alpha| \| T^m x \| + |\beta| \| T^m y \|$$

ceea ce demonstrează că $\mathfrak{m}(T)$ este spațiu liniar. Fie B un operator care comută cu T și $x \in \mathfrak{m}(T)$. Cum

$$\| T^m B x \| = \| B \cdot T^m x \| \leqslant \| B \| \ \| T^m x \|$$

ceea ce arată că $Bx \in \mathfrak{m}(T)$.

Pentru a arăta că $\mathfrak{m}(T)$ este închis, este suficient să arătăm că $\mathfrak{m}(T) = \mathcal{J}(T)$. Să presupunem că există un element $x \in H$ astfel încît, $\{\| T^m x \|\}$ este mărginit și pentru un întreg m $\| T^m x \| > \alpha \|x\|$, $\alpha > 1$, sau $\| T^m x \| > \alpha$, $\| x \| = 1$, rezultă că șirul $\{\|T^{m^p} x\|\}$ nu este mărginit, ceea ce reprezintă o contradicție și teorema este demonstrată.

Vom da acum cîteva aplicații ale acestei teoreme.

Fie T un operator hyponormal. În acest caz se știe că și operatorul $\alpha T + \beta$ este hyponormal, oricare ar fi numerele complexe α și β. Fie în acest caz operatorul $\frac{1}{\varepsilon}(T - \lambda)$ cu λ un număr complex arbitrar iar ε un număr real pozitiv. Să notăm cu $\mathcal{J}(\lambda, \varepsilon)$ subspațiul atașat ca în teorema de mai sus pentru operatorul $\frac{1}{\varepsilon}(T - \lambda)$. Un element $x \in H$ este în $\mathcal{J}(\lambda, \varepsilon)$ dacă și numai dacă

$$\| (T - \lambda)^n x \| \leqslant \varepsilon^n \|x\|.$$

De asemenea, $\mathcal{J}(\lambda, \varepsilon)$ este un subspațiu închis invariant pentru T și pentru orice operator care comută cu T. Rezultă astfel că spectrul operatorului $(T-\lambda)/\mathcal{J}_{(\lambda,\varepsilon)}$ este în cercul $\{z, |z| \leqslant \varepsilon\}$ şi deci spectrul operatorului $T/\mathcal{J}_{(\lambda,\varepsilon)}$, este în $\{z, |z-\lambda| < \varepsilon\}$.

Clase de operatori care generalizează clasa operatorilor hyponormali şi care conţin operatori de clasă (N) sînt şi clasele $\mathcal{C}(N, k)$.

DEFINIŢIE 2.1. Un operator T mărginit se spune că este de clasa (N, k) dacă

$$\| Tx \|^k \leqslant \| T^k x \|$$

oricare ar fi elementul $x \in H$, $\| x \| = 1$. (Aici k este un întreg pozitiv) Se vede că operatorii de clasă (N) sînt operatorii de clasă $(N, 2)$. Are loc

TEOREMA 2.3. *Operatorii de clasă* (N) *sînt în orice clasă* (N, k) *cu* $k \geqslant 2$.

Demonstraţie. Fie $x \in H$, $\| x \| = 1$. Pentru $k = 2$ afirmaţia teoremei este adevărată. Să presupunem că este adevărată pentru orice J, $2 \leqslant J \leqslant n$, şi să o demonstrăm pentru $n+1$. Vom avea

$$\| T^{n+1} x \| = \| T^n \frac{Tx}{\| Tx \|} \| \geqslant \| T^2 x \|^n \frac{1}{\| Tx \|^{n-1}} \geqslant \| Tx \|^{n+1}$$

şi deci pentru orice n avem

$$\| Tx \|^n \leqslant \| T^n x \|$$

oricare ar fi $x \in H$, $\| x \| = 1$. Teorema este demonstrată. După A. Wintner [10] un operator se spune că este normaloid dacă

$$\| T \| = \sup |\langle Tx, x \rangle| = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

TEOREMA 2.4. *Dacă* $T \in \mathcal{C}(N, k)$, *atunci este normaloid.*

Demonstraţie. Din definiţie, rezultă că există un şir $\{x_n\}$ $\| x_n \| = 1$ astfel ca

$$\| Tx_n \| \to \| T \| = 1$$

(Presupunem, fără a restrînge generalitatea, că $\| T \| = 1$). Cum $T \in (N, k)$ rezultă că pentru fiecare x avem

$$\| Tx_n \|^k \leqslant \| T^k x_n \|.$$

De aici rezultă că

$$\| T^k \| = 1$$

şi mai mult că pentru orice $j, 1 \leqslant j \leqslant k$,

$$\| T^j \| = 1.$$

De asemenea pentru orice j, $1 \leqslant j \leqslant k$,

$$\lim \| T^j x_n \| = 1.$$

Dar cum

$$\| T^{k+1} x \| = \| T^k \frac{Tx}{\| Tx \|} \| \geqslant \| T^2 x \|^k \frac{1}{\| Tx \|^{k-1}}$$

şi făcînd $x = x_n$ obţinem imediat că

$$\lim \| T^{k+1} x_n \| = 1$$

adică

$$\| T^{k+1} \| = 1.$$

Dacă

$$\lim \| T^j x_n \| = 1,$$

atunci

$$\lim \| T^{j+1} x_n \| = 1$$

ca o consecință a inegalității

$$\| T^{J+1} x \| = T^k \cdot \frac{T^{J+1-k} x}{\| T^{J+1-k} x \|} \| \| T^{J+1-k} x \| \geqslant$$

$$\geqslant \| T^{J+2-k} x \|^k \| T^{J+1-k} x \|^{1-k},$$

unde punem $x = x_n$ și obținem afirmația făcută. Prin inducție rezultă că pentru orice j,

$$\lim \| T^j x_n \| = 1$$

și deci

$$\| T^n \| = 1, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

și teorema este demonstrată.

Exact ca în cazul operatorilor din clasa $\mathcal{C}$ $(N, 2)$ = clasa (N), se demonstrează următoarea teoremă pe care numai o enunțăm:

TEOREMA 2.5. *Dacă* $T \in \mathcal{C}(N, k)$ *și există un sistem de întregi* $p_1, \ldots q_1, \ldots, p_n, q_n$ *astfel încît*

$$T^{*p_1} T^{q_1} \ldots T^{*p_n} T^{q_n}$$

este un operator compact, atunci T *este normal*

Am văzut mai sus că orice operator de clasă (N, k) este normaloid. Se pune problema relației între aceste două clase de operatori. Aceasta este dată de

TEOREMA 2.6. *Există operatori normaloizi care nu sînt în nici o clasă* (N, k).

Demonstrație. Vom construi un operator normaloid pe un spațiu finit dimensional și aceasta va arăta, conform teoremei 2.5, că el nu este în nici o clasă (N, k). Să considerăm operatorul

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

și I operatorul unitate pe un spațiu finit dimensional.

Să considerăm operatorul

$$T = A \otimes I.$$

Avem

Închiderea mulţimii $W(T)$ este egală cu înfăşurătoarea convexă a mulţimii cl $W(A)$ şi a punctului 1. Dar

$$\sup |\langle Tx, x \rangle| \geqslant 1 = \| T \|$$

şi deci T este normaloid. Se vede imediat că T nu este normal şi teorema este demonstrată.

Remarcă. Un exemplu mai complicat a fost dat de către T. Furuta [11] pentru $k = 2$.

Definiţie. Un operator se spune că este invariant normaloid dacă restricţia sa la orice subspaţiu invariant este un operator normaloid.

Teorema 2.7. *Orice operator* $T \in \mathcal{C}(N, k)$ *este invariant normaloid.*

Demonstraţie. Teorema rezultă din definiţie şi din teorema 2.4.

Vom mai menţiona că o parte din teoremele de structură date mai înainte se menţin şi în cazul cînd operatorul este în clasa respectivă iar proprietatea de compacitate este înlocuită prin proprietatea ca operarul corespunzător să fie de tip Riesz. Prin operator Riesz se înţelege un operator pentru care orice punct din $\sigma(T) - \{0\}$ este punct Riesz; un punct $\lambda \in \sigma(T)$ este punct Riesz dacă

$$H = N(\lambda, T) \oplus F(\lambda, T),$$

una din $(N(\lambda, T)) < \infty$, $T(N(\lambda, T)) \subset N(\lambda, T)$ şi există un întreg $k = k(\lambda)$ astfel încît $(\lambda - T)^k / N(\lambda, T)$ este operatorul nul iar $T(F(\lambda, T)) \subset F(\lambda, T)$ astfel încît $(\lambda - T) / F(\lambda, T)$ este un homeomorfism.

De asemenea teoreme de structură se obţin cu ajutorul algebrei lui Calkin. Demonstraţia lor făcîndu-se în mod similar ca mai sus, vom menţiona numai enunţul lor [12].

Teorema 2.8. *Dacă* T^k *este un operator Riesz pentru un* $k \geqslant 1$ *şi care are partea imaginară compactă este compact.*

Teorema 2.9. *Dacă* T^k *este un operator Riesz şi* T *hyponormal, atunci* T *este compact.*

3. REFERINŢE ŞI COMENTARII

Teorema 1.1 a fost stabilită de J. Stampfli şi C.R. Putnam [3], [2]. Rezultatele privind legătura dintre rangul numeric şi valorile proprii au fost date de J. Stampfli [1].

Teorema 1.3 a fost dată în [5] şi pentru $p = 1$ în [4]. Teorema 1.4 a fost dată de T. Saitö [9].

Teorema 2.2 se găseşte în [8] şi teoremele 2.3, 2.4, 2.5, 2.6 se găsesc în [6]. O altă generalizare a fost dată în [7] care poate fi considerată ca o continuare a acestei lucrări.

Primită la redacţie la 15 decembrie 1967

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu 47, Bucureşti

HYPONORMAL OPERATORS (III)

(ABSTRACT)

This paper is a continuation of two papers in this Journal (St. cerc. mat., **19**, *3* (1967) I p. 423–437, II–p. 439–448). In the first part we present results about numerical range hyponormal operators. In the second part, we present results about the operators of class (N) considered in paper II. An important result is the fact that the class (N) is wider than the class of hyponormal operators and narrower than the class of normaloid operators.

Also some generalizations of class (N) are considered as operators of class (N, k). Many results are taken from some of the author's papers.

BIBLIOGRAFIE

1. J. Stampfli, *Extreme points of the numerical range of a hyponormal operator*. Mich. Math Journ., **13** (1966).
2. C. R. Putnam, *On the spectra of semi-normal operators*. Trans. Amer. Math. Soc., **119 (3)** 1965).
3. J. Stampfli, *Hyponormal operators and spectral density*. Trans. Amer. Math. Soc., **117** (1965).
4. I. H. Sheth, *On hyponormal operators*. Proc. A.M.S., **17(5)** (1966).
5. V. Istrăţescu, *A note on hyponormal operators*. Journ. Indian. Math. Soc.
6. I. Istrăţescu, V. Istrăţescu, *On some classes of operators, I, II*. Proc. Jap. Academy.
7. I. Istrăţescu, V. Istrăţescu, *On normaloid operators*. Math. Zeit., **105**, 153–156 (1968).
8. V. Istrăţescu, *On some invariant subspaces for operators of class (N)*. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. serie **VIII**, **XLIII**, *5* (1967).
9. T. Saitô, *Numerical range of Tensor products of operators*. Tohoku math. Journ., **19(1)** (1967).
10, A. Wintner, *Zur theorie der beschranten Bilinear formen*. Math. Zeit., **30** (1929).
11. T. Furuta, *On a class of Paranormal Operators*. Proc. Jap. Academy.
12. Gh. Constantin, I. Istrăţescu, *Some remarks on structure of Riesz operators*. Proc. Amer. Math. Soc.

ASUPRA METODEI LUI NEWTON APLICATĂ LA REZOLVAREA ECUAȚIILOR FUNCȚIONALE NELINIARE

DE

B. JANKÓ, F. FORNVALD și A. GAIDICI
(Cluj)

În lucrarea de față sînt prezentate teoreme de existență a soluției ecuației funcționale $F(x) = 0$, derivata $F'(x)$ satisfăcînd o condiție de tip Hölder (3).

1. M. Altman în [1] a dat o generalizare a metodei clasice a lui Newton pentru rezolvarea ecuației funcționale

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

unde $F(x)$ este definită în spațiul X de tip Banach. Despre funcționala $F(x)$ se presupune că este continuă și admite derivata $F'(x)$ (în sens Fréchet) pentru $x \in S(x_0, r) \subset X$. De asemenea este îndeplinită condiția [1]

$$\|y_n\| = 1 \ |F'(x_n)y_n| = \|F'(x_n)\|, \ y_n \in X, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{A}$$

Pentru rezolvarea ecuației (1) se aplică algoritmul

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)y_n} y_n. \tag{2}$$

În [1] se presupune că există $F''(x)$ care este uniform mărginită în normă, adică $\|F''(x)\| \leqslant K$, $x \in S(x_0, r)$. Întrucît în (2) nu intervine $F''(x)$, această condiție se poate înlocui cu

$$\|F'(x') - F'(x'')\| \leqslant K\|x' - x''\|^{\alpha}, \qquad (0 < \alpha \leqslant 1). \tag{3}$$

O condiție analogă se găsește și în lucrările [2], [3], [4], aplicată la rezolvarea ecuației operaționale $P(x) = 0$.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 8, P. 1169–1174, BUCUREȘTI, 1968

TEOREMA 1. *Dacă pentru aproximaţia iniţială* x_0 *sînt îndeplinite următoarele condiţii :*

a) $$\frac{1}{\| F'(x_0) \|} \leqslant B_0$$

b) $$\| x_1 - x_0 \| = \frac{| F(x_0) |}{\| F'(x_0) \|} \leqslant \eta_0$$

c) $$\| F'(x') - F'(x'') \| \leqslant K \| x' - x'' \|^{\alpha} ; \qquad x', x'' \in S(x_0, r)$$

d) $$h_0 = B_0 K \eta_0^{\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{1 + \alpha}$$

atunci ecuaţia (1) admite cel puţin o soluţie $x^* \in S(x_0, r)$. *Rapiditatea convergenţei este caracterizată de relaţia*

(4) $$\| x^* - x_n \| \leqslant \frac{\left[(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} h_0\right]^{(1+\alpha)^n - \frac{1}{\alpha}}}{\left[(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right] \left[(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{n-1}} \eta_0 .$$

Demonstraţie. Se arată că trecînd de la aproximaţia x_0 la x_1, condiţiile a) —d) se păstrează

Pe baza relaţiei (2) şi

(5) $$| F(x') - F(x'') - F'(x'') (x' - x'') | \leqslant \frac{K}{1 + \alpha} \| x' - x'' \|^{1+\alpha}$$

care rezultă din [2] se obţine

(6) $$| F(x_1) | \leqslant \frac{K \eta_0^{1+\alpha}}{1 + \alpha} .$$

Pe de altă parte avem

(7) $$\frac{1}{\| F'(x_1) \|} \leqslant \frac{B_0}{1 - h_0} = B_1 \leqslant (1 + \alpha) B_0 .$$

Din (6) şi (7) obţinem

(8) $$\frac{| F(x_1) |}{\| F'(x_1) \|} \leqslant \frac{h_0 \eta_0}{(1 + \alpha)(1 - h_0)} = \eta_1 \leqslant h_0 \eta_0$$

apoi din (7) şi (8) rezultă expresia lui h_1

(9) $$h_1 = B_1 K \eta_1^{\alpha} \leqslant (1 + \alpha) h_0^{1+\alpha} \leqslant h_0 .$$

Folosind metoda inducţiei complete stabilim relaţiile

(10) $$\eta_n \leqslant h_{n-1} \eta_{n-1}$$

(11) $$h_n \leqslant (1 + \alpha) h_{n-1}^{1+\alpha}$$

de unde rezultă inegalitățile

$$\eta_n \leqslant \frac{\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} h_0\right]^{\frac{(1+\alpha)^n-1}{\alpha}}}{\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^n}\,\eta_0 \tag{13}$$

$$h_n \leqslant \frac{1}{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} h_0\right]^{(1+\alpha)^n}. \tag{14}$$

Analog ca în relația (8) avem

$$\| x_{n+1} - x_n \| = \frac{| F(x_n) |}{\| F'(x_n) \|} \leqslant \eta_n. \tag{15}$$

Trecînd la limită, pe baza continuității lui $F(x)$ și a relației (13), obținem

$$F(x^*) = 0, \qquad x^* = \lim x_n.$$

În continuare, arătăm că aproximațiile $\{x_n\}$ rămîn în sfera considerată.
Din (15) rezultă

$$\| x_{n+p} - x_n \| \leqslant \eta_n + \eta_{n+1} + \ldots + \eta_{n+p-1} \leqslant \tag{16}$$

$$\leqslant \frac{\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} h_0\right]^{(1+\alpha)^n - \frac{1}{\alpha}}}{\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right]\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{n-1}}\,\eta_0.$$

Trecînd la limită în (16) pentru $p \to \infty$ rezultă relația (4), în care pentru $n = 0$ obținem raza sferei

$$r = \frac{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} h_0\right]^{1-\frac{1}{\alpha}}}{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} - 1}\,\eta_0. \tag{17}$$

2. În teorema precedentă am presupus că pentru elementul x_0 este satisfăcută condiția

$$\frac{1}{\| F'(x_0) \|} \leqslant B_0. \tag{18}$$

În cazul cînd această condiție este satisfăcută pentru orice element x dintr-un anumit domeniu adică :

$$\frac{1}{\| F'(x) \|} \leqslant B \tag{19}$$

condiția d) poate fi slăbită.
Introducem notația

$$H = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{h_0}{1+\alpha}\right)^{\frac{(1+\alpha)^i - 1}{\alpha}}. \tag{20}$$

TEOREMA 2. *Dacă pentru aproximaţia iniţială* x_0 *avem îndeplinite următoarele condiţii :*

$$\text{a)} \qquad \frac{1}{\| F'(x) \|} \leqslant B$$

$$\text{b)} \qquad \| x_1 - x_0 \| = \frac{| F(x_0) |}{\| F'(x_0) \|} \leqslant \eta_0$$

$$\text{c)} \qquad \| F'(x') - F'(x'') \| \leqslant K \| x' - x'' \|^{\alpha}; \qquad x', x'' \in S(x_0, r)$$

$$\text{d)} \qquad h_0 = BK\eta_0^{\alpha} \leqslant 1 + \alpha,$$

atunci ecuaţia (1) admite cel puţin o soluţie $x^* \in S(x_0, r)$. *Rapiditatea convergenţei este caracterizată de relaţia*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant H \left(\frac{h_0}{1 + \alpha} \right)^{\frac{(1+\alpha)^n - 1}{\alpha}} \eta_0 . \tag{17}$$

Demonstraţie. Analog ca în teorema 1 obţinem

$$\eta_n \leqslant \frac{h_{n-1} \eta_{n-1}}{1 + \alpha} \tag{18}$$

$$h_n \leqslant (1 + \alpha) \left(\frac{h_{n-1}}{1 + \alpha} \right)^{1+\alpha}, \tag{19}$$

de unde avem

$$\eta_n \leqslant \left(\frac{h_0}{1 + \alpha} \right)^{\frac{(1+\alpha)^n - 1}{\alpha}} \eta_0 \tag{20}$$

$$h_n \leqslant (1 + \alpha) \left(\frac{h_0}{1 + \alpha} \right)^{(1+\alpha)^n} . \tag{21}$$

În continuare obţinem

$$\| x_{n+1} - x_n \| = \frac{| F(x_n) |}{\| F'(x_n) \|} \leqslant \eta_n . \tag{22}$$

Trecînd la limită în (22), pe baza continuităţii lui $F(x)$ şi din (20) rezultă

$$F(x^*) = 0, \qquad x^* = \lim x_n .$$

Ca şi în cazul precedent, din (22) se găseşte

$$\| x_{n+p} - x_n \| \leqslant H \left(\frac{h_0}{1 + \alpha} \right)^{\frac{(1+\alpha)^n - 1}{\alpha}} \eta_0$$

făcînd $p \to \infty$ obţinem evaluarea (17) în care pentru $n = 0$ obţinem raza sferei

$$r = H\eta_0 .$$

Observație. 1. În particular, pentru $\alpha = 1$, (3) devine o condiție de tip Lipschitz iar teoremele 1 și 2 în acest caz sînt asemănătoare cu cele date în [1].

2. Pentru rezolvarea ecuației (1) se poate aplica procedeul modificat

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_0)\,y_0}\,y_0 . \tag{23}$$

În acest caz are loc

TEOREMA 3. *Dacă pentru aproximația inițială x_0 avem îndeplinite următoarele condiții* ;

a) $$\frac{1}{\|F'(x_0)\|} \leqslant B_0$$

b) $$\|x_1 - x_0\| = \frac{|F(x_0)|}{\|F'(x_0)\|} \leqslant \eta_0 < N\eta_0$$

c) $$\|F'(x') - F'(x'')\| \leqslant K\|x' - x''\|^{\alpha}; \qquad x', x'' \in S(x_0, N\eta_0)$$

d) $$h_0 = B_0 K \eta_0^{\alpha} \leqslant \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{\alpha}$$

atunci ecuația (1) are cel puțin o soluție $x^* \in S$ iar procedeul (23) este convergent. Rapiditatea convergenței este caracterizată de relația

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{q^n}{1-q}\,\eta_0 \tag{24}$$

unde

$$q = N^{\alpha} h_0 < 1; \qquad N < \frac{1+\alpha}{\alpha} .$$

Demonstrația este analoagă cu acea a teoremei respective din [2].

Primită la redacție la 7 decembrie 1967

Institutul pedagogic Baia Mare

SUR LA MÉTHODE DE NEWTON APPLIQUÉE À LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE NON LINÉAIRE

(RÉSUMÉ)

Dans le cadre de ce travail les auteurs ont élaboré trois théorèmes relatifs à l'existence de la résolution de l'équation fonctionnelle non linéaire $F(x) = 0$, en utilisant la méthode de Newton-Altman

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)\,y_n}\,y_n ,$$

respectivement la méthode modifiée de Newton-Altman

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_0)\, y_0}\, y_n,$$

où la dérivée au sens de Fréchet $F'(x)$ satisfait une condition de type Hölder ayant la forme suivante

$$\|F'(x') - F'(x'')\| \leqslant K \|x' - x''\|^{\alpha}, \qquad \alpha \in (0, 1]$$

sans supposer l'existence de la dérivée du second ordre de la fonctionnelle $F(x)$.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Altman, Bul. Acad. Polon., **V**, 5 (1957).
2. B. A. Vertheim, D.A.N., S.S.S.R., **110**, 719 (1956).
3. B. A. Vertheim, Y. M. N., **12** 1(73) (1957).
4. U. O. Kusakin, Donobugu, **7** (1956).

DERIVATA LIE A OBIECTELOR GEOMETRICE $\Omega^{\wedge}(\xi, T)$ 1)

DE

RADU MIRON
(Iași)

Prezenta Notă se ocupă de teoria obiectelor geometrice și derivatele lor Lie în spații de elemente tensoriale. Această teorie constituie o generalizare a rezultatelor date în lucrarea [3].

Teoria obiectelor geometrice în spații de elemente tensoriale a făcut obiectul a numeroase cercetări [1], [2], [3] Rezultate remarcabile a obținut în această direcție Davies E. T., Clark R.S., Laptev B. L. și Buchin Su. Observînd că legea de transformare adoptată de autorii citați este particulară, se impune cercetarea derivatei Lie și problemele legate de ea în cazul general al obiectelor geometrice supuse la transformări grupale în care poate intra explicit elementul tensorial generic al spațiului. În cele ce urmează, după ce se introduce noțiunea de obiect geometric general pe o varietate de elemente tensoriale, se stabilește derivata Lie și se arată că aceasta are caracter geometric dacă și numai dacă obiectul este liniar. Se stabilesc apoi identitățile și formulele fundamentale și se schițează rezolvarea problemei existenței unui obiect geometric liniar, cu lege de transformare dată, care admite un grup Lie ca grup de invarianță.

1. Fie V_n o varietate diferențiabilă de clasă C^∞. Presupunem că s-a asociat în fiecare punct din V_n, arbitrar, un tensor de tip (r, s) așa fel ca la schimbările de coordonate locale pe V_n să avem

$$\begin{aligned} &\xi^{\varkappa'} = f^{\varkappa}(\xi^1, \ldots, \xi^n), \\ (1.1)\qquad &T^{\varkappa'_1 \ldots \varkappa'_r}_{\lambda'_1 \ldots \lambda'_s}\, \partial_{\lambda_1} \xi^{\lambda'_1} \ldots \partial_{\lambda_s} \xi^{\lambda'_s} = T^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_r}_{\lambda_1 \ldots \lambda_s}\, \partial_{\varkappa_1} \xi^{\varkappa'_1} \ldots \partial_{\varkappa_r} \xi^{\varkappa'_r}. \end{aligned}$$

Varietatea de puncte (ξ, T), prevăzută cu pseudogrupul (1.1), se numește varietate de elemente tensoriale și se notează cu $\mathcal{V}_n(\xi, T)$.

---

1) Lucrarea a fost prezentată la sesiunea jubiliară a Academiei Republicii Socialiste România, octombrie 1966.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 8, P. 1175–1181, BUCUREȘTI, 1968

Definiție. Un obiect geometric de clasă p pe $\mathcal{V}_n(\xi, T)$ este definit prin :

1° N componente $\Omega^{\Lambda}(\xi, T)$, $(\Lambda, \Pi, \Sigma = 1, \ldots, N)$ date în sistemul de coordonate $(\varkappa)$.

2° În raport cu (1.1), $\Omega^{\Lambda}(\xi, T)$ se transformă după legea

$$\Omega^{\Lambda'} = F^{\Lambda}\left(\Omega^{\Sigma};\ \xi^{\varkappa}, f^{\varkappa}, \partial_{\lambda_1} f^{\varkappa}, \ldots, \partial_{\lambda_p \ldots \lambda_s} f^{\varkappa};\ T^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_r}_{\lambda_1 \ldots \lambda_s}, T^{\varkappa'_1 \ldots \varkappa'_r}_{\lambda'_1 \ldots \lambda'_s}\right), \tag{1.2}$$

pe care o vom scrie sub forma

$$\Omega^{\Lambda'} = F^{\Lambda}(\Omega^{\Sigma};\ \xi^{\varkappa}, \xi^{\varkappa'};\ T^{(r)}_{(s)}, T^{(r')}_{(s')}). \tag{1.3}$$

3° Sînt verificate următoarele proprietăți grupale :

a) $F^{\Lambda}(F^{\Sigma}(\Omega^{\Pi};\ \xi^{\varkappa}, \xi^{\varkappa'};\ T^{(r)}_{(s)}, T^{(r')}_{(s')});\ \xi^{\varkappa'}, \xi^{\varkappa''};\ T^{(r')}_{(s')}, T^{(r'')}_{(s'')}) = F^{\Lambda}(\Omega^{\Sigma};\ \xi^{\varkappa}, \xi^{\varkappa''};\ T^{(r)}_{(s)}, T^{(r'')}_{(s'')})$,

b) $F^{\Lambda}(F^{\Sigma}(\Omega^{\Pi};\ \xi^{\varkappa}, \xi^{\varkappa'};\ T^{(r)}_{(s)}, T^{(r')}_{(s')});\ \xi^{\varkappa'}, \xi^{\varkappa};\ T^{(r')}_{(s')}, T^{(r)}_{(s)}) = \Omega^{\Lambda}$,

c) $F^{\Lambda}(\Omega^{\Sigma};\ \xi^{\varkappa}, \xi^{\varkappa};\ T^{(r)}_{(s)}, T^{(r)}_{(s)}) = \Omega^{\Lambda}$.

Este evident că a) & b) $\Rightarrow$ c) ; a) & c) $\Rightarrow$ b).

Dacă $T^{(r)}_{(s)}$ și $T^{(r')}_{(s')}$ nu intră explicit în membrul al doilea al legii de transformare (1.2), atunci se obțin obiectele geometrice considerate de B. L. Laptev [2].

Dacă funcțiile F^{Λ} nu conțin explicit $\xi^{\varkappa}$, $f^{\varkappa}$, atunci $\Omega^{\Lambda}(\xi, \bar{T})$ se numește diferențial.

Cînd legea de transformare este de forma

$$\Omega^{\Lambda} = F^{\Lambda}_{\Sigma}(\xi^{\varkappa}, \xi^{\varkappa'};\ T^{(r)}_{(s)}, T^{(r')}_{(s')})\,\Omega^{\Sigma} + G^{\Lambda}(\xi^{\varkappa}, \xi^{\varkappa'};\ T^{(r)}_{(s)}, T^{(r')}_{(s')}), \tag{1.4}$$

obiectul Ω^{Λ} se numește liniar. Iar dacă $G^{\Lambda} \equiv 0$, el se numește liniar omogen.

2. Vom considera transformarea generalizată pe $\mathcal{V}_n(\xi, \bar{T})$ definită prin

$$\begin{aligned} {}'\xi^{\varkappa} &= f^{\varkappa}(\xi^1, \ldots, \xi^n), \\ {}'T^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_r}_{\lambda_1 \ldots \lambda_s} \partial_{\rho_1} f^{\lambda_1} \ldots \partial_{\rho_s} f^{\lambda_s} &= T^{\sigma_1 \ldots \sigma_r}_{\rho_1 \ldots \rho_s} \partial_{\sigma_1} f^{\varkappa_1} \ldots \partial_{\sigma_r} f^{\varkappa_r}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ea permite să se definească pseudogrupul de transformări de coordonate pe $(\varkappa) \to (\varkappa')$ prin

$$\begin{aligned} \xi^{\varkappa'} = f^{\varkappa}(\xi^1, \ldots, \xi^n);\ T^{\varkappa'_1 \ldots \varkappa'_r}_{\lambda'_1 \ldots \lambda'_s} \partial_{\rho_1} f^{\lambda_1} \ldots \partial_{\rho_1} f^{\lambda_s} = \\ = T^{\sigma_1 \ldots \sigma_r}_{\rho_1 \ldots \rho_s} \partial_{\sigma_1} f^{\varkappa_1} \ldots \partial_{\sigma_r} f^{\varkappa_r}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Transformarea (2.1) aplică obiectul geometric $\Omega^{\Lambda}(\xi, T)$ în obiect geometric $\Omega^{\Lambda}('\xi, 'T)$ cu aceeași lege de transformare. Vom defini un nou obiect geometric ale cărui componente $'\Omega^{\Lambda}$ în sistemul de coordonate $(\varkappa')$ date de (2.2), în punctul (ξ, T), sînt

$$'\Omega^{\Lambda'}(\xi, T) = \Omega^{\Lambda}('\xi, 'T). \tag{2.3}$$

Diferenţa $D\Omega^\wedge = {}'\Omega^\wedge(\xi, T) - \Omega^\wedge(\xi, T)$ se numeşte *diferenţa Lie* a obiectului $\Omega^\wedge(\xi, T)$.

În ipoteza că (2.1) este transformarea infinitezimală generalizată

$$'\xi^\varkappa = \xi^\varkappa + V^\varkappa(\xi)\,\mathrm{d}t,$$

$$'T^{\varkappa_1\ldots\varkappa_r}_{\lambda_1\ldots\lambda_s} = T^{\varkappa_1\ldots\varkappa_r}_{\lambda_1\ldots\lambda_s} - \sum_{m=1}^{s} T^{\varkappa_1\ldots\varkappa_r}_{a_1\ldots\rho_m\ldots\lambda_s}\,\partial_{\lambda_m} V^{\rho_m}\,\mathrm{d}t + \sum_{m=1}^{r} T^{\varkappa_1\ldots\sigma_m\ldots\varkappa_r}_{\lambda_1\ldots\lambda_s}\,\partial_{\sigma_m} V^{\varkappa_m}\,\mathrm{d}t,$$

(2.4)

schimbarea de coordonate (2.2) va fi dată de

$$(2.5)\begin{cases} \xi^{\varkappa'} = \xi^\varkappa + V^\varkappa(\xi)\,\mathrm{d}t,\ T^{\varkappa'_1\ldots\varkappa'_r}_{\lambda'_1\ldots\lambda'_s} = T^{\varkappa_1\ldots\varkappa_r}_{\lambda_1\ldots\lambda_s} + \{T, V\}^{\varkappa_1\ldots\varkappa_r}_{\lambda_1\ldots\lambda_s}\,\mathrm{d}t, \\ \{T, V\}^{\varkappa_1\ldots\varkappa_r}_{\lambda_1\ldots\lambda_s} = \{T, V\}^{(r)}_{(s)} \sum_{m=1}^{r} T^{\varkappa_1\ldots\sigma_m\ldots\varkappa_r}_{\lambda_1\ldots\lambda_s}\,\partial_{\sigma_m} V^{\varkappa_m} - \sum_{m=1}^{s} T^{\varkappa_1\ldots\varkappa_r}_{\lambda_1\ldots\rho_m\ldots\lambda_s}\,\partial_{\lambda_m} V^{\rho_m}, \end{cases}$$

pe care o vom scrie succint sub forma

$$(2.6)\qquad \begin{aligned} \xi^{\varkappa'} &= \xi^\varkappa + V^\varkappa(\xi)\,\mathrm{d}t, \\ T^{(r')}_{(s')} &= T^{(r)}_{(s)} + \{T, V\}^{(r)}_{(s)} \end{aligned}$$

şi diferenţa Lie a obiectului $\Omega^\wedge(\xi, T)$ se va numi, în acest caz, *diferenţiala Lie*. Vom nota diferenţiala Lie a lui $\Omega^\wedge(\xi, T)$ prin $\underset{\vee}{\mathcal{L}}\Omega^\wedge(\xi, T)\,\mathrm{d}t$. Avem

$$(2.7)\qquad \underset{\vee}{\mathcal{L}}\Omega^\wedge(\xi, T)\,\mathrm{d}t = {}'\Omega^\wedge(\xi, T) - \Omega^\wedge(\xi, T).$$

Coeficientul lui dt în $\underset{\vee}{\mathcal{L}}\Omega^\wedge(\xi, T)\,\mathrm{d}t$ se numeşte *derivata Lie* a lui $\Omega^\wedge(\xi, T)$ şi se notează $\underset{\vee}{\mathcal{L}}\Omega^\wedge(\xi, T)$.

Conform cu (1.3) avem

$$\Omega^\wedge('\xi, 'T) = F^\wedge('\Omega;\ \xi^\varkappa, \xi^{\varkappa'};\ T^{(r)}_{(s)}, T^{(r')}_{(s')}).$$

Dezvoltînd taylorian ambii membri ai acestei egalităţi şi ţinînd seama de a) —c), se obţine după (2.6) şi (2.7) :

$$(2.8)\qquad \begin{aligned} \underset{\vee}{\mathcal{L}}\Omega^\wedge(\xi, T) = {} & V^\rho\,\partial_\rho\,\Omega^\wedge + \{T, V\}^{(r)}_{(s)}\,\partial_{T^{(r)}_{(s)}}\Omega^\wedge - \\ & - \sum_{t=0}^{p} F^{\lambda(t)\,\wedge}_{\rho}(\Omega, \xi, T)\,\partial_{\lambda(t)} V^\rho - \{T, V\}^{(r)}_{(s)}\,\partial_{T^{(r)}_{(s)}} F^\wedge(\Omega, \xi, T), \end{aligned}$$

unde

$$\partial_{\lambda(0)} V^\varkappa = V^\varkappa,\ \partial_{\lambda(t)} V^\varkappa = \partial_{\lambda_t\ldots\lambda_s} V^\varkappa$$

şi

$$F^{\lambda(0)\,\wedge}_{\rho}(\Omega, \xi, T) = \left[\frac{\partial F^\wedge}{\partial f^\rho}\right]_{(\xi,\,T)},\ F^{\lambda(t)\,\wedge}_{\rho}(\Omega, \xi, T) = \left[\frac{\partial F^\wedge}{\partial(\partial_{\lambda(t)} f^\rho)}\right]_{(\xi,\,T)},$$

$$\partial_{T^{(r)}_{(s)}} F^\wedge(\Omega, \xi, T) = \left[\frac{\partial F^\wedge}{\partial T^{(r')}_{(s')}}\right]_{(\xi,\,T)},$$

punctul (ξ, T) fiind dat de

$$f^{\varkappa} = \xi^{\varkappa},\ \partial_{\lambda} f^{\varkappa} = \delta^{\varkappa}_{\lambda},\ \partial_{\lambda(t)} f^{\varkappa} = 0\ (t \geqslant 2),\ T^{(r')}_{(s')} = T^{(r)}_{(s)}.$$

TEOREMA 2.1. *Derivata Lie a obiectului geometric* $\Omega^{\wedge}(\xi, T)$ *este dată de formula (2.7).*

3. Vom cerceta în ce caz derivata Lie a unui obiect geometric $\underset{\vee}{\mathscr{L}}\Omega^{\wedge}(\xi, T)$ este un obiect geometric.

Din relaţiile

$$'\Omega^{\wedge\prime}(\xi, T) - \Omega^{\wedge}(\xi, T) = F^{\wedge}('\Omega^{\Sigma}; \xi^{\varkappa}, \xi^{\varkappa'}; T^{(r)}_{(s)}, T^{(r')}_{(s')}) - F^{\wedge}(\Omega; \xi^{\varkappa}, \xi^{\varkappa'}; T^{(r)}_{(s)}, T^{(r')}_{(s')})$$

şi (2.6) se deduce

$$\underset{\vee}{\mathscr{L}}\Omega^{\wedge\prime}(\xi, T) = \frac{\partial F^{\wedge}}{\partial \Omega^{\Sigma}} \underset{\vee}{\mathscr{L}}\Omega^{\Sigma}. \tag{3.1}$$

Formulele (3.1) dau legea de transformare a derivatei Lie a unui obiect geometric $\Omega^{\wedge}(\xi, T)$.

Egalitatea (3.1) permite să formulăm teorema:

TEOREMA 3.1. *Derivata Lie a unui obiect geometric* $\Omega^{\wedge}(\xi, T)$ *este un obiect geometric dacă şi numai dacă* $\Omega^{\wedge}(\xi, T)$ *este liniar.*

Pentru un obiect geometric liniar cu legea de transformare (1.4), după (3.1) avem

$$\underset{\vee}{\mathscr{L}}\Omega^{\wedge\prime}(\xi, T) = F^{\wedge}_{\Sigma}(\xi^{\varkappa}, \xi^{\varkappa'}; T^{(r)}_{(s)}, T^{(r')}_{(s')}) \underset{\vee}{\mathscr{L}}\Omega^{\Sigma}(\xi, T).$$

Deci $\underset{\vee}{\mathscr{L}}\Omega^{\wedge}(\xi, T)$ este un obiect geometric liniar omogen. Putem considera derivata sa Lie ş.a.m.d.

Folosind (2.8), derivata Lie a unui obiect liniar este dată de

$$\begin{aligned} \underset{\vee}{\mathscr{L}}\Omega^{\wedge}(\xi, T) &= V^{\rho}\,\partial_{\rho}\,\Omega^{\wedge} + \{T, V\}^{(r)}_{(s)}\,\partial_{T^{(r)}_{(s)}}\Omega^{\wedge} - \\ &- \sum_{t=0}^{p} (F^{\lambda(t)}_{\rho}{}^{\hat{}}_{\Sigma}\,\Omega^{\Sigma} + G^{\lambda(t)\wedge}_{\rho})\,\partial_{\lambda(t)} V^{\rho} - \{T, V\}^{(r)}_{(s)}(\partial_{T^{(r)}_{(s)}} F^{\wedge}_{\Sigma}\,\Omega^{\Sigma} + \partial_{T^{(r)}_{(s)}} G^{\wedge}), \end{aligned} \tag{3.2}$$

unde

$$\begin{gathered} F^{\lambda(t)}_{\rho}{}^{\hat{}}_{\Sigma} = \left[\frac{\partial F^{\wedge}_{\Sigma}}{\partial f^{\rho}}\right]_{(\xi, T)},\ F^{\lambda(t)}_{\rho}{}^{\hat{}}_{\Sigma} = \left[\frac{\partial F^{\wedge}_{\Sigma}}{\partial(\partial_{\lambda(t)} f^{\rho})}\right]_{(\xi, T)} \\ \partial_{T^{(r)}_{(s)}} F^{\wedge}_{\Sigma} = \left[\frac{\partial F^{\wedge}}{\partial T^{(r)}_{(s)}}\right]_{(\xi, T)}. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Cu notaţiile

$$\begin{aligned} \{F, V\}^{\wedge}_{\Sigma} &= \sum_{t=0}^{p} F^{\lambda(t)\wedge}_{\rho}{}_{\Sigma}\,\partial_{\lambda(t)} V^{\rho} + \partial_{T^{(r)}_{(s)}} F^{\wedge}_{\Sigma} \cdot \{T, V\}^{(r)}_{(s)}, \\ \{G, V)^{\wedge} &= \sum_{t=0}^{p} G^{\lambda(t)\wedge}_{\rho}\,\partial_{\lambda(t)} V^{\rho} + \partial_{T^{(r)}_{(s)}} G^{\wedge} \cdot \{T, V\}^{(r)}_{(s)}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

avem

$$(3.5)\qquad \underset{v}{\mathcal{L}}\,\Omega^{\wedge}(\xi,\ T)=V^{\rho}\,\partial_{\rho}\,\Omega^{\wedge}+\{T,\ V\}^{(r)}_{(s)}\,\partial_{T^{(r)}_{(s)}}\,\Omega^{\wedge}-\{F,V\}^{\hat{}}_{\Sigma}\,\Omega^{\Sigma}-\{G,V\}^{\wedge}.$$

Caracterul liniar al formulei (3.5) arată că

$$\underset{v}{\mathcal{L}}\,\frac{1}{2}\,(\underset{1}{\Omega}{}^{\wedge}\pm\underset{1}{\Omega}{}^{\wedge})=\frac{1}{2}\,\underset{v}{\mathcal{L}}\;\underset{1}{\Omega}{}^{\wedge}\pm\frac{1}{2}\,\underset{v}{\mathcal{L}}\,\underset{2}{\Omega}{}^{\wedge},$$

$\underset{1}{\Omega}{}^{\wedge}$, $\underset{2}{\Omega}{}^{\wedge}$ fiind obiecte liniare cu aceeași lege de transformare.

De asemenea, avem

$$\underset{\underset{1\ \ 2}{av+bv}}{\mathcal{L}}\,\Omega^{\wedge}=a\underset{\underset{1}{v}}{\mathcal{L}}\Omega^{\wedge}+b\underset{\underset{2}{v}}{\mathcal{L}}\Omega^{\wedge},\qquad(a,\,b=\text{const.})$$

În fine, dacă Ω și Φ sînt obiecte geometrice liniare și $\Omega\,\Phi$ este obiect liniar, atunci

$$\underset{v}{\mathcal{L}}\,\Omega\,\Phi=(\underset{v}{\mathcal{L}}\,\Omega)\,\Phi+\Omega\,\underset{v}{\mathcal{L}}\,\Phi.$$

Exemple. 1° Dacă $f(\xi,\ T)$ este un cîmp de scalari pe $\mathcal{V}_n(\xi,\ T)$, derivata sa Lie este

$$\underset{v}{\mathcal{L}}f(\xi,\ T)=V^{\rho}\,\partial_{\rho}f+\{T,\ V\}^{(r)}_{(s)}\,\partial_{T^{(r)}_{(s)}}f.$$

2° $\underset{v}{\mathcal{L}}\,T^{(r)}_{(s)}=0,$

care se deduce imediat din (3.2).

3° Dacă $\tau^{\varkappa_1\cdots\varkappa_n}_{\lambda_1\cdots\lambda_e}(\xi,\ T)$ este un cîmp de tensori pe $\mathcal{V}_n(\xi,\ T)$, atunci

$$\underset{v}{\mathcal{L}}\,\tau^{\varkappa_1\ldots\varkappa_n}_{\lambda_1\ldots\lambda_e}=V^{\rho}\,\partial_{\rho}\tau^{\varkappa_1\ldots\varkappa_n}_{\lambda_1\ldots\lambda_e}+\{T,\ V\}^{(r)}_{(s)}\,\partial_{T^{(r)}_{(s)}}\,\tau^{\varkappa_1\ldots\varkappa_n}_{\lambda_1\ldots\lambda_e}+\sum_{k=1}^{e}\tau^{\varkappa_1\ldots\varkappa_n}_{\lambda_1\ldots\rho_k\ldots\lambda_e}\,\partial_{\lambda_k}V^{\rho_k}-$$

$$-\sum_{k=1}^{k}\tau^{\varkappa_1\ldots\rho_k\ldots\varkappa_n}_{\lambda_1\ldots\lambda_e}\,\partial_{\rho_k}V^{\varkappa_k}.$$

Observație. Toate considerațiile făcute aici se reduc, în cazul $T^{(r)}_{(s)}=\xi$, la noțiuni și proprietăți stabilite în [3] pentru obiectele geometrice și derivata lor Lie pe varietăți de elemente liniare.

4. Să considerăm acum două transformări infinitezimale generalizate (2.6) de vectori $\underset{1}{V}{}^{\varkappa}(\xi)$ și $\underset{2}{V}{}^{\varkappa}(\xi)$. Utilizînd identitățile a) – c), printr-un procedeu aplicat în lucrarea noastră [3] se stabilesc identitățile :

$$\{F,\underset{2}{V}\}^{\hat{}}_{\pi}\{F,\underset{1}{V}\}^{\pi}_{\Sigma}+\underset{1}{V}{}^{\rho}\,\partial_{\rho}\,\{F,\underset{2}{V}\}^{\hat{}}_{\Sigma}+\{T,\underset{1}{V}\}^{(r)}_{(s)}\,\partial_{T^{(r)}_{(s)}}\{F,\underset{2}{V}\}^{\hat{}}_{\Sigma}=\{F,\underset{1}{V}{}^{\rho}\,\partial_{\rho}\underset{2}{V}\}^{\hat{}}_{\Sigma}+$$

$$+\{F,\underset{1}{V},\underset{2}{V}\}^{\hat{}}_{\Sigma},$$

$$\{F,\underset{2}{V}\}^{\hat{}}_{\Pi}\{G,\underset{1}{V}\}^{\pi}+\underset{1}{V}{}^{\rho}\,\partial_{\rho}\,\{G,\underset{2}{V}\}^{\wedge}+\{T,\underset{1}{V}\}^{(r)}_{(s)}\,\partial_{T^{(r)}_{(s)}}\{G,\underset{2}{V}\}^{\wedge}=G,\underset{1}{V}{}^{\rho}\,\partial_{\rho}\underset{2}{V}\}^{\wedge}+$$

$$+\{G,\underset{1}{V},\underset{2}{V}\}^{\wedge},$$

în care $\{F, \underset{1}{V}, \underset{2}{V}\}^{\wedge}_{\Sigma} = \{F, \underset{2}{V}, \underset{1}{V}\}^{\wedge}_{\Sigma}$, $\{G, \underset{1}{V}, \underset{2}{V}\}^{\wedge} = \{G, \underset{2}{V}, \underset{1}{V}\}^{\wedge}$ au niște expresii care nu interesează în mod special.

Fie $\underset{a}{V}^{\varkappa}(\xi)$, $(a, b, c = 1, \dots, r)$, r cîmpuri de vectori. Din identitățile precedente urmează printr-un calcul simplu, identitățile fundamentale

$$\{F, \underset{c}{V}\}^{\wedge}_{\pi}\{F, \underset{b}{V}\}^{\pi}_{\Sigma} - \{F, \underset{b}{V}\}^{\wedge}_{\pi}\{F, \underset{c}{V}\}^{\pi}_{\Sigma} - (\underset{c}{V}^{\rho}\,\partial_{\rho}\{F, \underset{b}{V}\}^{\wedge}_{\Sigma} - \underset{b}{V}^{\rho}\,\partial_{\rho}\{F, \underset{c}{V}\}^{\wedge}_{\Sigma}) -$$

$$-[\{T, \underset{c}{V}\}^{(r)}_{(s)}\,\partial_{T^{(r)}_{(s)}}\{F, \underset{b}{V}\}^{\wedge}_{\Sigma} - \{T, \underset{b}{V}\}^{(r)}_{(s)}\,\partial_{T^{(r)}_{(s)}}\{F, \underset{c}{V}\}^{\wedge}_{\Sigma}] = -\{F, \underset{c}{V}^{\rho}\partial_{\rho}\underset{b}{V} - \underset{b}{V}^{\rho}\partial_{\rho}\underset{c}{V}\}^{\wedge}_{\Sigma},$$

$$\{F_1 \underset{c}{V}\}^{\wedge}_{\pi}\{G, \underset{b}{V}\}^{\pi} - \{F, \underset{b}{V}\}^{\wedge}_{\pi}\{G, \underset{c}{V}\}^{\pi} - (\underset{c}{V}^{\rho}\,\partial_{\rho}\{G, \underset{b}{V}\}^{\wedge} - \underset{b}{V}^{\rho}\,\partial_{\rho}\{G, \underset{c}{V}\}^{\wedge}) -$$

$$-[\{T, \underset{c}{V}\}^{(r)}_{(s)}\,\partial_{T^{(r)}_{(s)}}\{G, \underset{b}{V}\}^{\wedge} - \{T, \underset{b}{V}\}^{(r)}_{(s)}\,\partial_{T^{(r)}_{(s)}}\{G, \underset{c}{V}\}^{\wedge}] = -\{G, \underset{c}{V}^{\rho}\,\partial_{\rho}\underset{b}{V} -$$

$$- \underset{b}{V}^{\rho}\,\partial_{\rho}\underset{c}{V}\}^{\wedge}. \tag{4.1}$$

Notînd cu $\underset{cb}{V}^{n}(\xi)$ cîmpurile de vectori $\underset{c}{\mathcal{L}}\,\underset{b}{V}^{\varkappa}(\xi) = \underset{c}{V}^{\rho}\partial_{\rho}\underset{b}{V}^{\varkappa} - \underset{b}{V}^{\rho}\,\partial_{\rho}\underset{c}{V}^{\varkappa}$ și cu $\underset{a}{\mathcal{L}}$ operatorul de derivare Lie în raport cu cîmpul $\underset{a}{V}^{\varkappa}(\xi)$, în baza identităților fundamentale (4.1) se stabilesc formulele, numite fundamentale,

$$(\underset{a}{\mathcal{L}}\,\underset{b}{\mathcal{L}})\,\Omega^{\wedge} = \underset{a}{\mathcal{L}}\,\underset{b}{\mathcal{L}}\,\Omega^{\wedge} - \underset{a}{\mathcal{L}}\,\underset{b}{\mathcal{L}}\,\Omega^{\wedge} = \underset{ab}{\mathcal{L}}\,\Omega^{\wedge}.$$

Am ajuns astfel la teorema:

TEOREMA 4.1. *Dacă* $\underset{a}{\mathcal{L}}f(\xi)$ *sînt* r *operatori infinitezimali și* $\Omega^{\wedge}(\xi, T)$ *este un obiect geometric liniar, atunci* $(\underset{a}{\mathcal{L}}\,\underset{b}{\mathcal{L}})\,\Omega^{\wedge}$ *este egal cu derivata Lie a obiectului* $\Omega^{\wedge}(\xi, T)$ *în raport cu cîmpul* $\underset{ab}{V}^{\varkappa}(\xi)$

În ipoteza că $\underset{a}{\mathcal{L}}f(\xi)$ sînt operatorii infinitezimali ai unui grup Lie G_r de transformări pe V_n, avem $(\underset{c}{\mathcal{L}}\,\underset{b}{\mathcal{L}}f(\xi) = C^{a}_{cb}\,\underset{a}{\mathcal{L}}\,f(\xi)$. Observînd că $\underset{ab}{\mathcal{L}}\,\Omega^{\wedge} = C^{c}_{ab}\,\underset{c}{\mathcal{L}}\,\Omega^{\wedge}$, din teorema 3.1 se deduce:

TEOREMA 4.2. *Dacă* $\underset{a}{\mathcal{L}}f(\xi)$ *sînt operatorii infinitezimali ai unui grup Lie* G_r *de transformări pe* V_n, *atunci*

$$(\underset{a}{\mathcal{L}}\,\underset{b}{\mathcal{L}})\,\Omega^{\wedge} = C^{c}_{ab}\,\underset{c}{\mathcal{L}}\,\Omega^{\wedge},$$

unde C^{a}_{cb} *sînt constantele de structură ale grupului* G_r, *iar* $\Omega^{\wedge}(\xi, T)$ *este un obiect geometric liniar.*

Încheiem cu observația că studiul grupului de invarianță al unui obiect geometric liniar diferențial este generalizare directă a cazului similar expus în lucrarea noastră [3].

De asemenea, dacă grupul G_r este dat, atunci ecuația $\underset{a}{\mathcal{L}}\,\Omega^{\wedge} = 0$ admite soluții cînd legea de transformare a obiectului $\Omega^{\wedge}(\xi, T)$ este prescrisă și se exprimă prin funcții analitice. Demonstrația se face servindu-ne de identități fundamentale (4.1), arătînd că într-un sistem de coordonate locale preferențiale, sistemul $\underset{a}{\mathcal{L}}\,\Omega^{\wedge} = 0$ se reduce la un sistem de ecuații cu derivate parțiale liniar, de ordinul unu, regulat, în sensul lui T. Y. Thomas și că sînt verificate condițiile de integrabilitate în raport cu derivatele principale.

Problemele discutate în ultima parte a acestui articol vor fi rezolvate în cazul mai general al obiectelor geometrice și derivatei lor Lie pe varietăți de elemente geometrice într-o lucrare viitoare. Tot acolo vor fi date și cîteva aplicații ale teoriei expusă aici.

Primită la redacție la 24 ianuarie 1968

Academia Republicii Socialiste România
Filiala Iași
Institutul de matematică

LA DÉRIVÉE DE LIE DES OBJETS GÉOMÉTRIQUES $\Omega^{\wedge}(\xi, T)$

(RÉSUMÉ)

La note présente s'occupe de la théorie des objets géométriques et leurs dérivées de Lie dans les espaces d'éléments tensoriels. Cette théorie constitue une généralisation des résultats donnés dans l'ouvrage [3].

BIBLIOGRAFIE

1. B. L. Laptev, *La dérivée de Lie des objets géométriques qui dépendent de point et de direction.* Bull. Soc. Math. Kazan, **(3)**, **10**, 3—39 (1938).
2. B. L. Laptev, *Proizvodnaia Lie v prastranstva opornîh elementov.* Trudî sem. vectorn. i tensorn. analizu, **10**, 227—248 (1956).
3. R. Miron, *Sur la dérivée de Lie des objets géométriques.* Tensor N.S., **17**, *3*, 253—260 (1966).
4. T. Y. Thomas, *The differential invariants of generalized spaces.* Cambridge, 1934, p. 221—226.

MIȘCAREA HIDROMAGNETICĂ NESTAȚIONARĂ CU SUCȚIUNE DEASUPRA UNUI PERETE

DE

IOAN POP

(Cluj)

Se studiază mișcarea hidromagnetică nestaționară cu sucțiune a unui lichid vîscos, incompresibil și conductor electric, deasupra unui perete infinit.

1. Mișcarea nestaționară a unui lichid vîscos, incompresibil și conductor electric, deasupra unui perete plan infinit, care execută o mișcare accelerată, în prezența unui cîmp magnetic transversal, constant și fix relativ la fluid, a fost considerată în [1] și [2] iar pentru un cîmp magnetic fix relativ la perete în [3] și [4]. Aici ne propunem să analizăm problema de mai sus pentru cazul cînd există sucțiune. Astfel, se analizează efectul cîmpului magnetic asupra vitezei din stratul limită și asupra frecării pe perete.

Pentru simplificarea problemei, vom presupune că peretele este izolat electric iar numărul Prandtl magnetic ($\mathrm{Pr}_m = \mu_c \sigma \nu$) este atît de mic încît curentul electric indus nu afectează cîmpul magnetic aplicat, adică, cîmpul magnetic aplicat este esențial neperturbat de cîmpul scurgerii (ipoteză plauzibilă pentru fluide foarte bune conductoare electric). În aceste condiții, se determină cîmpul vitezelor și raportul dintre frecarea pe perete în prezența și în lipsa cîmpului magnetic. Rezultatele obținute se reprezintă grafic pentru diferite valori ale parametrului ce caracterizează sucțiunea și interacțiunea magnetică.

2. Ecuațiile care guvernează mișcarea nestaționară a unui fluid vîscos, incompresibil și conductor electric în prezența unui cîmp magnetic sînt:

a) Ecuația lui Navier — Stokes completată

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\ \mathrm{grad})\,\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\ p + \nu \Delta \vec{v} + \frac{1}{\rho}(\vec{j} \times \vec{B}). \tag{1}$$

b) Ecuația continuității

$$\mathrm{div}\ \vec{v} = 0. \tag{2}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 20, Nr. 8, 1183–1188, BUCUREȘTI, 1968

c) Ecuațiile lui Maxwell

$$(3)\qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0,\quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j},\quad \operatorname{div} \vec{E} = 0,\quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

d) Legea lui Ohm

$$(4)\qquad \vec{j} = \sigma\,[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}],$$

unde $\vec{v}$ este viteza fluidului; t — timpul; p — presiunea; ρ — densitatea; ν — coeficientul de vîscozitate cinematică; $\vec{H}$ — cîmpul magnetic aplicat; $\vec{B} = \mu_e \vec{H}$ — inducția magnetică; $\vec{j}$ — densitatea de curent; μ_e — permeabilitatea magnetică a fluidului; σ — conductivitatea electrică a fluidului. Toate mărimile elctromagnetice sînt măsurate în sistemul electromagnetic de unități iar proprietățile fizice ale fluidului le presupunem constante.

3. Să considerăm legat de peretele plan un sistem de coordonate xOy cu axa Ox de-a lungul peretelui iar axa Oy perpendiculară pe el. Fie u și v componentele vitezei în lungul axelor de coordonate și H_0 cîmpul magnetic constant, aplicat perpendicular pe perete. Deoarece mișcarea este plană iar peretele infinit, putem presupune că toate mărimile fizice sînt independente de x. Dacă, în plus, presupunem $\vec{E} = 0$’ atunci din (1) — (4) rezultă că mișcarea hidromagnetică nestaționară cu sucțiune a fluidului vîscos, incompresibil și conductor electric, deasupra peretelui, este descrisă de sistemul de ecuații:

$$(5)\qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$(6)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - mu,$$

$$(7)\qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

unde $m = \dfrac{\sigma B_0^2}{\rho}$ este parametrul ce caracterizează interacțiunea cîmpului magnetic.

Ținînd seamă de rezultatul stabilit în [5] că mișcarea nestaționară cu sucțiune admite soluții asemenea în cazul cînd viteza u este proporțională cu t^n ($n \geqslant 0$) iar v este proporțional cu $t^{-1/2}$, condițiile inițiale și la limită ale sistemului (5)— (7) sînt:

$$(8)\qquad \begin{cases} u = v = 0 & \text{pentru } t < 0 \quad \text{și pentru orice } y, \\ u = At^n, \quad v = v_0 t^{-1/2} & \text{pentru } y = 0 \\ u = 0 & \text{pentru } y \to \infty \end{cases} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\end{matrix}}\right\} \text{și pentru } t \geqslant 0,$$

unde v_0 (= constant) este parametrul ce caracterizează sucțiunea ($v_0 > 0$) iar A o constantă.

4. Pentru valori mici ale lui mt, vom dezvolta pe u în serie după puterile lui mt sub forma [2], [4]:

$$(9)\qquad \begin{cases} u(\eta, t) = At^n [u_0(\eta) + (mt)\, u_1(\eta) + (mt)^2 u_2(\eta) + - - -], \\ v(t) = -v_0 t^{-1/2}, \quad \eta = \dfrac{y}{2\sqrt{\nu t}}, \quad \eta_0 = \dfrac{v_0}{\sqrt{\nu}}. \end{cases}$$

Din (6), ținînd seamă de (9), se obține pentru determinarea lui u_0, u_1, u_2 etc., sistemul de ecuații:

$$(10)\qquad \begin{cases} u_0'' + 2(\eta + \eta_0)\, u_0' - 4n\, u_0 = 0, \\ u_1'' + 2(\eta + \eta_0)\, u_1' - 4(n+1)\, u_1 = 4u_0, \\ u_2'' + 2(\eta + \eta_0)\, u_2' - 4(n+2)\, u_2 = 4u_1, \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \end{cases}$$

accentul însemnînd derivata față de η. Acest sistem va trebui integrat cu condițiile la limită:

$$(11)\qquad u_0(0) = 1, \qquad u_{i+1}(0) = u_i(\infty) = 0 \qquad (i = 0, 1, \dots).$$

Soluția sistemului (10), cu condițiile la limită (11), este:

$$(12)\qquad \begin{cases} u_0(\eta) = \dfrac{g_n(\eta + \eta_0)}{g_n(\eta_0)}, \\ u_1(\eta) = \dfrac{g_{n+1}(\eta + \eta_0)}{g_{n+1}(\eta_0)} - \dfrac{g_n(\eta + \eta_0)}{g_n(\eta_0)}, \\ u_2(\eta) = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{g_n(\eta + \eta_0)}{g_n(\eta_0)} + \dfrac{g_{n+2}(\eta + \eta_0)}{g_{n+2}(\eta_0)}\right\} - \dfrac{g_{n+1}(\eta + \eta_0)}{g_{n+1}(\eta_0)}, \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \end{cases}$$

unde

$$g_n(\eta) = \frac{2^{1/2-n}}{\pi^{1/2}}\, \mathrm{e}^{-1/2\,\eta^2}\, D_{-1-2\eta}(\eta\sqrt{2}),$$

$D_\alpha(\eta)$ fiind funcția cilindrului parabolic definită de ecuația [6]

$$\frac{\mathrm{d}^2 D_\alpha}{\mathrm{d}\eta^2} + \left(\alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\eta^2\right) D_\alpha = 0.$$

Funcția $g_n(\eta)$ satisface proprietățile [7]:

$$g_n'(\eta) = -g_{n-1/2}(\eta), \qquad g_0(\eta) = 1 - \operatorname{erf} \eta,$$

$$g_n(0) = \frac{2^{-2n}}{\Gamma(n+1)}.$$

Acum, se poate calcula frecarea pe perete

$$(13)\qquad \tau_w = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{A\rho}{2}\, t^{n-1/2}\, \nu^{1/2} \{u_0'(0) + (mt)\, u_1'(0) + (mt)^2 u_2'(0) + - - -\}.$$

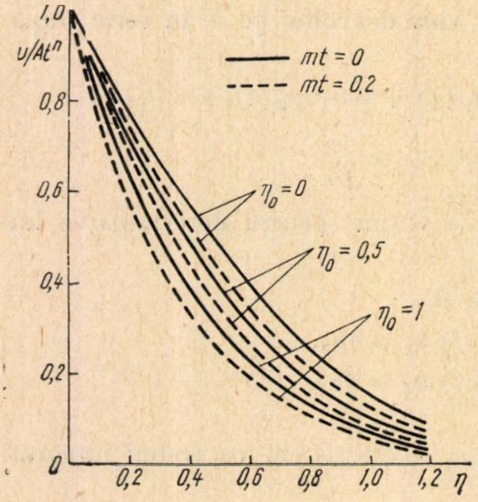


Fig. 1. Profilul vitezei adimensionale pentru $n = 0$.

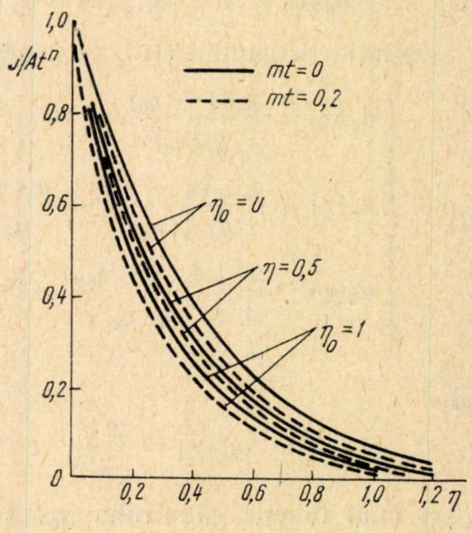


Fig. 2. Profilul vitezei adimensionale pentru $n = 1$.

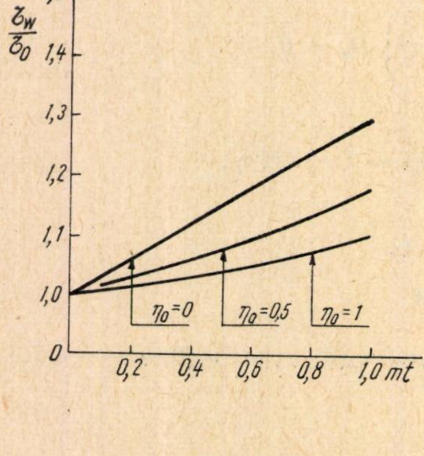


Fig. 3. Raportul frecărilor $\frac{\tau_w}{\tau_0}$ pentru $n = 1$.

În absența cîmpului magnetic frecarea locală este

$$\tau_0 = \frac{A\rho}{2} t^{n-1/2} \nu^{1/2} u_0'(0). \tag{14}$$

Din relațiile (13) și (14) se poate obține raportul dintre frecarea pe perete în prezența și absența cîmpului magnetic

$$\frac{\tau_w}{\tau_0} = 1 + \frac{u_1'(0)}{u_0'(0)}(mt) + \frac{u_2'(0)}{u_0'(0)}(mt)^2 + - - - . \tag{15}$$

5. Folosind tabelele [7] pentru calculul valorilor funcției $g_n(\eta)$, în figurile 1 și 2 se dă distribuția vitezei adimensionale u/At^n pentru $n = 0$ și 1; $mt = 0$ și 0.2; $\eta_0 = 0$, 0.5 și 1. Se observă că efectul sucțiunii este de a apropia viteza paralelă cu peretele spre el, în timp ce efectul cîmpului magnetic este de a descrește această viteză. Totodată observăm că viteza descrește pe măsură ce n crește.

Raportul frecărilor $\frac{\tau_w}{\tau_0}$ pentru $n = 1$; $\eta_0 = 0$, 0.5 și 1 este reprezentat în figura 3. Observăm că frecarea crește cu creșterea cîmpului magnetic și scade cu creșterea sucțiunii.

Primită la redacție la 14 decembrie 1967.

Universitatea „Babeş-Bolyai“ Cluj
Facultatea de matematică-mecanică

THE UNSTEADY HYDROMAGNETIC FLOW NEAR A HORIZONTAL FLAT PLATE WITH SUCTION

ABSTRACT

This paper considers the hydromagnetic flow with suction of a viscous incompressible and electrically conducting fluid near an accelerated motion of an infinite flat plate in th presence of a uniform magnetic field fixed relative to the fluid. The distribution of the velocity is determined by the expansion in series of the hydromagnetic parameter *mt*, in which the first term represents the (similarity) flow in the non-magnetic case. In the case of the impulsive motion and uniform accelerated motion respectively, the solution is graphically represented for various values of suction parameter η_0 and for various values of hydromagnetic parameter.

BIBLIOGRAFIE

1. A. S. GUPTA, *On the Flow of an Electrically Conducting Fluid Near an Accelerated Plate in the Presence of a Magnetic Field.* J. Phys. Soc. Japan, **15**, *10*, 1894—1897 (1960).
2. I. POP, *On the Hydromagnetic Flow due to an Accelerated Plate.* Rev. Roum. Phys., **12**, *9*, 865—867 (1967).

3. V. M. Soundalgekar, *Hydromagnetic Flow Near an Accelerated Plate in the Presence of a Magnetic Field.* Appl. Sci. Res., Section B, **12**, *2*, 151–156 (1965).

4. I. Pop, *On the Hydromagnetic Flow Near an Accelerated Plate.* ZAMM, **48**, *1*, 69–70 (1968).

5. H. Hasimoto, *Boundary Layer Growth on a Flat Plate with Suction or Injection.* J. Phys. Soc. Japan, **12**, *1*, 68–72 (1957).

6. T. E. Whittaker and N. G. Watson, *A Course of Modern Analysis.* Cambridge Univ. Press, 1927.

7. E. J. Watson, *Boundary – Layer Growth.* Proc. Roy. Soc., *A*, **231**, 104–116 (1955).

ECUAŢIA LUI PFAFF ÎN SENSUL TEORIEI DISTRIBUŢIILOR (I)

DE

ELENA STROESCU

Scopul acestei Note este de a arăta că ecuaţia lui Pfaff:

$$\mathfrak{P}(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + \mathfrak{R}(x, y, z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

cu $\mathfrak{P}$, Q şi $\mathfrak{R}$ funcţii continue are soluţie $z(x, y)$ (în domeniul pe care $\mathfrak{R} \neq 0$) cu derivate de ordinul întîi continue dacă şi numai dacă

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{R}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{\mathfrak{R}}\right)$$

în sensul teoriei distribuţiilor.

Considerăm ecuaţia lui Pfaff

$$\mathfrak{P}(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + \mathfrak{R}(x, y, z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{1}$$

în ipoteza că funcţiile $\mathfrak{P}$, Q şi $\mathfrak{R}$ sînt continue. Alegem o mulţime deschisă şi mărginită $\Omega \subset R^3$ (spaţiul euclidian cu trei dimensiuni) pe care funcţia $\mathfrak{R} \neq 0$. Utilizăm notaţiile: $C^0(\Omega)$ mulţimea funcţiilor continue pe Ω, $C_0^\infty(\Omega)$ mulţimea funcţiilor indefinit derivabile cu suportul compact conţinut în Ω,

$$\Omega_{x,y} = \{(x, y) \in R^2 \mid (x, y, z) \in \Omega\},$$

$$X(x, y, z) = \frac{-\mathfrak{P}(x, y, z)}{\mathfrak{R}(x, y, z)} \quad \text{şi} \quad Y(x, y, z) = -\frac{Q(x, y, z)}{\mathfrak{R}(x, y, z)}.$$

Scriem sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale

$$\begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial x} = X(x, y, z) \\ &\frac{\partial z}{\partial y} = Y(x, y, z) \qquad \text{cu} \quad X \text{ şi } Y \in C^0(\Omega) \end{aligned} \tag{2}$$

echivalent cu ecuaţia (1).

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 8, P. 1189–1192, BUCUREŞTI, 1968

Formulăm următoarea teoremă:

TEOREMĂ. *Sistemul* (2) *admite soluţie în* Ω, *cu derivate de ordinul întîi continue în* $\Omega_{x,y}$, *dacă şi numai dacă pentru orice funcţie* $u\in C^0(\Omega_{x,y})$ *astfel încît* $(x, y, u(x, y))\in\Omega$ *avem*

$$\frac{\partial X(x,y,u(x,y))}{\partial y}=\frac{\partial Y(x,y,u(x,y))}{\partial x} \tag{3}$$

în sensul teoriei distribuţiilor.

Demonstraţie. Să dovedim afirmaţia directă. Fie $z(x, y)$ o soluţie a sistemului (2) în Ω, cu derivate de ordinul întîi continue în $\Omega_{x,y}$. Dacă $z(x, y)$ este o soluţie în Ω a sistemului (2), atunci graficul său este conţinut în Ω, şi deci funcţiile $X(x, y, z(x, y))$ şi $Y(x, y, z(x, y))$ sînt definite şi continue.

Scriem că $z(x, y)$ verifică sistemul (2), prin urmare avem

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=X(x,y,z(x,y))\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=Y(x,y,z(x,y))\end{aligned} \tag{4}$$

în sens clasic. Derivînd în sensul teoriei distribuţiilor prima relaţie (4) în raport cu y şi a doua în raport cu x şi ţinînd seama de

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

rezultă

$$\left(\frac{\partial X}{\partial y}(x,y,z(x,y)),\ \varphi(x,y)\right)=\left(\frac{\partial Y}{\partial x}(x,y,z(x,y)),\ \varphi(x,y)\right)$$

pentru orice $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_{x,y})$, adică tocmai condiţia (3).

Observaţie. Condiţia (3) rezultă chiar dacă sistemul (2) admite o soluţie $z(x, y)\in C^0(\Omega_{x,y})$. Dar scriind că relaţiile (4) sînt îndeplinite în sensul teoriei distribuţiilor şi avînd în vedere teorema 1.4.2 din [2], rezultă că ele sînt îndeplinite şi în sens clasic, prin urmare $z(x, y)$ are derivate de ordinul întîi continue în $\Omega_{x,y}$.

Să demonstrăm acum afirmaţia inversă. Fie X şi $Y\in C^0(\Omega)$ satisfăcînd condiţia (3) pentru orice funcţie $u\in C^0(\Omega_{x,y})$ astfel încît $(x, y, u(x, y))\in\Omega$. Luăm un domeniu Ω' care este conţinut în Ω împreună cu închiderea sa $(\overline{\Omega}')$ şi în Ω' un punct (x_0, y_0, z_0). Să arătăm că putem atunci găsi o soluţie în Ω' a sistemului (2), trecînd prin (x_0, y_0, z_0) şi avînd derivate de ordinul întîi continue în $\Omega'_{x,y}$.

Vom construi o astfel de soluţie urmînd metoda din [3]. Să remarcăm mai întîi că în $\overline{\Omega}'$, funcţiile X şi Y sînt continue şi mărginite. Considerăm planul $y = y_0$, care intersectează pe Ω'. Notăm acest plan cu π_{y_0}. Prima ecuaţie a sistemului (2) admite cel puţin o soluţie prin fiecare punct $(x, z)\in\pi_{y_0}\cap\Omega'$, (teorema lui Peano, vezi [3]). Alegem atunci soluţia $C_{y_0}(z_{y_0}(x))$ corespunzătoare datelor iniţiale $(x_0, z_0)\in\pi_{y_0}\cap\Omega'$, de cea mai mică lungime în această mulţime. Pentru fiecare $x=x^*$ ecuaţia a doua a sistemului (2) admite de asemenea cel puţin o soluţie prin fiecare punct $(y, z) \in \pi_{x^*} \bigcap \Omega'$. Luăm $(x^*, z^*) \in C_{y_0}$, unde $z^* = z_{y_0}(x^*)$ și drept date inițiale punctul $(y_0, z^*) \in \pi_{x^*} \bigcap \Omega'$. Alegem la fel soluția ecuației a doua a sistemului (2), $C_{x^*}(z_{x^*}(y))$ din planul π_{x^*} corespunzătoare acestor date inițiale și care are cea mai mică lungime în $\pi_{x^*} \bigcap \Omega'$. Cînd x^* variază, familia de curbe C_{x^*} se sprijină pe curba C_{y_0} și se generează suprafața soluție a sistemului (2). Notăm suprafața astfel obținută prin $z(x, y)$. Evident, $z(x, y) \in C^0(\Omega'_{x,y})$.

Se vede ușor că soluția $z(x, y)$ trece prin punctul $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega'$. Într-adevăr, el este intersecție a curbelor $C_{y_0}(z_{y_0}(x))$ și $C_{x_0}(z_{x_0}(y))$, C_{y_0} trecînd prin punctul $(x_0, z_0) \in \pi_{y_0}$, iar C_{x_0} prin $(y_0, z_0) \in \pi_{x_0}$. Să arătăm că $z(x, y)$ verifică sistemul (2) și că $\frac{\partial z}{\partial x}$ și $\frac{\partial z}{\partial y} \in C^0(\Omega'_{x,y})$. Din construcție avem

$$\frac{\partial z}{\partial y} = Y(x, y, z(x, y)), \tag{5}$$

chiar în sens clasic. Din relația (5) rezultă și $\frac{\partial z}{\partial y} \in C^0(\Omega'_{x,y})$. Să arătăm acum că $z(x, y)$ verifică și prima ecuație a sistemului (2).

Pentru $y = y_0$, ea este verificată de asemenea în sens clasic, din construcție. Notăm cu

$$T(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} - X(x, y, z(x, y)). \tag{6}$$

Aici derivata lui z în raport cu x este luată în sensul teoriei distribuțiilor. Derivînd (5) în raport cu x în sensul teoriei distribuțiilor avem

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Y(x, y, z(x, y))}{\partial x}. \tag{7}$$

Înlocuind în relația (7) pe $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ cu $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ și ținînd seama de (6) avem

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial X(x, y, z(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial Y(x, y, z(x, y))}{\partial x}.$$

Ținem seama de relația (3) și obținem

$$\left(\frac{\partial T(x, y)}{\partial y}, \ \varphi(x, y)\right) = 0 \text{ pentru orice } \varphi \in C_0^\infty(\Omega'_{x,y}). \tag{8}$$

Să observăm că mulțimea funcțiilor $\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x)\, \psi_j(y)$, $n = 1, 2, \ldots$; φ_j și $\psi_j \in C_0^\infty(R)$ este densă în $C_0^\infty(R^2)$ $j = 1$ (vezi $\{1\}$) și deoarece $T(x, y)$ este o funcțională liniară și continuă pe $C_0^\infty(R^2)$, putem alege $\varphi(x, y) = \varpi(x) \cdot \psi(y)$ cu $\varpi \in C_0^\infty(\Omega'_x)$ și $\psi \in C_0^\infty(\Omega'_y)$; aici $\Omega'_x = \{x \in R \mid (x, y) \in \Omega'_{x,y}\}$ și analog $\Omega'_y = \{y \in R \mid (x, y) \in \Omega'_{x,y}\}$

Luînd în (8) pe $\varphi(x, y)$ de această formă, avem

$$0 = \left(\frac{\partial T}{\partial y}, \ \varpi(x) \cdot \psi(y)\right) = ((T(x, y), \ \varpi(x)), \ -\psi'(y)). \tag{9}$$

Notăm $S(y) = (T(x, y), \varpi(x))$, deci (9) se scrie $(S(y), -\psi'(y)) = 0$ pentru orice $\psi \in C_0^\infty(\Omega'_y)$; atunci se știe că $(S(y), \psi(y)) = (C, \psi(y))$, oricare ar fi $\psi \in C_0^\infty(\Omega'_y)$, [1].

Dar, ținînd seama de (6),

$$S(y) = (T(x, y), \varpi(x)) = -(z(x, y), \varpi'(x)) - (X(x, y, z(x, y)), \varpi(x))$$

este o distribuție de tip funcție. Deci $S(y)$ este funcția constantă și deoarece $S(y_0) = 0$, avem $S(y) = 0$ pentru orice $y \in \Omega'_y$.

Ne întoarcem acum la relația (6). Trebuie să arătăm că $(T(x, y), \varphi(x, y)) = 0$ pentru orice $\varphi \in C_0^\infty(\Omega'_{x,y})$. Deoarece $\varphi(x, y)$ se poate lua de forma $\varpi(x) \cdot \psi(y)$ cu $\varpi \in C_0^\infty(\Omega'_x)$ și $\psi \in C_0^\infty(\Omega'_y)$, avem $((T(x, y), \varpi(x)), \psi(y)) = (S(y), \psi(y)) = 0$.

Am arătat astfel că

$$\frac{\partial z}{\partial x} = X(x, y, z(x, y)) \tag{10}$$

în sensul teoriei distribuțiilor, ținînd seama de teorema 1.4.2, [2], egalitatea (10) este adevărată și în sens clasic, deci $\frac{\partial z}{\partial x} \in C^0(\Omega'_{x,y})$.

Cu acestea teorema este complet demonstrată.

Primită la redacție la 10 februarie 1968

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, București

PFAFF EQUATION IN THE SENSE OF DISTRIBUTION THEORY

(SUMMARY)

The purpose of this note is to prove that the Pfaff equation $\mathfrak{P}(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + \mathfrak{R}(x, y, z)\,dz = 0$, where the functions $\mathfrak{P}$, Q and $\mathfrak{R}$ are continuous, has a solution with continuous first partial differentials. The indicated equation has such a solution in the set, where the function $\mathfrak{R} \neq 0$, if and only if, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{R}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{\mathfrak{R}}\right)$ in the meaning of the distribution theory. The obtained solution satisfies the equation even in the classical meaning.

BIBLIOGRAFIE

1. Ghelfand I. M., Silov G. E., *Obobșcenie funcții deistvia nadnimi.* Moscova, 1959, pag. 58 și 134.
2. Hormander, L., *Linear partial differential operators*. Springer-Verlag, 1963.
3. Petrovschi I. G., *Prelegeri asupra teoriei ecuațiilor diferențiale ordinare.* Ed. tehnică, București, 1952, § 12 și § 56.

ASUPRA STRUCTURII OPERATORILOR LINIARI ȘI CONTINUI DEFINIȚI PE $\mathcal{D}'$ CU VALORI ÎN $\mathcal{D}'$, CARE INVARIAZĂ SUBSPAȚIUL LINIAR AL DISTRIBUȚIILOR DEFINITE DE FUNCȚII LOCAL INTEGRABILE

DE

MIHAI ȘABAC

În lucrare se precizează structura operatorilor $U \in L\ (\mathcal{D}', \mathcal{D}')$ care au proprietatea din titlu utilizînd rezultatele din [4].

Așa cum am observat [4], orice operator $U' \in L\ (\mathcal{D}', \mathcal{D}')$ are forma:

$$(1) \qquad (U' f, \varphi) = (f, U \varphi),\ f \in \mathcal{D}',\ \varphi \in \mathcal{D},$$

unde $U \in L\ (\mathcal{D}, \mathcal{D})$ și

$$[U \varphi](s) = (w_s, \varphi),$$

$\{w_s\}_{s \in R}$ fiind o familie compozabilă de distribuții pe R [1].

Cu această observație e vizibil că orice informații asupra structurii lui U furnizează informații privind structura lui U'. Acesta este punctul de vedere din care tratăm problema din titlu, problemă propusă de profesorul R. Cristescu.

Vom însemna prin dt măsura Lebesgue pe dreaptă, prin $\mathcal{L}_1$ mulțimea distribuțiilor pe R definite de funcții local integrabile. Vom conveni să notăm cu aceeași literă funcția local integrabilă și distribuția generată de ea.

Următorul rezultat se va dovedi a fi important în caracterizarea operatorilor $U' \in L\,(\mathcal{D}', \mathcal{D}')$ care au proprietatea

$$U'\,(\boldsymbol{\mathcal{L}}_1) \subset \boldsymbol{\mathcal{L}}_1 .$$

PROPOZIȚIA 1. *Dacă* $U' \in L\,(\mathcal{D}', \mathcal{D}')$ *și* $U'\,(\mathcal{L}_1) \subset \mathcal{L}_1$, *atunci pentru orice* $n \in N$ *există* $k\,(n) \in N$ *și un operator* $U'_n : L^1_{[-k(n), k(n)]} \to L^1_{[-n, n]}$ *liniar și continuu astfel ca:*

$$(2) \quad (U' f, \varphi) = \int_R [U'_n f_n]\,(t)\ \varphi\,(t)\,\mathrm{d}t, \quad \varphi \in \mathcal{D}_{[-n,n]},\quad f \in \mathcal{L}_1, f_n = f\,|_{[-k(n), k(n)]}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 8, P. 1193–1202, BUCUREȘTI, 1968

–5504

operatorii U'_n *avînd proprietatea*:

$$U'_n f_n = U'_{n+1} f_{n+1}\big|_{[-n,n]} \quad \text{a.p. } (\mathrm{d}t) \text{ pentru orice } f \in \mathcal{L}_1 \tag{3}$$

iar numerele $k(n) \in N$ *fiind determinate de* U *în virtutea lemei* 2 [4].

Demonstrație. Conform lemei 2 [4] operatorul U, formula (1), determină pentru orice $n \in N$, $k(n) \in N$ astfel ca $U(\mathcal{D}_{[-n,n]}) \subset \mathcal{D}_{[-k(n),k(n)]}$. Pe de altă parte, pentru orice $f \in \mathcal{L}_1$ există $g = U'f \in \mathcal{L}_1$ astfel ca:

$$\int_R f(s)\,[U\varphi](s)\,\mathrm{d}s = \int_R g(s)\,\varphi(s)\,\mathrm{d}s, \qquad \varphi \in \mathcal{D}. \tag{4}$$

Această relație se mai poate scrie pentru $\varphi \in \mathcal{D}_{[-n,n]}$ sub forma:

$$\int_{-k(n)}^{k(n)} f(s)\,[U\varphi](s)\,\mathrm{d}s = \int_{-n}^{n} g(s)\,\varphi(s)\,\mathrm{d}s. \tag{4'}$$

Fie $h \in L^1_{[-k(n),\,k(n)]}$ și $h' \in \mathcal{L}_1$ care se obține din h prin prelungire cu 0 în afara lui $[-k(n), k(n)]$. Să punem

$$U'_n h = U'h'\big|_{[-n,\,n]}.$$

Vom avea atunci, conform cu (4), relația (2) îndeplinită, deoarece, pentru $f \in \mathcal{L}_1$,

$U'_n f_n = U'f'_n\big|_{[-n,\,n]} = g_n\big|_{[-n,\,n]}$ (f'_n fiind prelungirea lui $f_n = f\big|_{[-k(n),k(n)]}$ cu 0 în afara lui $[-k(n), k(n)]$) verifică relația:

$$\int_{-k(n)}^{k(n)} f(s)\,[U\varphi](s)\,\mathrm{d}s = \int_{-n}^{n} g_n(s)\,\varphi(s)\,\mathrm{d}s, \qquad \varphi \in \mathcal{D}_{[-n,\,n]}$$

care combinată cu (4') dă:

$$U'f\big|_{[-n,\,n]} = g\big|_{[-n,\,n]} = g_n\big|_{[-n,\,n]}$$

ultima egalitate avînd loc a.p. (dt).

Observație. Această egalitate arată că valorile lui $U'f$ pe $[-n, n]$ depind numai de valorile pe care le ia f pe $[-k(n), k(n)]$ dacă $f \in \mathcal{L}_1$.

Fie acum $h \in L^1_{[-k(n+1),\,k(n+1)]}$. Vom avea:

$$U'_{n+1} h\big|_{[-n,\,n]} = U'h'\big|_{[-n,\,n]} = U'h''\big|_{[-n,\,n]} = U'_n\big(h\big|_{[-k(n),\,k(n)]}\big),$$

unde h' se obține din h prin prelungire cu 0 în afara lui $[-k(n+1), k(n+1)]$, iar h'' se obține prin prelungire cu 0 în afara lui $[-k(n), k(n)]$ a lui $h\big|_{[-k(n),\,k(n)]}$.

Relația

$$U'_{n+1} h\big|_{[-n,\,n]} = U'_n\big(h\big|_{[-k(n),\,k(n)]}\big), \quad h \in L^1_{[-k(n+1),\,k(n+1)]}$$

dă pentru cazul $h = f_{n+1}$ relația (3).

Evident, U'_n sînt operatori definiți pe $L^1_{[-k(n),\,k(n)]}$ cu valori în $L^1_{[-n,\,n]}$ și liniari.

Pentru demonstrația propoziției ne mai rămîne de arătat continuitatea operatorilor U'_n.

Fie pentru aceasta $g \in \mathcal{L}_1$ și următoarea funcție:

$$x(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn} g(t), & t \in [-n, n] \\ 0 \quad , & t \notin [-n, n]. \end{cases}$$

Fie $\varepsilon > 0$; conform teoremei lui Luzin [2] există o mulțime închisă F_ε astfel încît:

a) $x|_{F_\varepsilon}$ este continuă;

b) $\mu(\complement F_\varepsilon) < \varepsilon$.

Conform teoremei lui Tietze [2] rezultă existența unei funcții continue definită pe toată dreapta cu proprietățile:

a′) $x_\varepsilon|_{F_\varepsilon} = x$

b′) $|x_\varepsilon(t)| \leqslant 1 \quad (\forall)\, t \in R$

c′) $\mu(\complement F_\varepsilon) < \varepsilon$.

Vom scrie acum $[-n, n] = \bigcup\limits_{k \in N} S_k$, unde $S_k = \left[-n + \dfrac{1}{k}, n - \dfrac{1}{k}\right]$ și fie x_k definite după cum urmează:

$$x_k(t) = \begin{cases} x_\varepsilon(t) & t \in S_k \\ 0 & t \notin S_k. \end{cases}$$

Atunci

$$(x_k - x_\varepsilon)(t) = \begin{cases} 0 & t \in S_k \\ -x_\varepsilon(t) & t \notin S_k. \end{cases}$$

Dar

$$|x_k - x| \leqslant |x_k - x_\varepsilon| + |x_\varepsilon - x|.$$

Fie $k \in N$ astfel încît $\mu([-n, n] \cap \complement S_k) < \varepsilon$.

Atunci $x_k(t) = x(t)$ pentru $t \in F_\varepsilon \cap S_k$ și $\mu([-\mathrm{n}, \mathrm{n}] \cap \complement(F_\varepsilon \cap S_k)) \leqslant 2\varepsilon$.

Se poate prelungi datorită teoremei lui Tietze $x_k | F_\varepsilon \cap S_k$ pînă la o funcție continuă pe S_k. Se obține deci pentru $\varepsilon > 0$ dat o mulțime închisă $I_\varepsilon = F_\varepsilon \cap S_k$, $\mu([-\mathrm{n}, \mathrm{n}] \cap \complement I_\varepsilon) < 2\varepsilon$, o funcție continuă pe R, y_ε, cu suportul inclus în $[-n, n]$, $y_\varepsilon(t) = x(t)$ pentru $t \in I_\varepsilon$ și $|y_\varepsilon(t)| \leqslant 1$ pentru $t \in R$.

Fie $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}_{[-n-\varepsilon, n+\varepsilon]}$ definită de:

$$\varphi_\varepsilon = y_\varepsilon * \rho_\varepsilon,$$

unde $\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}$, $\operatorname{supp} \rho_\varepsilon = B_\varepsilon = \{t \mid |t| \leqslant \varepsilon\}$, $\displaystyle\int_R \rho_\varepsilon(t)\, \mathrm{d}t = 1$,

$$(y_\varepsilon * \rho_\varepsilon)(s) = \int_R y_\varepsilon(t)\, \rho_\varepsilon(s - t)\, \mathrm{d}t.$$

Deoarece $| y_\varepsilon (t) | \leqslant 1$ pentru orice $t \in R$, rezultă $\{ \varphi_\varepsilon \}_{\varepsilon > 0}$ mărginită în $\mathcal{D}$. Avem şi:

$$\| \varphi_\varepsilon - y_\varepsilon \| < \eta_\varepsilon, \text{ unde } \eta_\varepsilon \to 0 \text{ o dată cu } \varepsilon \ (\| f \| = \sup_{t \in R} | f (t) |).$$

Fie acum g dat de relaţia (4). Avem atunci

$$\left| \int_R g (s) (\varphi_\varepsilon (s) - x (s)) \,\mathrm{d}s \right| \leqslant \int_R | g (s) | \, | \varphi_\varepsilon (s) - x (s) | \,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_{I_\varepsilon} | g (s) | \, | \varphi_\varepsilon (s) - x (s) | \,\mathrm{d}s + \int_{[-n,n] \cap \complement I_\varepsilon} | g (s) | \, | \varphi_\varepsilon (s) - x (s) | \,\mathrm{d}s +$$

$$+ \int_{[-n-\varepsilon,\, n+\varepsilon] \cap \complement [-n,n]} | g (s) | \, | \varphi_\varepsilon (s) - x (s) | \,\mathrm{d}s.$$

Să evaluăm cei trei termeni din sumă:

$$\int_{I_\varepsilon} | g (s) | \, | \varphi_\varepsilon (s) - x (s) | \,\mathrm{d}s = \int_{I_\varepsilon} | g (s) | \, | \varphi_\varepsilon (s) - y_\varepsilon (s) | \,\mathrm{d}s < \eta_\varepsilon K(n)$$

$$\int_{[-n,n] \cap I \complement_\varepsilon} | g (s) | \, | \varphi_\varepsilon (s) - x (s) | \,\mathrm{d}s \leqslant \int_{[-n,n] \cap \complement I_\varepsilon} | g (s) | \, | \varphi_\varepsilon (s) - y_\varepsilon (s) | \,\mathrm{d}s +$$

$$+ \int_{[-n,n] \cap \complement I_\varepsilon} | g (s) | \, | y_\varepsilon (s) - x (s) | \,\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\leqslant \eta_\varepsilon \cdot K (n) + 2 \int_{[-n,n] \cap \complement I_\varepsilon} | g (s) | \,\mathrm{d}s \leqslant \eta_\varepsilon \cdot K (n) + 2 \eta_\varepsilon^1, \ \eta_\varepsilon^1 \to \text{odată cu } \varepsilon.$$

$$\int_{[-n-\varepsilon, n+\varepsilon] \cap \complement [-n,n]} | g (s) | \, | \varphi_\varepsilon (s) - x (s) | \,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_{[-n-\varepsilon, n+\varepsilon] \cap \complement [-n,n]} | g (s) | \, | \varphi_\varepsilon (s) | \,\mathrm{d}s \leqslant M \eta_\varepsilon^2 .$$

M fiind un număr > 0 astfel încît $\sup_{s \in R} | \varphi_\varepsilon (s) | \leqslant M$ pentru orice $\varepsilon > 0$, iar η_ε^2 fiind un număr ce tinde la 0 odată cu ε. $K(n)$ poate fi luat, spre exemplu, dacă ε e suficient de mic, $K (n) = \int_{[-(n+1), n+1]} | g (s) | \,\mathrm{d}s$.

Deci

$$\left| \int_R g (s) \ (\varphi_\varepsilon (s) - x (s) \,\mathrm{d}s \right|$$

tinde la 0 o dată cu ε.

Deoarece $\{\varphi_\varepsilon\}_{0<\varepsilon<1}$ formează o mulțime mărginită în $\mathcal{D}$, rezultă, cu formula (4),

$$\left|\int_R g(s)\,\varphi_\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s\right| \leqslant M_1 \int\limits_{[-k(n+1),k(n+1)]} |f(s)|\,\mathrm{d}s.$$

Făcînd pe ε să tindă la 0 rezultă :

$$\int\limits_{[-n,n]} |g(s)|\,\mathrm{d}s \leqslant M \int\limits_{[-k(n+1),k(n+1)]} |f(s)|\,\mathrm{d}s \tag{5}$$

relație care arată că operatorul U'_n este continuu și propoziția este demonstrată.

Fie ca și pînă acum $U' \in L(\mathcal{D}', \mathcal{D}')$, $U'(\mathcal{L}_1) \subset \mathcal{L}_1$ și să considerăm $f_s(t) = \chi_{[-\infty,s]}(t)$. Există atunci $g_s(t)$ local integrabilă astfel ca :

$$\int_{-\infty}^{s} [U\varphi](t)\,\mathrm{d}t = \int_R g_s(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Deci

$$[U\varphi](s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_R g_s(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Conform observației făcute în cursul demonstrației propoziției 1, se vede că avem pentru $t \in [-n, n]$ și $|s| \leqslant k(n)$,

$$U_n[\chi_{[-k(n),s]}](t) = g_s(t) \tag{6}$$

și prin urmare conform cu (5) vom avea :

$$\int\limits_{[-n,n]} |g_s(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant K \qquad \text{pentru } |s| \leqslant k(n). \tag{7}$$

Dar pentru $|s| \geqslant k(n)$ va trebui să avem $[U\varphi](s) = 0$ dacă $\varphi \in \mathcal{D}_{[-n,n]}$ adică

$$\int_R g_s(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = C_\varphi = \int_R g_{k(n)}(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{pentru orice } \varphi \in \mathcal{D}_{[-n,n]}\,. \tag{8}$$

De aici rezultă :

$$g_s(t) = g_{k(n)}(t) = 0 \quad \text{a.p. } (\mathrm{d}t) \quad \text{pentru } |s| \geqslant k(n) \tag{9}$$

deoarece

$$\int\limits_{[-k(n),k(n)]} [U\varphi](t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{[-n,n]} g_{k(n)}(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_{[-n,n]} g_{-k(n)}(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

pentru $\varphi \in \mathcal{D}_{[-n,n]}$

şi

$$\int\limits_{[-k(n),k(n)]} [U\varphi](t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{k(n)} [U\varphi](t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{[-n,n]} g_{k(n)}(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\text{pentru } \varphi \in \mathcal{D}_{[-n,n]}.$$

Din (7) şi (9) rezultă atunci

$$\int\limits_{[-n,n]} |g_s(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant K \qquad \text{pentru orice } s \in R.$$

Mai mult, pentru orice $s \in R$ şi $s_k \to 0$ avem :

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{[-n,n]} |g_{s+s_n}(t) - g_s(t)|\,\mathrm{d}t = 0 \tag{10}$$

datorită continuităţii lui U_n şi relaţiei (6) pentru $|s| \leqslant k(n)$ şi relaţiei (9) pentru $|s| \geqslant k(n)$.

Prin urmare funcţia

$$K_n(s,t) = \int_{-n}^{t} g_s(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad (s,t) \in R \times [-n,n]$$

are următoarele proprietăţi :

(i) $|K_n(s,t)| \leqslant K$.

(ii) K_n este continuă, fiind continuă în s uniform în raport cu t (10) şi continuă în t.

(iii) $K\ (s,t) = 0$ pentru $|s| \geqslant k(n)$.

Am obţinut deci :

Propoziţia 2. *Dacă* $U' \in L(\mathcal{D}', \mathcal{D}')$ *are proprietatea* $U'(\mathcal{L}_1) \subset \mathcal{L}_1$, *atunci operatorul* U *definit de* (1) *se reprezintă :*

$$[U\varphi](s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \int\limits_{[-n,n]} K_n(s,t)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \varphi \in \mathcal{D}_{[-n,n]},$$

unde $K_n(s,t)$ *este o funcţie continuă şi mărginită pe* $R \times [-n,n]$ $K_n(s,t) = 0$ *pentru* $|s| \geqslant k(n)$, *definită de relaţia :*

$$K_n(s,t) = \int_{-n}^{t} g_s(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad t \in [-n,n],$$

$g_s(t)$ *fiind o funcţie local integrabilă pentru fiecare* s.

Fie $U' \in L(\mathcal{D}', \mathcal{D}')$ astfel ca $U'(\mathcal{L}_1) \subset \mathcal{L}_1$ Fie un punct $s_0 \in [-k(n), k(n)]$ şi I_ε un interval închis de lungime 2ε ce conţine s_0. Fie atunci în formula (4), $f(s) = \chi_{I_\varepsilon}(s)$. Se obţine atunci $\xi_0 \in I_\varepsilon$ astfel ca

$$2\varepsilon\,|(U\varphi)(\xi_\varepsilon)| = \left|\int f(s)\,[U\varphi](s)\,\mathrm{d}s\right| \leqslant \int\limits_{[-n,n]} |g(s)|\,\mathrm{d}s \max_{s\in R}|\varphi(s)| \leqslant$$

$$\leqslant K\cdot 2\varepsilon \max_{s\in R}|\varphi(s)|,$$

ultima inegalitate fiind scrisă în virtutea continuităţii operatorului U'_n, propoziţia 1. Deci

$$|[U\varphi](\xi_\varepsilon)| \leqslant K \max_{s\in R} |\varphi(s)|, \qquad \varphi \in \mathcal{D}_{[-n,n]}.$$

Cum pentru $\varepsilon \to 0$, $\xi_\varepsilon \to s_0$ obţinem datorită continuităţii funcţiei $[U\varphi](t)$:

$$|(U\varphi)(s_0)| \leqslant K \max_{s\in R} |\varphi(s)|, \qquad \varphi \in \mathcal{D}_{[-n,n]}$$

şi deoarece s_0 este arbitrar în $[-k(n), k(n)]$ iar K este o constantă ce rezultă din continuitatea lui U_n independentă de s_0, rezultă că ordinul $m(n)$ al lui U teorema 3 [4] este egal cu 0 pentru orice $n \in N$.

Cu această observaţie vom obţine caracterizarea operatorilor $U' \in L(\mathcal{D}', \mathcal{D}')$ care au proprietatea $U'(\mathcal{L}_1) \subset \mathcal{L}_1$ în două moduri. Un prim mod va fi obţinerea unei propoziţii reciproce propoziţiei (1). Un al doilea mod va caracteriza operatorii $U' \in L(\mathcal{D}', \mathcal{D}')$ cu proprietatea $U'(\mathcal{L}_1) \subset \mathcal{L}_1$ utilizînd operatorii $U \in L(D, D)$ daţi de formula (1).

În sensul celor spuse putem demonstra următoarea propoziţie:

PROPOZIŢIA 3. *Orice şir* $\{U_n\}_{n\in N}$ *de operatori împreună cu un şir crescător* $\{k(n)\}_{n\in N}$ $k(n) \in N$, *cu proprietăţile*:

1. U_n *aplică liniar şi continuu* $L^1_{[-k(n),k(n)]}$ *în* $L^1_{[-n,n]}$;

2. $U_{n+1} h|_{[-n,n]} = U_n(h|_{[-k(n),k(n)]})$ *pentru* $h \in L^1_{[-k(n+1),k(n+1)]}$;

3. *pentru orice* $n \in N$ *există* $K_n(s, t)$ *în condiţiile teoremei* 1 [4] *relativ la* $k(n)$ *şi* $m(n) = 0$ *astfel ca*:

$$g_s(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}[K_n(s, t)],$$

unde

$$g_s(t) = \begin{cases} [U_n(\chi_{[-k(n),s]})](t), & |s| \leqslant k(n) \\ 0, & |s| \geqslant k(n) \end{cases}, \quad t \in [-n, n]$$

defineşte un operator $U' : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$ *care are proprietatea* $U'(\mathcal{L}_1) \subset \mathcal{L}_1$ *ai cărui operatori* U'_n *ataşaţi după propoziţia* (1) *coincid cu* U_n.

Demonstraţie. Fie, într-adevăr, $U' : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$ care corespunde la U, definit de:

$$[U\varphi](s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int g_s(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Datorită lui (3) rezultă $U \in L(\mathcal{D}, \mathcal{D})$, $U(\mathcal{D}_{[-n,n]}) \subset \mathcal{D}_{[-k(n),k(n)]}$. Din definiţia lui U se vede că pentru $t \in [-n, n]$ şi $|s| \leqslant k(n)$

$$U'(\chi_{[-\infty,s]})(t) = U'(\chi_{[-k(n),s]})(t) = U_n(\chi_{[-k(n),s]})(t)$$

Într-adevăr, pentru $\varphi \in \mathcal{D}_{[-n,n]}$ avem

$$\int_{-\infty}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} \int\limits_{[-n,n]} g_\sigma(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma = \int_{-k(n)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\int g_\sigma(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma = \int_R g_s(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Prin urmare pentru orice funcţie de forma :

$$(*) \qquad f(t) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{(a_k, b_k]}(t), \qquad \begin{array}{l} A_K = (a_k, b_k] \subset [-k(n), k(n)] \\ A_k \cap A_j = \emptyset \text{ pentru } k \neq j \end{array}$$

avem :

$$[U' f](t) = [U_n f](t)$$

datorită liniarităţii lui U_n.

Fie acum $f_0 \in \mathcal{L}_1$. Să considerăm $f_0|_{[-k(n), k(n)]}$ şi f_i un şir de forma (*) care aproximează pe $f_0|_{[-k(n), k(n)]}$ în $L^1_{[-k(n), k(n)]}$. Vom avea

$$[U' f_i](t) = [U_n f_i](t) \qquad t \in [-n, n]$$

şi cum U_n aplică continuu $L^1_{[-k(n), k(n)]}$ în $L^1_{[-n, n]}$, rezultă

$$U_n f_i \to U_n(f_0|_{[-k(n), k(n)]}) \text{ în } L^1_{[-n, n]} \text{ cînd } i \to \infty.$$

Prin urmare

$$U' f_i \to U_n(f_0|_{[-k(n), k(n)]}) \text{ în } L^1_{[-n, n]} \text{ cînd } i \to \infty.$$

Pe de altă parte,

$$(U' f_i, \varphi) \to (U' f_0, \varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{D}_{[-n, n]}, \text{ cînd } i \to \infty.$$

Prin urmare

$$(11) \qquad U' f_0|_{[-n, n]} = U_n f_0 \in L^1_{[-n, n]}.$$

Deci $U'(\mathcal{L}_1) \subset \mathcal{L}_1$ deoarece proprietatea 2 asigurînd lipirea lui $U_n(f_0|_{[-k(n), k(n)]})$ cu $U_{n+1}(f_0|_{[-k(n+1), k(n+1)]})$ ne dă $U' f_0 \in \mathcal{L}_1$. Egalitatea (11) demonstrează de asemenea şi ultima afirmaţie a propoziţiei 3. Aşa cum am remarcat dacă $U' \in L(\mathcal{D}', \mathcal{D}')$ are proprietatea $U'(\mathcal{L}_1) \subset \mathcal{L}_1$, atunci U are pentru orice $n \in N$ ordinul (teorema 3 [4]) $m(n)$ egal cu zero. U admite atunci reprezentarea locală (teoremele 2,3 [4]) :

$$[U \varphi)](s) = \int_{[-n,n]} K^0_n(s, t)\, \varphi^{(2)}(t)\, \mathrm{d}t, \qquad \varphi \in \mathcal{D}_{[-n, n]}$$

$K^0_n(s, t)$ fiind continuă pe $R \times [-n, n]$ satisfăcînd la :

(I) $\qquad |K^0_n(s, t)| \leqslant M, \qquad (s, t) \in R \times [-n, n]$;

(II) există $k(n) \in N$ astfel ca : $K_n(s, t) = 0$ pentru $|s| \geqslant k(n)$;

(III) pentru fiecare $j \in N$ există $m(j) \in N$, $m(j) \geqslant 2$ şi $K'_n(s, t)$ definită şi continuă pe $R \times [-n, n]$ care verifică (i), (ii) astfel ca pentru $\varphi \in \Delta_{m(j)+2}(n)$ să avem :

$$K^0_n \mathcal{J}^{m(j)-2} \varphi = \mathcal{J}^j K'_n \varphi$$

K^0_n, K'_n fiind operatorii integrali definiţi de $K^0_n(s, t)$, $K'_n(s, t)$: $\mathcal{J}$; operaţia de luare a primitivei iar $\Delta_{m(j)+2}(n) = \{\varphi \in \mathcal{D}_{[-n, n]};\ \varphi = D^{m(j)+2}\psi,$ $\psi \in \mathcal{D}_{[-n, n]}\}$.

(IV) pentru fiecare $n_1 \in N$, $n_2 \in N$, $n_2 \geqslant n_1$ şi pentru $(s, t) \in R \times [-n, n]$,

$$K^0_{n_1}(s, t) = K^0_{n_2}(s, t) + a(s)\,t + b(s);$$

(V) $K^0_n(s, t) = \dfrac{\partial}{\partial s} K^1_n(s, t)$ (derivata există în s uniform în raport cu $t \in [-n, n]$)

unde K^1_n este asociat operatorului $U_1 \in L(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ determinat de propoziţia 2 prin relaţia:

$$U\varphi = DU^1\varphi$$

$$K^1_n(s, t) = \int_{-n}^{t} K_n(s, \tau)\,\mathrm{d}\tau + a(s)\,t + b(s)$$

$$K^1_n(s, t) = \int_{-n}^{t}\left[\int_{-n}^{\tau} g_s(x)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\tau + a(s)\,t + b(s);\ (s, t) \in R \times [-n, n].$$

Deoarece $K^1_n(s, 1)$, $K^1_n(s, 0)$ sînt continue, rezultă $a(s) + b(s)$ şi $b(s)$ continue, deci $a(s)$ şi $b(s)$ sînt continue.

Pe de altă parte, $K^1_n(s, t) = K_n(s, t) = 0$ pentru $|s| \geqslant k(n)$, $t \in [-n, n]$, deci

$$\left.\begin{aligned} a(s) + b(s) &= 0 \\ a(s) - b(s) &= 0. \end{aligned}\right. \quad \text{pentru } |s| \geqslant k(n)$$

Deci $a(s)\,t + b(s)$ este derivabilă în t uniform în raport cu s. Deoarece $\int_{-n}^{\tau} g(x)\,\mathrm{d}x$ este continuă în τ uniform în raport cu s, rezultă $\int_{-n}^{t} K_n(s, \tau)\,\mathrm{d}\tau$ derivabilă în t uniform în raport cu s. Deci $K^1_n(s, t)$ este derivabilă în t uniform în raport cu s şi:

$$\frac{\partial K^1_n(s, t)}{\partial t} = \int_{-n}^{t} g_s(\tau)\,\mathrm{d}\tau + a(s).$$

De aici rezultă existenţa aproape peste tot a derivatei de ordinul doi a lui $K^1_n(s, t)$ în raport cu t şi egalitatea:

$$\frac{\partial^2 K^1_n(s, t)}{\partial t^2} = gs(t).$$

Această observaţie arată necesitatea condiţiei 3, propoziţia 3.

Iată acum şi caracterizarea furnizată de cel de-al doilea punct de vedere:

PROPOZIŢIA 4. *Necesar şi suficient ca un operator $U' \in L(\mathcal{D}', \mathcal{D}')$ să aibă proprietatea $U'(\mathcal{L}_1) \subset \mathcal{L}_1$ este ca reprezentarea locală a lui U dat de* (1) *să aibă forma*:

$$[U\varphi](s) = \int_{[-n, n]} K_n(s, t)\,\varphi^{(2)}(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \varphi \in \mathcal{D}_{[-n, n]},$$

$K_n(s, t)$ *satisfăcînd* (I), (II), (III), (IV) *şi pentru orice* $f \in \mathcal{L}_1$ *funcţia*

$$g(t) = \int_R f(s) K_n(s, t)\, ds, \qquad t \in [-n, n]$$

să admită a.p. (dt) *derivată de ordinul doi integrabilă.*

Demonstraţia propoziţiei se află în cele date anterior; e interesant de remarcat structura operatorilor U_n daţi de propoziţia 1 şi anume în virtutea propoziţiei 4 ei au forma:

$$U_n f_n = \frac{d^2}{dt^2} \int_{[-k(n),\, k(n)]} f(s) K_n(s, t)\, ds.$$

Primită la redacţie la 25 ianuarie 1968

Universitatea din Bucureşti
Facultatea de matematică-mecanică,
Str. Academiei 14

SUR LA STRUCTURE DES OPÉRATEURS LINÉAIRES ET CONTINUS DÉFINIS SUR $\mathcal{D}'$ AVEC DES VALEURS EN $\mathcal{D}'$ INVARIANT LE SOUS-ESPACE LINÉAIRE DES DISTRIBUTIONS DÉFINIES DE FONCTIONS LOCALES INTÉGRABLES

(RÉSUMÉ)

Dans cet ouvrage on précise la structure des opérateurs $U \in L(\mathcal{D}', \mathcal{D}')$ qui ont la propriété du titre en utilisant les résultats de [4].

BIBLIOGRAFIE

1. R. Cristescu, *Familles composables de distributions et systèmes physiques linéaires.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl. **9**, *8* (1964).
2. M. Nicolescu, *Analiză Matematică.* vol. II, III, Editura tehnică, Bucureşti, 1958/60.
3 L. Schwartz, *Théorie des distributions.* vol. I, Hermann, Paris, 1957.
4 M. Şabac, *Sur la structure des opérateurs linéaires et continus sur quelques espaces localement convexes qui interviennent dans la théorie des distributions.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **12**, *8* (1967).

ASUPRA STRUCTURII IDEALELOR MAXIMALE ALE UNEI ALGEBRE DE FUNCŢII MĂRGINITE

DE

MIHAI ŞABAC

În cele ce urmează se dă o caracterizare a idealelor maximale pentru algebre de funcţii mărginite cu unitate uniform închise şi care conţin odată cu o funcţie f, $|f|$ şi $\bar{f}$.

Fie $\mathcal{A}$ o algebră de funcţii complexe definite şi mărginite pe o mulţime S, satisfăcînd la :

I. $\mathcal{A}$ este uniform închisă, $1 \in \mathcal{A}$.

II. $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{A}$, $|f| \in \mathcal{A}$.

Observaţie. $\mathcal{A}$ este o algebră Banach cu involuţie complet regulată, dacă involuţia se defineşte în mod natural, iar norma se ia $\| f \| = \sup\limits_{t \in S} | f(t) |$.

Deoarece $\mathcal{A}$ are unitate, orice ideal maximal este prim şi prin urmare vom avea pentru orice ideal maximal M,

(1) $f \in M \Rightarrow f\bar{f} \in M \Rightarrow |f| \in M$.

Pe de altă parte, conform observaţiei făcute rezultă :

(2) $f \in M \Rightarrow \mathrm{Re}\, f \in M$.

Vom introduce pentru orice funcţie $f \in \mathcal{A}$ următoarea mulţime :

$$A_f = \{ (t_n)_{n \in N},\ t_n \in S,\ \lim_{n \to \infty} | f(t_n) | = 0 \},\ A_f \subset S^N.$$

În acest fel mulţimea elementelor inversabile ale algebrei $\mathcal{A}$ se caracterizează prin relaţia

$$A_f = \emptyset.$$

Folosind aceste mulţimi A_f, vom descrie structura idealelor algebrei $\mathcal{A}$ care satisfac la (1) şi (2) şi vom obţine de aici descrierea spaţiului $\mathfrak{M}$ al idealelor maximale ale algebrei $\mathcal{A}$.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 8, P. 1203–1206, BUCUREŞTI, 1968

Fie deci I un ideal satisfăcînd la (1) şi (2) şi să considerăm $\mathcal{S}_I \subset \mathcal{P}(S^N)$

$$\mathcal{S}_I = \{ A_f, f \in I \}.$$

Vom remarca următoarele fapte :

$$\text{(i) } f \in I \Rightarrow A_f = A_{\mathrm{Re} f} \cap A_{\mathrm{Im} f} \neq \emptyset$$

$$\text{(ii) } f,\ g \in I \Rightarrow A_f \cap A_g = A_{\mathrm{Re} f} \cap A_{\mathrm{Im} f} \cap A_{\mathrm{Im} g} \cap_{\mathrm{Re} g} \neq \emptyset$$

$$\text{(iii) } f \in I \Rightarrow A_{\mathrm{Re} f} \supset A_{[\mathrm{Re} f]_+} \cap A_{[\mathrm{Re} f]_-} = A_{[\mathrm{Re} f]_+ + [\mathrm{Re} f]_-} \neq \emptyset.$$

Într-adevăr, (i) este imediată deoarece $| f(t_n) | \to 0 \left\{ \begin{matrix} \mathrm{Re}\, f(t_n) \to 0 \\ \text{şi} \\ \mathrm{Im}\, f(t_n) \to 0 \end{matrix} \right\}$ (iii) rezultă din (2) în virtutea lui (1) care dă $(\mathrm{Re}\, f)_+ \in I$, $(\mathrm{Re} f)_- \in I$, iar (ii) rezultă din (i) şi (iii) dacă ţinem seama că pentru două funcţii pozitive h_1, h_2,

$$A_{h_1} \cap A_{h_2} = A_{h_1 + h_2}.$$

Prin urmare $\mathcal{S}_I$ satisface la :

1. $\mathcal{S}_I \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \mathcal{S}_I$
2. $A_f, A_g \in \mathcal{S}_I \Rightarrow (\exists)\, h \in I :\ A_f \cap A_g \supset A_h$.

Funcţiile $f \in I$ au proprietatea că $A_f \in \mathcal{S}_I$.

Vom spune că un ideal I_1 are ca anulator pe $\mathcal{S}_I$ dacă :

$$\mathcal{S}_{I_1} \subset \mathcal{F}_I$$

unde $\mathcal{F}_I$ este filtrul generat de baza $\mathcal{S}_I$.

Evident, există un cel mai mare ideal care are ca anulator pe $\mathcal{S}$ dacă $\mathcal{S}$ este o bază de filtru în S^N, şi anume

$$I(\mathcal{S}) = \{ f \in \mathcal{A} \mid (\exists)\, A \in \mathcal{S},\ A \subset A_f \}$$

sau cu alte notaţii

$$\mathcal{S}_{I(\mathcal{S})} = \mathcal{F},$$

$\mathcal{F}$ fiind filtrul generat de baza $\mathcal{S}$.

Într-adevăr, este suficient să verific faptul că $I(\mathcal{S})$ este un ideal. Fie f, $g \in I(\mathcal{S})$. Atunci :

$$A_{f+g} \supset A_f \cap A_g \supset A \cap B \supset C; \qquad A, B \in \mathcal{S}, \quad C \in \mathcal{S}.$$

Dacă $h \in \mathcal{A}$, atunci :

$$A_{hf} \supset A_f \supset A,\ A \in \mathcal{S}$$

deoarece h fiind mărginită, $\lim\limits_{n \to \infty} | f(t_n) | = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} | [hf](t_n) | = 0.$

Obținem atunci în mod evident idealele maximale ale algebrei $\mathcal{A}$ ca fiind idealele de forma $I(\mathcal{S})$, unde $\mathcal{S}$ este bază de ultrafiltru, observînd că are loc implicația :

$$\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2 \Rightarrow I(\mathcal{S}_1) \subset I(\mathcal{S}_2).$$

Putem face și următoarea remarcă :

Dacă algebra $\mathcal{A}$ nu este corp, atunci pentru orice bază de ultrafiltru $\mathcal{S}$, idealul $I(\mathcal{S}) \neq 0$.

Într-adevăr, altfel am avea $\{0\}$ ideal maximal în $\mathcal{A}$.

Este evident de asemenea faptul că două baze de filtru echivalente definesc același ideal.

Prin urmare se poate defini o corespondență biunivocă între spațiul $\mathcal{M}$ și $\mathcal{U}$, mulțimea bazelor de ultrafiltru în S^N factorizată prin relația de echivalență obișnuită în mulțimea bazelor de filtru. Vecinătățile punctelor $M \in \mathcal{M}$, în topologia slabă pe $\mathcal{M}$, dau pe mulțimea $\mathcal{U}$ o topologie.

Vom determina structura unui sistem fundamental de vecinătăți ale unui punct $S_0 \in \mathcal{U}$.

Pentru aceasta ne este utilă următoarea remarcă :

$\mathcal{S}$ fiind dat în $\mathcal{U}$ și x în $\mathcal{A}$, există $A \in \mathcal{S}$ pentru care :

$$\lim_{n\to\infty} x(t_n) = \lambda \qquad (\forall)\ \{t_n\}_{n\in N} \in A$$

și dacă pentru o altă mulțime $B \in \mathcal{S}$, $(\exists)\ \mu = \lim\limits_{n\to\infty} x(t'_n)$, $(\forall)\ \{t'_n\}_{n\in N} \in B$, atunci $\lambda = \mu$.

Într-adevăr, λ există și avem : $\lambda = x(M)$, M fiind elementul din $\mathcal{M}$ corespunzător lui $\mathcal{S}$.

Fie atunci $\mathcal{S}_0 \in \mathcal{U}$ și $x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{A}$. Conform celor de mai sus

$$(\exists)\ \lambda_i \text{ și } A^i \in \mathcal{S}_0 : \lim_{n\to\infty} x_i(t_n) = \lambda_i,\ (\forall)\ \{t_n\}_{n\in N} \in A^i.$$

Dar $\bigcap\limits_{i=1}^{k} A^i \supset A^0 = A^0(x_1, \ldots x_k) \in \mathcal{S}_0$ și prin urmare :

$$\lim_{n\to\infty} x_i(t_n) = \lambda_i \qquad (\forall)\ \{t_n\}_{n\in N} \in \forall^0(x_1, \ldots, x_k) = A^0.$$

Fie $M_0 \in \mathcal{M}$ corespunzător lui $\mathcal{S}_0$.

Într-o vecinătate dintr-un sistem fundamental de vecinătăți ale lui $M_0 \in \mathcal{M}$ în topologia slabă intră idealele M pentru care $\mathcal{S}_M$ verifică la :

$$(\exists)\ A_\varepsilon = A_\varepsilon(x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{S}_M : \left| \lim_{n\to\infty} (x_i(t_n) - x_i(t_n^0)) \right| < \varepsilon$$

pentru $(\forall)\ \{t_n\}_{n\in N} \in A_\varepsilon$ și $\{t_n^0\}_{n\in N} \in A^0(x_1, \ldots, x_k) = A^0$.

Deci obținem un sistem fundamental de vecinătăți pentru $\mathcal{S}_0 \in \mathcal{U}$, dat de mulțimi de forma :

$$V(x_1, \ldots, x_k; \varepsilon) = \{\mathcal{S} \mid (\exists)\ A_\varepsilon \in \mathcal{S} : | x_i(A_\varepsilon) - x_i(A_0) | < \varepsilon\},$$

unde am adoptat notația $| x_i(A_\varepsilon) - x_i(A_0) | < \varepsilon$ pentru :

$$\left| \lim_{n\to\infty} [x_i(t_n) - x_i(t_n^0)] \right| < \varepsilon \ (\forall)\ \{t_n\}_{n\in N} \in A_\varepsilon \text{ și } (\forall)\ \{t_n^0\}_{n\in N} \in A_0.$$

Vom particulariza acum mulţimea S şi anume vom lua S spaţiu metric compact. Căutăm să vedem în ce măsură se poate simplifica structura lui $\mathcal{M}$. Următoarea observaţie ne va fi utilă :

Toată teoria se putea face înlocuind mulţimile A_f prin mulţimi de convergenţă uniformă U_f adică :

$$U_f = \{ (t_n)_{n \in N}, t_n \in S : (\forall)\, \varepsilon > 0\, (\exists)\, N(\varepsilon), |f(t_n)| < \varepsilon, (\forall)\, n \geqslant N(\varepsilon)\}.$$

S fiind un spaţiu compact, rezultă că S^N este compact. Deci orice ultrafiltru este convergent.

Prin urmare $\mathcal{S} \in \mathcal{U}$ fiind dat $(\exists)$ $\{t_n\}_{n \in N}$ unic :

$\{t_n\}_{n \in N} \in \mathcal{A}d\mathcal{S}$ (toate bazele de filtru echivalente cu aceeaşi aderenţă). Conform observaţiei făcute, pot alege o bază de filtru care să genereze pe M formată din mulţimi de forma U_f.

Fie atunci $x \in \mathcal{A}$, $x \in M$, M fiind idealul maximal generat de $\mathcal{S}$. $(\exists)$ $\{t_n^k\}_{n \in N} \to \{t_n\}_{n \in N}$ în topologia produs a lui S^N, $\{t_n^k\}_{n \in N} \in U_x$.

Cum avem

$$|x(t_n^k)| < \varepsilon, \text{ pentru } n \geqslant N(\varepsilon)$$

pot extrage pentru fiecare n un subşir $\{t_n^{k_m}\}_{m \in N}$ astfel ca :

$$x(t_n^{k_m}) \to \alpha_n, m \to \infty$$

şi rezultă următorul fapt :

Dacă $\{t_n\}_{n \in N}$ sînt puncte de continuitate pentru funcţiile $x \in M$, atunci avem în mod evident

$$|x(t_n)| \leqslant \varepsilon \text{ pentru } n \geqslant N(\varepsilon)$$

şi baza de filtru care generează pe M poate fi înlocuită de un singur şir $\{t_n\}_{n \in N}$.

Evident, ar fi suficient să ştim că există un subşir $\{t_{n_k}\}$ al lui $\{t_n\}_{n \in N}$ format din puncte de continuitate pentru funcţiile $x \in M$. De asemenea se poate remarca faptul că ipoteza : S spaţiu metric poate fi suprimată dacă lucrăm cu şiruri generalizate.

Primită la redacţie la 25.I.1968

Universitatea din Bucureşti
Facultatea de matematică-mecanică
Str. Academiei nr. 14

SUR LA STRUCTURE D'IDÉAUX MAXIMAUX D'UNE ALGÈBRE DE FONCTIONS BORNÉES LIMITÉES

RÉSUMÉ

Il s'ensuit une caractérisation des idéaux maximaux pour algèbres de fonctions bornées limitées à unité uniformément fermées, contenant à la fois les une fonctions $f, |f|$ et $\bar{f}$.

BIBLIOGRAFIE

И. М. ГЕЛЬФАНД, Д. А. РАЙКОВ, Г. Е. ШИЛОВ, *Коммутативные нормированные кольца*. Гос. изд. физ. - мат. литературы, Москва, 1960.

CONTRIBUŢII LA TEORIA ESTIMAŢIILOR STATISTICE ALE DENSITĂŢILOR DE REPARTIŢIE ŞI APLICAŢII

DE

I. VĂDUVA

Lucrarea conţine principalele contribuţii ale autorului privind teoria estimaţiilor neparametrice ale densităţii de repartiţie şi modului precum şi o serie de aplicaţii. Sînt prezentate mai întîi extinderi la cazul multidimensional ale rezultatelor cunoscute în această direcţie, precum şi unele generalizări referitoare la definiţia şi proprietăţile estimaţiei densităţii de repartiţie. Astfel se definesc estimaţii pentru funcţia de repartiţie generalizată şi densitatea de repartiţie generalizată; de asemenea se definesc şi se studiază: estimaţia densităţii de repartiţie ,,prin *k* puncte", estimaţia densităţii de repartiţie a unei sume de vectori aleatori independenţi, estimaţia densităţii unidimensionale de repartiţie a unui proces staţionar tare, estimaţii de tip funcţie. În ceea ce priveşte aplicaţiile se studiază estimaţii ale modului, ale funcţiei de regresie, raportului de hazard şi funcţiei de siguranţă multidimensională.

INTRODUCERE

Fie $\{E, \mathcal{K}\ P\}$ un cîmp de probabilitate, R^q — spaţiul euclidian q-dimensional şi $\mathcal{B}^q$ corpul mulţimilor boreliene din R^q.

Aplicaţia $\mathbf{X} : E \longrightarrow R^q$ se numeşte *vector aleator* (se va nota V.a.), dacă este o aplicaţie $\mathcal{K}$-măsurabilă. În cazul $q = 1$, X se numeşte variabilă aleatoare (se va nota v.a.).

Dacă notăm $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_q)'$, unde X_i, $1 \leqslant i \leqslant q$, sînt componentele vectorului aleator, atunci X_i sînt variabile aleatoare. Se ştie ([39], p. 20) că V.a $\mathbf{X}$ induce din cîmpul de probabilitate $\{E, \mathcal{K}, P\}$, cîmpul de probabilitate $\{R^q, \mathcal{B}^q, P^*\}$, unde.

$$P^*(B) = P(\mathbf{X}^{-1}(B)), B \in \mathcal{B}^q.$$

Se numeşte *funcţie de repartiţie* ¹) *multidimensională* a vectorului aleator $\mathbf{X}$ aplicaţia $F : R^q \to [0,1]$, definită de relaţia

$$F(\mathbf{a}) = P^*(I_{\mathbf{a}})\,;\ I_{\mathbf{a}} = (-\infty, a_1) \times \ldots \times (-\infty, a_q) \tag{1}$$

---

¹) Principalele proprietăţi ale funcţiei de repartiţie multidimensionale sînt prezentate de exemplu în [27], p. 149.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 8, P. 1207–1276, BUCUREŞTI, 1968

sau

$$F(\mathbf{a}) = P(\{\mathbf{X} < \mathbf{a}\})\,;\quad \{\mathbf{X} < \mathbf{a}\} = \{\xi,\ \xi \in E\,;\ X_1(\xi) < a_1, \ldots, X_q(\xi) < a_q\}. \quad (1')$$

În cazul $q = 1$, funcția de repartiție se numește unidimensională.

DEFINIȚIE. *Fie* **X** *un V.a. q-dimensional a cărui funcție de repartiție multidimensională este F. Dacă există o funcție f definită pe R^q, astfel încît*

$$(2) \qquad F(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_q} (u_1, \ldots, u_q)\, \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_q\,, \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_q)',$$

atunci f se numește densitate de repartiție multidimensională.

Pentru simplificare vom nota

$$(2') \qquad F(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\mathbf{x}} f(\mathbf{u})\, \mathrm{d}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in R^q.$$

Din definiție rezultă că egalitatea

$$(3) \qquad f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^q F(\mathbf{x})}{\partial x_1 \ldots \partial x_q}$$

are loc în toate punctele din R^q cu excepția unei mulțimi de măsură Lebesgue nulă. Să notăm cu S această mulțime. Funcția

$$(4) \qquad \hat{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad \mathbf{x} \in S \\ \dfrac{\partial^q F(\mathbf{x})}{\partial x_1 \ldots \partial x_q} & \text{dacă } \mathbf{x} \in \overline{S}, \end{cases}$$

unde $\overline{S}$ este complementarea lui S, este definită în orice punct $\mathbf{x} \in R^q$. Funcția f este unic determinată și satisface condiția (2), deci poate fi considerată densitate de repartiție.

Dacă funcția $F(\mathbf{x})$ este de q ori diferențiabilă pe R^q, atunci ([23], cap. XIV), $S = \emptyset$ și deci $\hat{f}(\mathbf{x}) \equiv f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in R^q$, unde $f(\mathbf{x})$ este definit de (3).

Fie $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_q)'$ un vector [2] ale cărui componente sînt pozitive. Fie operatorul diferență Δ_{h_k} definit de relația

$$(5) \qquad \begin{aligned} \Delta_{h_k} F(\mathbf{x}) &= F(x_1, \ldots, x_k + h_k, \ldots, x_q) - \\ &- F(x_1, \ldots, x_k - h_k, \ldots, x_q), \quad 1 \leqslant k \leqslant q, \end{aligned}$$

și să considerăm operatorul produs

$$(6) \qquad \Delta_h^{(q)} = \Delta_{h_1} \ldots \Delta_{h_q}.$$

---

[2] Vectorii vor fi considerați vectori coloană.

Se ştie ([27], p. 149) că dacă F este funcţie de repartiţie multidimensională, atunci

$$\Delta_h^{(q)} F(\mathbf{x}) \geqslant 0. \tag{7}$$

De aici rezultă că $f(\mathbf{x}) \geqslant 0$, $\mathbf{x} \in \overline{S}$ şi $\hat{f}(\mathbf{x}) \geqslant 0$.

Să observăm că densitatea de repartiţie este un caz particular de derivată Radon — Nikodym a măsurii P^*.

Dacă măsura P^* este absolut continuă în raport cu măsura μ definită pe R^q, atunci ([25], p. 149) conform teoremei Radon-Nikodym (Lebesgue-Nikodym), există o aplicaţie $f: R^q \longrightarrow R^1$, $\mathcal{B}^q$-măsurabilă şi unic determinată cu excepţia unei mulţimi de măsură μ astfel încît

$$P^*(B) = \int_B f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mu(\mathbf{x})$$

oricare ar fi $B \in B^q$. Funcţia f se numeşte derivata Radon-Nikodym a măsurii P^* în raport cu măsura μ. Dacă μ este măsura Lebesgue pe R^q, atunci obţinem densitatea de repartiţie multidimensională.

★

În lucrarea de faţă sînt prezentate principalele contribuţii ale autorului legate de estimaţiile neparametrice ale densităţii de repartiţie şi modului. Primele lucrări referitoare la estimaţiile neparametrice ale densităţii de repartiţie şi modului sînt cele ale lui Rosemblatt [28], (1956), Parzen [26], (1962) şi Bartlett [1], (1963) şi ele se ocupă de densitatea de repartiţie undimensională. Ideea pe care se bazează construcţia estimaţiei densităţii de repartiţie este următoarea: fiind dat $h > 0$ şi notînd $F_n(x)$ estimaţia funcţiei de repartiţie în punctul x determinată cu ajutorul unei selecţii de volum n, estimaţia densităţii de repartiţie poate fi considerată ca fiind dată de raportul

$$f_n(x) = \frac{F_n(x+h) - F_n(x-h)}{2h} \tag{8}$$

care se mai poate scrie

$$f_n(x) = \frac{1}{nh} \sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{x - X_j}{h}\right), \quad K(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{în rest,} \end{cases} \tag{8'}$$

unde $X_1, \ldots, X_n$ este selecţia de volum n considerată iar $h = h(n)$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} h(n) = 0$. În lucrărle [1] şi [26] se defineşte estimaţia densităţii de repartiţie după prima formulă (8′), unde K este o funcţie (numită funcţie pondere) nu neapărat cea dată de a doua formulă (8′), dar ea este aleasă astfel încît estimaţia f_n să fie asimptotic nedeplasată, consistentă şi asimptotic normală. Întrucît estimaţia f_n definită de (8) este construită folosindu-se estimaţia F_n în punctele $x-h$ şi $x+h$, ea va mai fi numită şi estimaţie *„prin două puncte"*.

Primul capitol al lucrării de faţă prezintă teoria generală a estimaţiei densităţii de repartiţie.

Primul paragraf al lucrării (§ 1.1) se ocupă cu extinderea la cazul multidimensional a construcţiei lui Bartlett [1] şi Parzen [26] privind estimaţia densităţii de repartiţie „prin două puncte". Aici sînt prezentate două leme cu caracter general (lemele 1 şi 2) şi se construiesc două exemple de funcţii K al căror suport este mărginit şi care conduc la estimaţii consistente şi asimptotic nedeplasate pentru densitatea teoretică de repartiţie $f(x)$.

Paragraful 1.2 al lucrării este împărţit în trei părţi. În prima parte (pct. A) se defineşte sub forma generală estimaţia densităţii de repartiţie multidimensionale folosindu-se noţiunea de *şir δ-generator* după Ghelfand şi Şilov [11]. Această definiţie reprezintă atît extinderea la cazul multidimensional, cît şi generalizarea definiţiei estimaţiei densităţii unidimensionale dată de Watson şi Leadbetter [34]—[36]. Cei doi autori introduc în [35] noţiunea de *şir de tip δ* cu ajutorul căreia, generalizînd rezultatele lui Parzen [26], definesc estimaţia densităţii de repartiţie şi raportului de hazard şi demonstrează proprietăţi de asimptotic nedeplasare consistentă şi asimptotic normalitate pentru aceste estimaţii.

Estimaţia pe care o considerăm în § 1.2 (definiţia 1.4) este mai generală decît cea din [35], întrucît noţiunea de şir δ-generator este mai generală decît cea de şir de tip δ. (Pentru un şir de tip δ se presupune de exemplu că fiecare termen este o densitate de repartiţie).

Pe baza unor proprietăţi generale ale şirurilor δ-generatoare (lemele 3 şi 4) se stabilesc condiţiile în care estimaţia densităţii multidimensionale dată de definiţia 1.4, este asimptotic nedeplasată consistentă şi asimptotic normală (teoremele 1, 2 şi 3). O condiţie interesantă privind consistenţa este exprimată de teorema 2′. În legătură cu asimptotic normalitatea se evaluează printr-un procedeu nou, bazat pe o teoremă a lui Katz [14], rapiditatea asimptotic normalităţii (teorema 3′). De asemenea, folosind un memoriu mai vechi al lui Cramér şi Wold [6] se demonstrează că familia de variabilele aleatoare $\{f_n(x), x \in R^q\}$ este un sistem gaussian care are proprietatea că pentru $x' \neq x''$, variabilele aleatoare $f_n(x')$ şi $f_n(x'')$ sînt independente.

În partea a doua a paragrafului 1.2 (pct. B), generalizîndu-se rezultatele din pct. A., se construieşte estimaţia *densităţii de repartiţie generalizate* în sensul lui R. Cristescu şi G. Marinescu [8]. Se arată că estimaţia astfel construită este *nedeplasată*, ceea ce reprezintă un fapt nou în teoria estimaţiei densităţii de repartiţie.

În partea a treia a § 1.2 (pct. C), se rezolvă o problemă pusă de acad. Gh. Mihoc şi anume: să se construiască estimaţia densităţii de repartiţie unidimensională presupunîndu-se cunoscută funcţia empirică de repartiţie F_n în k puncte.

Pornindu-se de la formula de interpolare a lui Newton referitoare la aproximarea derivatei cînd se cunosc valorile funcţiei în k puncte echidistante, se demonstrează o lemă (lema 8) iar pe baza rezultatului stabilit de lemă se defineşte *estimaţia densităţii de repartiţie „prin k puncte"* şi se arată că problema studierii proprietăţilor ei se reduce la cazul estimaţiei" „prin două puncte" prezentat la pct. A. În sfîrşit, tot la pct. C se menţionează procedeul *de regularizare* a estimaţiilor unor parametri statistici cu ajutorul estimaţiei densităţii de repartiţie, care ea însăşi este o *estimaţie regulată*. Ca exemple de astfel de estimaţii regulate sînt menţionate estimaţii ale momentelor, estimaţia funcţiei de siguranţă, a raportului de hazard şi a funcţiei de regresie.

În capitolul al doilea se consideră unele probleme speciale legate de teoria estimaţiei densităţii de repartiţie.

Paragraful 2.1 prezintă unele proprietăţi ale estimaţiilor optime în sensul „mediei integrate a erorii pătratice" (MIEP). În cazul unidimensional estimaţiile optime în sensul MIEP au fost studiate de Watson şi Leadbetter [34], iar extinderea acestor rezultate la cazul multidimensional, care de altfel este prezentată în lucrarea de faţă, a fost făcută de Suciu şi autor în [29]. Aici se introduce noţiunea de *funcţie caracteristică q-dimensională care descreşte algebric de gradul p* (definiţia 2.3) şi se arată că estimaţia densităţii care corespunde unei astfel de funcţii caracteristice este *integral consistentă* de ordinul lui $n^{1-\frac{q}{2p}}$.

În § 2.2 sînt studiate estimaţii de o formă specială ale densităţilor de repartiţie multidimensionale şi anume estimaţiile de tip funcţie, definite cu ajutorul unei funcţii pondere K. Aici se extind la cazul multidimensional rezultatele lui Parzen [26], aceste rezultate fiind obţinute prin particularizarea acelora din § 1.2 ; ele au fost publicate de autor în lucrarea [30]. În acest paragraf se evaluează de asemenea corecţia estimaţiei (teorema 11), în funcţie de n şi K. Tot aici se extinde la cazul multidimensional un rezultat din [34] referitor la integral-consistenţa estimaţiilor de tip funcţie (teorema 12) şi se evaluează din nou rapiditatea asimptotic normalităţii (teorema 9).

În § 2.3 se consideră estimaţia densităţii de repartiţie a unei sume de vectori aleatori. Această problemă a fost considerată pentru prima dată de către autor în lucrarea [31], în cazul unidimensional. Aici se dau două definiţii distincte estimaţiei densităţii unei sume (definiţiile 2.6 şi 2.7) şi se demonstrează proprietăţile lor (teoremele 13 şi 14). O proprietate importantă care se pune în evidenţă în acest caz este aceea de *uniform consistenţă în raport cu x*. În sfîrşit, teorema 16 prezintă un interes major pentru practică, pentru faptul că arată cum trebuie construită o estimaţie nedeplasată pentru densitatea de repartiţie, în cazul cînd valorile de selecţie se obţin prin măsurarea cu aparate a căror erori medii pătratice sînt cunoscute.

În § 2.4 se defineşte estimaţia densităţii de repartiţie a unui proces staţionar şi se demonstrează că estimaţia este asimptotic nedeplasată şi consistentă. Definiţia se dă utilizîndu-se estimaţia funcţiei de repartiţie a unui proces staţionar introdusă de Grenander [13]. Rezultatele acestui paragraf au fost publicate de autor în lucrarea [33].

În capitolul al treilea al prezentei lucrări sînt prezentate o serie de aplicaţii ale teoriei estimaţiei densităţii de repartiţie.

Paragraful 3.1 se ocupă cu estimaţia modulului unui vector aleator, extinzîndu-se rezultatele lui Parzen [26] referitoare la modul unei variabile aleatoare. Se arată că în anumite condiţii estimaţia modulului (definiţia 3.2) este o estimaţie consistentă pentru modul teoretic (teorema 20), punîndu-se în acelaşi timp în evidenţă şi proprietatea de *uniform asimptotic nedeplasare şi uniform consistenţă a estimaţiei densităţii de repartiţie*. Demonstraţia proprietăţii de *asimptotic normalitate multidimensională* a estimaţiei modulului (teorema 21), diferă de cea a lui Parzen şi ea se bazează pe lema 6 (§ 1.2). În încheierea paragrafului se definește de asemenea o regiune de încredere pentru modul teoretic în cazul selecțiilor de volum mare.

În § 3.2 se studiază *estimația funcției de siguranță globală*, extinzîndu-se rezultatele lui Murthy [17] pentru funcția de siguranță unidimensională, stabilite în cazul estimațiilor de tip funcție. Rezultatele acestui paragraf sînt stabilite pe baza rezultatelor din § 1.2.

Paragraful 3.3 se ocupă de problema estimației raportului de hazard multidimensional. Proprietățile acestei estimații sînt demonstrate extinzînd la cazul multidimensional rezultatele lui Watson și Leadbetter [35], [36].

Paragraful 3.4 al lucrării studiază estimația *funcției de regresie multiplă* într-un punct. Estimația *funcției de regresie simplă* a fost definită de Nadaraia [20] care a enunțat (fără a prezenta demonstrații) proprietățile acestei estimații. În paragraful la care ne referim, definiția estimației este dată cu ajutorul noțiunii de șir δ-generator. Se demonstrează că această estimație este consistentă și asimptotic nedeplasată și de asemenea că este asimptotic normală. Ultima proprietate se demonstrează prin procedeul folosit în § 3.1 (teorema 24). În sfîrșit, în acest paragraf se prezintă și un *procedeu de predicție* care are o deosebită importanță practică; cu această ocazie se menționează și posibilitățile de generalizare privind estimația *regresiei vectoriale oarecare*.

Teoria estimației pentru densitatea de repartiție, așa cum este prezentată în această lucrare, are o deosebită importanță atît teoretică cît și practică. Generalizările și extensiunile prezentate se încadrează în spiritul modern al analizei statistice multidimensionale. Estimațiile ,,regulate'' ale densităților de repartiție permit estimarea modului, parametru statistic cu deosebită semnificație practică și în general puțin studiat din punct de vedere statistic.

În sfîrșit, teoria estimației densității de repartiție permite abordarea dintr-un punct de vedere nou problemele statistice legate de procesele stohastice.

Forma de prezentare a lucrării de față este cea clasică. Desigur prezentarea se poate face sub o formă mai generală, densitatea de repartiție putînd fi privită ca derivată Radon-Nikodym. O astfel de prezentare nu ar conduce însă la rezultate noi, iar forma lor de prezentare ar îngreuna aplicarea în practică.

Autorul aduce sincere mulțumiri domnilor profesori O. Onicescu, Gh. Mihoc și G. Marinescu, pentru prețioasele indicații primite în legătură cu problematica lucrării și cu tratarea riguroasă a diferitelor probleme.

CAPITOLUL I

TEORIA GENERALĂ A ESTIMAȚIEI DENSITĂȚII DE REPARTIȚIE

Acest capitol prezintă construcția estimației densității de repartiție într-un cadru general.

În § 1.1 se prezintă în cazul multidimensional o serie de considerații care conduc la definiția estimației densității de repartiție și care în cazul unidimensional au fost considerate de Rosemblatt [28], Parzen [26] și Bartlett [1].

Paragraful 1.2 prezintă definiţia şi proprietăţile generale ale estimaţiei densităţii de repartiţie generalizînd unele rezultate ale autorului sau extinzînd la cazul multidimensional rezultatele lui Watson şi Leadbetter [34]—[36]. De asemenea sînt prezentate o serie de aspecte noi cum ar fi estimaţia *densităţii generalizate de repartiţie şi estimaţia „prin k puncte"* a densităţii de repartiţie ($k > 2$).

§ 1.1 CONSTRUCŢIA ELEMENTARĂ A ESTIMAŢIEI DENSITĂŢII DE REPARTIŢIE A UNUI VECTOR ALEATOR

Fiind dat un vector aleator X, se numeşte *selecţie* de volum n efectuată asupra lui X, o mulţime de vectori, aleatori $\{X_1, \ldots, X_n\}$ independenţi şi care au aceeaşi repartiţie ca X.

O funcţie $u(X_1, \ldots, X_n)$ se numeşte *estimaţie* [25], [39] a parametrului α dacă $\lim\limits_{n \to \infty} u(X_1, \ldots, X_n) = \alpha$, unde limita trebuie considerată într-unul din sensurile posibile în teoria probabilităţilor.

Întrucît în acest mod noţiunea de estimaţie nu are sens precizat în statistica matematică, se adaugă cuvîntului estimaţie diverse adjective care precizează sensul în care trebuie considerată limita. În această ordine de idei reproducem, [39], următoarele definiţii :

DEFINIŢIA 1.1. *Estimaţia* $u(X_1, \ldots, X_n)$ *se numeşte consistentă pentru* α *dacă* $u(X_1, \ldots, X_n)$ *tinde în probabilitate către* α.

DEFINIŢIA 1.2. *Estimaţia* $u(X_1, \ldots, X_n)$ *se numeşte asimptotic nedeplasată pentru* α *dacă* $\lim\limits_{n \to \infty} E[u(X_1, \ldots, X_n)] = \alpha$, *unde* E *este operatorul valoare medie.*

Dacă în loc de parametrul α considerăm funcţia de repartiţie F într-un punct x fixat, atunci de asemenea putem vorbi despre estimaţia lui $F(x)$.

Formulele (1′) şi (2) care definesc pe $F(x)$ ne conduc la :

DEFINIŢIA 1.3. *Pentru fiecare* $x \in R^q$ *estimaţia funcţiei de repartiţie* $F(x)$ *este*

$$(1.1.1) \qquad F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) ; \quad \alpha_i(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } X_i < x \\ 0 \text{ în rest,} \end{cases}$$

unde X_i *sînt variabilele de selecţie iar* $Y < x$ *înseamnă că* $Y_i < x_i$,

$$1 \leqslant i \leqslant q, \text{ cu } Y = (y_1, \ldots, y_q)', \ x = (x_1, \ldots, x_q)'.$$

Conform proprietăţilor estimaţiei parametrului p al repartiţiei binomiale ([24], p. 358) rezultă că

$$(1.1.1') \qquad E[F_n(x)] = F(x) ; \ D^2[F_n(x)] = \frac{F(x)(1 - F(x))}{n},$$

adică $F_n(x)$ este o estimaţie *nedeplasată* şi *consistentă* pentru $F(x)$. Această estimaţie este *neparametrică* întrucît în construcţia ei nu intervin parametrii de care eventual ar putea depinde funcţia teoretică de repartiţie $F(x)$.

Vom trece acum la construcția elementară a estimației densității de repartiție multidimensională.

Fiind dată baza ortonormală obișnuită $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_q$ din R^q și ε_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant q$, $1 \leqslant j \leqslant 2^q$ astfel încît ε_{ij} ia valorile -1 și $+1$ și

$$\sum_{j=1}^{2^q} \varepsilon_{ij} = 0, 1 \leqslant i \leqslant q\,;\ \varepsilon_{ij}^- = \begin{cases} 1 \text{ dacă } \varepsilon_{ij} = -1 \\ 0 \text{ dacă } \varepsilon_{ij} = 1, \end{cases}$$

atunci rezultă că operatorul Δ definit de (6) este

$$(1.1.2) \qquad \Delta_h^{(q)} F(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{2^q} (-1)^{\sum_{i=1}^{q} \varepsilon_{ij}^-} F\left(\mathbf{x} + \sum_{i=1}^{q} \varepsilon_{ij} h_i \mathbf{e}_i\right),\ \mathbf{x} \in R^q,$$

unde $h = (h_1, \ldots, h_q)'$ și $h_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant q$. Evident, în cazul $q = 2$ avem

$$\Delta_{\mathbf{h}}^{(2)} F(x_1, x_2) = F(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - F(x_1 - h_1, x_2 + h_2) - F(x_1 + h_1, x_2 - h_2) + F(x_1 - h_1, x_2 - h_2).$$

Din relația (3) rezultă că densitatea de repartiție este

$$(1.1.3) \qquad f(\mathbf{x}) = \lim_{\substack{h_i \to 0 \\ 1 \leqslant i \leqslant q}} \frac{\Delta_{\mathbf{h}}^{(q)} F(\mathbf{x})}{2^q h_1 \ldots h_q}.$$

Dacă ținem seama de această relație și de definiția 1.3, rezultă că putem considera o estimație a densității de repartiție ca fiind dată de formula

$$(1.1.4) \qquad f_n(\mathbf{x}) = \frac{\Delta_{\mathbf{h}}^{(q)} F_n(\mathbf{x})}{2^q h_1 \ldots h_q}.$$

Se observă că

$$(1.1.5) \qquad E\,[f_n(\mathbf{x})] = \frac{\Delta_{\mathbf{h}}^{(q)} F(\mathbf{x})}{2^q h_1 \ldots h_q}.$$

De aici rezultă că dacă luăm $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_q)'$, $h_i = h_i(n)$, $1 \leqslant i \leqslant q$, astfel încît

$$(1.1.6) \qquad \lim_{n \to \infty} \|\mathbf{h}(n)\| = 0,$$

unde $\|\mathbf{h}\|$ este una din normele echivalente [10] ale vectorului h (de ex. $\|\mathbf{h}\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant q} |h_i|$), atunci deducem că

$$\lim_{n \to \infty} E[f_n(\mathbf{x})] = f(\mathbf{x})$$

adică (1.1.4) este o estimație asimptotic nedeplasată a lui $f(\mathbf{x})$. Dacă considerăm funcția

$$(1.1.7) \qquad K_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^q} & \text{cînd } \left|\dfrac{x_i - y_i}{h_i}\right| \leqslant 1,\ 1 \leqslant i \leqslant q, \\ 0 & \text{în rest,} \end{cases}$$

atunci rezultă că (1.1.4) se poate scrie

$$
(1.1.4') \qquad f_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}_i) = \int K_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\,\mathrm{d}F_n(\mathbf{y})\,{}^{1)},
$$

unde $F_n(\mathbf{x})$ este estimaţia definită de (1.1.1).

Din cele de mai sus conchidem că putem considera estimaţii ale densităţii de repartiţie de forma (1.1.4'). Trebuie însă să delimităm clasa funcţiilor $K_{\mathbf{x}}$ astfel încît estimaţia (1.1.4') să fie consistentă şi asimptotic nedeplasată. Clasa funcţiilor care realizează acest fapt (şirurile δ-generatoare) va fi precizată în § 1.2. Deocamdată vom prezenta două leme şi două exemple care sugerează cum trebuie delimitată, în modul general, clasa funcţiilor $K_{\mathbf{x}}$. Aceste leme au fost puse în evidenţă în lucrările [1], [28] pentru cazul unidimensional.

LEMA 1. *Dacă* $K_{\mathbf{x}} \in L_1(R^q) \cap L_2(R^q)$, *atunci* $f_n(\mathbf{x})$ *definită de (1.1.4') satisface relaţiile*

$$
(1.1.8) \qquad E\,[f_n(\mathbf{x})] = E\,[K_{\mathbf{x}}(X)]
$$

$$
(1.1.8') \qquad D^2[f_n(\mathbf{x})] = \frac{1}{n}\{E\,[K_{\mathbf{x}}^2(\mathbf{X})] - (E\,[K_{\mathbf{x}}(\mathbf{X})])^2\}
$$

$$
(1.1.8'') \qquad \mathcal{E}_n^2(\mathbf{x}) = E\,[f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})]^2 = \frac{1}{n} D^2\,[K_{\mathbf{x}}(\mathbf{X})] + \{E\,[K_{\mathbf{x}}(\mathbf{X})] - f(\mathbf{x})\}^2.
$$

Demonstraţia lemei este imediată. Mărimea $\mathcal{E}_n^2(\mathbf{x})$ se numeşte eroare medie pătratică; dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{E}_n(\mathbf{x}) = 0$, atunci $f_n(\mathbf{x})$ converge în probabilitate către $f(\mathbf{x})$, adică este o estimaţie consistentă a lui $f(\mathbf{x})$.

LEMA 2. *Presupunem că densitatea teoretică de repartiţie f are derivate parţiale pînă la ordinul al treilea inclusiv, continue şi că pentru fiecare* $\mathbf{x}$, *funcţia* $K_{\mathbf{x}}$ *satisface condiţiile* :

a) *Este de forma*

$$
(1.1.9) \qquad K_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = K(\mathbf{x} - \mathbf{y}),
$$

unde K este o funcţie pară în fiecare din variabile şi are proprietăţile

$$
(1.1.10) \qquad \int K(\mathbf{u})\,\mathrm{d}\mathbf{u} = 1\,; \qquad \int K^2(\mathbf{u})\,\mathrm{d}\mathbf{u} = \beta < \infty
$$

$K(\mathbf{u}) = 0$ *dacă* $\mathbf{u} \notin H$, $H = (-h_1, h_1) \times \ldots \times (-h_q, h_q)$, $h_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant q$, *iar* β *poate depinde de* H.

b) *Există o constantă* α, *finită, care depinde de H astfel încît*

$$
(1.1.11) \qquad |\,\alpha_{ij}\,| = \left|\int u_i u_j K(\mathbf{u})\,\mathrm{d}\mathbf{u}\right| \leqslant \alpha.
$$

---

1) Cînd nu vom preciza domeniul de integrare înseamnă că integrala este luată pe întreg spaţiul R^q.

În aceste condiții

$$(1.1.12)\qquad |E[f_n(\mathbf{x})] - f(\mathbf{x})| \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{q}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|\right)\alpha + 0\,(h^{*3})$$

$$(1.1.13)\qquad \mathcal{E}_n^2(\mathbf{x}) < \frac{1}{n}\,\beta\,(\mathbf{x}) + \frac{1}{4}\left(\sum_{i,j=1}^{q}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|\right)^2\alpha^2 + 0\,(h^{*3}),$$

unde $h^* = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant q} h_i$.

Demonstrație. Se observă că

$$\int u_i K(\mathbf{u})\,d\mathbf{u} = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant q.$$

Aplicînd formula lui Taylor funcției f în punctul $\mathbf{x}$ deducem

$$f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{x}) + \sum_i (u_i - x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j}(u_i - x_i)(u_j - x_j)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + 0\,(\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|^3)$$

și dacă înlocuim $f(\mathbf{u})$ în $E[f_n(\mathbf{x})]$, găsim, în urma evaluărilor corespunzătoare, relația (1.1.12).

Pentru a demonstra relația (1.1.13) observăm mai întîi că

$$\frac{1}{n}D^2[K(\mathbf{x} - \mathbf{X})] < \frac{1}{n}\int K^2(\mathbf{x} - \mathbf{u})f(\mathbf{u})\,d\mathbf{u}.$$

Dacă ținem seama de expresia lui $f(\mathbf{u})$ de mai sus și de relația (1.1.12), atunci rezultă (1.1.13) și lema este demonstrată.

Pe baza lemelor precedente se pot construi exemple de funcții K pentru care estimațiile $f_n(\mathbf{x})$ să satisfacă condițiile

$$(1.1.14)\qquad \lim_{n \to \infty} E[f_n(\mathbf{x})] = f(\mathbf{x})\,; \quad \lim_{n \to \infty} \mathcal{E}_n^2(\mathbf{x}) = 0,$$

adică să fie asimptotic nedeplasate și consistente pentru $f(\mathbf{x})$.

Exemplul 1.1. Fie H domeniul considerat în lema 2 și fie

$$(1.1.15)\qquad K(\mathbf{u}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^q h_1 \ldots h_q} & \text{cînd } \mathbf{u} \in H \\ 0 & \text{cînd } \mathbf{u} \notin H \end{cases}$$

o funcție, care după cîte se vede satisface condițiile lemei 2. Se poate constata cu ușurință că

$$\beta = \frac{1}{2^q h_1 \ldots h_q}, \quad \alpha_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \dfrac{1}{3}h_i^3 & i = j. \end{cases}$$

Deci

$$\alpha = \frac{1}{3}h^{*3}, \quad \mathcal{E}_n^2(\mathbf{x}) < \frac{1}{2^q n\, h_1 \ldots h_q} f(\mathbf{x}) + 0\,(h^{*3})$$

de unde rezultă că dacă luăm $h_i = h_i(n)$, $1 \leqslant i \leqslant q$, astfel încît

$$\lim_{n \to \infty} h_n^* = 0, \quad \lim_{n \to \infty} n\, h_1(n) \dots h_q(n) = \infty, \tag{1.1.16}$$

atunci sînt satisfăcute condiţiile (1.1.14).

Relaţiile (1.1.16) sînt satisfăcute cînd

$$h_i = n^{-\alpha_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant q, \quad \alpha^* = \max_{1 \leqslant i \leqslant q} \alpha_i < \frac{1}{q} \tag{1.1.17}$$

iar aceste condiţii au fost puse în evidenţă pe altă cale în [30] şi ele se vor întîlni în § 2.2. Funcţia (1.1.15) este aceeaşi cu cea definită de (1.1.7).

Exemplul 1.2. Fie H domeniul din R^q considerat în lema 2 şi fie

$$K(\mathbf{u}) = \begin{cases} c\left(1 - \dfrac{(u_1 \dots u_q)^2}{a}\right), & a > 0, \quad \mathbf{u} \in H \\ 0 & \quad\quad\quad\; \mathbf{u} \notin H. \end{cases} \tag{1.1.18}$$

Constantele c şi a se pot determina astfel încît să fie satisfăcute condiţiile lemei 2. Se observă că $\alpha_{ij} = 0$, $i \neq j$, iar condiţia $\alpha_{ii} = 0$ ne conduce la

$$a = \frac{1}{3^{q-2} \cdot 5} (h_1 \dots h_q)^2.$$

De asemenea impunînd prima condiţie (1.1.10) deducem

$$c = \frac{9}{2^{q-2} h_1, \dots h_q}.$$

În sfîrşit, se observă că

$$\beta = \frac{Q}{h_1 \dots h_q}; \quad Q = \frac{81}{2^{q+4}} \left[\frac{3^{2q-4}}{5^{q-2}} - \frac{1}{9}\right]$$

şi dacă luăm $h_i = h_i(n)$ astfel încît să fie satisfăcute condiţiile (1.1.16), atunci rezultă de asemenea că $f_n(\mathbf{x})$ definită de (1.1.4′) este o estimaţie asimptotic nedeplasată şi consistentă pentru $f(\mathbf{x})$.

Din lema 2 şi din exemplele precedente remarcăm mai întîi posibilitatea construcţiei unor estimaţii ale densităţii de repartiţie de forma (1.1.4′) cu ajutorul unor funcţii K care au suportul finit pe R^q, suport care se micşorează o dată cu mărirea volumului n al selecţiei. Aceste funcţii depind deci de n, adică sînt de forma $K_n(\mathbf{u})$, sînt integrabile pe orice domeniu, integralele fiind finite şi satisfac condiţia

$$\lim_{n \to \infty} \int_D K_n(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} = \begin{cases} 0 \text{ dacă } \mathbf{0} \notin D, \\ 1 \text{ dacă } \mathbf{0} \in D, \end{cases} \tag{1.1.19}$$

unde D este un domeniu oarecare din R^q.

În paragraful următor se vor construi estimaţii generale pentru $f(\mathbf{x})$, suprimîndu-se condiţia ca suportul lui K_n să fie finit.

§ 1.2. ESTIMAŢII GENERALE ALE DENSITĂŢII DE REPARTIŢIE

Acest paragraf este dedicat studierii sub forma generală a estimaţiilor densităţilor de repartiţie, pe baza observaţiilor din paragraful precedent.

La pct. B din acest paragraf se menţionează o generalizare referitoare la estimarea *densităţii de repartiţie generalizate* în sensul precizat de R. Cristescu şi G. Marinescu în [8]. În sfîrşit la pct. C se prezintă unele discuţii în legătură cu problema estimaţiei densităţii de repartiţie precum şi unele aspecte privind *regularizarea* unor estimaţii statistice.

A. *Definiţia generală a estimaţiilor şi proprietăţile lor.* În această secţiune vom arăta că estimaţiile densităţilor de repartiţie se pot construi cu ajutorul unor funcţii care satisfac condiţia (1.1.19), dar care nu au suportul neapărat mărginit.

DEFINIŢIA 1.3. *Fie* $\{\delta_n\}_{n\in N_+}$ *un şir de funcţii definite pe* R^q, *local integrabile, care satisfac condiţiile* :

a) *Oricare ar fi* n *şi oricare ar fi* $D \subset R^q$, *există o constantă* A *care nu depinde de* n (*dar care depinde eventual de* D) *astfel încît*

$$\int_D |\delta_n(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} < A. \tag{1.2.1}$$

b) *Oricare ar fi* $D \subset R^q$ *şi* $D \ni \mathbf{0}$, ($\mathbf{0}$ *este vectorul nul din* R^q), *avem*

$$\lim_{n\to\infty} \int_D \delta_n(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\overline{D}} |\delta_n(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} = 0 \tag{1.2.2}$$

iar $\delta_n(\mathbf{x}) \to 0$, *cînd* $n \to \infty$, *uniform, pentru orice* $\mathbf{x} \in \overline{D}$. *Şirul de funcţii* $\{\delta_n\}_{n\in N_+}$ *se numeşte în acest caz şir de funcţii* δ-*generator sau şir* δ-*generator*. Din definiţie rezultă că dacă funcţiile δ_n sînt pozitive, atunci relaţiile (1.2.2) sînt de forma (1.1.19). Motivul pentru care s-a adoptat denumirea de şir δ-generator, constă în faptul că şirul de funcţii generalizate regulate, corespunzător şirului $\{\delta_n\}_{n\in N_+}$ converge către funcţia generalizată δ a lui Dirac definită pe spaţiul $\mathcal{D}(R^q)$ (vezi consideraţiile de la pct. B şi [8], cap. II, § 2).

Exemplul 1.3. Fie $K(\mathbf{x})$ o densitate de repartiţie definită pe R^q care satisface condiţiile

$$1^0 \; |K(\mathbf{x})| < \infty, \; \mathbf{x} \in R^q$$

$$2^0 \; \lim_{\|x\|\to\infty} |x_1 \ldots x_q| \cdot |K(\mathbf{x})| = 0.$$

Atunci şirul

$$\delta_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{h_1(n)\ldots h_q(n)} K\left(\frac{x_1}{h_1(n)}, \ldots, \frac{x_q}{h_q(n)}\right) = \frac{1}{h_1(n)\ldots h_q(n)} K\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{h}(n)}\right), \tag{1.2.3}$$

unde

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{h}(n)\| = 0,$$

este un șir δ-generator. Funcția K se numește *funcție pondere* (vezi § 2.2).

Într-adevăr, condiția a) este satisfăcută deoarece oricare ar fi D avem

$$\int_D |\delta_n(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} = \int_{A_n(D)} K(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} < \int_{R^q} K(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = 1,$$

unde A_n este transformarea definită de matricea $A(\mathbf{h}(n)) = \mathrm{diag}\,(h_1(n), \dots, h_q(n))$. Condiția b) se verifică ținînd seama de condiția 2° și de faptul că $K(\mathbf{y})$ este densitate de repartiție.

Vom demonstra acum două proprietăți ale șirurilor δ-generatoare.

LEMA 3. *Fie* $\{\delta_n\}_{n\in N_+}$ *un șir* δ*-generator și pentru* $r \geqslant 2$ *să notăm* $a_n = a_n(r) = \int |\delta_n(\mathbf{x})|^r\,d\mathbf{x} < \infty$, *cînd integrala există. Atunci*

$a^0)$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty.$

$b^0)$ Șirul

$$\delta_n^*(\mathbf{x}) = \frac{|\delta_n(\mathbf{x})|^r}{a_n}$$

este un șir δ*-generator.*

Demonstrație. $a^0)$ Fie $\{D_n\}_{n\in N_+}$ un șir de domenii în R^q, astfel încît oricare ar fi n, $D_n \ni \mathbf{0}$ și

$$\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0, \quad \nu(D_n) = \int_{D_n} d\mathbf{x}.$$

Dacă ținem seama de inegalitatea lui Hölder avem

$$\left|\int_{D_n} \delta_n(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\right| \leqslant \int_{D_n} |\delta_n(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \leqslant [\nu(D_n)]^{\frac{1}{s}} \left[\int |\delta_n(\mathbf{x})|^r\,d\mathbf{x}\right]^{\frac{1}{r}},$$

unde $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} = 1$. De aici rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} [\nu(D_n)]^{\frac{1}{s}} \left[\int |\delta_n(\mathbf{x})|^r\,d\mathbf{x}\right]^{\frac{1}{r}} \geqslant \lim_{n\to\infty} \left|\int \delta_n(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\right| = 1$$

iar din ultima relație rezultă $a^0)$.

$b^0)$ Fie D un domeniu fixat oarecare; ținînd seama de faptul că $\int_D |\delta_n(\mathbf{x})|^r\,d\mathbf{x} \leqslant \int |\delta_n(\mathbf{x})|^r\,d\mathbf{x}$, rezultă

$$\int_D \delta_n^*(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \leqslant 1.$$

Să considerăm acum un domeniu $D \ni \mathbf{0}$ şi fie $\overline{D}$ complementara lui. Atunci se vede că

$$(1.2.4) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\overline{D}\cup D} \delta_n^*(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 1\,; \quad a_n = \int_D |\,\delta_n(\mathbf{x})\,|^r\, d\mathbf{x} + \int_{\overline{D}} |\,\delta_n(\mathbf{x})\,|^r\, d\mathbf{x}.$$

Ultima integrală din ultima egalitate este finită şi satisface relaţia

$$\int_{\overline{D}} |\,\delta_n(\mathbf{x})\,|^r\, d\mathbf{x} \leqslant (\sup_{x\in\overline{D}}\,|\,\delta_n(\mathbf{x})\,|\,)^{r-1} \int |\,\delta_n(\mathbf{x})\,|^r\, d\mathbf{x}$$

de unde, conform condiţiei b) a definiţiei 1.3, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\overline{D}} |\,\delta_n(\mathbf{x})\,|^r\, d\mathbf{x} = 0.$$

Ţinînd seama de relaţiile (1.2.4) se deduce că

$$\lim_{n\to\infty} \int_D \delta_n^*(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 1$$

şi deci $\{\delta_n^*\}_{n\in N_+}$ este un şir δ-generator. Lema este demonstrată.

LEMA 4. *Fie* $\{\delta_n^{(i)}\}_{n\in N_+}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, *un număr de* k *şiruri* δ*-generatoare şi fie constantele* c_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, *astfel încît*

$$(1.2.5) \qquad \sum_{i=1}^{k} c_i = 1.$$

Atunci şirul de funcţii

$$(1.2.6) \qquad \delta_n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} c_i\, \delta_n^{(i)}(\mathbf{x})$$

este un şir δ*-generator.*

Demonstraţie. Va trebui să verificăm condiţiile definiţiei 1.3.

a) Pentru şirul $\delta_n^{(i)}$, oricare ar fi n şi $D \subset R^q$, există o constantă A_i care nu depinde de n astfel încît să avem satisfăcută condiţia

$$\int_D |\,\delta_n^{(i)}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} < A_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant k,$$

Deci constanta $A = \sum_{i=1}^{k} |\,c_i\,|\, A_i$ satisface condiţia

$$\int_D |\,\delta_n(\mathbf{x})\,|\, d\mathbf{x} < A = \sum_{i=1}^{k} c_i A_i,$$

unde $\delta_n(\mathbf{x})$ este definit de (1.2.6).

b) Deoarece $\delta_n^{(i)}(\mathbf{x}) \to 0$ uniform cînd $n \to \infty$, rezultă că $\delta_n(\mathbf{x}) \to 0$ uniform cînd $n \to \infty$. În plus

$$\lim_{n\to\infty} \int_D \delta_n(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} c_i \int_D \delta_n^{(i)}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } \mathbf{0} \in D \\ 0 \text{ dacă } \mathbf{0} \in \overline{D} \end{cases}$$

şi lema este demonstrată. Această lemă va fi utilizată la pct. C_1 pentru construirea estimaţiei densităţii de repartiţie cunoscînd valorile *estimaţiei funcţiei de repartiţie în k puncte.*

Cu ajutorul noţiunii de şir δ-generator se poate defini estimaţia densităţii de repartiţie. Definiţia este sugerată de relaţia (1.1.4′) şi de exemplul 1.3.

DEFINIŢIA 1.4. *Fiind dată selecţia întîmplătoare* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ *efectuată asupra vectorului aleator q-dimensional* X *a cărui densitate de repartiţie este* $f(\mathrm{x})$, *se numeşte estimaţie a lui f în punctul* x *statistica*

$$f_n(\mathrm{x}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_n(\mathrm{x} - \mathrm{X}_j), \tag{1.2.7}$$

unde $\{\delta_n\}$ *este un şir δ-generator.*

Pentru studierea proprietăţilor *estimaţiei generale* a densităţii de repartiţie definită de (1.2.7), joacă un rol fundamental următoarea teoremă :

TEOREMA 1. *Dacă* $\{\delta_n(\mathrm{x})\}_{n \in N_+}$ *este un şir δ-generator şi dacă funcţia g este integrabilă pe* R^q, *atunci în orice punct* x *de continuitate a lui g avem*

$$\lim_{n \to \infty} g_n(\mathrm{x}) = g(\mathrm{x}),$$

unde

$$g_n(\mathrm{x}) = \int \delta_n(\mathrm{x} - \mathrm{y}) g(\mathrm{y})\, d\mathrm{y}. \tag{1.2.8}$$

Demonstraţie. Fie $r > 0$ şi să dividem R^q în două părţi

$$R^q = \{\|\mathrm{x}\| \leqslant r\} \cup \{\|\mathrm{x}\| > r\}.$$

Atunci

$$g(\mathrm{x}) - \int \delta_n(\mathrm{x} - \mathrm{y}) g(\mathrm{y})\, d\mathrm{y} = g(\mathrm{x}) - \int \delta_n(\mathrm{x} - \mathrm{y}) g(\mathrm{y})\, d\mathrm{y} + $$

$$+ \int_{\|\mathrm{y}\| \leqslant r} g(\mathrm{x}) \delta_n(\mathrm{y})\, d\mathrm{y} - \int_{\|\mathrm{y}\| \leqslant r} g(\mathrm{x}) \delta_n(\mathrm{y})\, d\mathrm{y}.$$

De aici se deduce că

$$\left| g(\mathrm{x}) - \int \delta_n(\mathrm{x} - \mathrm{y}) g(\mathrm{y})\, d\mathrm{y} \right| \leqslant g(\mathrm{x}) \left| 1 - \int_{\|\mathrm{y}\| \leqslant r} \delta_n(\mathrm{y})\, d\mathrm{y} \right| +$$

$$+ \int_{\|\mathrm{y}\| \leqslant r} |g(\mathrm{x} - \mathrm{y}) - g(\mathrm{x})|\, |\delta_n(\mathrm{y})|\, d\mathrm{y} + \left| \int_{\|\mathrm{y}\| > r} g(\mathrm{x} - \mathrm{y}) \delta_n(\mathrm{y})\, d\mathrm{y} \right|.$$

Din cauza primei relaţii (1.2.2) rezultă că primul termen din membrul doi al ultimei inegalităţi tinde la zero cînd $n \to \infty$. Al doilea termen, din cauza continuităţii lui g, poate fi făcut oricît de mic prin alegerea convenabilă a lui r. În sfîrşit, termenul al treilea este majorat de

$$\sup_{\|\mathrm{y}\| > r} |\delta_n(\mathrm{y})| \cdot \left| \int_{\|\mathrm{y}\| > r} g(\mathrm{x} - \mathrm{y})\, d\mathrm{y} \right|$$

şi deci el tinde la zero cînd $n \to \infty$. Teorema este demonstrată.

CONSECINȚĂ. *Dacă* $\{\delta_n(\mathrm{x})\}$ *este un șir* δ*-generator iar densitatea de repartiție* f *este continuă în* x, *atunci statistica* $f_n(\mathrm{x})$ *definită de* (1.2.7) *este o estimație asimptotic nedeplasată a lui* $f(\mathrm{x})$.

Într-adevăr, se observă că $f_n(\mathrm{x})$ este de forma (1.1.4'), deci lema 1 poate fi aplicată în acest caz și din teorema 1 rezultă consecința.

TEOREMA 2. *Dacă* $\{\delta_n(\mathrm{x})\}$ *este un șir* δ*-generator astfel încît* $a_n = \int \delta_n^2(\mathrm{x})\,d\mathrm{x} < \infty$ *există, dacă densitatea teoretică de repartiție* f *este continuă în* x *și dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0, \tag{1.2.9}$$

atunci $f_n(\mathrm{x})$ *definită de* (1.2.7) *este o estimație consistentă pentru* $f(\mathrm{x})$.

Demonstrație. Conform lemelor 1 și 3 rezultă că

$$D^2[f_n(\mathrm{x})] = \frac{1}{n}\left\{\int \delta_n^2(\mathrm{x}-\mathrm{y})f(\mathrm{y})\,d\mathrm{y} - \left[\int \delta_n(\mathrm{x}-\mathrm{y})f(\mathrm{y})\,d\mathrm{y}\right]^2\right\} =$$

$$= \frac{a_n}{n}\int \delta_n^*(\mathrm{x}-\mathrm{y})f(\mathrm{y})\,d\mathrm{y} - \frac{1}{n}\left[\int \delta_n(\mathrm{x}-\mathrm{y})f(\mathrm{y})\,d\mathrm{y}\right]^2,$$

unde $\delta_n^*(\mathrm{x})$ este șirul δ-generator construit în lema 3 cînd $r = 2$. Datorită ipotezei (1.2.9) avem

$$\lim_{n\to\infty} D^2[f_n(\mathrm{x})] = 0$$

Și dacă ținem seama de teorema 1 și de (1.1.8''), atunci rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_n^2(\mathrm{x}) = 0.$$

Ultima relație spune că eroarea pătratică a estimației tinde la zero cînd $n \to \infty$, deci $f_n(\mathrm{x})$ converge în probabilitate către $f(\mathrm{x})$, adică are loc proprietatea de consistență.

Teorema este demonstrată. Din demonstrație rezultă următoarele egalități asimptotice echivalente:

$$\frac{n}{a_n} D^2[f_n(\mathrm{x})] \sim \int \delta_n^*(\mathrm{x}-\mathrm{y})f(\mathrm{y})\,d\mathrm{y}$$

$$\frac{1}{a_n} D^2[\delta_n(\mathrm{x}-\mathrm{X})] \sim \int \delta_n^*(\mathrm{x}-\mathrm{y})f(\mathrm{y})\,d\mathrm{y}$$

$$D^2[\delta_n(\mathrm{x}-\mathrm{X})] \sim f(x)\int \delta_n^2(\mathrm{y})\,d\mathrm{y} = f(x)\,a_n.$$

Teorema 2 se poate enunța și sub altă formă mai generală și anume:

TEOREMA 2′. *Dacă* $\{A_n\}_{n\in N_+}$ *este un șir de constante care tinde către zero cînd* $n \to \infty$ *astfel încît* $\{A_n \delta_n(\mathbf{x})\}_{n\in N_+}$ *este un șir δ-generator, dacă* f *este continuă în* $\mathbf{x}$ *și dacă*

$$\lim_{n\to\infty} nA_n = \infty, \tag{1.2.10}$$

atunci $f_n(\mathbf{x})$ *este o estimație consistentă pentru* $f(\mathbf{x})$.

Demonstrație. Procedînd ca în teorema 2 se găsește

$$D^2[f(\mathbf{x})] = \frac{1}{nA_n}\int A_n\delta_n^2(\mathbf{x}-\mathbf{y})f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} - \frac{1}{n}\left[\int \delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\right]^2$$

și din ipotezele teoremei rezultă

$$\lim_{n\to\infty} n\,A_n D^2[f_n(\mathbf{x})] = f(\mathbf{x}),$$

iar ultima relație demonstrează teorema.

O teoremă asemănătoare teoremei 2 se găsește în [36]. În continuare vom demonstra o proprietate de *asimptotic normalitate* a estimației (1.2.7).

TEOREMA 3. *Fie* $\{\delta_n\}_{n\in N_+}$ *un șir δ-generator, astfel încît* $a_n = \int \delta_n^2(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} < \infty$ *și pentru orice* $\eta > 0$, $\gamma_n = \int |\,\delta_n(\mathbf{x})\,|^{2+\eta}\,d\mathbf{x}$ *există și satisface condiția*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{n^{\frac{n}{2}} a_n^{1+\frac{\eta}{2}}} = 0. \tag{1.2.11}$$

Fie $\mathbf{x}$ *un punct de continuitate al densității de repartiție* f. *Atunci repartiția variabilei aleatoare* :

$$R_n = \frac{f_n(\mathbf{x}) - E[f_n(\mathbf{x})]}{\{D^2[f_n(\mathbf{x})]\}^{\frac{1}{2}}}$$

tinde asimptotic către repartiția normală $N(0,1)$.

În acest caz se mai spune că $f_n(\mathbf{x})$ este o *estimație asimptotic normală pentru* $f(\mathbf{x})$.

Demonstrație. Vom arăta că sîntem în cazul teoremei limită centrale ([15], § 20). Mai întîi observăm că

$$R_n = \frac{S_n}{\{D^2[S_n]\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{S_n}{n^{\frac{1}{2}}\sigma_n}\,; \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_{n,i},$$

unde $Z_{n,i}$ sînt variabile aleatoare identic repartizate ca variabile

$$Z_n = \delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X}) - \mu_n$$

iar

$$\mu_n = E[\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})],\ \sigma_n^2 = D^2[\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})].$$

Se ştie ([15], § 15, pct. 15 1.A′) că deoarece vectorii $\mathbf{X}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sînt independenţi stohastic, variabilele aleatoare $Z_{n,i}$ sînt de asemenea independente. Conform [15], (§20, pct. 20.1), pentru a arăta că R_n are asimptotic o repartiţie normală $N(0,1)$ este suficient să verificăm condiţia

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} E\left[\left|\frac{Z_{n,i}}{\{D^2[S_n]\}^{\frac{1}{2}}}\right|^{2+\eta}\right] = 0 \tag{1.2.12}$$

pentru orice $\eta > 0$. Ultima condiţie se mai scrie

$$\lim_{n\to\infty} nE\left[\left|\frac{\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X}) - E[\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})]}{D^2[\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})]}\right|^{2+\eta}\right] = 0. \tag{1.2.12′}$$

Se ştie ([4], § 5, pct. 5) că

$$E[|U+V|^r] \leqslant 2^{r-1}E[|U|^r] + 2^{r-1}E[|V|^r],\ r > 1$$

de unde se deduce

$$nE\left[\left|\frac{\delta_n(x-X) - E[\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})]}{n^{\frac{1}{2}}D^2[\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})]}\right|^{2+\eta}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{1+\eta}}{n^{\frac{\eta}{2}}\{D^2[\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})]\}^{1+\frac{\eta}{2}}}\{E[|\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})|^{2+\eta}] + |E[\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})]|^{2+\eta}\}.$$

Considerînd şirurile δ-generatoare (lema 3):

$$\delta_n^{**}(\mathbf{x}) = \frac{|\delta_n(\mathbf{x})|^{2+\eta}}{\gamma_n};\quad \delta_n^{*}(\mathbf{x}) = \frac{|\delta_n(\mathbf{x})|^{2}}{a_n}$$

şi notînd

$$\alpha_n = \frac{E[|\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})|^{2+\eta}]}{n^{\frac{\eta}{2}}\{D^2[\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})]\}^{1+\frac{\eta}{2}}} = \frac{\gamma_n I_n^{**}}{n^{\frac{\eta}{2}}\{a_n^{1+\eta}I_n^{*} - I_n\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\beta_n = \frac{|E[\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})]|^{2+\eta}}{n^{\frac{\eta}{2}}\{D^2[\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})]\}^{1+\frac{\eta}{2}}} = \frac{I_n^{2+\eta}}{n^{\frac{\eta}{2}}\{a_n^{1+\eta}I_n^{*} - I_n\}},$$

unde integralele

$$I_n = \int \delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y};\ I_n^{*} = \int \delta_n^{*}(\mathbf{x}-\mathbf{y})f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}:\ I_n^{**} =$$

$$= \int \delta_n^{**}(\mathbf{x}-\mathbf{y})f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}$$

sînt toate finite, se deduce conform ipotezelor că

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$$

adică condiţia (1.2.12′) este verificată. Teorema este deci demonstrată.

Vom da în continuare o evaluare a rapidității asimptotic normalității estimației $f_n(\mathbf{x})$. Mai precis, vom găsi o evaluare a diferenței

$$d_n = \sup_z \left| P(R_n < z) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right| . \tag{1.2.13)}$$

Pentru aceasta vom folosi un rezultat al lui Melvin Katz [14] pe care îl enunțăm în lema următoare :

Lema 5. Fie $\{U_n\}_{n \in N_+}$ *un șir de v.a. independente și identic repartizate ca v.a.* U cu $E[U] = 0$, $D^2[U] = 1$.

Presupunem că funcția de repartiție $F_n(z) = P\left(\frac{\Sigma U_i}{n} < z\right)$ *satisface condiția*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Fie g *o funcție definită pe* R *cu valori reale, nedescrescătoare pe* $[0, \infty)$, *nenegativă, pară și satisfăcînd condițiile*

1° $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

2° $\frac{x}{g(x)}$ *este definită pentru orice* x *și nedescrescătoare pe* $[0, \infty)$.

Dacă v.a. U *satisface condiția*

$$E[U^2 g(U)] < \infty, \tag{1.2.14}$$

atunci d_n *definit de* (1.2.13) *satisface condiția*

$$d_n \leqslant c \frac{E[U^2 g(U)]}{g(\sqrt{n})}, \tag{1.2.13'}$$

unde c *este o constantă absolută.*

În [14] sînt precizate unele detalii în legătură cu valoarea constantei c. Un exemplu de funcție g care satisface condițiile lemei 5 este funcția $g(x) = |x|$, iar în acest caz condiția (1.2.14) revine la $E[|U|^3] < \infty$. Constanta c în acest caz a fost determinată independent de Berry [2] și Essen [9].

Pentru determinarea rapidității asimptotic normalității estimației $f_n(\mathbf{x})$ definită de (1.2.7), observăm mai întîi că

$$R_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} U_i}{\sqrt{n}}, \tag{1.2.15}$$

unde U_i sînt variabilele aleatoare independente și identic repartizate ca v.a.

$$U = \frac{\delta_n(\mathbf{x} - \mathbf{X}) - \mu_n}{\sigma_n} \tag{1.2.15'}$$

iar μ_n și σ_n au fost definite cu ocazia demonstrației teoremei 3.

Ca o consecinţă a lemei 5, rezultă

Teorema 3′. *Dacă g este o funcţie care satisface condiţiile lemei 5 şi dacă*

$$(1.2.16) \qquad \int \delta_n^2(\mathrm{x}-\mathrm{y})\, g\left(\frac{\delta_n(\mathrm{x}-\mathrm{y})}{\sigma_n}\right) f(\mathrm{y})\,\mathrm{dy} < \infty,$$

atunci

$$d_n \leqslant c\, \frac{B}{g(\sqrt{n})}.$$

unde

$$B = \frac{\int \delta^2(\mathrm{x}-\mathrm{y})\, g\left(\frac{\delta_n(\mathrm{x}-\mathrm{y})}{L_n(\mathrm{x})}\right) f(\mathrm{y})\mathrm{dy}}{L_n^2(\mathrm{x})}\,; \quad L_n(\mathrm{x}) = \left[f_n(\mathrm{x}) \int \delta_n^2(\mathrm{y})\mathrm{dy}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstraţia acestei teoreme se face aplicînd lema 5 lui R_n definit de (1.2.15) cu condiţia (1.2.16) şi ţinînd seama de teorema 2.

În cazul particular cînd $g(x) = |x|$, dacă se presupune că

$$\int |\, \delta_n(\mathrm{y})\,|^3\, \mathrm{dy} < \infty,$$

atunci rezultă

$$d \leqslant c\frac{B}{\sqrt{n}}\,; \quad B = \frac{1}{[f(\mathrm{x})]^{\frac{1}{2}}}\, \frac{\int |\, \delta_n(\mathrm{y})\,|^3\, \mathrm{dy}}{\left[\int \delta_n^2(\mathrm{y})\,\mathrm{dy}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

şi deci în acest caz rapiditatea asimptotic normalităţii este de ordinul lui $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Vom demonstra în continuare încă o proprietate de asimptotic normalitate. Pentru aceasta, vom demonstra mai întîi o lemă folosind unele rezultate ale lui Cramer şi Wold [6], referitoare la funcţiile de repartiţie multidimensionale.

Lema 6. *Fie* $\{\mathbf{X}^{(n)}\}_{n\in N_+}$ *un şir de vectori aleatori q-dimensionali fiecare avînd componentele cu momente de primele două ordine finite. Condiţia suficientă ca* $\mathbf{X}^{(n)}$ *să aibă o repartiţie asimptotic normală q-dimensională este ca oricare ar fi sistemul de constante* $t_1, \ldots, t_q$, *şirul de variabile aleatoare :*

$$(1.2.17) \qquad \xi^{(n)} = \sum_{j=1}^{q} t_j X_j^{(n)}, \quad \mathbf{X}^{(n)} = (X_1^{(n)}, \ldots, X_q^{(n)})'$$

să aibă o repartiţie asimptotic normală unidimensională.

Demonstrație. Mai întîi, în conformitate cu [6] vom asocia fiecărei funcții de repartiție multidimensională o funcție de repartiție unidimensională. Fie $\mathbf{t} \in R^q$ și să considerăm pentru fiecare $z \in R$, mulțimea

$$A_{t,z} = \{\mathbf{x};, \mathbf{t}'\mathbf{x} < z\}.$$

Fiind dat vectorul aleator $\mathbf{X}$, vom nota

$$G_{\mathbf{t}}(z) = P(\mathbf{X} \in A_{\mathbf{t},z}). \tag{1.2.18}$$

Funcția de variabila reală z definită de (1.2.18) este o funcție de repartiție definită pe R. Dacă notăm cu $\varphi(\mathbf{t})$ funcția caracteristică a V.a. $\mathbf{X}$, atunci se constată că funcția caracteristică corespunzătoare funcției de repartiție (1.2.18) este $\varphi(u\mathbf{t})$, $u \in R$, ($\mathbf{t}$ este fixat). De asemenea rezultă că

$$\varphi(\mathbf{t}) = [\varphi(u\mathbf{t})]_{u=1}, \; \mathbf{t} \in R^q, \tag{1.2.19}$$

Să presupunem acum că $\xi^{(n)}$ definit de (1.2.17) are o repartiție asimptotic normală unidimensională. Funcția caracteristică a variabilei aleatoare $\xi^{(n)}$ este

$$\varphi_n(u) = E(e^{iu\sum\limits_{j=1}^{q} t_j X_j^{(n)}})$$

Prin ipoteză, funcția caracteristică $\varphi_n(u)$ a lui $\xi^{(n)}$ devine cînd $n \to \infty$,

$$\varphi(u\mathbf{t}) = e^{iu\,\varphi_1(\mathbf{t}) - \frac{u^2}{2}\varphi_2(\mathbf{t})} \qquad u \in R;\; \mathbf{t} \in R^q$$

Cum $\varphi_1(\mathbf{t})$ este valoarea medie asimptotică a v.a. $\xi^{(n)}$, rezultă că există limitele

$$\varphi_1(\mathbf{t}) = \lim_{n\to\infty} \sum_j t_j E[X_j^{(n)}] = \sum_j t_j \mu_j = \mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\mu} = \lim_{n\to\infty} E[\mathbf{X}^{(n)}]. \tag{1.2.20}$$

Funcția $\varphi_2(\mathbf{t})$ este dispersia asimptotică a v.a $\xi^{(n)}$ și deci există limita

$$0 < \varphi_2(\mathbf{t}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j,k} t_j t_k \operatorname{Cov}(X_j^{(n)}, X_k^{(n)}) = \sum_{j,k} t_j t_k \sigma_{jk} = \mathbf{t}' \Sigma t,$$

unde

$$\sigma_{jk} = \lim \operatorname{Cov}(X_j^{(n)}, X_k^{(n)}),\; \Sigma = (\sigma_{jk})_{1 \leqslant j,k \leqslant q}. \tag{1.2.21}$$

Deci, conform relației (1.2.19) rezultă că funcția caracteristică asimptotică corespunzătoare șirului de vectori aleatori $\mathbf{X}^{(n)}$ este

$$\varphi(\mathbf{t}) = [\varphi(u\mathbf{t})]_{u=1} = e^{i\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu} = \mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t}}. \tag{1.2.22}$$

Dar această funcție caracteristică corespunde repartiției normale q-dimensionale $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ și lema este demonstrată.

Lema nu se schimbă dacă în loc de „*orice sistem de constante* $t_1, \ldots, t_q$" luăm, „*orice sistem de șiruri* $t_1^{(n)}, \ldots, t_q^{(n)}$ *care au limită*".

Folosind lema 6 vom demonstra acum:

TEOREMA 4. *Dacă* $\mathbf{x}$ *și* $\mathbf{y}$ *sînt două puncte de continuitate ale lui* f *astfel încît* $f(\mathbf{x}) \neq 0$ *și* $f(\mathbf{y}) \neq 0$ *și dacă șirul* $\{\delta_n\}_{n \in N+}$ *satisface condi-*

țiile (1.2.9) *și* (1.2.11), *atunci vectorul bidimensional* $\xi_n = ((f_n(\mathbf{x}), f_n(\mathbf{y}))'$ *este asimptotic normal avînd componentele independente în sensul că vectorul aleator* $\zeta_n = (R_n(\mathbf{x}), R_n(\mathbf{y}))'$, ($R_n$ *are semnificația din teorema 3*), *are asimptotic repartiția normală bidimensională* $N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, *unde* **I** *este matricea unitate* 2×2.

Demonstrație. Conform lemei precedente este suficient să demonstrăm că pentru orice pereche de numere reale A și B, variabila aleatoare $\rho_n = AR_n(\mathbf{x}) + BR_n(\mathbf{y})$ este asimptotic normală. Dar, conform teoremei 3, este suficient să verificăm condiția (1.2.12), unde

$$Z_n = \frac{A\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X}) + B\delta_n(\mathbf{y}-\mathbf{X}) - [A\mu_n(\mathbf{x}) + B\mu_n(\mathbf{y})]}{n^{\frac{1}{2}}\{D^2[A\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X}) + B\delta_n(\mathbf{y}-\mathbf{X})]\}^{\frac{1}{2}}}, \quad \mu_n(\mathbf{x}) = E[\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})].$$

Condiția (1.2.12) se verifică ușor de către variabila Z_n precedentă dacă se are în vedere faptul că conform teoremei 3 ea este verificată de variabilele aleatoare

$$Z_n(\mathbf{x}) = \frac{\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X}) - \mu_n(\mathbf{x})}{n^{\frac{1}{2}}\{D^2[\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})]\}^{\frac{1}{2}}}; \quad Z_n(\mathbf{y}) = \frac{\delta_n(\mathbf{y}-\mathbf{X}) - \mu_n(\mathbf{y})}{\{D^2[\delta_n(\mathbf{y}-\mathbf{X})]\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Pentru a completa demonstrația rămîne deci să arătăm că $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{Cov}(f_n(\mathbf{x}), f_n(\mathbf{y})) = 0$.

Într-adevăr, mai întîi se observă că

$$\operatorname{Cov}(f_n(\mathbf{x}), f_n(\mathbf{y})) = \frac{1}{n} \operatorname{Cov}(\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X}), \delta_n(\mathbf{y}-\mathbf{X})).$$

Dar din inegalitatea lui Schwarz și din teorema 2 rezultă că

$$|\operatorname{Cov}(\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X}), \delta_n(\mathbf{y}-\mathbf{X}))| \leqslant \{D^2[\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})]\, D^2[\delta_n(\mathbf{y}-\mathbf{X})]\}^{\frac{1}{2}} =$$
$$= a_n\left\{\int \delta_n^*(\mathbf{x}-\mathbf{z})f(\mathbf{z})d\mathbf{z} \cdot \int \delta_n^*(\mathbf{y}-\mathbf{z})f(\mathbf{z})\,d\mathbf{z}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ținînd seama de relația (1.2.9) și de relațiile precedente se deduce că $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{Cov}(f_n(\mathbf{x}), f_n(\mathbf{y})) = 0$ și deci teorema este demonstrată.

În concluzie această importantă teoremă spune că sistemul de variabile aleatoare $\{f_n(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in R^q\}$, pentru n suficient de mare, este un *sistem gaussian*.

La acest pct. al § 1.2 am demonstrat deci că estimația densității de repartiție definită de formula (1.2.7) cu ajutorul unui șir δ-generator, are o serie întreagă de proprietăți importante din punct de vedere statistic și anume este asimptotic nedeplasată, este consistentă și asimptotic normală.

După cîte s-a observat, aceste proprietăți au loc *punctual*, pentru fiecare punct $\mathbf{x}$ de continuitate al densității teoretice de repartiție f. Așa cum se va vedea în teorema 20 (§ 3.2) în anumite condiții are loc proprietatea de *asimptotic consistență* care atrage după sine *uniform* *asimptotic normalitatea.* Aceste proprietăți care au loc *uniform* în raport cu x au evident o deosebită importanță practică.

Procedeul de construire a estimațiilor, pus în evidență la sfîrșitul paragrafului precedent și studiat în această primă parte a paragrafului, este de fapt un procedeu de *regularizare* a unor estimații. Observînd că *problema regularizării* este intim legată de aparatul teoriei distribuțiilor, vom prezenta la punctul care urmează construcția estimației *densității de repartiție generalizate.*

B. *Estimația densității generalizate.* Din construcția formală a estimației densității de repartiție generalizate, vom deduce ca un caz particular teoria prezentată la pct. A al acestui paragraf.

Pentru a realiza această construcție vom utiliza unele proprietăți ale distribuțiilor scalare ([8], cap. II, VI și [11], cap. II) Se vor folosi notațiile din [8].

Ne vom mărgini la distribuții scalare, adică la funcționale liniare și continue definite pe spațiul $\mathcal{D} = \mathcal{D}(R^q)$ (al funcțiilor indefinit derivabile și cu suport compact definite pe R^q) cu valori în mulțimea numerelor complexe. Vom reproduce mai întîi următoarele definiții din [8], cap. VI :

DEFINIȚIA 1.5. *Fie* X *un* V.a *și* $F(\mathrm{x})$ *funcția sa de repartiție. Se numește funcție de repartiție generalizată, distribuția scalară* F *definită de formula*

$$\langle \varphi, F \rangle = \int \varphi(\mathrm{t}) F(\mathrm{t})\, \mathrm{dt}, \quad \varphi \in \mathcal{D}, \tag{1.2.23}$$

integrala fiind extinsă la întreg spațiul R^q.

DEFINIȚIA 1.6. *Se numește densitate de repartiție generalizată distribuția scalară f definită de formula*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int \varphi(\mathrm{t})\, \mathrm{d}F(\mathrm{t}) \tag{1.2.24}$$

integrala Stieltjes multidimensională fiind extinsă la întreg spațiul R^q.

Integrala (1.2.23) are sens întotdeauna deoarece $F(\mathrm{x})$ este local integrabilă pe R^q. În plus din (1.2.24) rezultă că densitatea de repartiție generalizată există întotdeauna; deci problema estimației densității de repartiție generalizate prezintă interes și din acest punct de vedere.

Să remarcăm acum faptul că funcția de repartiție generalizată este o distribuție regulată. Această distribuție determină funcția de repartiție în afară de o mulțime de măsură nulă. Dacă funcția de repartiție $F(\mathrm{x})$ este continuă, atunci ea este univoc determinată în clasa funcțiilor continue de către distribuția F. Comentarii asemănătoare se pot face și cu privire la legătura dintre densitatea de repartiție generalizată și densitatea de repartiție cînd aceasta din urmă există; în acest caz avem

$$\langle \varphi, f \rangle = \int \varphi(\mathrm{t})\, f(\mathrm{t})\, \mathrm{dt}. \tag{1.2.24'}$$

Se poate demonstra cu ușurință următorul rezultat :

LEMA 7. *Densitatea de repartiție generalizată este definită de relația*

$$\langle \varphi, f \rangle = \left\langle \varphi, \frac{\partial^q F}{\partial t_1 \ldots \partial t_q} \right\rangle, \tag{1.2.25}$$

unde derivarea se face în sensul teoriei distribuțiilor.

Demonstrația lemei se face cu ușurință dacă ținem seama de definiția derivatei unei distribuții ([8], cap. II, § 2) și efectuăm apoi integrări prin părți succesive.

Această lemă justifică de fapt introducerea noțiunii de densitate de repartiție generalizată și cu ajutorul ei vom defini și estimația densității generalizate.

Vom defini mai întîi estimația funcției de repartiție generalizate. Pentru aceasta vom observa că, conform definiției 1.3 (formula (1.1.1)), estimația funcției de repartiție în punctul $\mathbf{x}$ se poate scrie sub forma

$$F_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \theta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_j), \tag{1.2.26}$$

unde

$$\theta(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0} \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \tag{1.2.27}$$

este funcția lui Heaviside definită pe R^q.

Conform definiției 1.5, rezultă

DEFINIȚIA 1.7. *Estimația funcției de repartiție generalizată este dată de formula*

$$\langle \varphi, F_n \rangle = \int \varphi(\mathbf{t}) F_n(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}. \tag{1.2.28}$$

Să notăm cu θ distribuția scalară definită de funcția lui Heaviside $\theta(\mathbf{x})$ dată de (1.2.27); evident, distribuția $\theta_{\mathbf{X}}$ definită de funcția $\theta(\mathbf{x}-\mathbf{X})$ este o distribuție aleatoare. Dacă în (1.2.28) ținem seama de (1.2.26), deducem cu ușurință că *estimația funcției de repartiție generalizată* este definită de formula

$$F_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \theta_{\mathbf{X}_j}, \tag{1.2.28'}$$

unde $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ este selecția considerată.

În mod asemănător, din definiția 1.6 rezultă:

DEFINIȚIA 1.8. *Estimația densității de repartiție generalizate este definită de formula*

$$\langle \varphi, f_n \rangle = \int \varphi(\mathbf{t})\, dF_n(\mathbf{t}), \tag{1.2.29}$$

unde $F_n(\mathbf{t})$ este estimația funcției de repartiție.

Evident, estimația densității de repartiție generalizată f_n nu este o distribuție scalară regulată, adică o distribuție generată de o funcție.

Din această cauză studiul proprietăţilor acestei estimaţii nu se poate face direct, cu mijloacele analizei clasice, ci trebuie folosite mijloace specifice teoriei distribuţiilor. Vom preciza mai întîi o anumită proprietate a distribuţiei scalare f_n.

Conform lemei 7, distribuţia f_n este dată de formula

$$f_n = \frac{\partial^q F_n}{\partial t_1 \ldots \partial t_q}, \tag{1.2.30}$$

unde F_n este estimaţia funcţiei de repartiţie generalizate.

Se poate însă arăta cu uşurinţă că [2])

$$\frac{\partial^q \theta}{\partial t_1 \ldots \partial t_q} = \delta, \tag{1.2.31}$$

unde δ este distribuţia lui Dirac, definită de relaţia

$$\langle \varphi, \delta \rangle = \varphi(\mathbf{0}).$$

Evident, dacă în formula (1.2.31) punem $\theta = \theta_{\mathbf{x}}$, atunci în membrul doi apare distribuţia scalară $\delta_{\mathbf{x}}$. În consecinţă, ţinînd seama de (1.2.28') *se deduce că estimaţia densităţii de repartiţie generalizate este definită de relaţia*

$$f_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{\mathbf{x}_j}. \tag{1.2.30'}$$

Se observă că distribuţia f_n are proprietatea că este concentrată în n puncte aleatoare.

Pentru a preciza unele proprietăţi ale estimaţiilor f_n şi F_n, fără a părăsi cadrul teoriei distribuţiilor, este necesar să extindem mai întîi *noţiunea de valoare medie*. Vom extinde această noţiune bazîndu-ne pe faptul cunoscut, folosit la pct. A că dacă **X** este un V.a. a cărui densitate de repartiţie este $f(\mathbf{x})$ şi dacă $g(\mathbf{x})$ este o funcţie integrabilă pe R^q, atunci

$$E\,[g(\mathbf{x} - \mathbf{X})] = \int g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y} = (g \ast f)(\mathbf{x}) \tag{1.2.32}$$

adică valoarea medie a v.a. $g(\mathbf{x} - \mathbf{X})$ este dată de convoluţia funcţiei g cu densitatea de repartiţie f.

Dacă **X** este un V.a. şi $g(\mathbf{x})$ este o funcţie măsurabilă astfel încît distribuţia f poate fi extinsă asupra ei, adică ([8], cap. VI) dacă are sens

$$\langle g, f \rangle = \int g(\mathbf{t})\, \mathrm{d}F(\mathbf{t}) = E\,[g(\mathbf{X})], \tag{1.2.33}$$

atunci numărul $E\,[g(\mathbf{X})]$ se numeşte valoare medie a v.a. $g(\mathbf{X})$. Distribuţia scalară definită de constanta $E\,[g(\mathbf{X})]$ se numeşte *valoare medie generalizată a variabilei aleatoare* $g(\mathbf{X})$.

---

[2]) Pentru $q = 1$, vezi [8], cap. II, § 2.

Să considerăm acum funcţia reală $g(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ definită pe $R^q \times R^q$ care pentru y fixat este local integrabilă în raport cu x şi să presupunem că familia de distribuţii regulate $G = \{g_{\mathrm{y}}\}_{\mathrm{y} \in R^q}$ este o familie compozabilă în sensul precizat în [8], cap. II. În acest caz *se numeşte valoare medie generalizată a variabilei aleatoare* $g(\mathrm{x}, \mathrm{X})$ distribuţia scalară

$$E[g(\mathrm{x}, \mathrm{X})] = G \circ f = h, \tag{1.2.33'}$$

unde operaţia „$\circ$" este operaţia de compunere definită de formula

$$< \varphi, h > = << \varphi(\mathrm{x}), g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) >, f(\mathrm{y}) >. \tag{1.2.33''}$$

Dacă $g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = g(\mathrm{x}-\mathrm{y})$, atunci $G = \{\tau_{\mathrm{y}} g\}_{\mathrm{y} \in R^q}$, unde τ_{y} este translaţia, adică

$$< \varphi, \tau_{\mathrm{y}} g > = < \varphi(\mathrm{x} + \mathrm{y}), g(\mathrm{x}) >$$

iar valoarea medie generalizată h este definită de relaţia

$$h = g * f; \quad < \varphi, g * f > = << \varphi(\mathrm{x} + \mathrm{y}), g(\mathrm{x}) >, f(\mathrm{y}) >. \tag{1.2.32'}$$

Ultima relaţie este (1.2.32), exprimată în termeni ai teoriei distribuţiilor.

Valoarea medie generalizată are proprietatea de liniaritate ca şi valoarea medie obişnuită. Pe baza acestei proprietăţi vom demonstra :

TEOREMA 1'. *Estimaţia* F_n *a funcţiei de repartiţie generalizată este o estimaţie nedeplasată a lui* F, *adică*

$$E[F_n] = F \tag{1.2.34}$$

iar f_n *definită de* (1.2.30') *este de asemenea o estimaţie nedeplasată pentru densitatea de repartiţie generalizată* f.

Demonstraţie. Mai întîi, conform relaţiilor (1.2.33') (1.2.32') şi ţinînd seama de faptul că valoarea medie generalizată este o aplicaţie liniară, rezultă că

$$E[F_n] = E[\theta(\mathrm{x}-\mathrm{X})] = \theta * f,$$

Dar se observă cu uşurinţă că $\theta * f = F$. Intr-adevăr,

$$< \varphi, \theta * F > = \int \left(\int \theta(\mathrm{t} - \mathrm{y}) \, \mathrm{d}F(\mathrm{y}) \right) \varphi(\mathrm{t}) \mathrm{dt} = \int F(\mathrm{t}) \varphi(\mathrm{t}) \, \mathrm{dt} = < \varphi, F >.$$

În mod asemănător se poate arăta că $E[f_n] = f$.

Într-adevăr, conform liniarităţii rezultă că

$$E[f_n] = \delta * f = f.$$

Teorema este demonstrată.

Spre deosebire de teorema 1, teorema 1' spune că f_n este o estimaţie nedeplasată pentru densitatea de repartiţie generalizată f. Dar *distribuţia* f_n nu este o distribuţie regulată (de tip funcţie), de unde se deduce că pentru densitatea de repartiţie obişnuită nu se poate construi prin procedeul neparametric menţionat, o estimaţie nedeplasată ³).

---

³) Acest rezultat a fost pus în evidenţă pe altă cale de către Rosenblatt [28].

Se pot însă construi estimații *asimptotic nedeplasate* în felul următor: se construiește un șir de funcții local integrabile $\{\delta_n\}$ astfel încît șirul distribuțiilor regulate corespunzătoare să convergă către distribuția δ. Dacă în plus are sens convoluția distribuțiilor δ_n și f, atunci se știe ([11], cap. I, § 4) că $\lim\limits_{n\to\infty} (\delta_n * f) = \delta * f = f$, limita avînd loc în sensul teoriei distribuțiilor. În consecință dacă cu ajutorul șirului de funcții $\{\delta_n\}$ definim estimația densității de repartiție (obișnuite) după formula (1.2.7), această estimație este asimptotic nedeplasată pentru $f(x)$. La pct. A au fost construite astfel de estimații pentru densitatea teoretică de repartiție cînd ea există. În cadrul pct. B s-a văzut însă că pentru densitatea de repartiție generalizată există întotdeauna o estimație *nedeplasată.*

C. *Discuții.* Vom prezenta o scurtă discuție asupra procedeelor de construire a estimației densității de repartiție, precum și asupra problemei regularizării care poate avea un cîmp larg de aplicabilitate în statistica matematică.

C_1. *Estimații prin k puncte.* Teoria estimației densității de repartiție prezentată anterior a fost construită (în cazul $q = 1$), folosindu-se ideea că derivata funcției de repartiție (densitatea) este aproximată într-un punct x cu ajutorul *valorilor funcției de repartiție în două puncte*, adică

$$F(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}, \quad h > 0.$$

Acad. Gh. Mihoc ne-a pus problema construirii estimației densității de repartiție pe baza formulelor de aproximare a derivatei funcției de repartiție F într-un punct, folosind valorile lui F în k puncte. Ne vom ocupa aici de această problemă stabilind legătura ei cu problema corespunzătoare cazului a două puncte.

O formulă de aproximare a derivatei lui F, cunoscînd valorile acestei funcții în k puncte, este aceea care se bazează pe formula de interpolare a lui Newton 4).

Această formulă de aproximare se prezintă sub două forme corespunzătoare cazurilor cînd punctele sînt sau nu sînt echidistante. Aici ne vom ocupa numai de *cazul punctelor echidistante*, fapt care nu restrînge generalitatea.

Fie $x, x+h, \ldots, x+(k-1)h$, cele k puncte echidistante.

Formula de aproximare a derivatei f menționată anterior este

$$f(x;\, k) = \frac{1}{h}\left\{\Delta F - \frac{\Delta^2 F}{2} + (-1)^k \frac{\Delta^{k-1} F}{k-1}\right\}, \tag{1.2.35}$$

unde

$$\Delta^k F = (I-1)^k F = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} F(x+jh)\, C_k^j \tag{1.2.36}$$

este diferența de ordinul k a funcției F iar $I^j = F(x+jh)$.

---

4) Vezi Березин, И. С. Жидков, Н. П., *Методы вычислений.* Том I, Гос. Изд. Физ. Мат. Лит., Москва, 1959.

În expunerea care urmează joacă un rol fundamental următoarea lemă:

LEMA 8. *Valoarea aproximativă $f(x;k)$ a funcției $f(x)$ determinată cu ajutorul valorilor funcției $F(x)$ în k puncte $(k \geqslant 2)$ este dată de relația*

$$f(x;k) = \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{k-1}(1)^{j+1}\frac{C_{k-1}^{j}}{j}[F(x+jh)-F(x)]. \tag{1.2.37}$$

Demonstrație. Vom proceda prin inducție.

Într-adevăr, pentru $k=2$, relația (1.2.37) este în mod banal satisfăcută. Presupunem că această relație este satisfăcută pentru un k oarecare și să o demonstrăm pentru $k+1$. Conform formulei (1.2.35) avem

$$f(x;k+1) = \frac{1}{h}\left\{\Delta F - \frac{\Delta^2 F}{2} + \ldots + (-1)^k\frac{\Delta^{k-1}F}{k-1}\right\} + \frac{(-1)^{k+1}}{h}\frac{\Delta^k F}{k}$$

de unde

$$\begin{aligned} f(x;k+1) = \frac{1}{h}\Bigg\{&\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+1}\frac{C_k^j}{j}[F(k+jh)-F(x)] + \\ &+ \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sum_{j=0}^{h}(-1)^{k-j}C_k^jF(x+jh)\Bigg\} = \\ = \frac{1}{h}\Bigg\{&\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+1}\frac{C_{k-1}^j}{j}[F(x+jh-F(x)] + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+1}C_k^jF(x+jh) + \\ &+ \frac{(-1)^{k+1}}{k}[F(x-kh)+(-1)^kF(x)]\Bigg\} \end{aligned}$$

sau, în sfîrșit,

$$\begin{aligned} f(x;k+1) = \frac{1}{h}\Bigg\{&\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+1}\left[\frac{C_{k-1}^j}{j}+\frac{C_k^j}{k}\right][F(x+jh)-F(x)] + \\ &+ \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1}C_k^j(-1)^{j+1}F(x) + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\Big[F(x+kh)+(-1)^kF(x)\Big]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{1.2.38}$$

Să discutăm acum formula (1.2.38) cînd $k=2p$, $k=2p+1$.

a) Cînd $k=2p$, din relația

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+1}C_k^j = 0 \tag{1.2.39}$$

rezultă $\sum\limits_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+1}C_k^j = 2$ iar ultimii doi termeni din (1.2.38) devin

$$\frac{2}{k}F(x) - \frac{1}{k}[F(x+kh)-F(x)] = \frac{(-1)^{k+1}}{k}[F(x+kh)-F(x)]. \tag{1.2.40}$$

b) Cînd $k = 2p + 1$, din relația (1.2.39) rezultă că $\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+1}C_k^j=0$ iar ultimii doi termeni din (1.2.38) devin

$$(1.2.41) \quad 0 + \frac{1}{k}[F(x+kh)-F(x)] = \frac{(-1)^{k+1}}{k}[F(x+kh)-F(x)].$$

Dacă ținem seama de relația

$$\frac{C_{k-1}^j}{j} + \frac{C_k^j}{k} = \frac{C_k^j}{j}$$

și de (1.2.40), (1.2.41), atunci rezultă afirmația lemei.

Această lemă prezintă și un interes în sine, întrucît simplifică formula de aproximare a derivatei, cunoscînd valorile funcției în k puncte.

Vom folosi însă această lemă pentru a defini o estimație a densității de repartiție unidimensională care va fi numită *estimație „prin k puncte"*.

DEFINIȚIA 1.9. *Estimația densității de repartiție unidimensionale determinată cu ajutorul valorilor funcției empirice de repartiție în k puncte este definită de formula*

$$(1.2.42) \quad f_n(x;\, k) = \frac{1}{h(n)}\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+1}\frac{C_{k-1}^j}{j}[F_n(x+jh) - F_n(x)],$$

unde $\lim\limits_{n\to\infty} h(n) = 0$, $(h = h(n))$.

Din (1.2.42) dacă notăm

$$H^{(j)}(y) = \begin{cases} \frac{1}{j} & |y| \leqslant \frac{j}{2} \\ 0 & |y| > \frac{i}{2} \end{cases} \quad 1 \leqslant j \leqslant k-1$$

se deduce că

$$(1.2.42') \quad f_n(x;\, k) = \frac{1}{nh(n)}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{j+1}C_{k-1}^j H^{(j)}\left(\frac{x-X_\alpha}{h(n)}\right).$$

Ultima relație rezultă din faptul că

$$\frac{F_n(x+jh) - F_n(x)}{j} = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n} H^{(j)}\left(\frac{x-X_\alpha}{h(n)}\right).$$

Să observăm acum că dacă $H^{(j)}(x)$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, sînt funcții *pondere* ca în exemplul 1.3 (cazul $q = 1$), atunci rezultă:

DEFINIȚIA 1.9′. *Estimația prin k puncte a densității de repartiție este definită prin formula* (1.2.42′).

Estimația (1.2.42′) se mai poate pune sub forma

$$(1.2.43) \quad f_n(x,\, k) = \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+1}C_{k-1}^j f_n^{(j)}(x),$$

unde

$$f_n^{(j)}(x) = \frac{1}{nh(n)} \sum_{\alpha=1}^{n} H^{(j)}\left(\frac{x-X_\alpha}{h(n)}\right)$$

iar

$$\sum_{j=1}^{h-1} (-1)^{j+1} C_{k-1}^{j} = 1. \tag{1.2.43'}$$

O altă formă a estimației (1.2.42′) este

$$f_n(x\,;\,k) = \frac{1}{nh(n)} \sum_{\alpha=1}^{n} H_k\left(\frac{x-X_\alpha}{h(n)}\right), \tag{1.2.44}$$

unde

$$H_k(x) = \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} C_{k-1}^{j} H^{(j)}(x).$$

Dacă notăm

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_n^{(j)}(x) &= \frac{1}{h(n)} H^{(j)}\left(\frac{x}{h(n)}\right); \ \bar{\delta}_n(x) = \\ &= \frac{1}{h(n)} \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} C_{k-1}^{j} H^{(j)}\left(\frac{x}{h(n)}\right), \end{aligned} \tag{1.2.45}$$

atunci *estimația „prin k puncte" devine*

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^{n} \bar{\delta}_n(x-X_\alpha). \tag{1.2.45'}$$

Dacă notăm $a_n^{(j)} = \int_{-\infty}^{+\infty} [\bar{\delta}_n^{(j)}(x)]^2 \, \mathrm{d}x$, atunci din (1.2.45) se poate constata cu ușurință că $a_n^{(j)} > a_n^{(j+1)}$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$.

Din prezentarea anterioară rezultă deci următoarea :

CONSECINȚĂ. *Estimația „prin k puncte" a densității de repartiție este definită cu ajutorul a* $k-1$ *șiruri δ-generatoare* $\{\delta_n^{(j)}(x)\}$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, *care satisfac condiția*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\delta_n^{(j)}(x)]^2 \, \mathrm{d}x > \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta_n^{(j+1)}(x)]^2 \, \mathrm{d}x \tag{1.2.46}$$

prin formula

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^{n} \delta_n(x-X_\alpha), \tag{1.2.47}$$

unde

$$\delta_n(x) = \sum_{j=1}^{k-1} C_j \delta_n^{(j)}(x)\,; \quad \sum_{j=1}^{k-1} C_j = 1.$$

Evident, această consecință este valabilă și în cazul $q > 1$. Ținînd seama de această consecință și de lema 4, rezultă că problema estimației

„prin k puncte" ($k \geqslant 2$), se reduce la cazul studiat în § 1.1 și pct. A al acestui paragraf.

C_2. Din mențiunile făcute la pct. B, rezultă că se pot regulariza anumite funcții de estimație care se întîlnesc în statistica matematică; de obicei aceste funcții, așa cum se va vedea din unele exemple, generează distribuții concentrate într-un număr finit de puncte. După cum se știe ([11], cap. I), o distribuție f de acest tip se poate reprezenta sub forma

$$f = \sum_{i=1}^{k} c_i \delta_{X_i}, \tag{1.2.48}$$

unde δ_{X_i} este distribuția lui Dirac corespunzătoare *punctului de concentrație* X_i. Regularizarea constă în a înlocui pe δ_{X_i} în (1.2.48) cu un șir de funcționale regulate $\{\delta_n^{(i)}\}$, generate de funcții continue, astfel încît $\delta_n^{(i)} \to \delta_{X_i}$ în sensul convergenței distribuțiilor.

Estimația densității de repartiție definită și studiată în acest paragraf este tocmai rezultatul unui astfel de procedeu de regularizare. În capitolul III, §§ 3.2—3.4, sînt considerate și alte exemple de acest fel.

Aici vom mai menționa numai procedeul de regularizare al estimațiilor momentelor de diferite ordine.

De exemplu, se știe (cazul $q = 1$) că momentul de ordinul r

$$M_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.2.49}$$

se estimează după formula

$$M_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^r, \tag{1.2.49'}$$

unde X_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sînt variabilele de selecție. Estimația (1.2.49') este o estimație nedeplasată pentru M_r. Estimația regulată obținută prin procedeul menționat este

$$\overline{M}_r^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x-X_i)\,\mathrm{d}x$$

unde $\{\delta_n\}_{n \in N_+}$ este un șir δ-generator. Ea este însă numai o estimație asimptotic nedeplasată pentru M_r, deoarece

$$E[\overline{M}_r^*] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(y^r \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x-y) f(y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

de unde, conform teoremei 1, avem

$$\lim_{n\to\infty} E[\overline{M}_r^*] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\mathrm{d}x = M_r.$$

Regularizarea estimațiilor momentelor, menționată anterior, este, după cum se vede, o consecință a regularizării estimației densității de repartiție.

Înainte de a încheia acest capitol, mai remarcăm faptul că problema estimării densității de repartiție poate fi considerată în general ca problemă de estimare a unei derivate Radon-Nykodim. O astfel de problemă tratată într-un cadru general se găsește expusă în lucrarea [7]. Pornindu-se de la o idee similară, în [16] este definită și studiată o estimație consistentă a densității multidimensionale de repartiție. Desigur, aceste generalizări nu conduc de regulă la proprietăți noi din punct de vedere statistic.

CAPITOLUL II

PROBLEME SPECIALE ÎN TEORIA ESTIMAȚIEI DENSITĂȚII DE REPARTIȚIE

Acest capitol este consacrat unor probleme speciale care se pot întîlni în teoria estimației densităților de repartiție. Astfel vor fi definite estimații optime în sensul MIEP și unele probleme de consistență contingente, de asemenea estimații pentru sume de vectori aleatori independenți și o clasă de estimații nedeplasate. În sfîrșit, vor fi studiate estimații de tip funcție și estimații pentru densitățile de repartiție unidimensionale în cazul proceselor staționare.

§ 2.1. ESTIMAȚII OPTIME ÎN SENSUL MIEP

Presupunem că densitatea teoretică de repartiție f este de pătrat integrabil pe R^q și de asemenea, pentru fiecare n, funcția δ_n este de pătrat integrabil.

Dacă estimația $f_n(\mathbf{x})$ a lui f în punctul $\mathbf{x}$ este de forma (1.2.7), atunci [34] se numește *media integrată a erorii pătratice* (MIEP) numărul

$$J_n = E\left(\int (f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}))^2 \, d\mathbf{x}\right). \tag{2.1.1}$$

Definiția 2.1. *Estimația f_n, care pentru fiecare n realizează minimul lui J_n, se numește optimă în sensul MIEP. Funcția δ_n^* corespunzătoare se numește în acest caz estimator optim.*

Definiția 2.2. *Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = 0$, atunci estimația se numește integral consistentă. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} H(n) = \infty$ și*

$$\lim_{n\to\infty} H(n)\, J_n = c < \infty, \quad c \neq 0,$$

atunci estimația f_n se numește integral consistentă de ordinul lui $H(n)$.

Studiul estimațiilor optime în sensul MIEP cît și al proprietăților de integral consistență a fost făcut în cazul unidimensional de Watson și Leadbetter [34]. În lucrarea [29] sînt extinse unele rezultate ale celor doi autori în cazul multidimensional și pe acestea le vom prezenta aici.

Peste tot în cele ce urmează vom nota cu $\tilde{g}$ transformata Fourier a funcției g cînd ea există, adică

$$\tilde{g}(\alpha) = \int e^{i\alpha'\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad i = \sqrt{-1}\cdot$$

LEMA 9. [32]. *Dacă pentru fiecare n, δ_n admite transformată Fourier, atunci f_n admite trasformată Fourier și*

$$\tilde f_n(\alpha) = \tilde\delta_n(\alpha)\cdot\varphi_n(\alpha),$$

unde $\varphi_n(\alpha)$ *este funcția caracteristică empirică asociată selecției* $\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n$, *adică*

$$\varphi_n(\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{i\alpha'\mathbf{X}_j}.$$

Demonstrație. Următoarele relații demonstrează lema

$$\tilde f_n(\alpha) = \frac{1}{n}\int e^{i\alpha'\mathbf{x}}\left[\sum_{j=1}^{n}\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X}_j)\right]d\mathbf{x} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{i\alpha'\mathbf{X}_j}\int e^{i\alpha'(\mathbf{x}-\mathbf{X}_j)}\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X}_j)\,d\mathbf{x} =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n} e^{i\alpha'\mathbf{X}_j}\right]\int e^{i\alpha'\mathbf{z}}\delta_n(\mathbf{z})\,d\mathbf{z} = \varphi_n(\alpha)\,\tilde\delta_n(\alpha)\,\cdot$$

TEOREMA 5. *Dacă densitatea teoretică de repartiție are proprietatea că* $|\tilde f| \in L^2[R^q]$, *atunci există un estimator optim* $\delta_n^* \in L^2[R^q]$ *și el este definit de relația*

$$\tilde\delta_n^*(\alpha) = \frac{|\tilde f(\alpha)|^2}{\dfrac{1}{n} + \dfrac{n-1}{n}|\tilde f(\alpha)|^2} \tag{2.1.2}$$

iar minimul lui (2.1.1) este

$$J_n^* = \frac{1}{(2\pi)^q}\int\frac{|\tilde f(\alpha)|^2(1-|\tilde f(\alpha)|^2)}{1+(n-1)|\tilde f(\alpha)|^2}\,d\alpha. \tag{2.1.3}$$

Demonstrație. Aplicînd în (2.1.1) formula lui Parseval, obținem

$$J_n = E\left[\int(f_n(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}))^2\,d\mathbf{x}\right] = E\left[\int|\tilde f_n(\alpha)-\tilde f(\alpha)|^2\,d\alpha\right]\cdot$$

Dar, ținînd seama de expresia lui $f_n(\alpha)$ dată de lema 9, deducem (notînd cu $\bar z$ conjugatul lui z)

$$(2\pi)^q J_n = \int E\left\{\left(\tilde\delta_n(\alpha)\cdot\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{i\alpha'\mathbf{X}_j} - \tilde f(\alpha)\right)\overline{\left(\tilde\delta_n(\alpha)\cdot\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{i\alpha'\mathbf{X}_j} - \tilde f(\alpha)\right)}\right\}d\alpha =$$

$$= \int\left\{|\tilde\delta_n(\alpha)|^2\cdot\frac{1}{n^2}(n+|\tilde f(\alpha)|^2(n^2-n)) +\right.$$

$$\left. + |\tilde f(\alpha)|^2 - \tilde\delta_n(\alpha)\cdot|\tilde f(\alpha)|^2 - \overline{\tilde\delta}_n(\alpha)\cdot|\tilde f(\alpha)|^2\right\}d\alpha.$$

După efectuarea calculelor găsim

$$(2\pi)^q J_n = \int \left\{ \frac{1}{n} \,|\, \tilde{\delta}_n(\boldsymbol{\alpha}) \,|^2 (1 - |\, \tilde{f}(\boldsymbol{\alpha}) \,|^2) + |\, \tilde{f}(\boldsymbol{\alpha}) \,|^2 \cdot |\, 1 - \tilde{\delta}_n(\boldsymbol{\alpha}) \,|^2 \right\} d\boldsymbol{\alpha},$$

care se mai poate scrie

$$(2\pi)^q J_n = \int \left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{2} \,|\, \tilde{f}(\boldsymbol{\alpha}) \,|^2 \right) \cdot \left|\, \tilde{\delta}_n(\boldsymbol{\alpha}) - \frac{|\, \tilde{f}(\boldsymbol{\alpha}) \,|^2}{\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \,|\, \tilde{f}(\boldsymbol{\alpha}) \,|^2} \right| d\boldsymbol{\alpha} +$$

$$+ \int \frac{|\, \tilde{f}(\boldsymbol{\alpha}) \,|^2 (1 - |\, \tilde{f}(\boldsymbol{\alpha}) \,|^2)}{1 + (n-1) \,|\, \tilde{f}(\boldsymbol{\alpha}) \,|^2} \, d\boldsymbol{\alpha}.$$

Din ultima relaţie se observă că J_n devine minim cînd expresia de sub prima integrală se anulează, adică atunci cînd $\delta_n(\boldsymbol{\alpha}) = \delta_n^*(\boldsymbol{\alpha})$, unde $\delta_n^*(\boldsymbol{\alpha})$ este definit de (2.1.2). Tot din ultima relaţie se observă că minimul J_n^* are expresia (2.1.3). În sfîrşit, se mai poate observa că [29] :

$$J_n^* = \frac{\delta_n^*(\mathbf{0})}{n} - 0\left(\frac{1}{n}\right), \tag{2.1.4}$$

unde $0\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ cînd $n \to \infty$. De asemenea, dacă în (2.1.2) aplicăm formula de inversiune, atunci rezultă că δ_n^* satisface următoarea ecuaţie integrală

$$\frac{1}{n} \delta_n^*(\mathbf{x}) + \frac{n-1}{n} \int g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, \delta_n^*(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = g(\mathbf{x}),$$

unde

$$g(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{u}) f(\mathbf{u} - \mathbf{x}) \, d\mathbf{u}.$$

Din teorema precedentă rezultă, după cum era de aşteptat, că estimatorul optim depinde de densitatea teoretică de repartiţie.

DEFINIŢIA 2.3 *Fie f densitatea de repartiţie a V.a.**X** şi $\tilde{f}$ funcţia sa caracteristică. Spunem că funcţia caracteristică $\tilde{f}$ descreşte algebric de gradul p dacă*

$$\lim_{\|\boldsymbol{\alpha}\| \to \infty} |\, \alpha_1^{p_1} \ldots \alpha_q^{p_q} \,| \cdot |\, \tilde{f}(\boldsymbol{\alpha}) \,| = r^{\frac{q}{2}} > 0, \tag{2.1.5}$$

unde α_i, $1 \leqslant i \leqslant q$, sînt coordonatele lui $\boldsymbol{\alpha}$, $\sum_{i=1}^{q} \frac{1}{p_i} = \frac{q}{p}$, *iar r este o constantă.*

Această definiţie extinde la cazul multidimensional pe cea din [34], (pct. 3).

TEOREMA 6. [29]. *Dacă* $\tilde{f}$ *descrește algebric de gradul* p, $\left(p > \frac{q}{2}\right)$, *atunci* J_n^* *satisface condiția*

$$\lim_{n\to\infty} n^{\left(1-\frac{q}{2p}\right)} . J_n^* = \frac{1}{(2\pi)^q} \cdot r^{\frac{q}{2p}} . \int \frac{d\alpha}{1+(\alpha_1^{p_1}\dots\alpha_q^{p_q})^2} . \tag{2.1.6}$$

Demonstrație. Din (2.1.5) rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$, se poate găsi $T_\varepsilon > 0$, astfel încît pentru $\|\alpha\| > T_\varepsilon$ să avem

$$\left| \frac{1}{|\alpha_1^{p_1}\dots\alpha_q^{p_q}|^2} \cdot \frac{1}{|f(\alpha)|^2} - \frac{1}{r^2} \right| < \varepsilon,$$

iar din (2.1.4) rezultă că

$$J_n^* = \frac{1}{n}\,\delta_n^*(0) - 0\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{(2\pi)^q} \int \frac{|\tilde{f}(\alpha)|^2}{1+(n-1)\,|\tilde{f}(\alpha)|^2}\, d\alpha - 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

Deci este suficient să evaluăm numai ultima integrală, adică

$$n^{\left(1-\frac{q}{2p}\right)} \int \frac{|\tilde{f}(\alpha)|^2}{1+(n-1)\,|\tilde{f}(\alpha)|^2}\, d\alpha = n^{\left(1-\frac{q}{2p}\right)} \int_{\|\alpha\|<T_\varepsilon} \frac{|\tilde{f}(\alpha)|^2}{1+(n-1)\,|\tilde{f}(\alpha)|^2}\, d\alpha +$$

$$+ n^{\left(1-\frac{q}{2p}\right)} \int \frac{d\alpha}{(n-1)+\frac{|\alpha_1^{p_1}\dots\alpha_q^{p_q}|^2}{r^q}} - n^{\left(1-\frac{q}{2p}\right)} \int_{\|\alpha\|<T_\varepsilon} \frac{d\alpha}{(n-1)+\frac{|\alpha_1^{p_1}\dots\alpha_q^{p_q}|^2}{r^q}} +$$

$$+ n^{\left(1-\frac{q}{2p}\right)} \int_{\|\alpha\|\geqslant T_\varepsilon} \left[\frac{1}{(n-1)+\frac{1}{|\tilde{f}(\alpha)|^2}} - \frac{1}{(n-1)+\frac{|\alpha_1^{p_1}\dots\alpha_q^{p_q}|^2}{r^q}} \right] d\alpha.$$

Dar

$$n^{\left(1-\frac{q}{2p}\right)} \int_{\|\alpha\|<T_\varepsilon} \frac{|\tilde{f}(\alpha)|^2}{1+(n-1)\,|\tilde{f}(\alpha)|^2}\, d\alpha \leqslant \frac{n^{\left(1-\frac{q}{2p}\right)}}{n-1} \int_{\|\alpha\|<T_\varepsilon} d\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$n^{\left(1-\frac{q}{2p}\right)} \int_{\|\alpha\|<T_\varepsilon} \frac{d\alpha}{(n-1)+\frac{|\alpha_1^{p_1}\dots\alpha_q^{p_q}|^2}{r^q}} \leqslant \frac{n^{\left(1-\frac{q}{2p}\right)}}{n-1} \int_{\|\alpha\|<T_\varepsilon} d\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

De asemenea

$$n^{\left(1-\frac{q}{2p}\right)} \int \frac{d\alpha}{(n-1)+\frac{|\alpha_1^{p_1}\dots\alpha_q^{p_q}|^2}{r^q}} = \frac{n^{\left(1-\frac{q}{2p}\right)}}{n-1} \int (n-1)^{\frac{q}{2p}}\, r^{\frac{q}{2p}} \frac{dv}{1+|v_1^{p_1}\dots v_q^{p_q}|^2} =$$

$$= \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\left(1-\frac{q}{2p}\right)} . r^{\frac{q}{2p}} . \int \frac{dv}{1+|v_1^{p_1}\dots v_q^{p_q}|^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} r^{\frac{q}{2p}} \int \frac{dv}{1+|v_1^{p_1}\dots v_q^{p_q}|^2} .$$

În sfîrşit, după efectuarea unor calcule, se deduce că

$$n^{\left(1-\frac{q}{2p}\right)}\int_{\|\alpha\|\geqslant T_\varepsilon}\left[\frac{1}{(n-1)+\frac{1}{|\tilde{f}(\alpha)|^2}}-\frac{1}{(n-1)+\frac{|\alpha_1^{p_1}\dots\alpha_q^{p_q}|^2}{r^q}}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant n^{\left(1-\frac{q}{2p}\right)}\cdot\varepsilon\cdot M\cdot\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{(n-1)+\frac{|\alpha_1^{p_1}\dots\alpha_q^{p_q}|^2}{r^q}},\ M<\infty,$$

care poate fi făcut arbitrar de mic. Teorema este astfel demonstrată.

Teorema spune că estimaţia f_n^* definită cu ajutorul lui δ_n^* dat de (2.1.2) este *integral consistentă de ordinul lui* $n^{\left(1-\frac{q}{2p}\right)}$, $\left(p>\frac{q}{2}\right)$ cînd $\tilde{f}$ descreşte algebric de gradul p.

Exemplul 2.1. Densitatea de repartiţie multidimensională

$$f(\mathbf{x})=\prod_{j=1}^{q}(x_j^{p_j-1}\cdot\mathrm{e}^{-x_j})\cdot\frac{1}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(p_j)},\ p_j>1,\ 1\leqslant j\leqslant q,$$

descreşte algebric de gradul p; $\frac{q}{p}=\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{p_j}$, deoarece

$$\tilde{f}(\boldsymbol{\alpha})=\sum_{j=1}^{q}(1-i\alpha_j)^{-p_j},\ \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_q)',$$

iar

$$\lim_{\|\alpha\|\to\infty}\left|\left(\frac{\alpha_1}{1-i\alpha_1}\right)^{p_1}\cdots\left(\frac{\alpha_q}{1-i\alpha_q}\right)^{p_q}\right|=1>0.$$

Se observă că dacă $p_j>\frac{q}{2}$, atunci $p>\frac{q}{2}$ şi are loc teorema 6.

§ 2.2. ESTIMAŢII DE TIP FUNCŢIE

În acest paragraf vor fi prezentate unele proprietăţi ale estimaţiilor de tip funcţie.

DEFINIŢIA 2.4. *Fie K o densitate de repartiţie pe R^q ca în exemplul 1.3 şi fie* $\mathbf{h}(n)=(h_1(n),\dots,h_q(n))'$ *un şir de vectori cu componente întregi pozitive care satisface condiţia* $\lim_{n\to\infty}\|\mathbf{h}(n)\|=0$. *Estimaţia densităţii de repartiţie f în punctul* $\mathbf{x}$ *definită de formula*

$$f_n(\mathbf{x})=\frac{1}{nh_1\dots h_q}\sum_{j=1}^{q}K\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{X}_j}{h}\right),\tag{2.2.1}$$

unde

$$K\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{X}}{\mathbf{h}}\right)=K\left(\frac{x_1-X_1}{h_1},\dots,\frac{x_q-X_q}{h_q}\right)$$

se numeşte estimaţie de tip funcţie sau estimaţie de formă algebrică.

Studiul estimațiilor de tip funcție a fost făcut în cazul unidimensional de către E. Parzen [26], V. Murthy [17] și E. Nadaraja [19] iar în cazul multidimensional de către I. Văduva [30] [1]).

Estimațiile de tip funcție au avantajul că nu prezintă dificultăți de calcul în cazul aplicațiilor practice. Funcția K se numește *funcție pondere*. Exemplele de funcție pondere sînt numeroase.

Astfel, densitatea normală de repartiție, corespunzînd repartiției multidimensionale $N(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$, adică

$$K_0(\mathrm{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{q}{2}}(\det \mathbf{\Sigma})^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{y}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathrm{y}}$$

este o funcție pondere. De asemenea funcțiile

$$K_1(\mathrm{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^q} & \text{dacă } \mathrm{y} \in I \\ 0 & \text{dacă } \mathrm{y} \notin I \end{cases}$$

$$K_2(\mathrm{y}) = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{q} (1-|y_j|) & \text{dacă } \mathrm{y} \in I \\ 0 & \text{dacă } \mathrm{y} \notin I \end{cases}$$

unde $\mathbf{I} = \underbrace{[0,1]\times, \ldots, \times[0,1]}_{q}$ sînt funcții pondere cu suport compact.

În sfîrșit, funcțiile

$$K_3(\mathrm{y}) = \frac{1}{2^q} e^{-\sum\limits_{i=1}^{q}|y_i|}$$

$$K_4(\mathrm{y}) = \frac{1}{\pi^q}\prod_{j=1}^{q}(1+y_j^2)^{-1}$$

$$K_5(\mathrm{y}) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^q \prod_{j=1}^{q}\left(\frac{\sin\frac{y_i}{2}}{y_i}\right)^2$$

sînt funcții pondere continue.

Toate teoremele din § 1.2 se pot enunța sub formă adecvată pentru estimațiile de tip funcție.

TEOREMA 7. *Fie K o funcție pondere și fie g o funcție integrabilă pe R^q, a cărei integrală este finită. De asemenea presupunem că se dă șirul $\{\mathbf{h}(n)\}_{n\in N_+}$ ca în definiția 2.4. Fie*

$$g_n(\mathrm{x}) = \frac{1}{h_1(n)\ldots h_q(n)}\int K\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{y}}{\mathbf{h}(n)}\right) g(\mathrm{y})\,d\mathrm{y}. \tag{2.2.2}$$

---

[1]) Recent a apărut o lucrare a lui Cacoullos T. (Ann. Inst. Statist. Math., **16**, *2*, 179—190) (1966) care tratează de asemenea unele aspecte referitoare la cazul multidimensional.

Atunci în orice punct $\mathbf{x}$ *de continuitate al lui* g *avem*

$$\lim_{n\to\infty} g_n(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}). \tag{2.2.3}$$

Demonstrație ([30], teorema 1). Această teoremă corespunde teoremei 1.

Să observăm că (2.2.3) se mai scrie

$$\lim_{n\to\infty} g_n(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\int K(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}$$

și să facem în ultima integrală transformarea

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\,\mathbf{z}, \tag{2.2.4}$$

unde $\mathbf{A}$ este matricea

$$\mathbf{A} = \operatorname{diag}\,((h_1(n), \ldots, h_q(n)).$$

Deci

$$g_n(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})\int K(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = \frac{1}{h_1 \ldots h_q}\int [g(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - g(\mathbf{x})]\,K\left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{h}}\right) d\mathbf{y}\cdot$$

Să descompunem acum spațiul R^q în două părți distincte în felul următor

$$R^q = \{\mathbf{y}\,;\|\mathbf{y}\| \leqslant \delta\} \cup \{\mathbf{y}\,;\|\mathbf{y}\| > \delta\},$$

unde $\delta > 0$ este fix. Atunci rezultă că

$$|\,g_n(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})\,| \leqslant \sup_{\|\mathbf{y}\|\leqslant\delta} |\,g(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - g(\mathbf{x})\,|\cdot\left|\frac{1}{h_1 \ldots h_q}\int\limits_{\|\mathbf{y}\|\leqslant\delta} K\left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{h}}\right)d\mathbf{y}\right| +$$

$$+\int\limits_{\|\mathbf{y}\|>\delta}\frac{|\,g(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,|}{\|\mathbf{y}\|}\cdot\left|\frac{\|\mathbf{y}\|}{h_1\ldots h_q}K\left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{h}}\right)\right|d\mathbf{y} + g(\mathbf{x})\left|\frac{1}{h_1\ldots h_q}\int\limits_{\|\mathbf{y}\|>\delta} K\left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{h}}\right)d\mathbf{y}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|\mathbf{y}\|\leqslant\delta} |\,g(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - g(\mathbf{x})\cdot \int\limits_{\|\mathbf{z}\|\leqslant\frac{\delta}{\|\mathbf{h}(n)\|}} |\,K(\mathbf{z})\,|\,d\mathbf{z} + |\,g(\mathbf{x})\,|\,\cdot$$

$$\cdot\left|\int\limits_{\|\mathbf{z}\|>\frac{\delta}{\|\mathbf{h}(n)\|}} K(\mathbf{z})\,d\mathbf{z}\right| + \frac{1}{\delta}\|\mathbf{A}\|\cdot(\sup_{\|\mathbf{z}\|>\frac{\delta}{\|\mathbf{h}(n)\|}}\|\mathbf{z}\|\cdot|\,K(\mathbf{z})\,|)\cdot\int\limits_{\|\mathbf{z}\|>\frac{\delta}{\|\mathbf{h}(n)\|}}|\,K(\mathbf{z})\,|\,d\mathbf{z}.$$

Să presupunem acum că δ este ales astfel încît pentru $\varepsilon > 0$ dat, să avem $|\,g(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - g(\mathbf{x})\,| < \varepsilon$ cînd $\|\mathbf{y}\| < \delta$. (Acest lucru este posibil deoarece g este continuă în $\mathbf{x}$). Deci primul termen din membrul al doilea al ultimei inegalități poate fi făcut oricît de mic. Deoarece $\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{h}(n)\|$ (vezi [10]), și din cauză că K este funcție pondere, rezultă că termenul al treilea este de asemenea nul. În sfîrşit, termenul al doilea tinde la zero din cauză că K este densitate de repartiţie.

Teorema este astfel demonstrată.

Se observă din (2.2.1) că

$$E\,[f_n(\mathrm{x})] = \frac{1}{h_1 \ldots h_q} \int K\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{y}}{\mathrm{h}}\right) f(\mathrm{y})\, d\mathrm{y}$$

şi deci, conform teoremei 7, estimaţia $f_n(\mathrm{x})$ este *asimptotic nedeplasată* pentru $f(\mathrm{x})$ dacă x este punct de continuitate pentru f. În mod analog se extind şi celelalte teoreme din § 1.2.

TEOREMA 8. *Dacă funcţia pondere K şi $\mathbf{h}(n)$ satisfac condiţiile teoremei 7, dacă densitatea de repartiţie f este continuă în punctul* x, *dacă K este de pătrat integrabil pe R^q şi dacă*

$$\lim_{n\to\infty} n\, h_1(n) \ldots h_q(n) = \infty, \tag{2.2.5}$$

atunci estimaţia (2.2.1) *este o estimaţie consistentă pentru* $f(\mathrm{x})$.

Demonstraţie. Această teoremă corespunde teoremei 2.

Pentru a o demonstra este suficient să verificăm condiţia (1.2.9), unde

$$\delta_n(\mathrm{x}) = \frac{1}{h_1(n) \ldots h_q(n)} K\left(\frac{\mathrm{y}}{\mathbf{h}(n)}\right). \tag{2.2.6}$$

Într-adevăr, se observă că făcînd transformarea (2.2.4), avem

$$a_n = \int \delta_n^2(\mathrm{y})\, d\mathrm{y} = \frac{1}{h_1 \ldots h_q} \int \frac{1}{h_1 \ldots h_q} K^2\left(\frac{\mathrm{y}}{\mathbf{h}(n)}\right) d\mathrm{y} =$$

$$= \frac{1}{h_1 \ldots h_q} \int K^2(\mathrm{z})\, d\mathrm{z} = \frac{1}{h_1 \ldots h_q} I_2$$

de unde rezultă condiţia (1.2.9). Teorema este astfel demonstrată. O demonstraţie directă a acestui rezultat este dată în [30] (teorema 2 şi corolarul 2).

TEOREMA 9. *În condiţiile teoremelor 7 şi 8, dacă este satisfăcută condiţia*

$$I_{2+\eta} = \int | K(\mathrm{y}) |^{2+\eta}\, d\mathrm{y} < \infty$$

oricare ar fi $\eta > 0$, *atunci estimaţia (2.2.1) este o estimaţie asimptotic normală pentru* $f(\mathrm{x})$.

Demonstraţie. Este suficient să verificăm condiţia (1.2.11).

Într-adevăr, se deduce că

$$a_n = \frac{1}{h_1 \ldots h_q} I_2\,; \quad \gamma_n = \frac{1}{(h_1 \ldots h_q)^{1+\eta}} I_{2+\eta}.$$

Deci

$$\frac{\gamma_n}{n^{\frac{\eta}{2}}\, a_n^{1+\frac{\eta}{2}}} = \frac{\dfrac{1}{(h_1 \ldots h_q)^{1+\eta}}\, I_{2+\eta}}{n^{\frac{\eta}{2}}\, \dfrac{1}{(h_1 \ldots h_q)^{1+\frac{\eta}{2}}}\, I_2} = \frac{1}{(n\, h_1 \ldots h_q)^{\frac{\eta}{2}}} \cdot \frac{I_{2+\eta}}{I_2}$$

şi datorită relaţiei (2.2.5) avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{n^{\frac{\eta}{2}}\, a_n^{1+\frac{\eta}{2}}} = 0.$$

Teorema este demonstrată. O demonstraţie directă se găseşte în [30] (teorema 3).

Această teoremă ne spune deci că

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{f_n(\mathrm{x}) - E\,[f_n(\mathrm{x})]}{[D^2\,[f_n(\mathrm{x})]]^{\frac{1}{2}}} < z\right\} = \frac{1}{(2\,\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{z} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u.$$

Din lema 5 şi teorema 3′ rezultă cu uşurinţă următorul rezultat:

TEOREMA 9. *Dacă g este o funcţie satisfăcînd condiţiile lemei 5 şi dacă $f_n(\mathrm{x})$ este o estimaţie de tip funcţie definită în condiţiile teoremelor 7, 8 şi 9, iar g este o funcţie ca în teorema 3′, atunci*

$$\sup_z \left| P\left\{\frac{f_n(\mathrm{x}) - E\,[f_n(\mathrm{x})]}{[D^2\,[f_n(\mathrm{x})]]^{\frac{1}{2}}} < z\right\} - \frac{1}{(\sqrt{2\pi})}\int_{-\infty}^{z} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u \right| \leqslant c\, \frac{ln}{g(\sqrt{n})}, \tag{2.2.7}$$

unde c este o constantă absolută (lema 5), iar l are valoarea asimptotică

$$l \sim \frac{\displaystyle\int K^2(\mathrm{y})\, g\left(\frac{K(\mathrm{y})}{L(\mathrm{x})}\right) \mathrm{d}\mathrm{y}}{\displaystyle\int K^2(\mathrm{y})\, \mathrm{d}\mathrm{y}}\ ; \quad L(\mathrm{x}) = \left(f(\mathrm{x}) \int K^2(\mathrm{y})\, \mathrm{d}\mathrm{y}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2.8}$$

Demonstraţia acestei teoreme rezultă direct din teorema 3′, dacă se ţine seamă de faptul că $\delta_n(\mathrm{x})$ este de forma (2.2.6).

În continuare ne vom ocupa de unele detalii care au importanţă practică.

Astfel, observăm mai întîi că $\mathbf{h}\,(n)$ care satisface condiţiile teoremelor 7—9 poate fi ales de forma

$$\begin{gathered} \mathbf{h}\,(n) = (h_1(n), \ldots, h_q(n))' \\ h_i(n) = n^{-\alpha_i},\ 0 < \alpha_i < \frac{1}{q},\ 1 \leqslant i \leqslant q. \end{gathered} \tag{2.2.9}$$

În al doilea rînd, trebuie să ne punem problema corecțiilor estimațiilor. Ne vom opri pentru moment la această problemă.

Corecția estimației este prin definiție mărimea

$$\nu\,[f_n(\mathbf{x})] = E\,[f_n(\mathbf{x})] - f(\mathbf{x}). \tag{2.2.10}$$

Presupunem că funcțiile f și K admit transformate Fourier și că funcțiile transformate $\widetilde{f}$ și $\widetilde{K}$ sînt absolut integrabile. Atunci din lema 9 rezultă că f_n are transformată Fourier și

$$\widetilde{f}_n(\boldsymbol{\alpha}) = \widetilde{K}(\mathbf{h}\,\boldsymbol{\alpha})\,\varphi_n(\boldsymbol{\alpha}), \tag{2.2.11}$$

unde

$$\widetilde{K}(\mathbf{h}\boldsymbol{\alpha}) = \widetilde{K}(h_1\alpha_1, \ldots, h_q\alpha_q).$$

Evident, prin inversiune avem

$$f_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^q}\int e^{-i\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{x}}\,\widetilde{K}(\mathbf{h}\boldsymbol{\alpha})\varphi_n(\boldsymbol{\alpha})d\boldsymbol{\alpha}. \tag{2.2.11'}$$

Deci formula (2.2.10) devine

$$\nu[f_n(\mathbf{x})] = \frac{1}{(2\pi)^q}\int e^{-i\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{x}}\{\widetilde{K}(\mathbf{h}\boldsymbol{\alpha})-1\}\,\varphi(\boldsymbol{\alpha})d\boldsymbol{\alpha}. \tag{2.2.10'}$$

DEFINIȚIA 2.5. *Fie vectorul* $\mathbf{r}$ *întreg,* $\mathbf{r}>\mathbf{0}$, $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_q)'$ *și presupunem că*

$$k_{r_1\ldots r_q} = \lim_{\|\boldsymbol{\alpha}\|\to\infty}\frac{1-\widetilde{K}(\boldsymbol{\alpha})}{|\alpha_1|^{r_1}\ldots|\alpha_q|^{r_q}} \tag{2.2.12}$$

există și este finită. Dacă $k_{r_1\ldots r_q} \neq 0$, *atunci* $\mathbf{r}$ *se numește exponent caracteristic al transformatei* $\widetilde{K}(\boldsymbol{\alpha})$, *iar* $k_{r_2\ldots r_q}$ *se numește coeficient caracteristic.*

Noțiunea de exponent caracteristic este o extindere a noțiunii corespunzătoare din cazul unidimensional [26].

TEOREMA 10. *Dacă* $\widetilde{K}(\boldsymbol{\alpha})$ *are exponentul caracteristic* $\mathbf{r}$ *și coeficientul caracteristic* $k_{r_1\ldots r_q}$ *și dacă*
$\lim\limits_{n\to\infty}\|\mathbf{h}(n)\| = 0$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\nu\,[f_n(\mathbf{x})]}{h_1^{r_1}\ldots h_q^{r_q}} = -\,k_{r_1\ldots r_q}f^{(r_1,\ldots,r_q)}(\mathbf{x}), \tag{2.2.13}$$

unde

$$f^{(r_1,\ldots,r_q)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^q}\int e^{-i\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{x}}|\alpha_1|^{r_1}\ldots|\alpha_q|^{r_q}\,\varphi(\mathbf{u})\,d\mathbf{u}. \tag{2.2.14}$$

Demonstrație. Evident, din (2.2.10′) rezultă că

$$\frac{\nu[f_n(\mathbf{x})]}{h_1^{r_1}\ldots h_q^{r_q}} = \frac{1}{(2\pi)^q}\int e^{-i\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{x}}\,\frac{\widetilde{K}(\mathbf{h}\boldsymbol{\alpha})-1}{|h_1\alpha_1|^{r_1}\ldots|h_q\alpha_q|^{r_q}}\,|\alpha_1|^{r_1}\ldots|\alpha_q|^{r_q}\varphi(\boldsymbol{\alpha})\,d\boldsymbol{\alpha}$$

și dacă $n\to\infty$, atunci rezultă (2.2.13).

Se poate observa cu ușurință că

$$(2.2.14') \qquad f^{(r_1,\ldots,r_q)}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{r_1+\ldots+r_q} f(\mathbf{x})}{\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_q^{r_q}}$$

iar

$$(2.2.14'') \qquad k_{r_1\ldots r_q} = \int |z_1|^{r_1} \ldots |z_q|^{r_q} K(\mathbf{z})d\mathbf{z}$$

adică $k_{r_1\ldots r_q}$ este momentul de ordinul $(r_1,\ldots,r_q)$, corespunzător densității de repartiție $K(\mathbf{z})$.

În consecință, dacă presupunem că derivata parțială (2.2.14') este mărginită de o constantă M, atunci

$$(2.2.15) \qquad \left| \frac{\nu\,[f_n(\mathbf{x})]}{h_1^{r_1} \ldots h_q^{r_q}} \right| \leqslant M \cdot |k_{r_1\ldots r_q}|$$

adică corecția (care știm că tinde la zero cînd $n \to \infty$), este de ordinul lui $h_1^{r_1} \ldots h_q^{r_q}$.

Cu formula (2.2.15) se poate deci evalua corecția estimației (2.2.1) într-un punct de continuitate $\mathbf{x}$.

Folosind noțiunea de exponent caracteristic se poate determina și o evaluare a erorii medii pătratice.

Teorema 11. *Dacă $K(\alpha)$ are exponentul caracteristic r și dacă sînt satisfăcute condițiile teoremelor 7 și 8, atunci*

$$(2.2.16) \qquad \mathscr{E}_n^2(\mathbf{x}) \sim \frac{f(\mathbf{x})}{nh_1 \ldots h_q} \int K^2(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} + (h_1^{r_1} \ldots h_q^{r_q})^2 \,| k_{r_1\ldots r_q} f^{(r_1,\ldots,r_q)}(\mathbf{x}) |^2 .$$

Demonstrația teoremei rezultă din teorema 8, din teorema 10 și din relația (1.1.8'') conform căreia

$$\mathscr{E}_n^2(\mathbf{x}) = D^2\,[f_n(\mathbf{x})] + \nu^2\,[f_n(\mathbf{x})].$$

În sfîrșit, să determinăm acum pe $\mathbf{h}(n)$ astfel încît eroarea pătratică $\mathscr{E}_n^2(\mathbf{x})$ să fie minimă.

Astfel, se știe ([26], lema 4a) că funcția

$$F(u) = Au^{\alpha} + Bu^{-\beta}\,; \quad A,\, B,\, \alpha,\, \beta > 0$$

are un minim în

$$u = \left(\frac{\beta\, B}{\alpha A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

iar minimul este atins și are valoarea

$$\min_{u>0} F(u) = (\alpha + \beta) \left\{ \left(\frac{A}{\beta} \right)^{\beta} + \left(\frac{B}{\alpha} \right)^{\alpha} \right\}^{\frac{1}{\alpha+\beta}} .$$

Dacă deci în (2.2.16) luăm $u = h_1 \dots h_q$, $\alpha = 2$,

$$\beta = 1,\ A = |k_{r_1 \dots r_q} f^{(r_1, \dots, r_q)}(\mathbf{x})|^2 \neq 0,\ B = \frac{f(\mathbf{x})}{n} \int K^2(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

rezultă că minimul lui $\mathcal{E}_n^2(\mathbf{x})$ se realizează cînd

$$(2.2.17) \qquad h_1 \dots h_q = \left[\frac{Q}{n}\right]^{\frac{1}{3}};\ Q = \frac{f(\mathbf{x}) \int K^2(\mathbf{y}) d\mathbf{y}}{|2k_{r_1 \dots r_q} f^{(r_1, \dots, r_q)}(\mathbf{x})|}$$

iar

$$(2.2.18) \qquad \min_{(h_1 \dots h_q)} \mathcal{E}_n^2(\mathbf{x}) = 3 \left\{ |k_{r_1 \dots r_q} f^{(r_1, \dots, r_q)}(\mathbf{x})|^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{f(\mathbf{x})}{n} \int K_n^2(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{3}}.$$

În concluzie dacă luăm $\mathbf{h}(n) = (h_1(n), \dots, h_q(n))'$ astfel încît

$$h_i(n) = \gamma n^{-\alpha};\ \alpha = \frac{1}{3q},\ 1 \leqslant i \leqslant q;\ \gamma = Q^{\frac{1}{3q}},$$

atunci $\mathbf{h}(n)$ satisface condițiile teoremelor 7 — 9 iar eroarea pătratică $\mathcal{E}_n(\mathbf{x})$ ia o valoare minimă dată de (2.2.18). În încheierea acestui paragraf, vom demonstra o teoremă de integral consistență referitoare la funcții caracteristice care descresc algebric.

TEOREMA 12. *Fie* $f_n(\mathbf{x})$ *o estimație de tip funcție și presupunem că* $|\tilde{f}(\boldsymbol{\alpha})|^2$ este *integrabilă pe* R^q. *Dacă* $\tilde{f}(\boldsymbol{\alpha})$ *descrește algebric de gradul* $p > 0$ *și dacă*

$$(2.2.19) \qquad \int \frac{(1 - \widetilde{K}(\boldsymbol{\alpha}))^2}{|\alpha_1^{p_1} \dots \alpha_q^{p_q}|^2} d\boldsymbol{\alpha}$$

există, iar

$$(2.2.20) \qquad \mathbf{h}(n) = (h_1(n), \dots, h_q(n))';\ h_i(n) = c_i\, n^{-\frac{1}{2p}},\ c_i > 0, 1 \leqslant i \leqslant q,$$

atunci

$$(2.2.21) \qquad \lim_{n \to \infty} n^{\left(1 - \frac{q}{2p}\right)} J_n = \frac{1}{(2\pi)^q c_1 \dots c_q} \int \widetilde{K}^2(\boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha} +$$

$$+ \frac{r^q}{(2\pi)^q} \frac{(c_1^{p_1} \dots c_q^{p_q})}{c_1 \dots c_q} \int \frac{(1 - \widetilde{K}(\boldsymbol{\alpha}))^2}{|\alpha_1^{p_1} \dots \alpha_q^{p_q}|^2} d\boldsymbol{\alpha},$$

unde J_n *este MIEP corespunzătoare lui* δ_n *dat de (2.2.6) iar* r *este constanta din definiția 2.3.*

Demonstrație [29]. Din demonstrația teoremei 5. rezultă că

$$(2.2.22) \qquad (2\pi)^q n^{\left(1 - \frac{q}{2p}\right)} J_n = n^{-\frac{q}{2p}} \int \widetilde{K}^2(\mathbf{h}(n) \boldsymbol{\alpha}) [1 - |\tilde{f}(\boldsymbol{\alpha})|^2] d\boldsymbol{\alpha} +$$

$$+ n^{\left(1 - \frac{q}{2p}\right)} \int |\tilde{f}(\boldsymbol{\alpha})|^2 [1 - \widetilde{K}(\mathbf{h}(n) \boldsymbol{\alpha})]^2 d\boldsymbol{\alpha}.$$

Înlocuind pe $\mathbf{h}(n)$ din (2.2.20) în primul termen din membrul al doilea al relației precedente găsim

$$\frac{1}{c_1 \ldots c_q} \int \widetilde{K}^2(\boldsymbol{\alpha})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} - n^{-\frac{q}{2p}} \int \widetilde{K}^2(\mathbf{h}(n)\boldsymbol{\alpha}) \,|\, \tilde{f}(\boldsymbol{\alpha})\,|^2\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}$$

care tinde la

$$\frac{1}{c_1 \ldots c_q} \int \widetilde{K}^2(\boldsymbol{\alpha})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}.$$

Al doilea termen din (2.2.22) devine

$$n^{\left(1-\frac{q}{2p}\right)} \int |\, \tilde{f}(\boldsymbol{\alpha})\,|^2\, [1 - \widetilde{K}(\mathbf{h}(n)\boldsymbol{\alpha})]^2\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} = r^q \frac{(c_1^{p_1} \ldots c_q^{p_q})^2}{c_1 \ldots c_q} \int \frac{[1 - \widetilde{K}(\boldsymbol{\alpha})]^2\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{|\, \alpha_1^{p_1} \ldots \alpha_q^{p_q}\,|^2} +$$

$$+ \frac{1}{c_1 \ldots c_q} \int \frac{[1 - \widetilde{K}(\boldsymbol{\alpha})]^2}{|\, \alpha_1^{p_1} \ldots \alpha_q^{p_q}\,|^2} \times \left[\left\{ n^{\frac{1}{2}} \left|\, \tilde{f}\left(\frac{\alpha_1\, n^{\frac{1}{2p}}}{c_1}, \ldots, \frac{\alpha_q\, n^{\frac{1}{2p}}}{c_q} \right) \right| \,|\, \alpha_1^{p_1} \ldots \alpha_q^{p_q}\,| \right\}^2 - \right.$$

$$\left. - r^q\, (c_1^{p_1} \ldots c_q^{p_q})^2 \right] \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}.$$

Deoarece $\tilde{f}$ descrește algebric, rezultă că ultimul termen din membrul al doilea al ultimei relații tinde la zero cînd $n \to \infty$, deci teorema este demonstrată.

Teorema spune că dacă este satisfăcută condiția (2.2.19), atunci $f_n(\mathbf{x})$ este integral consistentă de ordinul $n^{\left(1-\frac{q}{2p}\right)}$. Din demonstrație rezultă că dacă $h_i = c_i\, n^{-\frac{1}{2r}}$, $0 < r < p$, și dacă este satisfăcută condiția (2.2.19), atunci $f_n(\mathbf{x})$ este integral consistentă de ordinul $n^{\left(1-\frac{q}{2r}\right)}$. În sfîrșit, teorema precedentă ne permite să construim o estimație pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{J_n^*}{J_n} = 1$. Într-adevăr, să presupunem că $\tilde{f}$ descrește algebric de gradul p, și să considerăm funcția pondere care are transformata Fourier de forma

$$\widetilde{K}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{1 + |\, \alpha_1^{p_1} \ldots \alpha_q^{p_q}|^2} \tag{2.2.23}$$

iar $h_i(n) = c_i\, n^{-\frac{1}{2p}}$, $1 \leqslant i \leqslant q$. Atunci (2.2.21) devine

$$\lim_{n \to \infty} n^{\left(1-\frac{q}{2p}\right)} J_n = \frac{1}{(2\pi)^q c_1 \ldots c_q} \int \frac{1 + r^q (c_1^{p_1} \ldots c_q^{p_q})^2 \cdot |\, \alpha_1^{p_1} \ldots \alpha_q^{p_q}\,|^2}{(1 + |\, \alpha_1^{p} \ldots \alpha_q^{p_q}\,|^2)^2}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}.$$

Se observă că dacă luăm $c_i = r^{-\frac{1}{2p_i}}$, $1 \leqslant i \leqslant q$, atunci membrul doi al relației precedente devine identic cu membrul doi din (2.1.6), deci estimația astfel construită este „*asimptotic eficientă*" *în sensul MIEP*.

Teorema 12 și discuțiile care o însoțesc sînt o extindere a unor rezultate din [34].

§ 2.3. ESTIMAȚIA DENSITĂȚII DE REPARTIȚIE A UNEI SUME

În acest paragraf ne vom ocupa de estimații ale convoluțiilor. În legătură cu aceasta vom găsi și o clasă de estimații nedeplasate. Rezultatele acestui paragraf au fost stabilite pentru cazul unidimensional în lucrarea [31]. Fie $\mathbf{X}$ și $\mathbf{Y}$ doi V.a. q-dimensionali și independenți, avînd respectiv densitățile de repartiție f_1 și f_2 și fie $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$. Fie selecțiile independente $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ și $\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_n$ și să notăm $\mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_{ii} = \mathbf{X}_i + \mathbf{Y}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Evident, mulțimea $\{\mathbf{Z}_i\}$ poate fi considerată o selecție asupra lui $\mathbf{Z}$, deoarece vectorii $\mathbf{Z}_i$ sînt independenți și identic repartizați.

DEFINIȚIA 2.6. *Dacă* $\{\delta_n\}_{n \in N^+}$ *este un șir* δ*-generator, atunci*

$$f_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_n(\mathbf{x} - \mathbf{Z}_j).$$

este o estimație pentru densitatea teoretică de repartiție $f(\mathbf{x})$ *a* $V.a.\mathbf{Z}$.

Teoremele 1, 2, 3 și 3′ se pot transpune cu ușurință în acest caz și nu insistăm asupra lor.

Vom defini însă o altă estimație a lui $f(\mathbf{x})$ pe care o vom studia mai detaliat.

DEFINIȚIA 2.7. *Fie* $\{\delta_n^{(1)}\}$ și $\{\delta_n^{(2)}\}$ *două șiruri* δ*-generatoare și pe baza selecțiilor menționate anterior să considerăm estimațiile* $f_{1,n}$ *și* $f_{2,n}$ *ale densităților* f_1 *respectiv* f_2. *Estimația densității de repartiție* f *a* $V.a.$ $\mathbf{Z}$, *este prin definiție*

$$f_n(\mathbf{x}) = \int f_{1,n}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f_{2,n}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \tag{2.3.1}$$

TEOREMA 13. *Dacă* $\{\delta_n^{(i)}\}$, $i = 1, 2$, *satisfac condițiile definiției 1. 3 și dacă* f_i, $i = 1, 2$, *sînt continue pe* R^q, *atunci estimația* (*2.3.1*) *este o estimație asimptotic nedeplasată.*

Demonstrație. Din (2.3.1) rezultă că

$$E[f_n(\mathbf{x})] = \int E\left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_n^{(1)}(\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{X}_j) \cdot \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_n^{(2)}(\mathbf{y} - \mathbf{Y}_j)\right] d\mathbf{y}$$

și cum $f_{1,n}$ și $f_{2,n}$ sînt v.a. independente, rezultă că

$$E[f_n(\mathbf{x})] = \int \left[\int \delta_n^{(1)}(\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{u}) f_1(\mathbf{u})\, d\mathbf{u}\right] \left[\int \delta_n^{(2)}(\mathbf{y} - \mathbf{v}) f_2(\mathbf{v})\, d\mathbf{v}\right] d\mathbf{y}.$$

Dar, conform teoremei 1, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} E[f_n(\mathbf{x})] = \int f_1(\mathbf{x}-\mathbf{y}) f_2(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

şi teorema este demonstrată.

TEOREMA 14. *Dacă* $\{\delta_n^{(i)}\}$, $i = 1, 2$, *satisfac condiţiile teoremei* 2 *şi dacă* f_i, $i = 1, 2$, *sînt continue pe* R^q, *atunci estimaţia* (2.3.1) *este consistentă.*

Demonstraţie. Este suficient să demonstrăm că $D^2[f_n(\mathbf{x})] \to 0$ cînd $n \to \infty$. Acest fapt rezultă din relaţiile

$$D^2[f_n(\mathbf{x})] = E\left\{\int [f_{1,n}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - E[f_{1,n}(\mathbf{x}-\mathbf{y})]]\, [f_{2,n}(\mathbf{y}) - E[f_{2,n}(\mathbf{y})]]\, d\mathbf{y}\right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int D^2[f_{1,n}(\mathbf{x}-\mathbf{y})]\, d\mathbf{y} \cdot \int D^2[f_{2,n}(\mathbf{y})]\, d\mathbf{y}$$

şi din teorema 2. Teorema este demonstrată. Un rezultat interesant, analog cu cel din capitolul III (teorema 20) este:

TEOREMA 15. *Dacă* f *este uniform continuă şi dacă* $(\widetilde{\delta}_n^{(i)})^2$, $i = 1, 2$, *sînt absolut integrabile, atunci estimaţia* (2.3.1) *este uniform consistentă pentru* f.

Demonstraţia acestei teoreme coincide cu demonstraţia teoremei 20, aşa încît nu o mai prezentăm aici.

Să presupunem acum că se cere să estimăm densitatea de repartiţie a V.a. $\mathbf{Z}$, cunoscînd o selecţie efectuată asupra lui $\mathbf{X}$ şi ştiind că $\mathbf{Y}$ este un V.a. normal $N(\mathbf{0}, \Sigma)$, situaţie care de fapt se întîlneşte în practică. Notăm cu $N(\mathbf{y})$ densitatea de repartiţie a lui $\mathbf{Y}$ şi cu $g(\mathbf{x})$ densitatea de repartiţie a lui $\mathbf{X}$. Atunci, evident,

$$f(\mathbf{x}) = \int N(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, g(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}, \tag{2.3.2}$$

unde

$$N(\mathbf{u}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{q}{2}} (\det \Sigma)^{\frac{1}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2}\mathbf{u}'\Sigma^{-1}\mathbf{u}}. \tag{2.3.3}$$

DEFINIŢIA 2.8. *Estimaţia densităţii de repartiţie* f *în punctul* $\mathbf{x}$ *este definită de relaţia*

$$f_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} N(\mathbf{x} - \mathbf{X}_j). \tag{2.3.4}$$

Următoarea teoremă dă proprietăţile acestor estimaţii:

TEOREMA 16. *Dacă presupunem că* g *este mărginită iar transformata sa Fourier satisface condiţia* $|g| \in L^2[R^q]$, *atunci în orice punct* $\mathbf{x} \in R^q$:

a°. *estimaţia* (2.3.4) *este o estimaţie nedeplasată pentru* $f(\mathbf{x})$;

b°. *estimaţia* (2.3.4) *este o estimaţie consistentă pentru* $f(\mathbf{x})$;

c°. *estimația* (2.3.4) *este o estimație uniform consistentă pentru* $f(\mathbf{x})$;
d°. *estimația* (2.3.4) *este o estimație asimptotic normală.*

Demonstrație. a°. În mod evident

$$E[f_n(\mathbf{x})] = f(\mathbf{x}).$$

b°. Întrucît $f(\mathbf{x})$ este media aritmetică a lui $N(\mathbf{x} - \mathbf{X})$, rezultă că

$$D^2[f_n(\mathbf{x})] = \frac{1}{n}\int [N(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})]^2 g(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\int N^2(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,g(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} - f^2(\mathbf{x})\right]$$

iar ultimul număr tinde la zero cînd $n \to \infty$.

c°. Este suficient să arătăm că

$$\lim_{n\to\infty} E\{\sup_{\mathbf{x}} |g_n(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})|^2\} = 0.$$

Trecînd la transformatele Fourier și ținînd seamă și de lema 9, rezultă

$$\tilde{f}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}'\Sigma\boldsymbol{\alpha}}\cdot\tilde{g}(\boldsymbol{\alpha})$$

$$\tilde{f}_n(\boldsymbol{\alpha}) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}'\Sigma\boldsymbol{\alpha}}\cdot\tilde{g}_n(\boldsymbol{\alpha}).$$

Deci

$$g_n(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^q}\int \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{x}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}'\Sigma\boldsymbol{\alpha}}[\tilde{g}_n(\boldsymbol{\alpha}) - \tilde{g}(\boldsymbol{\alpha})]\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}$$

de unde

$$\sup_{\mathbf{x}} |g_n(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^q}\int \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}'\Sigma\boldsymbol{\alpha}}|\tilde{g}_n(\boldsymbol{\alpha}) - \tilde{g}(\boldsymbol{\alpha})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}.$$

În consecință

$$\sup_{\mathbf{x}} |g_n(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})|^2 \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{2q}}\left(\int \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\alpha}'\Sigma\boldsymbol{\alpha}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}\right)\left(\int |\tilde{g}_n(\boldsymbol{\alpha}) - \tilde{g}(\boldsymbol{\alpha})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}\right)$$

și aplicînd valoarea medie găsim

$$E\left[\sup_{\mathbf{x}} |g_n(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})|^2\right] \leqslant \frac{1}{n}\,\frac{1}{(2\pi)^{2q}}\left(\int \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\alpha}'\Sigma\boldsymbol{\alpha}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}\right)\cdot\iint |\mathrm{e}^{i\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{x}} - \tilde{g}(\boldsymbol{\alpha})|^2 g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

iar membrul al doilea tinde la zero cînd $n \to \infty$.

d°. Demonstrația asimptotic normalității rezultă din faptul că

$$f_n(\mathbf{x}) = \bar{\xi},$$

unde

$$\xi = N(\mathbf{x} - \mathbf{X})$$

şi din faptul că ξ îndeplineşte condiţiile teoremei limită centrale (vezi [24], cap. XII, § 3 sau [4], cap. II, § 4).

În încheierea acestui paragraf constatăm că analog definiţiei 2.8, se pot considera estimaţii nedeplasate şi pentru amestecări de repartiţii.

Dacă $\mathcal{F} = \{F(\mathbf{x};\mathbf{y}), \mathbf{y} \in R^q\}$ este o familie de funcţii de repartiţie q-dimensionale şi dacă G este o funcţie de repartiţie pe R^q, astfel încît integrala

$$H(\mathbf{x}) = \int F(\mathbf{x};\ \mathbf{y})\,\mathrm{d}G(\mathbf{y}) \tag{2.3.5}$$

defineşte o funcţie de repartiţie, atunci H se numeşte *amestecarea* lui $\mathcal{F}$ cu G iar $\mathcal{F}$ se numeşte nucleul amestecării.

Să presupunem că $\mathbf{X}$ este un V.a. a cărui repartiţie este G şi fie $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ o selecţie de volum n. Atunci o estimaţie a lui $H(\mathbf{x})$, cunoscîndu-se nucleul $\mathcal{F}$, este dată de expresia

$$H_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} F(\mathbf{x};\ \mathbf{X}_j). \tag{2.3.6}$$

Teorema 16 poate fi extinsă cu uşurinţă la estimaţii de forma (2.3.6), pentru *amestecări*.

§ 2.4. ESTIMAŢIA DENSITĂŢII DE REPARTIŢIE UNIDIMENSIONALE A UNUI PROCES STAŢIONAR ÎN SENS TARE

Rezultatele ce se expun în acest paragraf sînt prezentate în lucrarea [33].

Fiind dat un cîmp de probabilitate $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$ şi un proces staţionar în sens tare $x(t, \omega)$, $t \in R$, definit pe acest cîmp, să presupunem că $x(t, \omega)$ este măsurabil pe $R\, x\, \Omega$ în raport cu măsura produs $\mathrm{d}t x \mathrm{d}P$ ($\mathrm{d}t$ este măsura Lebesgue), este metric tranzitiv şi de asemenea presupunem că $E[|x(t, \omega)|] < \infty$. În aceste condiţii se ştie ([13], cap. I) că aproape pentru orice ω, limita

$$x^*(\omega) = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} x(t, \omega)\,\mathrm{d}t \tag{2.4.1}$$

există şi este finită (teorema ergodică).

Vom presupune în plus că procesul $x(t, \omega)$ este D-integrabil, adică

$$\int\!\!\int_{R \times \Omega} | x(t, \omega) |\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}P(\omega) \tag{2.4.2}$$

există şi este finită. Deci din teorema lui Fubini rezultă că

$$\int_R x(t, \omega)\,\mathrm{d}t$$

există aproape pentru orice ω, este finită şi măsurabilă pe Ω.

Notăm cu $F(a)$ şi $f(a)$ respectiv funcţia de repartiţie şi densitatea de repartiţie unidimensională a procesului $x(t, \omega)$ şi fie $x_t(\omega)$ o realizare a acestui proces. Atunci funcţia

$$e_t(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x_t(\omega) \leqslant a \\ 0 & \text{dacă } x_t(\omega) > a \end{cases} \tag{2.4.3}$$

este integrabilă pe $\mathcal{T} \times \Omega$, unde $\mathcal{T} = [-T, T]$.

Din teorema lui Fubini rezultă că măsura

$$m\{\omega;\, x_t(\omega) \leqslant a;\, |t| \leqslant T\} = \int_{-T}^{T} e_t(\omega)\, \mathrm{d}t$$

există şi este finită aproape pentru orice ω. U. Grenander ([13], § 5.14) defineşte estimaţia funcţei de repartiţie $F(a)$ ca fiind dată de statistica

$$F_T(a;\omega) = \frac{1}{2T}\, m\{\omega;\, x_t(\omega) \leqslant a;\, |t| \leqslant T\} \tag{2.4.4}$$

şi arată că este o estimaţie consistentă pentru $F(a)$ în orice punct de continuitate al acesteia.

Să considerăm acum funcţia

$$\varepsilon_t(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } a - h < x_t(\omega) \leqslant a + h \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \tag{2.4.5}$$

unde $h = h(T) > 0$ şi

$$\lim_{T\to\infty} h(T) = 0. \tag{2.4.6}$$

Să notăm

$$\mu_T(a;\omega) = \mu\{\omega;\, a - h(T) < x_t(\omega) \leqslant a + h(T);\, |t| \leqslant T\} = \int_{-T}^{T} \varepsilon_t(\omega)\, \mathrm{d}t.$$

Măsura μ_T există deoarece $\varepsilon_t(\omega)$ este integrabilă pe $\mathcal{T} \times \Omega$.

DEFINIŢIA 2.9. *Statistica*

$$f_T(a;\omega) = \mu_T(a;\omega) \cdot \frac{1}{2T} \cdot \frac{1}{2h(T)} \tag{2.4.7}$$

este o estimaţie a densităţii de repartiţie unidimensionale f în punctul a.

TEOREMA 17. *Dacă funcţia teoretică de repartiţie F este absolut continuă, iar procesul $x(t, \omega)$ satisface condiţiile precizate anterior, atunci estimaţia definită de relaţia* (2.4.7) *este o estimaţie consistentă pentru $f(a)$ în orice punct a de continuitate al acesteia.*

Demonstraţie. Dacă, în (2.4.5), h este fixat, atunci, conform teoremei ergodice, următoarele relaţii au loc aproape pentru orice ω:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varepsilon_t(\omega)\, \mathrm{d}t = E[\varepsilon_t(\omega)] = P[a - h < x_t(\omega) \leqslant a + h] =$$

$$= F(a + h) - F(a - h) = f(c)\cdot 2h,\ c \in (a - h, a + h).$$

De aici rezultă că aproape pentru orice ω

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2h(T)} \cdot \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varepsilon_t(\omega)\, \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} f_T(a\,;\,\omega) = f(a)$$

deoarece $c \to a$ cînd $T \to \infty$ şi f este continuă în a. Teorema este demonstrată.

Dacă luăm în considerare estimaţia funcţiei de repartiţie F_T, definită de U. Grenander, constatăm că

$$f_T(a\,;\,\omega) = \frac{1}{h(T)} \int K\left(\frac{a-y}{h(T)}\right) \mathrm{d}F_T(y\,;\,\omega) \tag{2.4.8}$$

integrala fiind extinsă la toată dreapta R, unde

$$K(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{dacă } |z| \leqslant 1 \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases} \tag{2.4.8'}$$

Evident,

$$E[f_T(a\,;\,\omega)] = \frac{1}{h(T)} \int K\left(\frac{a-y}{h(T)}\right) f(y)\, \mathrm{d}y$$

deci (2.4.8) este o estimaţie de tip funcţie. Ţinînd seamă de teorema 7, (cazul $q = 1$), rezultă

TEOREMA 18. *Dacă K este o densitate de repartiţie unidimensională care satisface condiţiile*

$$\sup_{y\in R} |K(y)| < \infty$$

$$\int |K(y)|\, \mathrm{d}y < \infty$$

$$\lim_{|y|\to\infty} |y\, K(y)| = 0$$

şi dacă funcţia pozitivă $h(T)$ satisface condiţia (2.4.6), *atunci estimaţia* (2.4.8) *este o estimaţie asimptotic nedeplasată pentru f în orice punct a de continuitate al acesteia.*

Demonstraţia acestei teoreme rezultă ca un caz particular al teoremei 7. O demonstraţie directă este dată în [33].

Pentru estimaţia de tip funcţie se menţine şi proprietatea de consistenţă.

TEOREMA 19. *Dacă funcţia pondere K satisface condiţiile teoremei* 18 *şi este cu variaţie mărginită, atunci estimaţia $f_T(a\,;\,\omega)$ definită de* (2.4.8) *este o estimaţie consistentă pentru $f(a)$ în orice punct de continuitate al acesteia.*

Demonstraţie. Observăm mai întîi că

$$(2.4.9)\quad f_T(a\,;\,\omega) - f(a) = f_T(a\,;\,\omega) - \frac{1}{h(T)}\int K\left(\frac{a-y}{h(T)}\right) f(y)\,\mathrm{d}y + \\ + \left[\frac{1}{h(T)}\int K\left(\frac{a-y}{h(T)}\right) f(y)\,\mathrm{d}y - f(a)\right].$$

Deoarece $K(y)$ este cu variaţie mărginită, rezultă că

$$f_T(a\,;\,y) - \frac{1}{h(T)}\int K\left(\frac{a-y}{h(T)}\right) f(y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{h(T)}\int K\left(\frac{a-y}{h(T)}\right)\mathrm{d}F_T(y\,;\,\omega) - \frac{1}{h(T)}\int K\left(\frac{a-y}{h(T)}\right)\mathrm{d}F(y) =$$

$$= \frac{1}{h(T)} K\left(\frac{a-y}{h(T)}\right)[F_T(y\,;\,\omega) - F(y)]\Bigg|_{y=-\infty}^{+\infty} +$$

$$+ \int [F_T(a-h(T)\,z\,;\,\omega) - F(a-h(T)\,z)]\,\mathrm{d}K(z).$$

Să observăm că primul termen din membrul doi al ultimei egalităţi tinde către zero aproape pentru orice ω cînd $T \to \infty$. Deci aproape pentru orice ω,

$$f_T(a\,;\,\omega) - \frac{1}{h(T)}\int K\left(\frac{a-y}{h(T)}\right) f(y)\,\mathrm{d}y \sim$$

$$\sim \int [F_T(a-h(T)\,z\,;\,\omega) - F_T(a-h(T)z]\,\mathrm{d}K(z),$$

unde semnul $\sim$ înseamnă egalitate asimptotică în raport cu T.

Dacă în ultima relaţie $T \to \infty$, atunci rezultă că aproape pentru orice ω avem

$$\lim_{T\to\infty}\left[f_T(a\,;\,\omega) - \frac{1}{h(T)}\int K\left(\frac{a-y}{h(T)}\right) f(y)\,\mathrm{d}y\right] = 0$$

şi dacă ţinem seama de teorema 18, rezultă că aproape pentru orice ω avem

$$\lim_{T\to\infty} f_T(a\,;\,\omega) = f(a)$$

şi cu aceasta teorema este demonstrată.

Înainte de a încheia acest paragraf, menţionăm faptul că teoria referitoare la estimaţia densităţii de repartiţie a unui proces staţionar deşi nu are aplicaţii directe, ea prezintă un deosebit interes pentru statistica proceselor stohastice.

CAPITOLUL III

APLICAŢII

Acest capitol este consacrat unor aplicaţii care derivă din teoria generală prezentată în capitolul I. Paragraful întîi este consacrat studiului estimaţiei modului în cazul vectorilor aleatori. Ultimele trei paragrafe sînt consacrate ,,regularizării'' unor estimaţii în sensul precizat în § 1.2, pct. C. Probleme similare pentru cazul unidimensional au fost considerate de diverşi autori în lucrările [18], [20], [22], [26], [35], [36], [37].

Proprietăţile estimaţiilor siguranţei în funcţionare, raportului de hazard şi funcţiei de regresie sînt prezentate de asemenea în cadrul multidimensional.

§ 3.1. ESTIMAŢIA MODULUI UNUI VECTOR ALEATOR

În acest paragraf vom studia estimaţia modului unui V.a., extinzînd la cazul multidimensional unele rezultate ale lui Parzen [26]. De asemenea sînt prezentate unele rezultate ale autorului [32] precum şi un rezultat nou (asimptotic normalitatea multidimensională).

DEFINIŢIA 3.1. *Se numeşte mod al V.a.* $\mathbf{X}$, *punctul* $\boldsymbol{\theta} \in R^q$ *care este maxim local al densităţii de repartiţie.*

Deci există o vecinătate $\mathcal{V}_{\boldsymbol{\theta}} \subset R^q$ a lui $\boldsymbol{\theta}$, astfel încît

$$f(\boldsymbol{\theta}) = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{V}_{\boldsymbol{\theta}}} f(\mathbf{x}).$$

Evident,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\theta}} = 0, \ 1 \leqslant i \leqslant q$$

şi

$$\mathbf{U}'\mathbf{A}\,\mathbf{U} < 0,$$

unde $\mathbf{U} = \mathbf{Z} - \boldsymbol{\theta}$, iar $\mathbf{A}$ este matricea ale cărei elemente sînt

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\right)_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\theta}}.$$

DEFINIŢIA 3.2. *Punctul* $\boldsymbol{\theta}_n \in R^q$ *care este punct de maxim al lui* f_n *definită de* (1.2.7) *pe vecinătatea* $\mathcal{V}_{\boldsymbol{\theta}}$ *este estimaţia lui* $\boldsymbol{\theta}$.

Evident,

$$\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_i}\right)_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\theta}_n} = 0, \ 1 \leqslant i \leqslant q \tag{3.1.1}$$

şi

$$\mathbf{U}'\mathbf{A}_n\mathbf{U} < 0,$$

unde $\mathbf{A}_n$ este matricea ale cărei elemente sînt

$$a_{ij}^{(n)} = \left(\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i\, \partial x_j}\right)_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\theta}_n}.$$

LEMA 10. [26]. *Dacă densitatea teoretică de repartiție f a V.a.* $\mathbf{X}$ *este uniform continuă și are un mod unic* $\boldsymbol{\theta}$, *atunci pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există* $\eta > 0$ *astfel încît pentru orice* $\mathbf{x}$ *cu proprietatea* $\|\boldsymbol{\theta} - \mathbf{x}\| > \varepsilon$, *să avem* $|f(\boldsymbol{\theta}) - f(\mathbf{x})| > \eta$.

Demonstrație. Dacă proprietatea ar fi falsă, atunci ar exista un $\varepsilon > 0$ și un șir $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu \in N_+}$ astfel încît $|f(\boldsymbol{\theta}) - f(\mathbf{x}_\nu)| < \frac{1}{\nu}$ să implice $\|\boldsymbol{\theta} - \mathbf{x}_\nu\| \geqslant \varepsilon$. Există deci $\boldsymbol{\theta}^*$ astfel ca $|f(\boldsymbol{\theta}) - f(\boldsymbol{\theta}^*)| < \frac{1}{\nu}$ și $\|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*\| \geqslant \varepsilon$, fapt care contrazice ipoteza că modul este unic și deci lema este demostrată.

TEOREMA 20. [32]. *Dacă f este uniform continuă pe R^q, admite transformată Fourier astfel încît* $|\varphi|^2, (\varphi = \widetilde{f})$, *este integrabilă și dacă* $\widetilde{a}_n = \int |\widetilde{\delta}_n(\boldsymbol{\alpha})|^2\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}$ *există, iar*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\widetilde{a}_n}{n} = 0, \tag{3.1.2}$$

atunci $\boldsymbol{\theta}_n$ *este o estimație consistentă pentru* $\boldsymbol{\theta}$.

Demonstrație. Datorită relației

$$|f(\boldsymbol{\theta}_n) - f(\boldsymbol{\theta})| \leqslant 2 \sup_{\mathbf{x}\in R^q} |f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})|$$

este suficient, conform lemei 10, să arătăm că f_n definit de (1.2.7) este o estimație uniform consistentă pentru f, adică

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\sup_{\mathbf{x}\in R^q} |f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon\right] = 1, \ \varepsilon > 0.$$

Pentru a demonstra această proprietate, dacă ținem seamă de teorema 1[1], este suficient să demonstrăm că

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\sup_{\mathbf{x}\in R^q} |f_n(\mathbf{x}) - E\,[f_n(\mathbf{x})]|^2\right] = 0.$$

Într-adevăr, dacă ținem seamă de lema 9, rezultă că

$$\sup_{\mathbf{x}\in R^q} |f_n(\mathbf{x}) - E\,[f_n(\mathbf{x})]| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^q} \int |\widetilde{\delta}_n(\boldsymbol{\alpha})| \cdot |\varphi_n(\boldsymbol{\alpha}) - \varphi(\boldsymbol{\alpha})|\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}.$$

---

[1] Dacă f este uniform continuă, atunci $E\,[f_n(\mathbf{x})]$ converge uniform către $f(\mathbf{x})$.

Dacă aplicăm acum inegalitatea lui Schwarz și apoi operatorul E, rezultă că

$$E\,[\sup_{\mathbf{x}} |f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})|^2] \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{2q}} \int |\tilde{\delta}_n(\alpha)|^2 \, d\alpha \cdot \int E\, |\varphi_n(\alpha) - \varphi(\alpha)|^2 \, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2q}} \cdot \tilde{a}_n \cdot \frac{1}{n} \iint |\, e^{i\alpha'\mathbf{x}} - \varphi(\alpha)\,|^2 f(\mathbf{x}) \, d\alpha \, d\mathbf{x}$$

care prin ipoteză tinde la zero cînd $n \to \infty$.
Teorema este demonstrată.

În cazul estimațiilor de tip funcție teorema are un enunț analog; se cere ca $\int |\tilde{K}(\alpha)|^2 \, d\alpha$ să existe, $|\varphi|^2$ să fie integrabilă iar condiția (3.1.2) se înlocuiește cu condiția

$$\lim_{n\to\infty} n h_1^2 \dots h_q^2 = \infty. \tag{3.1.2'}$$

Ne vom ocupa acum de problema asimptotic normalității estimației modului.

TEOREMA 21. *Dacă funcția f are derivate parțiale de ordinul doi continue în vecinătatea modului unic $\boldsymbol{\theta}$ și dacă $\{\delta_n(\mathbf{x})\}_{n\in N_+}$ satisface condițiile* :

a) *Pentru fiecare n, δ_n are orice derivate de ordinul doi continue în vecinătatea lui $\boldsymbol{\theta}$.*

b) *Următoarele integrale*

$$I_{n,i}^2 = \int \left| \frac{\partial \delta_n(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right|^2 d\mathbf{x}, \quad I_{n,i}^{2+\eta} = \int \left| \frac{\partial \delta_n(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right|^{2+\eta} d\mathbf{x}, \quad 1 \leqslant i \leqslant q$$

există și sînt finite pentru fiecare n și în plus sînt satisfăcute condițiile

$$\lim_{n\to\infty} I_{n,i}^2 < \infty, \quad \lim_{n\to\infty} I_{n,i}^{2+\eta} < \infty, \quad 1 \leqslant i \leqslant q,$$

atunci $\boldsymbol{\theta}_n - \boldsymbol{\theta}$ are asimptotic, cînd $n \to \infty$, o repartiție normală q-dimensională.

Demonstrație. Dacă în relația (3.1.1) aplicăm formula lui Taylor obținem

$$-\frac{\partial f_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{q} (\theta_{n,j} - \theta_j) \frac{\partial^2 f_n(\boldsymbol{\theta}^{(i)})}{\partial x_i \, \partial x_j}, \quad 1 \leqslant i \leqslant q, \tag{3.1.3}$$

unde $\theta_{n,j}$ și θ_j, $1 \leqslant j \leqslant q$, sînt respectiv componentele lui $\boldsymbol{\theta}_n$ și $\boldsymbol{\theta}$ iar

$$\frac{\partial f_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\theta}}; \quad \frac{\partial^2 f_n(\boldsymbol{\theta}^{(i)})}{\partial x_i \, \partial x_j} = \left(\frac{\partial^2 f_n(\mathbf{x})}{\partial x_i \, \partial x_j} \right)_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\theta}^{(i)}}$$

cu $\|\boldsymbol{\theta}^{(i)} - \boldsymbol{\theta}\| \leqslant \|\boldsymbol{\theta}_n - \boldsymbol{\theta}\|$, $1 \leqslant i \leqslant q$.

Pentru a demonstra că $\boldsymbol{\theta}_n - \boldsymbol{\theta}$ are asimptotic o repartiție normală, vom proceda în felul următor. Vom considera un sistem arbitrar de numere $\{t_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant q$, și vom arăta că

$$\sum_{i=1}^{q} t_i \frac{\partial f_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial x_i} \tag{3.1.4}$$

are asimptotic o repartiţie normală. Întrucît din (3.1.3) se deduce că

$$-\sum_{i=1}^{q} t_i \frac{\partial f_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{q} (\theta_{n,j} - \theta_j) \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial^2 f_n(\boldsymbol{\theta}^{(i)})}{\partial x_i \partial x_j} \tag{3.1.5}$$

dacă vom demonstra că $\frac{\partial^2 f_n(\boldsymbol{\theta}^{(i)})}{\partial x_i \partial x_j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant q$, converge în probabilitate cînd $n \to \infty$ către $\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{\theta})}{\partial x_i \partial x_j}$, atunci, conform lemei 6, demonstraţia teoremei este terminată.

Arătăm deci mai întîi că v.a. (3.1.4) este asimptotic normală. Întradevăr, se observă că

$$\sum_{i=1}^{q} t_i \frac{\partial f_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{q} t_i \frac{\partial \delta_n(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{X}_j)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} V_{n,j},$$

unde variabilele aleatoare $V_{n,j}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, sînt independente şi identic repartizate ca v.a. :

$$V_n = \sum_{i=1}^{q} t_i \frac{\partial \delta_n(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{X})}{\partial x_i}.$$

Conform [15], (§ 20, pct. 20.1), este deci suficient să arătăm că pentru orice $\eta > 0$ avem

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{\frac{\eta}{2}}} E\left[\left|\frac{V_n - E[V_n]}{\{D^2[V_n]\}^{\frac{1}{2}}}\right|^{2+\eta}\right] = 0. \tag{3.1.6}$$

Să notăm $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_q)'$. Avem

$$|V_n - E[V_n]| = \left|\sum_{i=1}^{q} t_i \left[\frac{\partial \delta_n(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{X})}{\partial x_i} - E\left[\frac{\partial \delta_n(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{X})}{\partial x_i}\right]\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \|\mathbf{t}\| . \|\operatorname{grad}_{\boldsymbol{\theta}} \delta_n(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{X}) - E[\operatorname{grad}_{\boldsymbol{\theta}} \delta_n(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{X})]\|$$

deci, pentru orice $\eta > 0$,

$$E[|V_n - E[V_n]|^{2+\eta}] \leqslant \|\mathbf{t}\|^{2+\eta} \int \left(\sum_i \left(\frac{\partial \delta_n(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y})}{\partial x_i} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - E\left[\frac{\partial \delta_n(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{X})}{\partial x_i}\right]\right)^2\right)^{\frac{2+\eta}{2}} f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \leqslant \int \left(\sum_i \left|\frac{\partial \delta_n(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y})}{\partial x_i} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - E\left[\frac{\partial \delta_n(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{X})}{\partial x_i}\right]\right|\right)^{2+\eta} f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} < \infty.$$

În mod analog se arată că

$$D^2[V_n] < \infty$$

şi deci, conform ipotezei b), rezultă că (3.1.6) este satisfăcută. Să observăm în plus că

$$E\left[\frac{\partial f_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial x_i}\right] = \int \frac{\partial \delta_n(\boldsymbol{\theta}-\mathbf{y})}{\partial x_i} f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = \int \frac{\partial f(\boldsymbol{\theta}-\mathbf{y})}{\partial x_i} \delta_n(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}$$

care, evident, conform teoremei 1, tinde la $\frac{\partial f(\boldsymbol{\theta})}{\partial x_i} = 0$ cînd $n \to \infty$.

Să ne referim acum la membrul doi al relaţiei (3.1.3). După cum se ştie ([4], cap. I, § 4, pct. 2), deoarece $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant q$, sînt continue în vecinătatea lui $\boldsymbol{\theta}$, rezultă că

$$\frac{\partial^2 f_n(\boldsymbol{\theta}_n)}{\partial x_i\, \partial x_j} \xrightarrow{\;p\;} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{\theta})}{\partial x_i\, \partial x_j}, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant q$$

şi deci

$$\frac{\partial^2 f_n(\boldsymbol{\theta}^{(i)})}{\partial x_i\, \partial x_j} \xrightarrow{\;p\;} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{\theta})}{\partial x_i\, \partial x_j}, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant q.$$

În consecinţă, membrul doi al relaţiei (3.1.5) are asimptotic aceeaşi repartiţie ca v.a.

$$\sum_{r=1}^{q} (\theta_{n,r} - \theta_r)\, t_r^*, \tag{3.1.7}$$

unde

$$t_r^* = \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial^2 f_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial x_r\, \partial x_j} t_j, \qquad 1 \leqslant r \leqslant q$$

este un sistem de numere. Dar repartiţia asimptotică a v. a. $\sum\limits_r (\theta_{n,r} - \theta_r)\, t_r^*$ este aceeaşi cu a v.a. $\sum\limits_i \frac{\partial f_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial x_i} t_i$, adică o repartiţie normală unidimensională.

Teorema este deci demonstrată.

Vom determina acum media şi matricea de covarianţă a repartiţiei limită.

Se observă mai întîi că

$$\mathrm{Cov}\left(\frac{\partial f_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial x_i}, \frac{\partial f_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{n} \int \frac{\partial \delta_n(\boldsymbol{\theta}-\mathbf{y})}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \delta_n(\boldsymbol{\theta}-\mathbf{y})}{\partial x_j} f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}$$

deci

$$\mathrm{Cov}\left(\sqrt{n}\,\frac{\partial f_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial x_i}, \sqrt{n}\,\frac{\partial f_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial x_j}\right) = \int \frac{\partial \delta_n(\boldsymbol{\theta}-\mathbf{y})}{\partial x_i} \frac{\partial \delta_n(\boldsymbol{\theta}-\mathbf{y})}{\partial x_j} f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}.$$

Să notăm cu $\sum_n$ matricea ale cărei elemente sînt $\sigma_{ij}^{(n)}$ date de integrala din relaţia precedentă şi fie

$$\sum = \lim_{n \to \infty} \sum\nolimits_n.$$

De asemenea să notăm cu $\mathbf{A}_n$ matricea ale cărei elemente sînt

$$a_{ij}^{(n)} = \frac{\partial^2 f_n(\boldsymbol{\theta}^{(i)})}{\partial x_i \, \partial x_j}, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant q$$

şi fie

$$\mathbf{A} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{A}_n$$

care este o matrice nedegenerată.

Sistemul (3.1.5) se scrie

$$-\sqrt{n}\,\mathrm{grad}_{\boldsymbol{\theta}} f_n(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{A}_n \sqrt{n}\,(\boldsymbol{\theta}_n - \boldsymbol{\theta}).$$

Dacă notăm cu $\boldsymbol{\Gamma}_n$ matricea de covariantă a V.a. $\sqrt{n}\,(\boldsymbol{\theta}_n - \boldsymbol{\theta})$, atunci rezultă că

$$\sum\nolimits_n = \mathbf{A}_n \boldsymbol{\Gamma}_n \mathbf{A}_n'$$

sau trecînd la limită avem

$$\sum = \mathbf{A}\boldsymbol{\Gamma}_\infty \mathbf{A}'.$$

În consecinţă, repartiţia asimptotică a V.a. $\sqrt{n}\,(\boldsymbol{\theta}_n - \boldsymbol{\theta})$ este $N(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{A}^{-1} \sum (\mathbf{A}')^{-1})$.

Cu aceasta încheiem consideraţiile referitoare la asimptotic normalitate.

Teorema de mai sus permite construirea unei regiuni de încredere multidimensională pentru $\boldsymbol{\theta}$. Pentru n suficient de mare, regiunea de încredere corespunzătoare nivelului α, $(0 < \alpha < 1)$, este

(3.1.8) $$n[A_n(\boldsymbol{\theta}_n - \boldsymbol{\theta})]' \sum\nolimits_n^{-1} [\mathbf{A}_n(\boldsymbol{\theta}_n - \boldsymbol{\theta})] \leqslant \chi_q^2(\alpha),$$

unde $\chi_q^2(\alpha)$ este α-quantila superioară a variabilei χ^2 centrată cu q grade de libertate.

§ 3.2. ESTIMAŢIA SIGURANŢEI ÎN FUNCŢIONARE

Se ştie că durata în funcţionare a unui sistem este o v.a. τ. Pentru fiecare t fixat, funcţia

(3.2.1) $$R(t) = 1 - F(t) = P(\tau > t)$$

se numeşte *funcţie de siguranţă.*

Problema estimării funcţiei $R(t)$, cînd t este punct de continuitate pentru F, a fost tratată de Murthy [18].

În acest paragraf vom presupune că sistemul este format din q, $(q > 1)$, elemente, fiecare element fiind caracterizat de o anumită durată de funcţionare, aleatoare. Ne propunem să estimăm *funcţia de siguranţă globală a sistemului*, adică funcţia de repartiţie q-dimensională a V.a. $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_q)'$. Evident, probabilitatea ca sistemul să funcţioneze o perioadă de timp mai mare decît t, cînd elementele sînt legate în serie (nu neapărat independente) este dată de relaţia

(3.2.2) $$R(t) = 1 - F(\mathbf{t}_0), \quad \mathbf{t}_0 = (t, \ldots, t)' \in R^q.$$

Pentru a estima funcţia (3.3.2) este desigur necesar să cunoaştem estimaţii ale funcţiei de repartiţie multidimensionale.

Estimaţia definită de (1.1.1) este una din cele mai simple estimaţii ale funcţiei $F(\mathbf{x})$ şi deci formula (3.2.2) ne permite construirea unei estimaţii a lui $R(\mathbf{x})$. Întrucît această estimaţie nu este regulată, vom construi o altă estimaţie a lui $R(\mathbf{x})$, regulată, folosind estimaţia densităţii de repartiţie (1.2.7).

Fiind dat şirul de funcţii δ-generator $\{\delta_n\}_{n\in N_+}$ notăm

$$H_n(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}}^{\infty} \delta_n(\mathbf{u})\,\mathrm{d}\mathbf{u} = \int_{x_1}^{\infty} \dots \int_{x_q}^{\infty} \delta_n(\mathbf{u})\,\mathrm{d}\mathbf{u}.$$

DEFINIŢIA 3.3. *Estimaţia funcţiei de siguranţă este*

$$R_n^*(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} H_n(\mathbf{x} - \mathbf{X}_j). \tag{3.2.3}$$

Relaţia (3.2.3) este

$$R_n^*(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}}^{\infty} f_n(\mathbf{u})\,\mathrm{d}\mathbf{u}. \tag{3.2.3'}$$

TEOREMA 22. *În orice punct* $\mathbf{x}$ *estimaţia* (3.2.3) *este o estimaţie nedeplasată şi consistentă pentru* $R(\mathbf{x})$.

Dacă este îndeplinită şi condiţia

$$0 < F(\mathbf{x}) < 1,$$

atunci estimaţia (3.2.3) *este asimptotic normală.*

Demonstraţie. Să observăm mai întîi că

$$E[R_n^*(\mathbf{x})] = E[H_n(\mathbf{x} - \mathbf{X})] = \int H_n(\mathbf{x} - \mathbf{y})\,\mathrm{d}F(\mathbf{y}).$$

Dar, deoarece $\{\delta_n\}$ este un şir δ-generator, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} H_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = H(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} - \mathbf{y} < 0 \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty} E[R_n^*(\mathbf{x})] = \int H(\mathbf{x} - \mathbf{y})\,\mathrm{d}F(\mathbf{y}) = \int_{x}^{\infty} \mathrm{d}F(\mathbf{y}) = R(\mathbf{x}),$$

adică $R_n^*(\mathbf{x})$ este o estimaţie asimptotic nedeplasată a lui $R(\mathbf{x})$.

Să considerăm acum eroarea pătratică

$$E[(R_n^*(\mathbf{x}) - E[R_n^*(\mathbf{x})])^2] = D^2[R_n^*(\mathbf{x})] + (E[R_n^*(\mathbf{x})] - R(\mathbf{x}))^2.$$

Conform rezultatului precedent rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} (E[R_n^*(\mathbf{x})] - R(\mathbf{x}))^2 = 0.$$

Ne rămîne să studiem numai dispersia, deci

$$D^2[R_n(\mathbf{x})] = \frac{1}{n}\{E[H_n^2(\mathbf{x} - \mathbf{X})] - (E[H_n(\mathbf{x} - \mathbf{X})])^2\}. \tag{3.2.4}$$

Cum

$$E[H_n^2(\mathbf{x}-\mathbf{X})] = \int H_n^2(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\mathrm{d}F(\mathbf{y}),$$

rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} E[H_n^2(\mathbf{x}-\mathbf{X})] = \int H^2(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\mathrm{d}F(\mathbf{y}) = R(\mathbf{x}).$$

În consecință, din (3.2.4) se deduce că

$$\lim_{n\to\infty} D^2[R_n^\star(\mathbf{x})] = \frac{1}{n} R(\mathbf{x})\,[1 - R(\mathbf{x})]$$

deci (3.2.3) este o estimație consistentă pentru $R\,(t)$.

Pentru a demonstra asimptotic normalitatea este suficient să demonstrăm relația (3.1.6),unde

$$V_n = H_n(\mathbf{x}-\mathbf{X}),\; R_n^*(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_j V_{n,j},\; V_{n,j} = H_n(\mathbf{x}-\mathbf{X}_j).$$

Să notăm

$$\sigma_n^2 = D^2[H_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})].$$

Conform rezultatelor precedente deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = R(\mathbf{x})\,(1 - R(\mathbf{x})) < \infty,\; \lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 \neq 0$$

și în plus

$$E\left[\left|\frac{V_n - E[V_n]}{\{D^2[V_n]\}^{\frac{1}{2}}}\right|^{2+\eta}\right] \leqslant \frac{E[|H_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})|^{2+\eta}}{\sigma_i^{2+\eta}} + \frac{\{E[|H_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})|]\}^{2+\eta}}{\sigma_n^{2+\eta}}.$$

Întrucît următoarele relații sînt adevărate

$$\lim_{n\to\infty} E\,[\,|H_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})|^{2+\eta}\,] < \infty,\; \lim_{n\to\infty} |E\,[H_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})]\,|^{2+\eta} < \infty$$

rezultă că (3.1.6) este satisfăcută și deci teorema este demonstrată.

Pe baza proprietății de asimptotic normalitate se poate construi și o regiune de încredere pentru $R(t)$, ca în § 3.4, însă asupra acestui fapt nu mai insistăm aici. În încheierea acestui paragraf vom da două exemple de construcție a estimației funcției de siguranță folosind funcții pondere.

a) Dacă considerăm funcția pondere

$$K\,(x_1, \ldots, x_q) = \frac{1}{\pi^q}\prod_{i=1}^{q}\frac{1}{1+x_i^2}$$

și construim șirul δ-generator ca în (1.2.3), unde

$$\text{(3.2.5)}\qquad \mathbf{h}(n) = (h_1(n), \ldots, h_q(n))',\; h_i(n) = n^{-\alpha},\; 0 < \alpha < \frac{1}{q}.$$

atunci estimaţia funcţiei de siguranţă definită conform formulei (3.2.3) este

$$R_n^*(t) = \frac{1}{n\pi^q}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n^\alpha(t-\tau_{1,j})\right]\cdots\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n^\alpha(t-\tau_{q,j})\right].$$

b) Dacă considerăm funcţia pondere

$$K(x_1, \ldots, x_q) = \frac{1}{2^q}\,\mathrm{e}^{-\sum\limits_{i=1}^{q}|x_i|}$$

iar şirul $\mathbf{h}(n)$ este definit de (3.2.5), atunci estimaţia funcţiei de siguranţă este

$$R_n^*(t) = \frac{\mathrm{e}^{-qn^\alpha t}}{2^q}\sum_{j=1}^{q}\mathrm{e}^{-n^\alpha r(\boldsymbol{\tau}_j)},$$

unde $r(\boldsymbol{\tau}) = \sum\limits_{i=1}^{q}\tau_i$, dacă $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots \tau_q)'$.

În formulele precedente $\boldsymbol{\tau}_j = (\tau_{1,j}, \ldots, \tau_{q,j})'$, $1 \leqslant j \leqslant n$, sînt observaţii efectuate asupra vectorului aleator $\boldsymbol{\tau}$.

§ 3.3. ESTIMAŢIA RAPORTULUI DE HAZARD

Fiind dată o v.a. a cărei funcţie de repartiţie este $F(x)$ şi care admite densitatea de repartiţie $f(x)$, se numeşte *raport de hazard* al acestei v.a., funcţia

$$h(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}. \tag{3.3.1}$$

Se observă că

$$h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{P(x < X < x + \mathrm{d}x)}{P(x < X)} = P(x < X < x + \mathrm{d}x/X > x). \tag{3.3.1'}$$

În teoria siguranţei, unde variabila aleatoare este durata în funcţionare, funcţia $h(x)$ se numeşte *pericol de defectare* sau *intensitate de defectare* (de eşec). În teoriile epidemiologice $h(x)$ este cunoscut sub numele de *intensitate de îmbolnăvire*, iar în teoria mortalităţii *pericol de deces*.

Se poate observa că dacă v.a. are o repartiţie exponenţială de parametru λ, atunci $h(x) = \text{const.} = \lambda$. Problema estimării lui $h(x)$ definit de (3.3.1) a fost considerată în [18], [35] şi [36]. În acest paragraf ne vom ocupa de problema estimării raportului de hazard în cazul multidimensional. Acest lucru este important pentru caracterizarea pericolului de defectare, în cazul funcţionării sistemelor cu mai multe elemente. Dacă folosim notaţiile din (3.2.2), pericolul de defectare la momentul t este dat de relaţia

$$h(t) = \frac{f(\mathbf{t}_0)}{R(\mathbf{t}_0)},\quad \mathbf{t}_0 = (t, \ldots, t)' \in R^q. \tag{3.3.2}$$

DEFINIȚIA 3.4. *Estimația raportului de hazard este definită de relația*

$$h_n^*(\mathbf{x}) = \frac{f_n(\mathbf{x})}{R_n^*(\mathbf{x})}, \quad x \in R^q, \tag{3.3.3}$$

unde $f_n(\mathbf{x})$ *este definită de* (1.2.7) *iar* $R_n^*(\mathbf{x})$ *este definită de* (3.2.3).

TEOREMA 23. *Dacă* $\mathbf{x}$ *este punct de continuitate pentru* h *și dacă este satisfăcută relația* (1.2.9), *atunci estimația* (3.3.3) *este o estimație consistentă și asimptotic nedeplasată pentru* $h(\mathbf{x})$.

Dacă în plus este satisfăcută condiția (1.2.11) *și dacă*

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{a_n}\right)^{\frac{1}{2}}\Big[E[f_n(\mathbf{x})] - f(\mathbf{x})\Big] = 0 \\ &\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{a_n}\right)^{\frac{1}{2}}\Big[R_n(\mathbf{x}) - E[R_n^*(\mathbf{x})]\Big] = 0,\ a_n = \int \delta_n^2(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}, \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

atunci $h_n^*(\mathbf{x})$ *este o estimație asimptotic normală pentru* $h(\mathbf{x})$.

Demonstrație. Din teorema 2 și din teorema 22, rezultă că dacă $\mathbf{x}$ este un punct de continuitate al lui h, atunci

$$f_n(\mathbf{x}) \xrightarrow{p} f(\mathbf{x})\,;\ R_n^*(\mathbf{x}) \xrightarrow{p} R(\mathbf{x}) \neq 0$$

și deci

$$\frac{f_n(\mathbf{x})}{R_n(\mathbf{x})} \xrightarrow{p} \frac{f(\mathbf{x})}{R(\mathbf{x})}$$

ultimul raport fiind o v.a. constantă.

Deci

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\frac{f_n(\mathbf{x})}{R_n^*(\mathbf{x})}\right] = \frac{f(\mathbf{x})}{R(\mathbf{x})}$$

și în consecință $h_n^*(\mathbf{x})$ este o estimație consistentă și asimptotic nedeplasată pentru $h(\mathbf{x})$.

Să demonstrăm acum asimptotic normalitatea. Mai întîi, conform teoremei 3, observăm că variabila aleatoare

$$\xi_n = \frac{f_n(\mathbf{x}) - E[f_n(\mathbf{x})]}{\left\{\frac{a_n}{n} f(\mathbf{x})\right\}^{\frac{1}{2}}} \tag{3.3.5}$$

converge către o v.a. normală $N(0, 1)$. Dacă avem în vedere faptul că $R_n^*(x)$ este consistentă, rezultă din (3.3.5) că v.a.

$$\psi_n(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x})\left\{\frac{n}{a_n f(\mathbf{x})}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{h_n^*(\mathbf{x}) - \frac{E[f_n(\mathbf{x})]}{R_n^*(\mathbf{x})}\right\} \tag{3.3.6}$$

este o v.a. normală $N(0, 1)$.

Să observăm că

$$D^2[h_n^*(\mathbf{x})] \sim \frac{\alpha_n}{n}\frac{f(\mathbf{x})}{R(\mathbf{x})}.$$

Vom demonstra că v.a.

$$V_n = \frac{h_n^*(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})}{\{D^2[h_n^*(\mathbf{x})]\}^{\frac{1}{2}}}$$

converge către o v.a. $N\,(0, 1)$. Constatăm că

$$V_n \sim \frac{h_n^*(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})}{\left\{\frac{a_n}{n_n}\frac{f(\mathbf{x})}{R(\mathbf{x})}\right\}^{\frac{1}{2}}} = \psi_n + R(\mathbf{x})\left(\frac{n}{a_n f(\mathbf{x})}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{E[f_n(\mathbf{x})]}{R_n^*(\mathbf{x})} = \left(\frac{n}{a_n f(\mathbf{x})}\right)^{\frac{1}{2}} f(\mathbf{x}) =$$

$$= \psi_n + \left(\frac{n}{a_n f(\mathbf{x})}\right)^{\frac{1}{2}} E[f_n(\mathbf{x})]\left[\frac{R(\mathbf{x})}{R_n^*(\mathbf{x})} - 1\right] + \left(\frac{n}{a_n f(\mathbf{x})}\right)^{\frac{1}{2}} [E[f_n(\mathbf{x})] - f(\mathbf{x})].$$

Prima condiţie (3.3.4) ne spune că ultimul termen din membru al doilea al relaţiei precedente tinde la zero ; termenul al doilea se poate descompune în doi termeni în felul următor

$$\left(\frac{n}{a_n f(\mathbf{x})}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{E[f_n(\mathbf{x})]}{R_n^*(\mathbf{x})} \left[R(\mathbf{x}) - E[R_n^*(\mathbf{x})]\right] + \left(\frac{n}{a_n f(\mathbf{x})}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{E[f_n(\mathbf{x})]}{R_n^*(\mathbf{x})} \left[E[R_n^*(\mathbf{x})] - R_n^*(\mathbf{x})\right]$$

de unde se deduce că primul termen tinde către zero iar al doilea tinde în probabilitate la zero. Rezultă că repartiţiile asimptotice ale variabilelor V_n şi ψ_n coincid, adică V_n converge către o v.a. $N\,(0, 1)$ şi teorema este demonstrată.

Se poate constata cu uşurinţă [36] că relaţiile (3.3.4) au loc cînd $f_n(\mathbf{x})$ este estimaţie de tip funcţie, cînd $\widetilde{f}(\alpha)$ descreşte algebric de gradul $p > 1$ şi cînd $\widetilde{K}(\alpha)$ are un exponent caracteristic $\mathbf{r}$, astfel încît $1 < p_i < r_i$, $1 \leqslant i \leqslant q$.

În încheierea acestui paragraf constatăm că teorema 23 permite determinarea unei regiuni de încredere pentru $h(\mathbf{x})$. Procedeul de construcţie, foarte simplu de altfel, este analog cu acela ce va fi prezentat în § 3.4 şi din această cauză nu-l mai menţionăm aici.

§ 3.4. ESTIMAŢIA FUNCŢIEI DE REGRESIE

Fie Y o v.a. şi $\mathbf{X}$ un V.a. q-dimensional. Să notăm cu $g(\mathbf{x}, y)$, $\mathbf{x} \in R^q$, $y \in R^1$ densitatea comună de repartiţie a lui $\mathbf{X}$ şi Y şi cu $f(\mathbf{x})$ *densitatea marginală de repartiţie* a lui $\mathbf{X}$, adică

$$f(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathbf{x}, y)\,\mathrm{d}y,\ \mathbf{x} \in R^q.$$

Atunci se ştie că *funcţia de regresie a lui Y în raport cu* $\mathbf{X}$ *este*

$$r(\mathbf{x}) = E[Y/\mathbf{X} = \mathbf{x}]$$

adică

$$r(\mathbf{x}) = \frac{\int y g(\mathbf{x}, y)\,\mathrm{d}y}{\int g(\mathbf{x}, y)\,\mathrm{d}y} = \frac{m_y(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})}. \tag{3.4.1}$$

Să presupunem acum că este dat un şir δ-generator $\{\delta_n(\mathbf{x})\}_{n\in N_+}$ $\mathbf{x} \in R^q$. Relaţia (3.4.1) ne conduce în mod natural la definirea unei estimaţii pentru funcţia de regresie [37].

DEFINIŢIA 3.5. *Fiind dată selecţia* $(\mathbf{X}_1, Y_1)', \ldots, (\mathbf{X}_n, Y_n)'$, *efectuată asupra V.a.* $(\mathbf{X}, Y)'$, *estimaţia funcţiei de regresie* (3.4.1) *este*

$$r_n(\mathbf{x}) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i \delta_n(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_n(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i)}. \tag{3.4.2}$$

Proprietăţile estimaţiei (3.4.2) în cazul $q = 1$, au fost studiate de Nadaraia [20], [22] şi de Watson [37].

În acest paragraf se vor relua aceste proprietăţi pentru cazul $q > 1$ şi se vor demonstra prin metode mai simple şi se va indica de asemenea un procedeu de predicţie pe baza acestor proprietăţi.

TEOREMA 24. *Dacă* $\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ y\end{pmatrix}$, $\mathbf{x} \in R^q$, $y \in R^1$ *este punct de continuitate pentru g şi dacă este satisfăcută relaţia* (1.2.9) *iar*

$$\int g^2 g(\mathbf{x}, y)\, \mathrm{d}y < \infty \tag{3.4.3}$$

există, atunci (3.4.2) *este o estimaţie consistentă şi asimptotic nedeplasată pentru* $r(\mathbf{x})$.

Demonstraţie. Observăm mai întîi că

$$r_n(\mathbf{x}) = \frac{U_n(\mathbf{x})}{V_n(\mathbf{x})} = \frac{U_n}{V_n}, \tag{3.4.2'}$$

unde

$$U_n = U_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i \delta_n(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i)$$

$$V_n = V_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_n(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i).$$

Din teorema 1 se deduce că

$$\lim_{n\to\infty} E[U_n(\mathbf{x})] = \lim_{n\to\infty} \iint y \delta_n(\mathbf{x} - \mathbf{z})\, g(\mathbf{z}, y)\, \mathrm{d}\mathbf{z}\mathrm{d}y = \int y g(\mathbf{x}, y)\, \mathrm{d}y = m_y(\mathbf{x}).$$

De asemenea este uşor de constatat că

$$D^2[U_n(\mathbf{x})] = \frac{1}{n}\left\{\iint y^2 \delta_n^2(\mathbf{x} - \mathbf{z})\, g(\mathbf{z}, y)\, \mathrm{d}\mathbf{z}\, \mathrm{d}y - \left[\iint y \delta_n(\mathbf{x} - \mathbf{z})\, g(\mathbf{z}, y)\, \mathrm{d}\mathbf{z}\, \mathrm{d}y\right]^2\right\},$$

iar conform relaţiei precedente şi ţinînd seamă de (1.2.9) şi (3.4.3) se deduce că

$$D^2[U_n(\mathbf{x})] \sim \frac{a_n}{n} \int y^2 g\,(\mathbf{x}, y)\, \mathrm{d}y.$$

Ultima relaţie ne conduce la un rezultat asemănător teoremei 2 şi anume că $U_n(\mathbf{x})$ este o estimaţie consistentă pentru $m_y(\mathbf{x})$. În plus estimaţia $U_n(\mathbf{x})$ este asimptotic nedeplasată.

Se poate stabili într-un mod asemănător că $V_n(\mathbf{x})$ este o estimaţie asimptotic nedeplasată şi consistentă pentru $f(\mathbf{x})$.

Întrucît $U_n(\mathbf{x}) \xrightarrow{p} m_y(\mathbf{x})$ şi $V_n(\mathbf{x}) \xrightarrow{p} f(\mathbf{x}) \neq 0$, iar $m_y(\mathbf{x})$ şi $f(\mathbf{x})$ sînt constante, rezultă că $r_n(\mathbf{x}) \xrightarrow{p} r(\mathbf{x})$, iar

$$\lim_{n\to\infty} E[r_n(\mathbf{x})] = r(\mathbf{x}).$$

TEOREMA 25. *Presupunem că punctul* $\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ y\end{pmatrix}$, $\mathbf{x} \in R^q$, $y \in R^1$, *este punct de continuitate pentru densitatea teoretică de repartiţie g. De asemenea presupunem că şirul δ-generator* $\{\delta_n(\mathbf{x})\}_{n\in N_+}$ *satisface condiţiile*:

$$a_n = \int \delta_n^2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} < \infty, \qquad \gamma_n = \int | \delta_n(\mathbf{x})^{2+\eta} d\mathbf{x} < \infty$$

şi pentru orice $\eta > 0$ *avem*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{n^{\frac{\eta}{2}} a_n^{1+\frac{\eta}{2}}} = 0. \tag{3.4.4}$$

Se presupune în plus că condiţia (3.4.3) *este satisfăcută iar* $f(\mathbf{x}) \neq 0$ *şi* $\int |y|^{2+\eta} | g(\mathbf{x}, y)\, dy < \infty$.

În aceste condiţii, variabila aleatoare

$$R_n(\mathbf{x}) = \frac{r_n(\mathbf{x}) - \dfrac{E[U_n(\mathbf{x})]}{E[V_n(\mathbf{x})]}}{\{D^2[r_n(\mathbf{x})]\}^{\frac{1}{2}}}$$

are, asimptotic, repartiţia normală $N(0, 1)$.

Demonstraţie. Mai întîi să observăm că deoarece (3.4.3) este satisfăcută iar $f(\mathbf{x}) \neq 0$, rezultă că $D^2[Y/\mathbf{X} = \mathbf{x}]$ există şi este dată de formula

$$D^2[Y/\mathbf{X} = \mathbf{x}] = \frac{\int y^2 g(\mathbf{x}, y)\, dy}{f(\mathbf{x})} - \left[\frac{\int y g(\mathbf{x}, y)\, dy}{f(\mathbf{x})}\right]^2. \tag{3.4.5}$$

Să determinăm acum $D^2[r_n(\mathbf{x})]$. Folosind formula lui Taylor, rezultă că

$$r_n - \frac{E[U_n]}{E[V_n]} \sim \frac{1}{E[V_n]}\{U_n - E[U_n]\} - \frac{E[U_n]}{\{E[V_n]\}^2}\{V_n - E[V_n]\} \sim$$

$$\sim \frac{1}{f(\mathbf{x})}\{U_n - E[U_n]\} - \frac{m_y(\mathbf{x})}{f^2(\mathbf{x})}\{V_n - E[V_n]\}.$$

Din relaţia precedentă deducem

$$r_n - \frac{E[U_n]}{E[V_n]} \sim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{f(\mathbf{x})} \{Y_i \delta_n(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i) - E[Y \delta_n(\mathbf{x} - \mathbf{X})]\} - \right.$$

$$\left. - \frac{m_y(\mathbf{x})}{f^2(\mathbf{x})} \{\delta_n(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i) - E[\delta_n(\mathbf{x} - \mathbf{X})]\} \right].$$

Deci

$$D^2[r_n] \sim \frac{1}{n} \left[\frac{1}{f^2(\mathbf{x})} D^2[Y\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X}) \right] + \frac{m_y^2(\mathbf{x})}{f^4(\mathbf{x})} D^2[\delta_n(\mathbf{x} - \mathbf{X})] -$$

$$- 2 \frac{m_y(\mathbf{x})}{f^3(\mathbf{x})} E\{[Y\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X}) - E[Y\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})]] [\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X}) - E[\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})]]\}]$$

de unde, conform teoremei 2,

$$D^2[r_n] \sim \frac{1}{n} \left[\frac{1}{f^2(x)} \left\{ a_n \int y^2 g(\mathbf{x}, y) \mathrm{d}y - \left(\int y g(\mathbf{x}, y) \, \mathrm{d}y \right)^2 \right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(\int y g(\mathbf{x}, y) \, \mathrm{d}y \right)^2}{f^4(\mathbf{x})} \{a_n f(\mathbf{x}) - f^2(\mathbf{x})\} - 2 \frac{\left(\int y g(\mathbf{x}, y) \, \mathrm{d}y \right)^2}{f^3(\mathbf{x})} \{a_n - f(\mathbf{x})\} \right].$$

După efectuarea calculelor obţinem

$$D^2[r_n] \sim \frac{1}{n} \frac{a_n}{f(\mathbf{x})} D^2[Y/\mathbf{X} = \mathbf{x}]. \tag{3.4.6}$$

De aici se deduce că

$$R_n \sim \frac{1}{\{n a_n D^2[Y/\mathbf{X} = \mathbf{x})]\}^{\frac{1}{2}}} \sum_{i=1}^{n} Z_{n,i},$$

unde $Z_{n,i}$ sînt variabile aleatoare independente, identic repartizate ca v.a. :

$$\begin{aligned} Z_n = {} & \frac{1}{f(\mathbf{x})} \{Y\delta_n (\mathbf{x} - \mathbf{X}) - E[Y\delta_n(\mathbf{x} - \mathbf{X})]\} - \\ & - \frac{m_y(\mathbf{x})}{f^2(\mathbf{x})} \{\delta_n(\mathbf{x} - \mathbf{X}) - E[\delta_n(\mathbf{x} - \mathbf{X})]\}. \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Pentru a arăta că R_n are asimptotic o repartiţie $N(0, 1)$, este suficient să demonstrăm că este satisfăcută condiţia (1.2.12), adică condiţia

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{\frac{\eta}{2}}} \cdot \frac{E[|Z_n|^{2+\eta}]}{\{a_n D^2[Y/\mathbf{X} = \mathbf{x}]\}^{1+\frac{\eta}{2}}} = 0 \tag{3.4.8}$$

unde Z_n este dat de (3.4.7). Aplicînd o inegalitate cunoscută, rezultă că

$$K_n = \frac{E[\,|Z_n|^{2+\eta}]}{n^{\frac{\eta}{2}}\{a_n D^2[Y/\mathbf{X}=\mathbf{x}]\}^{1+\frac{\eta}{2}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{1+\eta}}{n^{\frac{\eta}{2}}\{a_n D^2[Y/\mathbf{X}=\mathbf{x}]\}^{1+\frac{\eta}{2}}}\left\{E\left[\left|\frac{1}{f^2(\mathbf{x})}\{Y\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})-E[Y\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})]\}\right|^{2+\eta}\right]+\right.$$

$$\left.+\,E\left[\left|\frac{m_y(\mathbf{x})}{f^2(\mathbf{x})}\{\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})-E[\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})]\}\right|^{2+\eta}\right]\right\}$$

şi dacă aplicăm încă o dată aceeaşi inegalitate deducem

$$K_n \leqslant K_{n,1}+K_{n,2}+K_{n,3}+K_{n,4}, \tag{3.4.9}$$

unde

$$K_{n,1}=K\frac{1}{(f^2(\mathbf{x}))^{2+\eta}}E\left[|\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})Y|^{2+\eta}\right];\quad K_{n,2}=\frac{1}{(f^2(\mathbf{x}))^{2+\eta}}\cdot|E[Y\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})]|^{2+\eta}$$

$$K_{n,3}=K\left|\frac{m_y(\mathbf{x})}{f^2(\mathbf{x})}\right|^{2+\eta}\cdot E[\,|\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})|^{2+\eta}]\,;\quad K_{n,4}=K\cdot\left|\frac{m_y(\mathbf{x})}{f^2(\mathbf{x})}\right|^{2+\eta}\cdot|E[\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})]|^{2+\eta}$$

$$K=\frac{4^{1+\eta}}{n^{\frac{\eta}{2}}\{a_n D^2[Y/\mathbf{X}=\mathbf{x}]\}^{1+\frac{\eta}{2}}}.$$

Să observăm acum că

$$E\left[|Y\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})|^{2+\eta}\right]\sim\gamma_n\int|y|^{2+\eta}g(\mathbf{x},y)\,\mathrm{d}y$$

$$E\left[|\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{X})|^{2+\eta}\right]\sim\gamma_n f(\mathbf{x}).$$

Atunci deducem că

$$K_{n,1}\sim\frac{4^{1+\eta}}{n^{\frac{\eta}{2}}\{a_n D^2[Y/\mathbf{X}=\mathbf{x}]\}^{1+\frac{\eta}{2}}}\cdot\frac{1}{(f^2(\mathbf{x}))^{2+\eta}}\cdot\gamma_n\cdot\int|y|^{2+\eta}g(\mathbf{x},y)\,\mathrm{d}y$$

$$K_{n,3}\sim\frac{4^{1+\eta}}{n^{\frac{\eta}{2}}\{a_n D^2[Y/\mathbf{X}=\mathbf{x}]\}^{1+\frac{\eta}{2}}}\cdot\left|\frac{m_y(\mathbf{x})}{f^2(\mathbf{x})}\right|^{2+\eta}\cdot\gamma_n f(\mathbf{x})$$

de unde, conform ipotezei (3.4.4), avem

$$\lim_{n\to\infty}K_{n,1}=0\,;\qquad\lim_{n\to\infty}K_{n,3}=0. \tag{3.4.10}$$

De asemenea prin calcule simple găsim

$$K_{n,2}\sim\frac{4^{1+\eta}}{n^{\frac{\eta}{2}}\{a_n D^2[Y/\mathbf{X}=\mathbf{x}]\}^{1+\frac{\eta}{2}}}\cdot\frac{1}{(f^2(\mathbf{x}))^{2+\eta}}\cdot(m_y(\mathbf{x}))^{2+\eta}$$

$$K_{n,4}\sim\frac{4^{1+\eta}}{n^{\frac{\eta}{2}}\{a_n D^2[Y/\mathbf{X}=\mathbf{x}]\}^{1+\frac{\eta}{2}}}\cdot\left|\frac{m_y(\mathbf{x})}{f^2(\mathbf{x})}\right|^{2+\eta}\cdot(f(\mathbf{x}))^{2+\eta}$$

de unde se deduce că

$$\lim_{n\to\infty} K_{n.2} = 0 ; \qquad \lim_{n\to\infty} K_{n.4} = 0. \tag{3.4.11}$$

Din relaţiile (3.4.10) şi (3.4.11) rezultă că (3.4.8) este verificată. Teorema este astfel demonstrată. Această teoremă nu este întîlnită în literatură pentru cazul unidimensional, sub această formă generală.

În cazul estimaţiilor de tip funcţie, condiţiile $a_n < \infty$ şi $\gamma_n < \infty$ devin respectiv

$$\int K^2(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} < \infty ; \qquad \int | K(\mathbf{z}) |^{2+\eta}\, d\mathbf{z} < \infty$$

iar condiţia (3.4.4) se înlocuieşte cu

$$\lim_{n\to\infty} n h_1(n) \ldots h_q(n) = \infty.$$

Ultima condiţie este suficientă şi pentru consistenţă.

Să observăm că şi pentru estimaţia $r_n(\mathbf{x})$ se poate enunţa o teoremă de tipul teoremei 4.

Acum vom prezenta *procedeul de predicţie*; mai precis, pe baza teoremei 25, vom construi, pentru un $\mathbf{x}$ fixat, o regiune de încredere a lui $r(\mathbf{x})$, folosind o selecţie de volum mare.

Vom presupune şirul δ-generator $\{\delta_n(\mathbf{x})\}_{n\in N_+}$ cunoscut, deci şi a_n este cunoscut. Dacă se cunoaşte $D^2[Y/\mathbf{X} = \mathbf{x}]$ şi $f(\mathbf{x})$, atunci *regiunea de încredere* pentru $r(\mathbf{x})$ este

$$\left(r_n(\mathbf{x}) - u_\alpha \frac{a_n}{n f(\mathbf{x})} D^2[Y/\mathbf{X} = \mathbf{x}] ;\ r_n(\mathbf{x}) + u_\alpha \frac{a_n}{f(\mathbf{x})\cdot n} D^2[Y/\mathbf{X} = \mathbf{x}]\right), \tag{3.4.12}$$

unde pentru nivelul de încredere $1 - \alpha$ dat, u_α satisface relaţia

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u_\alpha}^{u_\alpha} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = 1 - \alpha.$$

Dacă nu sînt cunoscute cele două elemente, atunci, conform formulei (3.4.5), rezultă că $D^2[Y/\mathbf{X} = \mathbf{x}]$ se poate estima astfel

$$\overline{D}^2[Y/\mathbf{X} = \mathbf{x}] = \frac{\frac{1}{n} \sum_i Y_i^2 \delta_n(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i)}{\frac{1}{n} \sum_i \delta_n(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i)} - (r_n(\mathbf{x}))^2 \tag{3.4.13}$$

iar $f(\mathbf{x})$ se estimează în mod obişnuit după formula

$$f_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_i \delta_n(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i). \tag{3.4.14}$$

Cu ajutorul estimaţiilor (3.4.13) şi (3.4.14) se poate acum construi de asemenea o regiune de încredere de forma (3.4.12).

În mod asemănător se poate construi o *zonă de predicţie* pentru valorile lui Y cînd $\mathbf{x}$ este fixat şi cînd volumul selecţiei este mare. Această zonă este de forma

$$(3.4.15)\quad r_n(\mathbf{x}) - \frac{u_\alpha}{f(\mathbf{x})} a_n D^2[Y/\mathbf{X} = \mathbf{x}] < Y < r_n(\mathbf{x}) + \frac{u_\alpha}{f(\mathbf{x})} a_n D^2[Y/\mathbf{X} = \mathbf{x}],$$

iar dacă $D^2[Y/\mathbf{X} = \mathbf{x}]$ şi $f(\mathbf{x})$ sînt necunoscute, atunci zona de predicţie se determină în mod asemănător, folosind estimaţiile (3.4.13) şi (3.4.14).

În încheierea acestui paragraf vom face unele observaţii legate de perspectivele mari pe care le deschide procedeul expus aici în legătură cu dezvoltarea analizei regresiei.

Mai întîi constatăm că acest procedeu este valabil pentru orice tipuri de regresii, nu neapărat liniare.

De asemenea se remarcă faptul că procedeul se poate extinde la regresii vectoriale oarecari; astfel dacă $\mathbf{X}$ este un vector q-dimensional, iar $\mathbf{Y}$ un vector s-dimensional, atunci urmînd exact calea menţionată anterior în acest paragraf se poate defini şi studia estimaţia *regresiei vectoriale* (nu neapărat liniară), $E\,[\mathbf{Y}/\mathbf{X} = \mathbf{x}] = r(\mathbf{x})$. În acest caz $r(\mathbf{x})$ este un vector din R^s; proprietatea de asimptotic normalitate s-dimensională permite şi în acest caz construcţia unui procedeu de predicţie analog celui expus anterior.

Primită la redacţie la 8 aprilie 1967

Centrul de statistică matematică
al Academiei Republicii Socialiste
România, Str. M. Eminescu nr. 47,
Bucureşti

CONTRIBUTIONS TO THE THEORY OF STATISTICAL ESTIMATIONS OF PROBABILITY DENSITY FUNCTIONS AND APPLICATIONS

(ABSTRACT)

The paper contains the author's main results concerning the theory of nonparametric estimations of probability density functions and mode, as well as several applications.

The first part deals with the general definition of the estimation of a multivariate probability density function. Nonparametric estimations for the generalized distribution function and for the generalized probability density function (in the sense of R. Cristescu and G. Marinescu [8]) are defined and their unbiasedness properties are proved (theorem 1'). An estimation "by k points" of a probability density function is defined (§ 1.2,C); it is shown that its investigation is reduced to the case of the estimation "by two points" (see Lemma 8). "Regular" estimates for moments are also mentioned.

In the second part, some special problems are considered. Thus, the problem related with some optimal estimations, studied by Watson and Leadbetter [34] is extended to the multi-

variate case and an example is given. Also, the function type estimations in Parzen's sense for the multivariate case are studied and some practical considerations concerning asymptotical normality and bias of the estimation are made. The square error of the function type estimation in a special case is found.

Another special problem, important for the practical use is that of the estimation of the probability density function of a sum of two independent random vectors. As concerns this problem, two estimates are defined and their properties are stated. When the probability density function of one of the two vectors is known, an unbiased estimation for sum density is found. A nonparametric estimate for the distribution function of a mixture, when mixture's kernel is known, is also defined.

At the end of the second part, an estimation of the probability density function of a stationary stochastic process in the strict sense is defined and its asymptotical unbiasedness and consistence properties are given.

The last part of the paper presents some applications. Thus, an estimation of the multivariate mode is defined and its consistence and multivariate asymptotical normality are proved'a tolerance region for large samples being mentioned.

Extending Murthy's results [18], an estimation for the multivariate reliability function is defined and studied. Also extending results of the paper [36], the estimation of the multivariate hazard rate is considered. Finally, a general estimation for the multivariate regression function is considered and its properties are extension or generalizations of those given by Nadaraja [20], [22].

For all these estimations, tolerance regions in the case of large samples are mentioned.

BIBLIOGRAFIE

1. Bartlett, M. S., *Statistical estimation of density functions.* Sankhya Ser. A. 25, pp. 225—254 (1965).
2. Berry, A., *The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates.* Trans. Ammer. Math. Soc., **49** (1941).
3. Bochner, S., *Lectures on Fourier Integrals.*Princeton Univ. Press 1959.
4. Ciucu, G., *Elemente de teoria probabilităților și statistică matematică.* Ed. didactică și pedagogică, București, 1963.
5. Cramér, H., *Mathematical Methods of Statistics.* Princeton. Univ. Press, 1946.
6. Cramér, H., Wold, H., *Some theorems on distribution functions.* J. Lond. Math. Soc., **11**, 290—295 (1936).
7. Craswell, K. J., *Density estimation in a topological group.* Ann. Math. Statist., **36**, *3*, 1047—1048 (1965).
8. Cristescu, R., Marinescu, G., *Unele aplicații ale teoriei distribuțiilor,* Ed. Acad. Rep. Soc. România, București, 1966.
9. Essen, C. G., *On the Liapounoff limit of error in the theory of probability.* Ark. Math. Astr. Fys., **29**, A, *9* (1943).
10. ФАДЕЕВ, Д. К., ФАДЕЕВА, В. Н., *Вычислительные методы линейной алгебры,* физматгиз, Москва, 1960.
11. ГЕЛЬФАНД, И. М., ШИЛОВ, Г. Е., *Обобщенные функции и действия над ними* (выпуск I, гд. I), Гос. изд. Физ. Мат. лит. Москва, 1958.
12. ГНЕДЕНКО, Б. В., *Курс теорий вероятностей* (*третье издание*). Гос. изд. Физ. Мат. лит., Москва, 1961.
13. Grenander, U., *Stochastic Processes and Statistical inference,* Arkiv for Mathematik, **1**, *3*, 195—277 (1950).
14. Katz, L. M., *Note on the Berry-Essen Theorem.* Ann. Math. Statist., **34**, *3*, 1107—1108 (1963).
15. Loève, M., *Probability Theory.* D. van. Nostrand Company, Inc. Princeton, 1960.
16. Loftsgaarden, D. G., Quessenberry, C. P., *A nonparametric estimate of a multivariate density function.* Ann. Math. Statist., **36**, *3*, 1027—1031 (1965).

17. MURTHY, V. K., *Estimation of probability density*, Ann. Math. Statist., **36**, *3*, 1027–1031 (1965).
18. — *Estimation of jumps, reliability and hazard rate.* Ann. Math. Statist., **36**, *3*, 1032–1040 (1965).
19. НАДАРАЯ, Е. А., *Об оценке плотностей расспределения случайных величин.* Сообщения А Н Груз. ССР, XXXII, **2**, 277–280(1963).
20. — *Об оценке регресий.* Теория вер. и прим., **9**, 157–159(1964).
21. — *Оценка компонента свертки.* Сообщения АН Груз. ССР, **XXXIV**, **I**, 19–24(1964).
22. — *О непараметрических оценках плотностей вероятности и регресий.* Теория вер. и прим., **10**, 199–203(1965).
23. NICOLESCU, M. (1958), *Analiză matematică.* vol. II. Ed. tehnică, Bucureşti, 1958.
24. ONICESCU, O., MIHOC, GH., *Lecţii de statistică matematică,* Ed. tehnică, Bucureşti, 1958.
25. ONICESCU, O., MIHOC GH., IONESCU-TULCEA, C. T., *Calculul probabilităţilor şi aplicaţii,* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1956.
26. PARZEN, E., *On estimation of a probability density function and mode.* Ann. Math. Statist., **33**, *3*, 1065–1076 (1962).
27. RENYI, A., *Wahrscheinlichkeittsrechnung mit einem Anhang über Informationstheorie.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962.
28. ROSEMBLATT, M., *Remarks on some nonparametric estimates of density function.* Ann. Math. Statist., **27**, *3*, 832–837 (1956).
29. SUCIU, I., VĂDUVA, I., *Metode funcţionale în estimaţia densităţii de repartiţie a unui vector aleator.* Studii de statistică IV. Lucrările colocviului ,,Aplicaţii ale matematicii în economie'' Iaşi, 3–6 dec. 1964, DCS Bucureşti.
30. VĂDUVA, I., *Estimaţia unei densităţi de repartiţie k-dimensională.* St. cerc. mat., **14**, *4*, 635–660 (1963).
31. — *Asupra estimaţiei densităţii unei sume de variabile independente.* Com. Acad. R.P.R., **13**, *7*, 583–588 (1963).
32. VĂDUVA, I., *Asupra estimaţiei modului unui vector aleator*, Studii de statistică, Lucrările celei de-a treia consfătuire ştiinţif. de statistică 5–7 dec., 1963, DCS, Bucureşti, pp. 173–176,1964.
33. — (1967), *Asupra estimaţiei densităţii de repartiţie a unui proces staţionar în sens larg*, St. cerc. mat., **18**, *3* (1967).
34. WATSON, G. S., LEADBETTER, M. R., *On the estimation of the probability density.* I, Ann. Math. Statist., **34**, *2*, 480–491 (1963).
35. — *Hazard analysis I,* Biometrika, **51**, 175–185 (1964).
36. — *Hazard analysis II,* Sankhya, Ser. A, **26**, 101–116 (1964).
37. WATSON, G. S., *Smooth regression analysis.* Sankhya, Ser. A, **26**, 359–384 (1964).
38. — *Corrections for smoothin.* Sankhya, Ser. A, **26**, 383–384 (1964).
39. WILKS, S., *Mathematical statistics.* John Wiley co. Sons, Inc. N. York-London, 1962.

ASUPRA GRUPULUI DE MIȘCARE A SPAȚIULUI OCTAVELOR

DE

G. G. VRĂNCEANU

Se arată pe o cale directă că grupul de mișcare al octavelor pure este un grup cu 14 parametri, utilizînd faptul că unei algebre de numere hipercomplexe i se poate asocia un spațiu cu conexiune afină constantă

Prof. G. Vrănceanu [1] a arătat că unei algebre i se poate asocia un spațiu cu conexiune afină constantă.

Să considerăm acest spațiu în cazul octavelor și să arătăm că grupul liniar omogen de mișcare al octavelor pure este un grup cu 14 parametri care coincide cu grupul simplu excepțional G_2.

Se știe că octavele sînt numere hipercomplexe cu opt unități a căror lege de înmulțire este dată în următorul tabel:

(1)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$	e_6	$-e_5$	$-e_8$	e_7
e_3	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2	e_7	e_8	$-e_5$	$-e_6$
e_4	e_4	e_3	$-e_2$	$-e_1$	e_8	$-e_7$	e_6	$-e_5$
e_5	e_5	$-e_6$	$-e_7$	$-e_8$	$-e_1$	e_2	e_3	e_4
e_6	e_6	e_5	$-e_8$	e_7	$-e_2$	$-e_1$	$-e_4$	e_3
e_7	e_7	e_8	e_5	$-e_6$	$-e_3$	e_4	$-e_1$	$-e_2$
e_8	e_8	$-e_7$	e_6	e_5	$-e_4$	$-e_3$	e_2	$-e_1$

înmulțirea făcîndu-se luînd un element din prima coloană e_j și un element e_k din prima linie.

Ținînd seama că conexiunea spațiului Γ^i_{jk} este definită prin legile de înmulțire

$$e_j\, e_k = \Gamma^i_{jk}\, e_i, \tag{2}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 8, P. 1277–1284, BUCUREȘTI, 1968

rezultă, pentru componentele Γ^i_{jk} nenule, următorul tabel

$$\Gamma^1_{jj} = -1, \quad j > 1, \quad \Gamma^k_{1k} = 1, \quad k = 1, \dots, 8, \tag{3}$$

iar componentele cu indicii $i, j, k > 1$ sînt date de următorul tabel:

$$\begin{array}{lll}
\Gamma^2_{34} = 1, & \Gamma^2_{56} = 1, & \Gamma^2_{78} = -1 \\
\Gamma^3_{24} = -1, & \Gamma^3_{57} = 1, & \Gamma^3_{68} = 1 \\
\Gamma^4_{23} = 1, & \Gamma^4_{58} = 1, & \Gamma^4_{67} = -1 \\
\Gamma^5_{26} = -1, & \Gamma^5_{37} = -1, & \Gamma^5_{48} = -1 \\
\Gamma^6_{25} = 1, & \Gamma^6_{38} = -1, & \Gamma^6_{47} = 1 \\
\Gamma^7_{28} = 1, & \Gamma^7_{35} = 1, & \Gamma^7_{46} = -1 \\
\Gamma^8_{27} = -1, & \Gamma^8_{36} = 1, & \Gamma^8_{45} = 1
\end{array} \tag{4}$$

şi avem $\Gamma^i_{ik} = -\Gamma^i_{kj}$, $(i, j, k > 1)$.

Acest tablou ne arată că Γ^i_{jk} $(i, j, k > 1)$ sînt strîmb simetrice nu numai în indicii inferiori, ci şi în orice pereche de indici, deci avem $\Gamma^i_{jk} = -\Gamma^j_{ik}$.

Să vedem dacă există un grup de mişcare al acestei conexiuni, liniar şi definit de formule de forma

$$\xi^1 = 0, \ \xi^i = a^i_j x^j, \ i, j = 2, \dots, 8. \tag{5}$$

Să arătăm că un asemenea grup există şi are 14 parametri. Avînd în vedere ecuaţiile care definesc grupul de mişcare al unei conexiuni [2], rezultă că constantele a_j^i din formulele (5) trebuie să satisfacă ecuaţiile

$$\Gamma^i_{js} a^s_k + \Gamma^i_{rk} a^r_j - \Gamma^r_{jk} a^i_r = 0, \tag{6}$$

oricare ar fi $i, j, k = 2, \dots, 8$ iar Γ^i_{jk}, $(i, j, k \neq 1)$, fiind date de formulele (4).

Să considerăm acum aceste formule pentru cazul cînd i, j, k iau într-o ordine anumită valorile 2, 3, 4. Rezultă că avem formulele

$$a^4_4 + a^3_3 - a^2_2 = 0, \quad a^4_4 + a^2_2 - a^3_3 = 0, \quad a^2_2 + a^3_3 - a^4_4 = 0,$$

ceea ce ne spune că

$$a^2_2 = a^3_3 = a^4_4 = 0.$$

De asemenea dacă i, j, k iau într-o anumită ordine valorile 2, 5, 6, ţinînd seama că $a^2_2 = 0$, rezultă

$$a^5_5 + a^6_6 = 0, \quad a^6_6 - a^5_5 = 0, \quad a^5_5 - a^6_6 = 0$$

de unde deducem

$$a^5_5 = a^6_6 = 0.$$

Dacă i, j, k iau într-o anumită ordine valorile 2, 7, 8 şi ţinem seama că $a^2_2 = 0$, rezultă

$$a^7_7 = a^8_8 = 0.$$

Ţinînd seama că toţi $a_i^i = 0$, $(i = 2, \ldots, 8)$, rezultă că ecuaţiile (6) pentru care i, j, k iau valorile 3, 5, 7 ; 3, 6, 8 ; 4, 5, 8 şi 4, 6, 7 sînt identic verificate.

Avem deci teorema :

Pentru ca transformările (5) *să constituie grupul de mişcare al octavelor pure, trebuie ca* $a_i^i = 0$, $(i = 2, \ldots, 8)$.

Pentru a merge mai departe trebuie să considerăm formulele (6) în care intervin a_j^i $(i \neq j)$. Or, numărul ecuaţiilor (6) este $3C_8^7 = 105$ ecuaţii din care dacă se scad 21 ecuaţii considerate mai sus ; rezultă că a_j^i satisfac 84 ecuaţii. Aceste 84 ecuaţii se împart în 7 grupe.

În prima grupă intră ecuaţiile (6) în care indicii i, j, k iau într-o anumită ordine valorile 2, 3, 5 ; 2, 4, 6 ; 3, 4, 7 ; 5, 6, 7 şi acestea conţin coeficienţii a_7^2, a_2^7, a_6^3, a_3^6, a_5^4, a_4^5.

O a doua categorie este formată din ecuaţiile (6) în care i, j, k iau într-o anumită ordine valorile 2, 3, 6 ; 2, 4, 5 ; 5, 6, 8 ; 3, 4, 8 şi care conţin coeficienţii a_8^2, a_2^8, a_5^3, a_3^5, a_6^4, a_4^6.

O a treia categorie este constituită de ecuaţiile (6) pentru care i, j, k iau valorile 2, 3, 7 ; 2, 4, 8 ; 3, 4, 5 ; 5, 7, 8 şi care conţin coeficienţii a_8^3, a_3^8, a_5^2, a_2^5, a_7^4, a_4^7.

O a patra categorie este constituită de ecuaţiile (6) pentru care i, j, k iau valorile 2, 3, 8 ; 2, 4, 7 ; 6, 7, 8 ; 3, 4, 6 şi care conţin coeficienţii a_6^2, a_2^6, a_7^3, a_3^7, a_8^4, a_4^8.

A cincea categorie este formată din ecuaţiile (6) pentru care i, j, k iau valorile 2, 5, 7 ; 2, 6, 8 ; 3, 5, 6 ; 3, 7, 8 care conţin constantele a_7^6, a_6^7, a_3^2, a_2^3, a_8^5, a_5^8.

A şasea categorie este formată din ecuaţiile (6) pentru care i, j, k iau valorile 2, 5, 8 ; 2, 6, 7 ; 4, 5, 6 ; 4, 7, 8 şi care conţin constantele a_7^5, a_5^7, a_4^2, a_2^4, a_8^6, a_6^8.

A şaptea categorie este formată din ecuaţia (6) pentru care i, j, k iau valorile 3, 5, 8 ; 4, 5, 7 ; 4, 6, 8 ; 3, 6, 7 şi care conţin constantele a_8^7, a_7^8, a_4^3, a_3^4, a_6^5, a_5^6.

Fiecare din primele şapte grupe conţin cîte douăsprezece ecuaţii din care numai patru sînt independente.

Să considerăm de exemplu prima grupă.

Ecuaţiile (6) pentru $i, j, k = 2, 3, 5$ se scriu

$$a_5^4 - a_7^2 - a_3^6 = 0, \quad a_5^4 + a_6^3 + a_2^7 = 0, \quad a_3^6 + a_4^5 - a_2^7 = 0, \tag{7}$$

iar cele pentru care i, j, k iau valorile 2, 4, 6 se scriu sub forma

$$a_6^3 - a_4^5 - a_7^2 = 0, \quad a_2^7 + a_6^3 + a_5^4 = 0, \quad a_4^5 - a_2^7 + a_3^6 = 0. \tag{8}$$

Din (7) şi (8) se observă că ultimele două formule (8) coincid cu ultimele două formule (7). De asemenea dacă considerăm formulele pentru care i, j, k iau valorile 5, 6, 7, obţinem

$$a_7^2 - a_6^3 + a_4^5 = 0, \quad a_5^4 - a_7^2 - a_3^6 = 0, \quad a_6^3 + a_5^4 + a_2^7 = 0. \tag{9}$$

Dacă i, j, k iau valorile 3, 4, 7 găsim

$$a_7^2 + a_4^5 - a_6^3 = 0, \quad a_3^6 + a_7^2 - a_5^4 = 0, \quad a_4^5 + a_3^6 - a_2^7 = 0. \tag{10}$$

Rezultă deci că pot fi considerate ca ecuații independente ecuațiile (7) și prima ecuație (8). Aceste ecuații ne spun că

$$a_6^3 + a_3^6 = 0, \quad a_5^4 + a_4^5 = 0, \quad a_7^2 + a_2^7 = 0$$

astfel că putem lua

$$\begin{aligned} a_5^4 &= p_1, & a_6^3 &= q_1, & a_7^2 &= p_1 + q_1, \\ a_4^5 &= - p_1, & a_3^6 &= - q_1, & a_2^7 &= - p_1 - q_1. \end{aligned} \tag{11}$$

În cazul grupei a doua în cazul cînd i, j, k iau valorile 2, 3, 6 ne dau

$$a_6^4 + a_3^5 - a_8^2 = 0, \quad a_2^8 + a_6^4 - a_5^3 = 0, \quad a_3^5 + a_2^8 - a_4^6 = 0, \tag{12}$$

iar pentru i, j, k care iau valorile 2, 4, 5 avem

$$a_5^3 + a_4^6 + a_8^2 = 0, \quad a_5^3 - a_6^4 - a_2^8 = 0, - a_4^6 + a_2^8 + a_3^5 = 0. \tag{13}$$

Prin urmare și aceste ultime două formule (13) coincid cu două din formulele (12) astfel că independente sînt formulele (12) și prima formulă (13) și această proprietate se repetă. În ceea ce privește rezolvarea acestor formule, avem relații analoage formulelor (11). Putem lua

$$\begin{aligned} a_6^4 &= p_2, & a_3^5 &= q_2, & a_8^2 &= p_2 + q_2 \\ a_4^6 &= - p_2, & a_5^3 &= - q_2, & a_2^8 &= - p_2 - q_2. \end{aligned} \tag{14}$$

Rezultate analoage se obțin și în celelalte cazuri și prin urmare rezultă teorema :

Grupul de mișcare al spațiului cu conexiune afină al octavelor este un grup cu 14 parametri.

În ceea ce privește transformările infinitezimale ale grupului, acestea se obțin evident presupunînd că toate constantele p_1, q_1, p_2, $q_2 \ldots$ sînt zero în afară de una. Dacă în formulele (11) $q_1 = 0$, rezultă că transformarea infinitezimală corespunzătoare lui p_1 este

$$X_1 f = x^5 \frac{\partial f}{\partial x^4} - x^4 \frac{\partial f}{\partial x^5} + x^7 \frac{\partial f}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial f}{\partial x^7}, \tag{15}$$

iar dacă $p_1 = 0$, transformarea corespunzătoare lui q_1 este

$$X_2 f = x^6 \frac{\partial f}{\partial x^3} - x^3 \frac{\partial f}{\partial x^6} + x^7 \frac{\partial f}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial f}{\partial x^7}. \tag{16}$$

Să considerăm paranteza corespunzătoare lui X_1, X_2. Avem

$$(X_1 X_2) f = 0. \tag{16'}$$

Rezultă deci că transformările care corespund la una din cele șapte grupe sînt permutabile.

Să considerăm transformările infinitezimale definite de formulele (14) pentru care $q_2 = 0$, $p_2 \neq 0$ respectiv $p_2 = 0$, $q_2 \neq 0$. Avem

$$\begin{aligned} X_3 f &= x^6 \frac{\partial f}{\partial x^4} - x^4 \frac{\partial f}{\partial x^6} + x^8 \frac{\partial f}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial f}{\partial x^8}, \\ X_4 f &= x^3 \frac{\partial f}{\partial x^5} - x^5 \frac{\partial f}{\partial x^3} + x^8 \frac{\partial f}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial f}{\partial x^8}. \end{aligned} \tag{17}$$

Să considerăm acum comutatorul format cu $X_1 X_3$. Avem

$$(X_1 X_3) f = X_5 f, \tag{18}$$

unde $X_5 f$ este o transformare infinitezimală corespunzătoare grupei șapte și este dată de formula

$$X_5 f = x^6 \frac{\partial f}{\partial x^5} - x^5 \frac{\partial f}{\partial x^6} + x^8 \frac{\partial f}{\partial x^7} - x^7 \frac{\partial f}{\partial x^8}. \tag{18'}$$

Să considerăm acum comutatorul $X_1 X_4$. Avem

$$(X_1 X_4) f = X_6 f, \tag{19}$$

unde

$$X_6 f = x^4 \frac{\partial f}{\partial x^3} - x^3 \frac{\partial f}{\partial x^4} + x^8 \frac{\partial f}{\partial x^7} - x^7 \frac{\partial f}{\partial x^8}, \tag{19'}$$

care este de asemenea o transformare infinitezimală corespunzătoare grupei șapte.

Dacă calculăm comutatorii $X_2 X_3$ și $X_2 X_4$, obținem

$$(X_2 X_3) f = X_6 f, \quad (X_2 X_4) f = X_5 f. \tag{20}$$

Vom vedea că are loc teorema:

Comutatorii formați cu operatorii a două perechi sînt egali cu operatorii unei a treia perechi.

Să considerăm de asemenea comutatorii $X_1 X_5$ și $X_1 X_6$. Avem

$$(X_1 X_5) f = - X_3 f, \quad (X_1 X_6) f = X_4 f. \tag{21}$$

Să considerăm de asemenea formulele din a treia grupă cînd i, j, k iau valorile 2, 3, 7 care ne dau

$$a_7^4 + a_3^8 + a_5^2 = 0, \quad a_2^5 - a_7^4 + a_8^3 = 0, \quad a_3^8 - a_2^5 - a_4^7 = 0. \tag{22}$$

De asemenea formulele (16) pentru $i, j, k = 3, 4, 5$ ne dau

$$a_5^2 - a_4^7 - a_8^3 = 0, \quad a_3^8 + a_5^2 + a_7^4 = 0, \quad a_4^7 - a_3^8 + a_2^5 = 0. \tag{22'}$$

Rezultă că sînt independente formulele (22) şi prima formulă (22′). Adunînd primele formule (22), rezultă

$$a_5^2 + a_2^5 + a_8^3 + a_3^8 = 0.$$

De asemenea, adunînd la prima formulă ultima, cu semn schimbat, deducem

$$a_7^4 + a_4^7 + a_5^2 + a_2^5 = 0.$$

Dacă din prima formulă (22) scădem prima formulă (19), rezultă

$$a_7^4 + a_4^7 + a_8^3 + a_3^8 = 0,$$

ceea ce ne spune că putem lua

$$a_7^4 = p_3, \quad a_3^8 = q_3, \quad a_2^5 = p_3 + q_3,$$
$$a_4^7 = -p_3, \quad a_8^3 = -q_3, \quad a_5^2 = -p_3 - q_3.$$

De aici rezultă că transformările infinitezimale asociate la a treia categorie sînt

$$(23) \qquad \begin{aligned} X_7 f &= x^7 \frac{\partial f}{\partial x^4} - x^4 \frac{\partial f}{\partial x^7} + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^5} - x^5 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \\ X_8 f &= x^3 \frac{\partial f}{\partial x^8} - x^8 \frac{\partial f}{\partial x^3} + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^5} - x^5 \frac{\partial f}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Să considerăm comutatorii formaţi cu X_1, X_7 şi cu X_1, X_8. Avem formulele

$$(24) \qquad (X_1 X_7) f = 2 Y_1 f, \quad (X_1 X_8) f = Y_1 f$$

unde Y_1 este dat de formula

$$(25) \qquad Y_1 f = x^4 \frac{\partial f}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial f}{\partial x^4} + x^7 \frac{\partial f}{\partial x^5} - x^5 \frac{\partial f}{\partial x^7}$$

şi constituie o transformare infinitezimală care corespunde grupei şase. De asemenea avem formulele

$$(26) \qquad (X_2 X_7) f = Y_1 f, \quad (X_2 X_8) f = Y_2 f,$$

unde avem

$$(27) \qquad Y_2 f = x^6 \frac{\partial f}{\partial x^8} - x^8 \frac{\partial f}{\partial x^6} + x^7 \frac{\partial f}{\partial x^5} - x^5 \frac{\partial f}{\partial x^7},$$

unde Y_2 aparţine de asemenea grupei şase.

Comutatorii formaţi cu X_3, X_7 şi X_4, X_7 ne dau

$$(28) \qquad (X_3 X_7) f = Y_3 f, \quad (X_4 X_7) f = Y_4 f,$$

unde am pus

$$(29)\qquad \begin{aligned} Y_3 f &= x^7 \frac{\partial f}{\partial x^6} - x^6 \frac{\partial f}{\partial x^7} + x^8 \frac{\partial f}{\partial x^5} - x^5 \frac{\partial f}{\partial x^8}, \\ Y_4 f &= x^2 \frac{\partial f}{\partial x^3} - x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2} + x^8 \frac{\partial f}{\partial x^5} - x^5 \frac{\partial f}{\partial x^8}, \end{aligned}$$

care sînt transformări infinitezimale ale celei de a cincea grupă.

Să considerăm comutatorii formați cu X_3, X_8 şi X_4, X_8. Obţinem

$$(30)\qquad (X_3 X_8) f = Y_4 f, \quad (X_4 X_8) f = 2 Y_4 f,$$

care sînt analoage formulelor (24).

Să considerăm de asemenea comutatorii formați X_5, X_7 şi X_6, X_7. Obţinem

$$(31)\qquad (X_5 X_7) f = Y_5 f \quad (X_6 X_7) f = Y_6 f,$$

unde

$$(32)\qquad \begin{aligned} Y_5 f &= x^2 \frac{\partial f}{\partial x^6} - x^6 \frac{\partial f}{\partial x^2} + x^8 \frac{\partial f}{\partial x^4} - x^4 \frac{\partial f}{\partial x^8}, \\ Y_6 f &= x^3 \frac{\partial f}{\partial x^7} - x^7 \frac{\partial f}{\partial x^3} + x^4 \frac{\partial f}{\partial x^8} - x^8 \frac{\partial f}{\partial x^4}. \end{aligned}$$

care corespund grupei a patra. În concluzie avem teorema:

Transformările infinitezimale ale grupului liniar de mişcare al octavelor pure este un grup ortogonal definit de transformările infinitezimale

$$X_1 f,\ X_2 f, \ldots, X_8 f,\ Y_1 f,\ Y_2 f, \ldots, Y_6 f$$

definite de formulele (15), (16), (17), (18'), (19'), (23), (25), (27), (29), (32).

În ceea ce priveşte formulele de structură, o parte din acestea sînt date de formulele (16'), (18), (19), (20), (21), (24), (26), (30), (31) şi alte cîteva formule analoage. Din aceste formule rezultă că constantele de structură sînt 1, −1, 2, −2.

Se regăseşte deci rezultatul dat de R. Iordănescu [3] că operatorii infinitesimali ai grupului de mişcare ai algebrei octavelor sînt daţi de formule de forma

$$Z_{ij} + Z_{kl}, \quad i \neq j \neq k \neq l,$$

unde

$$Z_{ij} = X_i \frac{\partial f}{\partial x^j} - X_j \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

aceste transformări fiind grupate în perechi care conţin şase din valorile 2, 3, ... , 8.

Avem astfel

$$\begin{aligned}
X_1 f &= Z_{54} + Z_{74}, & X_2 f &= Z_{63} + Z_{72}\\
X_3 f &= Z_{64} + Z_{82}, & X_4 f &= Z_{35} + Z_{82}\\
X_5 f &= Z_{65} + Z_{87}, & X_6 f &= Z_{43} + Z_{87}\\
X_7 f &= Z_{74} + Z_{25}, & X_8 f &= Z_{38} + Z_{25}\\
Y_1 f &= Z_{42} + Z_{75}, & Y_2 f &= Z_{65} + Z_{75}\\
Y_3 f &= Z_{76} + Z_{85}, & Y_4 f &= Z_{23} + Z_{85}\\
Y_5 f &= Z_{26} + Z_{84}, & Y_6 f &= Z_{37} + Z_{84}
\end{aligned}$$

fiecare pereche formează un grup abelian.

Primită la redacţie la 28 februarie 1968

Centrul de statistică matematică al
Academiei Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

SUR LE GROUPE DE MOUVEMENT DE L'ESPACE DES OCTAVES

(RÉSUMÉ)

Il est montré par voie directe que le groupe de mouvement de l'espace des octaves pures est un groupe à 14 paramètres, en utilisant le fait que l'on peut associé à une algèbre de nombres hypercomplexes une surface à connexion affine constante.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Vrănceanu, *Lecţii de geometrie diferenţială,* vol. II, Cap. VI, § 4, Ed. Acad. R. P. R., Bucureşti, 1960.
2. — *Lecţii de geometrie diferenţială.* vol. I, Cap. IV, formulele (39'). Ed. Acad. R. P. R., Bucureşti, 1959.
3. R. Iordănescu, *Structura grupului simplu excepţional G_2.* St. cerc. mat., **13**, 628 – 641 (1962).

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale. Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

1968 OKT 4

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.
CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, A. DELEANU, M. JURCHESCU, **Topologie, Categorii, Suprafeţe riemanniene**, 1967, 394 p., 21,50 lei.
ROMULUS CRISTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.
I. CUCULESCU, **Procese Markov şi funcţii excesive**, 1968, 356 p., 19 lei.
I. COLOJOARĂ, **Elemente de teorie spectrală**, 1968, 31[illegible] p, 19,50 lei.
N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.
ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, **Metode matematice în hidrogazodinamica subterană**, 1966, 582 p., 31 lei.
AL. GHIKA, **Analiza funcţională**, 1967, 594 p., 31 lei.
ALEXANDRU GHIKA, **Opera matematică**, 1968, 956 p., 50 lei
S. GUIAŞU şi R. THEODORESCU, **Teoria matematică a informaţiei**, 1966, 227 p., 8,25 lei
SILVIU GUIAŞU **Aplicaţii ale teoriei informaţiei**, 1968, 350 p., 17 lei.
A. HALANAY şi D. WEXLER, **Teoria calitativă a sistemelor cu impulsuri**, 1968, 314 p., 13 lei.
M. IOSIFESCU şi P. TĂUTU, **Procese stohastice şi aplicaţii în medicină şi biologie**, 1968, 354 p., 22 lei.
SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.
N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.
O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.
P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, 1966, 669 p., 38 lei.
S. SANIELEVICI, **Opera matematică**, 1968, 297 p., 15,50 lei.
I. SINGER, **Cea mai bună aproximare în spaţii vectoriale normate prin elemente din subspaţii vectoriale**, 1967, 386 p., 23 lei.
M. STOKA, **Geometria integrală**, 1967, 239 p., 9,75 lei.
S. STOILOV, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 8, P. 1113–1284, BUCUREŞTI, 1968

I. P. I. – c. 5504
43831
Lei 12.–

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI
MATEMATICE

9

TOMUL 20

1968

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACȚIE

Acad. MIRON NICOLESCU – redactor responsabil;
Acad. GR. C. MOISIL – redactor responsabil adjunct;
Acad. GH. MIHOC;
Acad. G. VRĂNCEANU;
Acad. CAIUS IACOB;
Acad. TIBERIU POPOVICIU;
Acad. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAŞ – secretar de redacţie

La revue „STUDII şi CERCETĂRI MATEMATICE" paraît 10 fois par an. Le prix d'un abonnement annuel est de $ 10. –; F. F. 49. –; D. M. 40.
Toute commande de l'étranger sera adressée a CARTIMEX, Boite postale 134–135, Roumanie, ou à ses représentants à l'étranger.
În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondenţă, se trimit la Comitetul de redacţie al revistei pe adresa: Str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

TOM. 20, Nr. 9
1968

STUDII ŞI CERCETĂRI
MATEMATICE

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

SUMAR

Pag.

C. AVRAMESCU, Asupra unei probleme la limită 1287

MARIANA CRAIU, M. N. ROŞCULEŢ, Ecuaţia $\frac{\partial^{2m}_u}{\partial x_1^{2m}} + \frac{\partial^{2m}_u}{\partial x_2^{2m}} + \ldots + \frac{\partial^{2m}_u}{\partial x_n^{2m}} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ iterată 1293

ROMULUS CRISTESCU, Operatori liniari mărginiţi pe spaţii liniare reticulate topologice 1313

HORIA I. ENE, Asupra mişcării fluidelor compresibile în prezenţa unui corp poros omogen 1317

E. MĂRGĂRITESCU, Asupra interacţiunilor în analiza dispersională bifactorială 1323

L. NÉMETI, O metodă pentru determinarea tuturor circuitelor dintr-un graf 1333

IOAN A. RUS, Asupra unicităţii soluţiei problemei lui Dirichlet relativ la sisteme tari eliptice de ordinul al doilea 1337

ALEXANDRU I. ŞCHIOP, Aplicaţii ale teoriei operatorilor monotoni 1353

ION SUCIU, Contribuţii la teoria spectrală a reprezentărilor operatoriale ale algebrelor de funcţii 1359

HUBA SZÖCS, Determinarea unor mărimi statistice caracteristice în cazul diferitelor procese stohastice 1409

EMILIANA URSIANU, Asupra verificării ipotezei egalităţii mediilor cu ajutorul contrastelor 1417

CORNELIU ZIDĂROIU, Dezvoltare optimală cu capacităţi de producţie minimale prestabilite 1429

CRONICĂ ŞTIINŢIFICĂ 1437

ST. CERC. MAT., TOM. 20 Nr. 9, P. 1285–1444 BUCUREŞTI, 1968

SZAKKÖNYVTÁR
1883

ASUPRA UNEI PROBLEME LA LIMITĂ

DE

C. AVRAMESCU
(Craiova)

În această Notă se studiază cazul singular al problemei la limită a lui Stampacchia generalizată.

Fie $f(t, x, y)$ şi $g(t, x, y)$ două funcţii definite şi continue pentru $t \in J = [a, b]$ şi x, y oarecari. Considerăm sistemul

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y) \\ y' = g(t, x, y). \end{cases} \tag{1}$$

Problema lui Stampacchia constă în determinarea unei soluţii pentru sistemul (1) care să satisfacă condiţiei

$$\begin{cases} \alpha_1 x(a) + \alpha_2 y(a) = A \\ \beta_1 x(b) + \beta_2 y(b) = B, \end{cases} \tag{2}$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, A, B$ sînt constante reale. Problema (1) + (2) are o interpretare geometrică simplă : este vorba în fond de a determina o curbă integrală a sistemului (1), care să se sprijine pe dreptele

$$(D_1) \quad \begin{cases} \alpha_1 x + \alpha_2 y = A \\ t = a \end{cases} \qquad (D_2) \quad \begin{cases} \beta_1 x + \beta_2 y = B \\ t = b \end{cases}$$

situate respectiv în planele $t = a$, $t = b$. (Am referit spaţiul la un sistem de axe t, x, y). Stampacchia [1] a arătat că problema (1) + (2) are soluţii dacă

$$d = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0. \tag{3}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 20 NR. 9, P. 1287–1292, BUCUREŞTI, 1968

Condiţia (3) are ca interpretare geometrică faptul că dreptele (D_1) şi (D_2) nu sînt paralele. În Nota noastră [2] am generalizat problema lui Stampacchia, asociind sistemului (1) condiţia la limită

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 x(a) + \alpha_2 y(a) = F(x(a), y(a)) \\ \beta_1 x(b) + \beta_2 y(b) = G(x(b), y(b)), \end{array}\right. \tag{4}$$

unde $F(x, y)$ şi $G(x, y)$ sînt funcţii continue în plan ; în această Notă ipoteza (3) este menţinută. În Nota de faţă ne propunem să cercetăm unele cazuri în care condiţia (3) nu este îndeplinită.

1. Vom ataşa sistemului (1) condiţia la limită :

$$\left\{\begin{array}{l} x(a) + hy(a) = F(x(a), y(a)), \\ x(b) + hy(b) = G(x(b), y(b)), \end{array}\right. \tag{5}$$

unde $h \neq 0$. Vom demonstra următoarea teoremă :

TEOREMA 1. *Presupunem îndeplinite următoarele ipoteze :*

1) $f(t, x, y)$ şi $g(t, x, y)$ *sînt funcţii definite şi continue pe mulţimea*

$$\Delta = \{(t, x, y) ; t \in [a, b], |x| < +\infty, |y| < +\infty\}.$$

2) *Există funcţiile* $\dfrac{\partial f(t, x, y)}{\partial x}$ *şi* $\dfrac{\partial g(t, x, y)}{\partial y}$, *definite şi continue pe* Δ *şi satisfăcînd aici condiţiilor*

$$\frac{\partial f(t, x, y)}{\partial x} \leqslant \alpha(t), \quad \beta(t) \leqslant \frac{\partial g(t, x, y)}{\partial y} \leqslant \gamma(t) \tag{6}$$

$\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ *fiind funcţii continue şi pozitive pe* $[a, b]$, *astfel încît*

$$\int_a^b \alpha(t)\,\mathrm{d}t < \int_a^b \beta(t)\,\mathrm{d}t \tag{7}$$

3) $f(t, x, 0)$ şi $g(t, 0, y)$ *sînt funcţii mărginite pe* Δ.

4) $F(x, y)$ şi $G(x, y)$ *sînt funcţii continue şi mărginite în plan.*

În aceste condiţii, problema (1) + (5) *admite cel puţin o soluţie.*

Demonstraţie. Pentru demonstraţie vom aplica teorema de punct fix a lui Schauder. Pentru aceasta, în prealabil, ţinînd seama de lema lui Hadamard vom pune sistemul (1) sub forma

$$\left\{\begin{array}{l} x' = \lambda(t, x, y)\, x + f(t, x, 0) \\ y' = \mu(t, x, y)\, y + g(t, 0, y), \end{array}\right. \tag{8}$$

unde

$$\lambda(t, x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f(t, ux, y)}{\partial x}\,\mathrm{d}u, \quad \mu(t, x, y) = \int_0^1 \frac{\partial g(t, ux, y)}{\partial y}\,\mathrm{d}u.$$

Vom considera drept spaţiu fundamental spaţiul $C = C([a, b], R^2)$ al funcţiilor continue pe $[a, b]$ cu valori în R^2, cu topologia obişnuită a convergenţei uniforme pe $[a, b]$. Definim în acest spaţiu operatorul T care face să corespundă la fiecare $(u(t), v(t)) \in C$ soluţia (x, y) a sistemului

$$
\left\{
\begin{aligned}
x' &= \lambda(t, u(t), v(t))\, x + f(t, u(t), 0)\\
y' &= \mu(t, u(t), v(t))\, y + g(t, 0, v(t))
\end{aligned}
\right.
\tag{9}
$$

care satisface condiţiei

$$
\left\{
\begin{aligned}
x(a) + hy(a) &= F(u(a), v(a))\\
y(b) + hy(b) &= G(u(b), v(b)).
\end{aligned}
\right.
\tag{10}
$$

Pentru a arăta că operatorul T este definit în mod univoc, trebuie să arătăm că problema (9), (10) are soluţie unică. Notînd $x(a) = \xi$, $y(a) = \eta$ şi punînd condiţia ca soluţia sistemului (9) să verifice condiţiile (10), obţinem sistemul

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\xi + h\eta = F(u(a), v(a))\\
&\xi \exp \int_a^b \lambda(t, u(t), v(t))\, \mathrm{d}t + h \exp \int_a^b \mu(t, u(t), v(t)\, \mathrm{d}t \cdot \eta =\\
&\qquad\qquad\qquad = G(u(b), v(b))
\end{aligned}
\right.
\tag{11}
$$

Acest sistem în ξ şi η are soluţie unică, deoarece determinantul său este diferit de zero în baza condiţiei (7), ceea ce ne arată că T este determinat în mod univoc. Din rezolvarea sistemului (11) rezultă că ξ şi η sînt funcţii continue şi mărginite în raport cu u şi v. De aici rezultă existenţa unui număr pozitiv M, astfel încît pentru orice soluţie $x(t)$, $y(t)$ a sistemului (9) cu condiţiile (10), are loc evaluarea $|x(t)| \leqslant M$, $|y(t)| \leqslant M$. Considerăm atunci în C mulţimea

$$S = \{(x, y)\,;\ (x, y) \in C,\ \ |x(t)| \leqslant M,\ |y(t)| \leqslant M\}.$$

Demonstraţia teoremei se reduce atunci la a arăta că operatorul T satisface pe mulţimea S condiţiilor cerute de teorema lui Schauder. În adevăr, S este o mulţime convexă şi închisă din C, iar modul în care am ales pe M ne asigură incluziunea $TS \subset S$. Această incluziune ne arată în acelaşi timp că funcţiile din familia TS sînt uniform mărginite pe $[a, b]$. Egala continuitate a funcţiilor aceleaşi familii, rezultă din ipoteza 2) a teoremei şi din reprezentarea bine cunoscută a soluţiei unei ecuaţii liniare, pe care o putem folosi pentru fiecare din funcţiile $x(t)$ şi $y(t)$. În sfîrşit, continuitatea operatorului T rezultă din dependenţa continuă a lui ξ şi η în raport cu u şi v, şi din teorema bine cunoscută de dependenţă continuă a soluţiei în raport cu datele iniţiale. Aşadar toate ipotezele teoremei lui Schauder fiind satisfăcute, avem asigurată existenţa cel puţin a unui punct fix pentru operatorul T, care este în acelaşi timp o soluţie pentru problema noastră.

Observaţia 1. Teorema 1 poate fi enunţată, evident, în ipoteze de tip Caratehodory.

Observaţia 2. Putem presupune f şi g definite numai pe mulţimea $t \in [a, b]$, $|x| \leqslant M$, $|y| \leqslant M$, şi de asemenea F şi G numai pe mulţimea $|x| \leqslant M$, $|y| \leqslant M$. Vor interveni atunci unele ipoteze asupra ordinului de mărime al lui M, care fiind mai complicate nu le vom da aici.

2. Să considerăm acum ecuaţia

$$x'' = f(t, x, x'), \tag{12}$$

căreia îi vom ataşa condiţia la limită

$$\begin{cases} x(a) + hx'(a) = F(x(a), x'(a)), \\ x(b) + hx'(b) = G(x(b), x'(b)). \end{cases} \tag{13}$$

Probleme de tipul (12) + (13) au fost considerate pentru prima dată de C. Corduneanu [3]. Din teorema 1 rezultă următorul:

COROLARUL 1. *În următoarele ipoteze:*

a) $f(t, x, y)$ *este o funcţie continuă pe* Δ;

b) $\dfrac{\partial f(t, x, y)}{\partial y}$ *este o funcţie continuă pe* Δ *şi satisface aici condiţiilor*

$$\alpha(t) \leqslant \frac{\partial f(t, x, y)}{\partial y} \leqslant \beta(t)$$

$\alpha(t)$ *şi* $\beta(t)$ *fiind funcţii continue pe* $[a, b]$ *şi* $\alpha(t) > 0$;

c) $f(t, x, 0)$ *este mărginită pe* Δ;

d) $F(x, y)$, $G(x, y)$ *sînt funcţii continue şi mărginite pe* R^2, *problema* (12) (13) *admite cel puţin o soluţie.*

3. Vom ataşa acum ecuaţiei (12) condiţia la limită

$$\begin{cases} x(a) = F(x(a), x'(a)) \\ x(b) = G(x(b), x'(b)). \end{cases} \tag{14}$$

Are loc următoarea teoremă:

TEOREMA 2. *Presupunem îndeplinite următoarele ipoteze:*

1) $f(t, x, y)$ *este o funcţie continuă în* Δ.

2) $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *există şi este continuă în* Δ.

3) *Există o funcţie continuă şi pozitivă* $\alpha(t)$ *astfel încît*

$$\frac{\partial f(t, x, y)}{\partial y} \leqslant \alpha(t). \tag{15}$$

4) $f(t, x, 0)$ *este o funcţie mărginită în* Δ.

5) $F(x, y)$ *şi* $G(x, y)$ *sînt funcţii continue şi mărginite în* R^2. *Atunci problema* (12) + (14) *admite cel puţin o soluţie.*

Demonstraţia acestei teoreme se face în mod cu totul asemănător ca şi demonstraţia teoremei 1, şi de aceea nu vom mai insista asupra ei. Rezultatul cuprins în această teoremă este, într-un anumit sens, comparabil cu un rezultat datorat lui Scorza-Dragoni [4], care a demonstrat (în cazul particular cînd F şi G sînt constante), că dacă funcţia $f(t, x, y)$ este continuă şi mărginită în Δ, atunci problema (12) + (14) are cel puţin o soluţie. În teorema noastră, se cere mărginirea numai pentru $f(t, x, 0)$ dar în schimb se cere existenţa şi mărginirea funcţiei $\frac{\partial f}{\partial y}$. Rezultatul nostru este astfel aplicabil pentru funcţii de forma

$$f(t, x, y) = a(t, x)\, y + b(t, x)$$

unde $a(t, x)$ şi $b(t, x)$ sînt funcţii continue şi mărginite, caz în care teorema lui Scorza-Dragoni nu mai funcţionează.

4. Vom indica un ultim rezultat care se poate obţine prin combinarea metodei ecuaţiei liniarizate cu metoda punctului fix, rezultat care este cuprins în următoarea teoremă :

TEOREMA 3. *Fie funcţia $f(t, x, y)$ continuă pe Δ şi satisfăcînd aici condiţiei*

$$|f(t, x, y)| \leqslant A(t, x)\, |y|^{1+\sigma}, \tag{16}$$

unde $\sigma > 0$ iar $A(t, x)$ este o funcţie continuă şi mărginită pe Δ. Atunci, dacă funcţiile F şi G satisfac condiţiei 5) *din teorema* 2, *problema* (12) + (14) *admite cel puţin o soluţie.*

Demonstraţie. Vom pune

$$p(t, x, y) = \begin{cases} \dfrac{f(t, x, y)}{y} & \text{pentru } y \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } y = 0, \end{cases}$$

ceea ce ne permite să punem ecuaţia (12) sub forma liniarizată

$$x'' = p(t, x, x')\, x'.$$

Ţinînd seama de faptul că $p(t, x, y)$ este o funcţie continuă, putem aplica din nou teorema de punct fix a lui Schauder în maniera folosită în teorema 1.

5. Problemele la limită studiate în această notă se încadrează în tipul de probleme la limită cunoscute sub numele de „probleme cvasilinare". Pentru informaţii complete asupra acestor tipuri de probleme, la limită, precum şi a altor tipuri, trimitem cititorul la lucrarea lui R. Conti [5]. În această lucrare, care conţine o analiză şi o sistematizare a problemelor la limită cunoscute în literatură, problema noastră aparţine grupului de probleme VI.

Primită la redacţie la 26 februarie 1968

Universitatea din Craiova
Facultatea de matematică

SUR UN PROBLÈME AUX LIMITES

RÉSUMÉ

On démontre l'existence de solutions pour les problèmes (1) + (5), (12) + (13) et (12) + (14). Dans les démonstrations on utilise la méthode de la linéarisation et le principe du point fixe de Schauder.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Stampacchia, *Sulle condizioni che determinano gli integrali di un sistema di due equazioni differenziali ordinaire del primo ordine*. Rend. Acc. Naz. Lincei, (8), **II** (1947),
2. C. Avramescu, *Sisteme diferențiale cu condiții la limită neomogene*. St. cerc. științ., Iași **XIV**, *1*, (1963).
3. C. Corduneanu, *Sopra i problemi ai limiti per alcuni sistemi di equazioni differenziali non lineari*. Rend. Accad. Sc. Fis. Mat., Napoli ser. 4, **XXV** (1958).
4. G. Scorza-Dragoni, *Sul problema dei valori ai limiti per sistemi di equazioni differenziali del secondo ordine*. Boll. Un. Mat. Italiana, **14** (1935).
5. R. Conti, *Recent trends in the theory of boundary value problems for ordinary differential equations*. Boll. U.M.I., **XXII**, *3* (1967).

ECUAȚIA $\frac{\partial^{2m}u}{\partial x_1^{2m}}+\frac{\partial^{2m}u}{\partial x_2^{2m}}+\ldots+\frac{\partial^{2m}u}{\partial x_n^{2m}}-\frac{\partial u}{\partial t}=0$ ITERATĂ

DE

MARIANA CRAIU ȘI MARCEL N. ROȘCULEȚ

În prima parte a lucrării se dau teoreme de structură a soluțiilor ecuației $E^p(u)=0$. În continuare se rezolvă două probleme la limită conținute în teoremele 2.1.1 și 2.2.1.

În ultima partea a lucrării se stabilesc formule de medie atît pentru ecuația $E(u)=0$, cît și pentru iterata de ordinul p.

I. PROPRIETĂȚI DE STRUCTURĂ

1.1. Fie ecuația cu derivate parțiale de ordinul $2m$, m impar, de tip parabolic

$$E(u)=\frac{\partial^{2m}u}{\partial x_1^{2m}}+\frac{\partial^{2m}u}{\partial x_2^{2m}}+\ldots+\frac{\partial^{2m}u}{\partial x_n^{2m}}-\frac{\partial u}{\partial t}=0. \tag{1.1}$$

DEFINIȚIA 1.1.1. Vom numi ecuația iterată de ordinul p a ecuației (1.1) și o vom nota $E^p(u)=0$, ecuația definită de

$$E^p(u)=E(E^{p-1}(u))=0, \tag{1.2}$$

unde

$$E^\circ(u)=1, \qquad E^1(u)=E(u).$$

LEMA 1.1.1. *Pentru* $u(x,t)\in C^\lambda$, *avem relațiile* :

$$\begin{aligned}E^k(t^r u)&=t^r E^k(u)-C_k^1 rt^{r-1}E^{k-1}(u)+\ldots+(-1)^h C_k^h r(r-1)\ldots\\&\ldots(r-h+1)t^{r-h}E^{k-h}(u)+\ldots+(-1)^k C_k^k r(r-1)\ldots\\&\ldots(r-k+1)t^{r-h}u\end{aligned} \tag{1.3}$$

cu $\qquad r-k=s\geqslant 0, \qquad \lambda=2mk,$

$$\begin{aligned}E^p(t^r u)&=t^r E^p(u)-C_r^1 pt^{r-1}E^{p-1}(u)+\ldots+(-1)^h C_r^h p(p-1)\ldots\\&\ldots(p-h+1)t^{r-h}E^{p-h}(u)+\ldots+(-1)^r C_r^r p(p-1)\ldots(p-r+1)E^{p-r}(u),\end{aligned} \tag{1.4}$$

dacă $p\geqslant r$, $\lambda=2mp$.

ST. CERC. MAT., TOM. 20 NR. 9, P. 1293–1312, BUCUREȘTI, 1968

Demonstraţie. Se demonstrează prin recurenţă. Avem

$$E\,(t^r\,u) = t^r\,E\,(u) - rt^{r-1}\,u.$$

Să presupunem că este adevărată relaţia (1.3), deci

$$E^k(t^r\,u) = \sum_{h=0}^{k} (-1)^h\,h\,!\,C_k^h\,C_r^h\,t^{r-h}\,E^{k-h}(u)$$

de unde obţinem

$$E^{k+1}\,(t^r\,u) = \sum_{h=0}^{k} (-1)^h\,h\,!\,C_k^h\,C_r^h\,t^{r-h}\,E^{k-h+1}\,(u) +$$

$$+ \sum_{h=0} (-1)^{h+1}\,h\,!\,(r-h)\,C_k^h\,C_r^h\,t^{r-h-1}\,E^{k-h}\,(u) =$$

$$= \sum_{h=0}^{k+1} (-1)^h\,h\,!\,C_{k+1}^h\,C_r^h\,t^{r-h}\,E^{k+1-h}\,(u)$$

deoarece

$$(-1)^h\,(h\,!\,C_k^h\,C_r^h + (h-1)\,!\,(\,r-h+1)\,C_k^{h-1}\,C_r^{h-1}) = (-1)^h\,h\,!\,C_{k+1}^h\,C_r^h.$$

Relaţia (1.4) se arată în mod analog.

Fie D un domeniu din spaţiul cu $n+1$ dimensiuni $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$.

Definiţia 1.1.2. Vom spune că $u\,(x,\,t) = u\,(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n,\,t)$ este o funcţie $(E,\,p)$ în D, dacă u are toate derivatele care intră în structura operatorului E^p, continue şi dacă $E^p\,(u) = 0$ în D.

Teorema 1.1.1. *Fie* $u\,(x,t)$ *o funcţie* (E,p) *într-un domeniu* $D \subset R^{n+1}$. *Există* p *funcţii* $(E,\,1)$, $u_0,\,u_1,\,\ldots,\,u_{p-1}$, *astfel încît să avem*

$$u\,(x,\,t) = u_0\,(x,\,t) + tu_1\,(x,\,t) + \ldots + t^{p-1}\,u_{p-1}\,(x,\,t) \tag{1.5}$$

pentru orice $(x,\,t) \in D$. *Aceste funcţii sînt*

$$\begin{aligned} u_0 &= u + \frac{t}{1\,!}\,E\,(u) + \frac{t^2}{2\,!}\,E^2\,(u) + \ldots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)\,!}\,E^{p-1}\,(u) \\ u_1 &= \frac{-1}{1\,!}\left[E\,(u) + \frac{t}{1\,!}\,E^2\,(u) + \ldots + \frac{t^{p-2}}{(p-2)\,!}\,E^{p-1}\,(u)\right] \end{aligned} \tag{1.6}$$

. . . .

$$u_{p-2} = \frac{(-1)^{p-2}}{(p-2)\,!}\left[E^{p-2}\,(u) + \frac{t}{1\,!}\,E^{p-1}\,(u)\right]$$

$$u_{p-1} = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)\,!}\,E^{p-1}\,(u).$$

Demonstrație. a) Funcția

$$u\,(x, t) = u_0\,(x, t) + t_1\,u_1\,(x, t) + \ldots + t^{p-1}\,u_{p-1}\,(x, t)$$

cu $E\,(u_k) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, p - 1$ este o funcție (E, p). În adevăr, conform lemei 1.1.1, avem

$$E^p\,(u) = \sum_{r=0}^{p-1} E^p\,(t^r\,u_r)$$

însă

$$E^p\,(t^r u_r) = \sum_{s=0}^{p-1} s\,!\,(-1)^s\,C_r^s\,C_p^s\,t^{r-s}\,E^{p-s}\,(u_r) = 0$$

deoarece $E^h\,(u_r) = 0$, $h = 1, 2, \ldots, p$.

b) Să arătăm acum că sistemul de p funcții u_k, dacă există, este unic. Să presupunem că am avea și

(1.7) $$u\,(x,t) = v_0\,(x, t) + tv_1\,(x, t) + \ldots + t^{p-1}\,v_{p-1}\,(x, t),$$

pentru orice $(x, t) \in D$ și $E\,(v_k) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, p - 1$,

deci trebuie să avem și

(1.8) $$0 = (u_0 - v_0) + t\,(u_1 - v_1) + \ldots + t^{p-1}\,(u_{p-1} - v_{p-1})$$

pentru orice $(x, t) \in D$.

Aplicînd operatorul E^{p-1} lui (1.8), obținem, folosind lema 1.1.1,

$$(-1)^{p-1}\,(p - 1)\,!\,(u_{p-1} - v_{p-1}) \equiv 0$$

de unde rezultă

$$u_{p-1} \equiv v_{p-1}.$$

Cu acest rezultat (1.8) se scrie

(1.8′) $$0 = (u_0 - v_0) + t\,(u_1 - v_1) + \ldots + t^{p-2}\,(u_{p-2} - v_{p-2})$$

pentru orice $(x, t) \in D$. Aplicînd operatorul E^{p-2} lui (1.8′), avem

$$(p - 2)\,!\,(u_{p-2} - v_{p-2}) \equiv 0,$$

de unde

$$u_{p-2} \equiv v_{p-2}\,;$$

în acest mod se arată că avem $v_k\,(x, t) \equiv u_k\,(x, t)$ în D pentru $k = 0, 1, \ldots, p - 1$.

c) Vom demonstra existența funcțiilor $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$ determinîndu-le efectiv, funcția $u\,(x, t)$ fiind dată.

Aplicînd operatorul $E^{\circ}, E^1, E^2, \ldots, E^{p-1}$ lui (1.5), obținem, folosind lema 1.1.1,

$$u = u_0 + tu_1 + \ldots + t^{p-1} u_{p-1}$$

$$-\frac{1}{1!} E(u) = C_1^1 u_1 + C_2^1 tu_2 + \ldots + C_{p-1}^1 t^{p-2} u_{p-1}$$

$$\frac{1}{2!} E^2(u) = C_2^2 u_2 + C_3^2 tu_3 + \ldots . + C_{p-1}^2 t^{p-3} u_{p-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{(-1)^k}{k!} E^k(u) = C_k^k u_k + C_{k+1}^k tu_{k+1} + \ldots + C_{p-1}^k t^{p-k-1} u_{p-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{(-1)^{p-2}}{(p-2)!} E^{p-2}(u) = C_{p-2}^{p-2} u_{p-2} + C_{p-1}^{p-2} tu_{p-1},$$

$$\frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} E^{p-1}(u) = u_{p-1},$$

care rezolvat ne dă soluția

$$u_{p-k} = \frac{(-1)^{p-k}}{(p-k)!} \left[E^{p-k}(u) + \frac{t}{1!} E^{p-k+1}(u) + \ldots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} E^{p-1}(u) \right],$$

$$k = 1, 2, \ldots, p.$$

Rezultatul obținut este întru totul analog celui obținut de acad. Miron Nicolescu în [1][1]. Influența acestui memoriu se resimte și în partea a doua a lucrării.

1.2. a) În [2][2] s-a construit soluția elementară a ecuației (1.1).

DEFINIȚIA 1.2.1. Soluția elementară a ecuației (1.1), m impar, este dată de

$$v(x, t; \xi, \tau) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} \dfrac{1}{(t-\tau)^{1/2m}} \displaystyle\int_0^{\infty} \exp(-\eta_i^{2m}) \cos \frac{(x_i - \xi_i)\eta_i}{(t-\tau)^{1/2m}} \, d\eta_i, & t - \tau > 0 \\ 0 , & t - \tau \leqslant 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

LEMA 1.2.1. *Soluția elementară* $v(x, t; \xi, \tau)$ *este soluție a ecuației* (1.1) *în variabilele* (x, t) *și a ecuației adjuncte în variabilele* (ξ, τ).

Funcția $\Phi(x, t)$ definită de integrala

$$\Phi(x, t) = \int_{V_p} v(x, t; \xi, \tau) \, d\Omega_p^{-}, \tag{1.10}$$

---

[1] Pag. 249—252.

[2] Pag. 35.

unde $\mathrm{d}\,\Omega_p$ este o formă diferenţială de grad $p \leqslant n$

$$\mathrm{d}\,\Omega_p = \sum_{\alpha} A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}\,(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\,\xi_{\alpha_1}\,\mathrm{d}\xi_{\alpha_2}\ldots\,\mathrm{d}\xi_{\alpha_p}$$

cu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p = 1, 2, \ldots, n+1$, $(\xi_{n+1} = \tau)$, iar funcţiile $A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$ continue pe varietatea V_p cu p dimensiuni, este deasemenea o soluţie a ecuaţiei (1.1), continuă cu derivate parţiale continue în orice domeniu $D \subset R^{n+1}$ care nu are puncte comune cu varietatea V_p.

Din modul cum este definită funcţia v, se va considera în (1.10) numai partea din V_p situată deasupra caracteristicii $t = \tau$. În toate punctele situate deasupra unui plan $t = t_0$, unde nu se află nici un punct al varietăţii V_p, $\Phi\,(x, t)$ este analitică în variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, t, aceasta din cauza formei lui v.

b) Să considerăm acum integrala, soluţie a ecuaţiei (1.1), $n = 1$,

$$\psi(x,t) = \int_a^t \frac{\varphi\,(\tau)}{(t-\tau)^{1/2m}}\,\mathrm{d}\tau \int_0^\infty \exp\,(-\eta^{2m})\cos\frac{(x-\chi(\tau))\,\eta}{(t-\tau)^{1/2m}}\,\mathrm{d}\eta \tag{1.11}$$

cu φ, χ, continue pe $[a, b]$, $\tau \in [a, b]$, $t \in [a, b]$, $t > \tau$, $x \in R$.

Conform celor spuse la punctul a), $\psi\,(x, t)$ este continuă şi are derivate parţiale continue de orice ordin în orice punct (x, t) care nu aparţine arcului AB; $x = \chi\,(t)$, $t \in [a, b]$. Această integrală rămîne uniform convergentă în condiţiile impuse şi pe AB, deoarece integrala pe $[0, \infty]$ este mărginită pentru orice x şi t, iar $\varphi\,(\tau)$ fiind mărginită urmează că de-a lungul arcului AB, funcţia $\psi\,(x, t)$ este majorată de

$$M \int_a^t \frac{\mathrm{d}\tau}{(t-\tau)^{1/2m}},$$

Să considerăm caracteristicele $t = a$, $t = b$, ale ecuaţiei (1.1), $n = 1$.

Pentru $t \leqslant a$, $\psi\,(x, t) \equiv 0$; pentru $t > b$, $\psi\,(x, t)$ este analitică în ambele variabile, conform celor spuse la punctul a).

Pentru $a \leqslant t \leqslant b$, $\psi\,(x, t)$ este analitică în raport cu variabila x, deci pentru $|x - x_0| \leqslant \rho$, $t \in [a, b]$, $|\psi\,(x, t)| < M^*$ şi

$$\left|\frac{\partial^p\,\psi}{\partial\,x^p}\right| < \frac{M^*\,p\,!}{\rho^p}.$$

Urmînd un raţionament analog ca la ecuaţia căldurii se arată că $\psi\,(x_0, t)$ este o funcţie continuă de t, cu derivate continue de orice ordin pe (a, b) dar nu este o funcţie analitică de t. Din relaţia

$$\frac{\partial^{2m}\,\Phi}{\partial\,x^{2m}} = \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,t}$$

avem

$$\left|\frac{\partial^p\,\Phi}{\partial\,t^p}\right|_{x_0} = \left|\frac{\partial^{2mp}\,\Phi}{\partial\,x^{2mp}}\right|_{x_0} \leqslant \frac{M^*\cdot(2mp)\,!}{r^p} \tag{1.13}$$

unde $\rho^{2m} = r$, M^*, r fiind independente de t.

DEFINIȚIA 1.2.2. O funcție $f(t)$, $t \in [a, b]$, care îndeplinește condițiile următoare :

$$1^\circ)\ f(t) \in C^\infty, \quad t \in [a, b]$$

$$2^\circ)\ |f^p(t)| < \frac{M(2mp)!}{r^p}, \quad t \in [a, b]$$

se numește funcție de clasă $2m$ pe $[a, b]$.

Soluțiile ecuației (1.1) sînt prin urmare funcții de clasa $2m$.

Sîntem în măsură să enunțăm

TEOREMA 1.2.1. *O funcție* (E, p) *într-un domeniu* D *are următoarele proprietăți* :

1°) *este indefinit derivabilă* ;
2°) *este analitică în raport cu* x ;
3°) *este de clasă* $2m$ *în raport cu* t.

Demonstrație. Conform teoremei 1.1.1, o funcție $u(x, t)$ care este (E, p) în D are forma

$$u(x, t) = u_0 + tu_1 \ldots + t^{p-1} u_{p-1}$$

cu $E(u_k) = 0$; rezulta de aici proprietățile 1° și 2°.

În continuare avem

$$\frac{\partial^r}{\partial t^r}(t^s u_s)\Big|_{t=0} = C_r^s\, s!\left(\frac{\partial^{r-s} u_s}{\partial t^{r-s}}\right)\Big|_{t=0} = \frac{r!}{(r-s)!}\,\frac{\partial^{r-s} u_s}{\partial t^{r-s}}\Big|_{t=0}$$

sau

$$\frac{\partial^r}{\partial t^r}(t^s u_s)\Big|_{t=0} \leqslant \frac{r!}{(r-s)!}\cdot\frac{M.[2m(r-s)]!}{\rho^{r-s}} < \frac{M^*(2mr)!}{\rho^r}$$

deoarece u_s este de clasa $2m$ iar

$$\frac{r!}{(r-s)!} < \frac{(2mr)!}{[2m(r-s)]!}.$$

Punctul 3° al teoremei rezultă din faptul că suma unui număr finit de funcții de clasa $2m$ este tot o funcție din clasa $2m$.

1.3. În [2] și [3] am stabilit următoarele rezultate :

LEMA 1.3.1. *Soluția elementară* $v(x, t; \xi, \tau)$, $(n = 1)$ *satisface relațiile*

$$\lim_{x \to \infty} (x - \xi)^\alpha \frac{\partial^\beta v(x, t; \xi, \tau)}{\partial x^\beta} = 0 \tag{1.14}$$

pentru orice α *întreg și* $\beta = 0, 1, 2, \ldots$

LEMA 1.3.2. *Soluția elementară* $v(x, t;\ \xi, \tau)$, $n = 1$ *este soluția ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial^{2m-1} v}{\partial x^{2m-1}} + \frac{1}{2m} \frac{x - \xi}{t - \tau} v = 0 \tag{1.15}$$

care satisface condițiile inițiale :

$$\left.\frac{\partial^{2s} v}{\partial x^{2s}}\right|_{\xi} = \frac{(-1)^s}{2m} (t - \tau)^{-\frac{2s+1}{2m}} \Gamma\left(\frac{2s+1}{2m}\right) \cdot \left.\frac{\partial^{2s+1} v}{\partial x^{2s+1}}\right|_{\xi} = 0 \tag{1.16}$$

pentru $p = 0, 1, \ldots, m - 1.$

Să demonstrăm :

LEMA 1.3.3. *Soluția elementară satisface relațiile*

$$\lim_{t \to \tau+} (t - \tau)^{\alpha} \frac{\partial^{\beta} v(x, t;\ \xi, \tau)}{\partial t^{\beta}} = 0 \tag{1.17}$$

pentru orice α *întreg și* $\beta = 0, 1, 2, \ldots$

Demonstrație. a) Avem

$$v(x, t;\ \xi, \tau) = \int_0^{\infty} \exp(-\eta^{2m}) \cos \frac{(x - \xi)\eta}{(t - \tau)^{1/2m}} \, d\left(\frac{\eta}{(t - \tau)^{1/2m}}\right)$$

deci

$$(x - \xi)\, v(x, t;\ \xi, \tau) = \int_0^{\infty} \exp(-\eta^{2m}) \cos(\lambda\eta) \, d(\lambda\eta), \quad \lambda = \frac{x - \xi}{(t - \tau)^{1/2m}}$$

Conform lemei 1.3.1, cînd $x \to \infty$, atunci $(x - \xi)\, v(x, t;\ \xi, \tau) \to 0$, însă pentru $x - \xi \to \infty$ și $\alpha \to \infty$, deci

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^{\infty} \exp(-\eta^{2m}) \cos(\lambda\eta) \, d(\lambda\eta) = 0,$$

însă $\lambda \to \infty$ și cînd $t \to \tau+$, deci $(x - \xi)\, v(x, t;\ \xi, \tau) \to 0$ dacă $t \to \tau+$, în consecință

$$\lim_{t \to \tau+} v(x, t;\ \xi, \tau) = 0$$

de unde rezultă și

$$\lim_{t \to \tau+} (t - \tau)^{\alpha} v(x, t;\ \xi, \tau) = 0, \quad \alpha \text{ întreg} \geqslant 0. \tag{1.18}$$

Deoarece

$$0 = \lim_{x \to \infty} \frac{(x - \xi)^{2m\alpha+1}}{(t - \tau)^{\alpha}} v(x, t; \xi, \tau) = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{2m\alpha} \int_0^{\infty} \exp(-\tau^{2m}) \cos(\lambda\eta) \, d(\lambda\eta)$$

obținem

$$\lim_{t \to \tau+} (t - \tau)^{-\alpha} v(x, t;\ \xi, \tau) = 0, \quad \alpha \geqslant 0 \text{ și întreg.} \tag{1.19}$$

b) Avem

$$(x-\xi)^2\frac{\partial v}{\partial x} = -\int_0^\infty \exp\left(-\eta^{2m}\right)(\eta\lambda)\sin(\eta\lambda)\,\mathrm{d}(\eta\lambda)$$

care conduce, urmînd acelaşi raţionament, la

$$\lim_{t\to\tau}\frac{\partial v(x,t;\xi,\tau)}{\partial x}=0$$

şi, în general,

$$\lim_{t\to\tau+}(t-\tau)^{\alpha}\frac{\partial v(x,t;\xi,\tau)}{\partial x}=0 \tag{1.20}$$

pentru orice α întreg.

c) Din lema 1.3.2 avem, derivînd în raport cu x şi ţinînd seamă că v este soluţie a ecuaţiei (1.1),

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{1}{2m}\,\frac{1}{t-\tau}\,v+\frac{1}{2m}\,\frac{x-\xi}{t-\tau}\,\frac{\partial v}{\partial x};$$

prin urmare folosind pe (1.19) şi (1.20)

$$\lim_{t\to\tau+}\frac{\partial v}{\partial t}=0;$$

în acest mod se demonstrează relaţia (1.17) pentru orice α, β, α număr întreg şi $\beta=0, 1, 2, \ldots$

II. PROBLEME LA LIMITĂ

2.1. Să considerăm semiplanul $t>0$. Fie $\varphi_k(x)$, $k=0, 1, \ldots, \ldots, p-1$, p funcţii definite pe R, care îndeplinesc condiţia

$$|\varphi_k(x)|<M+N|x|^s,\quad k=0, 1, \ldots, p-1,\quad x\in R, \tag{2.1}$$

M, N numere pozitive, s un număr natural oarecare.

Teorema 2.1.1. *Soluţia ecuaţiei*

$$\left(\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}-\frac{\partial}{\partial t}\right)^p u(x,t)=0$$

definită pentru $t>0$, şi $x\in R$ *care îndeplineşte condiţiile*

$$u(x,t)\big|_{t=0}=\varphi_0(x),\quad x\in R,$$

$$\left.\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}\right|_{t=0}=\varphi_k(x),\quad x\in R,\quad k=1, 2, \ldots, p-1 \tag{2.2}$$

este dată de

$$u(x,t)=u_0(x,t)+tu_1(x,t)+\ldots+t^{p-1}u_{p-1}(x,t) \tag{2.3}$$

cu

$$u_0(x, t) = \frac{1}{\mu(m)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_0(\xi)}{t^{1/2\,m}} \mathrm{d}\xi \int_0^{+\infty} \exp(-\eta^{2m}) \cos \frac{(x-\xi)\,\eta}{t^{1/2m}} \mathrm{d}\eta,$$

şi

$$u_k(x, t) = \frac{1}{k!} u(\varphi_k) - \frac{1}{(k-1)!\,1!} \frac{\partial u(\varphi_{k-1})}{\partial t} + \ldots \tag{2.4}$$

$$\ldots + (-1)^k \frac{1}{0!\,k!} \frac{\partial^k u(\varphi_0)}{\partial t^k}$$

unde

$$u(\varphi_0) = u_0(x, t) \text{ etc.}$$

Demonstraţie. a) Punem

$$u(x, t) = u_0(x, t) + t u_1(x, t) + \ldots + t^{p-1} u_{p-1}(x, t), \tag{2.5}$$

pentru $t = 0$; avem

$$u(x, t)\big|_{t=0} = u_0(x, t)\big|_{t=0} = \varphi_0(x)$$

prin urmare [3]

$$u_0(x, t) = \frac{1}{\mu(m)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{t^{1/2m}} \mathrm{d}\xi \int_0^{\infty} \exp(-\eta^{2m}) \cos \frac{(x-\xi)\,\eta}{t^{1/2m}} \mathrm{d}\eta, \tag{2.6}$$

unde

$$\mu(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\xi}{t^{1/2m}} \int_0^{\infty} \exp(-\eta^{2m}) \cos \frac{(x-\xi)\,\eta}{t^{1/2m}} \mathrm{d}\eta. \tag{2.7}$$

Procedăm prin inducţie. Să presupunem că am determinat pe $u_0, u_1, \ldots$ $\ldots, u_{k-1}$ şi să determinăm pe u_k. Din (2.5) avem

$$\frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} = \lambda_0(x, t) + t\,\lambda_1(x, t) + \ldots + t^{p-1} \lambda_{p-1}(x, t) \tag{2.8}$$

deoarece şi derivata de ordinul k este o funcţie (E, p). Din (2.8) obţinem

$$\frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k}\bigg|_{t=0} = \lambda_0(x, t)\bigg|_{t=0} = \varphi_k(x)$$

însă avem

$$\lambda_0(x, t) = \frac{\partial^k u_0(x, t)}{\partial t^k} + k \frac{\partial^{k-1} u_1(x, t)}{\partial t^{k-1}} + \ldots + k!\, u_k(x, t) \tag{2.9}$$

şi pentru că

$$\lambda_0(x, t) = \frac{1}{\mu(m)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_k(\xi)}{t^{1/2m}} \mathrm{d}\xi \int_0^{\infty} \exp(-\eta^{2m}) \cos \frac{(x-\xi)\,\eta}{t^{1/2m}} \mathrm{d}\eta, \tag{2.10}$$

rezultă imediat

$$(2.11)\qquad u_k(x,t) = \frac{1}{k!}\lambda_0(x,t) - \frac{1}{k!}\frac{\partial^k u_0(x,t)}{\partial t^k} - \frac{1}{(k-1)!}\frac{\partial^{k-1} u_1(x,t)}{\partial t^{k-1}} - \dots$$

$$\dots - \frac{1}{1!}\frac{\partial u_{k-1}(x,t)}{\partial t},$$

cu $\lambda_0(x, t)$ dat de (2.10). În acest mod sînt determinate toate componentele $u_k(x, t)$.

b) Dacă notăm

$$(2.12)\qquad u(\varphi) = \frac{1}{\mu(m)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\xi)}{t^{1/2\,m}}\,d\xi\int_0^\infty \exp(-\eta^{2m})\cos\frac{(x-\xi)\,\eta}{t^{1/2m}}\,d\eta$$

să arătăm că

$$(2.13)\qquad u_k(x,t) = \frac{1}{k!}u(\varphi_k) - \frac{1}{1!(k-1)!}\frac{\partial u(\varphi_{k-1})}{\partial t} +$$

$$+ \frac{1}{(k-2)!\,2!}\frac{\partial^2 u(\varphi_{k-2})}{\partial t^2} + \dots + (-1)^k\frac{1}{k!}\frac{\partial^k u(\varphi_0)}{\partial t^k}.$$

Avem

$$u_0(x,t) = u(\varphi_0)$$

$$u_1(x,t) = \frac{1}{1!\,0!}u(\varphi_1) - \frac{1}{0!\,1!}\frac{\partial u(\varphi_0)}{\partial t};$$

presupunem adevărată relaţia pînă la $k-1$,

$$u_{k-1}(x,t) = \frac{1}{0!\,(k-1)!}u(\varphi_{k-1}) - \frac{1}{1!(k-2)!}\frac{\partial u(\varphi_{k-2})}{\partial t} + \dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!\,0!}\frac{\partial^{k-1}u(\varphi_0)}{\partial t^{k-1}}$$

pe care dacă le derivăm şi le înlocuim în (2.11) rezultă imediat (2.13)

$$-\frac{1}{k!}\frac{\partial^k u_0}{\partial t^k} = -\frac{1}{0!\,k!}\frac{\partial^k u(\varphi_0)}{\partial t^k}$$

$$-\frac{1}{(k-1)!}\frac{\partial^{k-1}u_1}{\partial t^{k-1}} = \frac{1}{1!(k-1)!}\frac{\partial^{k-1}u(\varphi_1)}{\partial t^{k-1}} + \frac{1}{(k-1)!\,1!}\frac{\partial^k u(\varphi_0)}{\partial t^k}$$

. . . .

$$-\frac{1}{1!}\frac{\partial u_{k-1}}{\partial t} = -\frac{1}{1!(k-1)!}\frac{\partial u(\varphi_{k-1})}{\partial t} + \frac{1}{1!(k-2)!\,1!}\frac{\partial^2 u(\varphi_{k-2})}{\partial t^2} - \dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^k}{1!(k-1)!}\frac{\partial^k u(\varphi_0)}{\partial t^k}.$$

Să calculăm coeficientul lui $\frac{\partial^k u(\varphi_0)}{\partial t^k}$, de exemplu,

$$-\frac{1}{0!\,k!} + \frac{1}{(k-1)!\,1!} - \frac{1}{(k-2)!\,2!} + \dots + \frac{(-1)^k}{1!\,(k-1)!} =$$

$$= \frac{-1}{k!}[C_k^k - C_k^{k-1} + \dots + (-1)^{k-1}C_k^1] = \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Din relaţia (2.13) sau (2.11) rezultă imediat unicitatea componentelor u_k, deci şi a soluţiei $u(x, t)$.

2.2. Să demonstrăm următoarea teoremă :

Teorema 2.2.1. *Soluţia* $u(x, t)$ *a ecuaţiei*

$$\left(\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} - \frac{\partial}{\partial t}\right)^{(p)} u(x, t) = 0 \tag{2.14}$$

definită în $R \times R_+$ *care îndeplineşte condiţiile*

$$u(x, t)|_{t=0} = \psi_0(x), \quad E^k(u(x, t))|_{t=0} = \psi_k(x), \qquad k = 1, 2, \dots, p-1 \tag{2.15}$$

pentru orice $x \in R$, *iar funcţiile continue* ψ_k *satisfac neegalităţile*

$$|\psi_k(x)| < M + N|x|^s, \; k = 0, 1, \dots, p-1, \qquad x \in R \tag{2.16}$$

pentru M, N *numere pozitive iar* s *un număr natural oarecare, este dată de*

$$u(x, t) = \frac{1}{\mu(m)} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{-1/2m} \psi(\xi, t)\, d\xi \int_0^{\infty} \exp(-\eta^{2m}) \cos \frac{(x-\xi)\eta}{t^{1/2m}}\, d\eta, \tag{2.17}$$

unde

$$\psi(\xi, t) = \psi_0(\xi) - \frac{t}{1!}\psi_1(\xi) + \dots + (-1)^{p-1}\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\psi_{p-1}(\xi). \tag{2.18}$$

Demonstraţie. Căutăm soluţia $u(x, t)$ de forma

$$u(x, t) = u_0(x, t) + t u_1(x, t) + \dots + t^{p-1} u_{p-1}(x, t) \tag{2.19}$$

cu $u_k(x, t)$ funcţii $(E, 1)$ în semiplanul $t > 0$. Aplicînd operatorii E^{p-1}, $E^{p-2}, \dots, E^1, E^0$ lui (2.19) şi ţinînd seama de lema 1.1.1, avem

$$\begin{gathered} (-1)^{p-1}E^{p-1}(u) = (p-1!)\, u_{p-1} \\ (-1)^{p-2}E^{p-2}(u) = (p-2)!\,[u_{p-2} + C_{p-1}^{p-2} t u_{p-1}] \end{gathered} \tag{2.20}$$

şi în general

$$(-1)^k E^k(u) = k!\,[C_k^k u_k + C_{k+1}^k t u_{k+1} + \dots + C_{p-1}^k t^{p-k-1} u_{p-1}] \tag{2.21}$$

pentru $k = p-2, p-3, \dots, 2, 1, 0$.

Din prima relaţie obţinem imediat

$$u_{p-1}(x, t)|_{t=0} = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}\psi_{p-1}(x)$$

deci

$$u_{p-1}(x,t) = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}\,\frac{1}{\mu(m)}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{-1/2m}\,\psi_{p-1}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\int_0^{\infty}\exp(-\eta^{2m})\cos\frac{(x-\xi)\eta}{t^{1/2m}}\,\mathrm{d}\eta,$$

din a doua relaţie (2.20) avem

$$u_{p-2}(x,t)\big|_{t=0} = \frac{(-1)^{p-2}}{(p-2)!}\,\psi_{p-2}(x)$$

deci

$$u_{p-2}(x,t) = \frac{(-1)^{p-2}}{(p-2)!}\,\frac{1}{\mu(m)}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{-1/2m}\,\psi_{p-2}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\int_0^{\infty}\exp(-\eta^{2m})\cos\frac{(x-\xi)\eta}{t^{1/2m}}\,\mathrm{d}\eta$$

şi, în general, din (2.21) rezultă

$$u_k(x,t)\big|_{t=0} = \frac{(-1)^k}{k!}\,\psi_k(x)$$

din care se obţine

$$u_k(x,t) = \frac{(-1)^k}{k!}\,\frac{1}{\mu(m)}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{-1/2m}\psi_k(\xi)\,\mathrm{d}\xi\int_0^{\infty}\exp(-\eta^{2m})\cos\frac{(x-\xi)\eta}{t^{1/2m}}\,\mathrm{d}\eta$$

care înlocuite în (2.19) ne dă relaţia (2.17). Soluţia obţinută satisface condiţiile iniţiale date. În adevăr,

$$E^k(u) = (-1)^k k!\,[u_k + C^k_{k+1}tu_{k+1} + \ldots + C^k_{p-1}t^{p-k+1}u_{p-1}]$$

şi

$$\lim_{t\to 0} E^k(u) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\mu(m)}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{-1/2m}\,\psi_k(\xi)\,\mathrm{d}\xi\int_0^{\infty}\exp(-\eta^{2m})\cos\frac{(x-\xi)\eta}{t^{1/2m}}\,\mathrm{d}\eta$$

deci

$$\lim_{t\to 0} E^k(u) = \psi_k(x), \qquad k = 0, 1, \ldots, p-1.$$

Rămîne să mai arătăm că soluţia obţinută este unică. Să presupunem că am avea şi

$$u(x,t) = v_0(x,t) + tv_1(x,t) + \ldots + t^{p-1}v_{p-1}(x,t)$$

deci în semiplanul $t > 0$

$$0 \equiv u_0 - v_0 + t(u_1 - v_1) + \ldots + t^{p-1}(u_{p-1} - v_{p-1}).$$

Aplicînd acestei identităţi operatorul E^{p-1}, rezultă

$$(p-1)!\,(u_{p-1} - v_{p-1}) \equiv 0$$

deci

$$u_{p-1} \equiv v_{p-1}$$

în modul acesta se arată că $u_k \equiv v_k$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$.

III. FORMULE DE MEDIE

3.1. Să considerăm integrala

$$\mathcal{I}(x, y) = Y \frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{B} \sum_{r=0}^{2m-2} f\left(x + ahu_0 u_1 \ldots u_{2m-2} \exp \frac{2\pi i r}{2m}, y + bh^{2m}\right), \tag{3.1}$$

unde Y este operatorul integral

$$Y = \prod_{k=0}^{2m-2} \int_0^\infty u_k^k \exp(-u_k^{2m}) \, du_k \tag{3.2}$$

iar

$$B = (2m)^{2m-1} \Gamma\left(\frac{1}{2m}\right) \Gamma\left(\frac{2}{2m}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{2m-1}{2m}\right) \tag{3.3}$$

în ipoteza că $f(\lambda, \mu)$ este analitică în ambele variabile.

Avem

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x, y) &= f(x + ahu \exp \frac{2\pi i r}{2m}, \ y + bh^{2m}) = f(x, y) + \\ &+ \sum_{\alpha+\beta=1}^{\infty} \frac{a^\alpha b^\beta h^{2m\beta+\alpha}}{\alpha! \beta!} u^\alpha \exp\left(\frac{2\pi i h \alpha}{2m}\right) \cdot \frac{\partial^{\alpha+\beta} f(x, y)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \end{aligned} \tag{3.4}$$

şi pentru că

$$\frac{1}{2m} \sum_{r=0}^{2m-1} \exp\left(\frac{2\pi i r \alpha}{2m}\right) = \begin{cases} 0, & \alpha \neq 2mq \\ 1, & \alpha = 2qm \end{cases}$$

obţinem, înlocuind pe α cu $2m\alpha$,

$$\frac{1}{2m} \mathcal{K}(x, y) = f(x, y) + \sum_{\alpha, \beta} \frac{a^{2m\alpha} b^\beta}{(2m\alpha)! \beta!} h^{2m(\alpha+\beta)} u^{2m\alpha} \frac{\partial^{2m\alpha+\beta} f(x, y)}{\partial x^{2m\alpha} \partial y^\beta}. \tag{3.5}$$

Să aplicăm lui (3.5) operatorul Y după ce în prealabil am înlocuit pe u cu $u_0 u_1 \ldots u_{2m-2}$.

Avem

$$\frac{1}{B} \cdot \frac{1}{2m} Y \mathcal{K}(x, y)) = f(x, y) + \sum_{\alpha, \beta} \frac{a^{2m\alpha} b^\beta}{(2m\alpha)! \beta!} \cdot h^{(\alpha+\beta)2m} \frac{\partial^{2m\alpha+\beta} f(x, y)}{\partial x^{2m\alpha} \partial y^\beta} \mathcal{L}(Y) \tag{3.6}$$

cu

$$\mathcal{L}(Y) = \frac{1}{B} \prod_{k=0}^{2m-2} \int_0^\infty u_k^{k+2m\alpha} \exp(-u_k^{2m}) \, du_k = \frac{(2m\alpha)!}{\alpha!} \cdot \frac{1}{(2m)^{2m\alpha}}. \tag{3.7}$$

În spaţiul complex $(x + i\xi) \times (y + i\eta)$ să considerăm domeniul $D = D' \times D''$, unde D' este steaua de centru (x, ξ) şi raze $x = \lambda + auh \cos \frac{2\pi h}{2m}$, $\xi = auh \sin \frac{2\pi h}{2m}$, iar D'' dreapta $y = \mu + bh^{2m}$, $\eta = 0$. Avem

TEOREMA 3.1.1. *Soluţiile analitice în $\mathcal{D} \supset D$ ale ecuaţiei cu derivate parţiale*

$$\left(\frac{a}{2m}\right)^{2m} \frac{\partial^{2m} w}{\partial x^{2m}} + b \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{3.8}$$

verifică următoarea formulă de medie

$$f(x, y) = \frac{1}{2m} \frac{1}{B} Y \sum_{r=0}^{2m-2} f\left(x + ahu_0 u_1 \ldots u_{2m-2} \exp \frac{2\pi i r}{2m}, y + bh^{2m}\right), \tag{3.9}$$

unde B, Y sînt daţi de (3.3) *şi* (3.2).

Demonstraţie. Din (3.6) şi (3.7) avem

$$\begin{aligned} \frac{1}{B} \cdot \frac{1}{2m} \cdot Y(K(x, y)) &= f(x, y)) + \sum_{\alpha, \beta} \frac{h^{(\alpha, +\beta)2m}}{\alpha!\, \beta!} \frac{a^{2m\alpha} b^{\beta}}{(2m)^{2m\alpha}} \frac{\partial^{2m\alpha+\beta} f(x, y)}{\partial x^{2m\alpha} \partial y^{\beta}} = \\ &= f(x, y) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{h^{2ms}}{s!} \left[\left(\frac{a}{2m}\right)^{2m} \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} + b \frac{\partial}{\partial y}\right]^{(s)} f(x, y) \end{aligned} \tag{3.10}$$

din care rezultă imediat enunţul teoremei.

Din relaţia 3.10 rezultă şi

TEOREMA 3.1.2. *Soluţiile analitice în $\mathcal{D} \supset D$ ale ecuaţiei cu derivate parţiale*

$$E^{p+1}(w) \equiv \left[\left(\frac{a}{2m}\right)^{2m} \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} + b \frac{\partial}{\partial y}\right]^{p+1} w = 0$$

satisfac relaţia

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \frac{1}{B} Y \sum_{h=0}^{2m-1} f(x + ahu_0 u_1 \ldots u_{2m-2} \exp \frac{2\pi i h}{2m}, \ y + bh^{2m}) &= \\ = f(x, y) + \frac{h^{2m}}{1!} E(f) + \ldots + \frac{h^{2mp}}{p!} E^{p}(f). \end{aligned}$$

B şi Y avînd aceeaşi semnificaţie ca la teorema precedentă.

3.2. Pentru a obţine formule de medie pentru soluţiile analitice ale ecuaţiei

$$\left(\frac{a}{2m}\right)^{2m} \frac{\partial^{2m} w}{\partial x_w^{2m}} + \left(\frac{b}{2n}\right)^{2n} \frac{\partial^{2n} w}{\partial y^{2n}} + c \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

este suficient să aplicăm funcţiei

$$f(x + ahu_0 u_1 \ldots u_{2m-2} \exp \frac{2\pi i r}{2m}, \ y + bhv_0 v_1 \ldots v_{2n-2} \exp \frac{2\pi i s}{2n}, \ z + ch^{2m}\Big)$$

presupusă analitică în cele trei argumente într-un domeniu care conţine pe $D' \times D' \times D''$, operatorul

$$\frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{B_{2m}} \cdot \frac{1}{B_{2n}} Y_u \cdot Y_v \sum_{r=0}^{2m-1} \sum_{s=0}^{2n-1}$$

unde Y_u este operatorul Y din teorema 3.1.1 iar Y_v se obţine din Y_u înlocuind pe u_k cu v_k, $k = 0, 1, \ldots, 2n - 1$, B_{2m} este numărul B iar B_{2n} se obţine din B înlocuind pe m cu n.

TEOREMA 3.2.1. *Soluţiile analitice în* $\mathcal{D} \supset D'_{2m} \times D'_{2n} \times D''$ ale *ecuaţiei cu derivate parţiale*

$$\left(\frac{a}{2m}\right)^{2m} \frac{\partial^{2m} w}{\partial x^{2m}} + \left(\frac{b}{2n}\right)^{2n} \frac{\partial^{2n} w}{\partial y^{2n}} + c\,\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3.11}$$

verifică următoarea formulă de medie

(3.12)
$$f(x, y, z) = \frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{B_{2m}} \cdot \frac{1}{B_{2n}}\, Y_u Y_v \sum_{r=0}^{2m-1} \sum_{s=0}^{2n-1} f(x + a^* h, y + b^* h^{\frac{2m}{2n}}, z + ch^{2m}),$$

unde

$$a^* = au_0 u_1 \ldots u_{2m-2} \exp \frac{2\pi i r}{2m}, \quad b^* = bv_0 v_1 \ldots v_{2n-2} \exp \frac{2\pi i s}{2n} \cdot$$

Demonstraţie. Obţinem relaţia integrală

$$\frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{B_{2m}} \cdot \frac{1}{B_{2n}}\, Y_u Y_v \sum_{r=0}^{2m-1} \sum_{s=0}^{2n-1} f(x + a^* h, y + b^* h^{\frac{2m}{2n}}, z + ch^{2m}) =$$

$$= f(x, y, z) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{h^{2m\alpha}}{\alpha!} \left[\left(\frac{a}{2m}\right)^{2m} \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} + \left(\frac{b}{2n}\right)^{2n} \frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}} + c\,\frac{\partial}{\partial z}\right]^{(\alpha)} f(x, y, z)$$

din care rezultă imediat enunţul teoremei.

3.3. Să presupunem că funcţia $f(x, y)$ are derivate în raport cu y pînă la ordinul p, continue, iar în raport cu x pînă la ordinul $2mp$, de asemenea continue în $\mathcal{D}$. Aplicînd formula lui Taylor în raport cu y obţinem

$$f(x + ah, y + bh^{2m}) = \sum_{\beta=0}^{2m} \frac{b^\beta h^{2m\beta}}{\beta!} \frac{\partial^\beta f(x + ah, y)}{\partial y^\beta} + R_p \tag{3.13}$$

cu

$$R_p = \frac{h^{2mp}}{p!}\, \varepsilon(h), \ \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Termenului

$$\frac{b^\beta h^{2m\beta}}{\beta!} \frac{\partial^\beta f(x + ah, y)}{\partial y^\beta}$$

să-i aplicăm formula lui Taylor în raport cu variabila x, oprindu-ne la derivata $2m(p - \beta)$: avem

$$\frac{b^\beta h^{2m\beta}}{\beta!} \frac{\partial^\beta f(x + ah, y)}{\partial y^\beta} = \sum_{\alpha=0}^{2m(p-\beta)} \frac{b^\beta a^\alpha}{\beta!\,\alpha!}\, h^{2m\beta+\alpha} \frac{\partial^{\alpha+\beta} f(x, y)}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta} + R_{2m(p-\beta)}$$

cu

$$R_{2m(p-\beta)} = \frac{h^{2mp}}{[2m(p-\beta)]!}\,\varepsilon_\beta(h),\ \lim_{h\to 0}\varepsilon_\beta(h) = 0.$$

Dacă înlocuim acum pe a cu

$$au_0u_1\dots u_{2m-2}\exp\left(\frac{2\pi ik}{2m}\right),$$

obţinem

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2m}\sum_{k=0}^{2m-1} f\left(x + ahu_0u_1\dots u_{2m-2}\exp\left(\frac{2\pi ik}{2m}\right),\ y + bh^{2m}\right) =\\ &= f(x,y) + \sum_{\beta=1}^{2m}\sum_{\alpha}\frac{a^{2m\alpha}b^\beta}{(2m\alpha)!\,\beta!}(u_0u_1\dots u_{2m-2})^{2m\alpha}h^{2m(\alpha+\beta)}\frac{\partial^{2m\alpha+\beta}f(x,y)}{\partial x^{2m\alpha}\,\partial y^\beta} +\\ &\qquad + \frac{h^{2mp}}{p!}\,\varepsilon^*(h),\end{aligned}\tag{3.14}$$

unde $\varepsilon^*(h)\to 0$ cînd $h\to 0$ iar α ia valorile $1, 2,\dots,$ astfel încît

$$2m\alpha + \beta \leqslant 2mp.$$

Întrucît $\varepsilon^*(h)\to 0$ cînd $h\to 0$, rezultă că şi

$$\lim_{h\to 0} Y(\varepsilon^* h) = 0,$$

unde Y este operatorul (3.2), aceasta din cauza exponenţialelor care le conţine.

Să considerăm acum domeniile $\mathcal{L}_k$, $k = 0, 1, \dots, 2m-1$ din $C^{(2m)}$ definite astfel

$$\mathcal{L}_k = l_0 \times l_1 \times \dots \times l_{k-1} \times l_k^* \times l_{k+1} \times \dots \times l_{2m-1}$$

unde l_i, $i \neq k$ sînt semidreptele din C care pleacă din punctul $(x, 0)$ şi argument zero, iar l_k^* este semidreapta din C care pleacă din punctul $(x, 0)$ şi argument $\frac{2\pi k}{2m}$. Cu această notaţie (3.1) apare ca o integrală pe domeniul

$$\mathcal{L} = \bigcup_{k=0}^{2m-1}\mathcal{L}_k.$$

Ecuaţia (1.1), $n = 1$, are caracteristici dreapta multiplă- $2m$, $y^{2m} = 0$. Se observă că domeniul $\mathcal{L}_k$ este format din $2m - 1$ semidrepte reale din $C^{(2m)}$ şi o semidreaptă rotită cu $\frac{2\pi k}{2m}$, deci cele $2m - 1$ semidrepte sînt caracteristici iar semidreapta rotită este o caracteristică rotită al cărei argument de rotaţie se obţine din ecuaţia

$$y^{2m} = a^{2m}$$

luînd o soluţie, deci folosind tot principiul dilatării caracteristicilor [4][3].

---

[3] Pag. 143.

TEOREMA 3.3.1. *Fie $f(x, y)$ o funcție definită $(-\infty, +\infty) \times [0, +\infty)$ care satisface următoarele condiții :*

1°) *Are derivate parțiale continue pînă la ordinul formării operatorului $E^p u(x, y)$.*

2°) *Funcțiile complexe definite pe $\mathcal{L}_k \times [0, +\infty)$*

$$f_k\left(x + ahu_0 u_1 \dots u_{2m-2} \exp\frac{2\pi ik}{2m},\ y + bh^{2m}\right),\ k = 0, 1, \dots, 2m-1$$

au aceleași derivate parțiale continue pe $\mathcal{L}_k$ și expresiile

$$u_0^0 u_1^1 \dots u_{2m-2}^{2m-2} \exp(-u_0^{2m} - \dots - u_{2m-2}^{2m}) D^\alpha f_k,$$

unde D^α este o astfel de derivată parțială, sînt integrabile pe $\mathcal{L}_k$.

În aceste situații există un număr $\varepsilon_p(h) \to 0$ cînd $h \to 0$ astfel încît să existe relația

$$\frac{1}{2m}\frac{1}{B}\sum_{k=0}^{2m-1} Yf\left(x + ahu_0 u_1 \dots u_{2m-2} \exp\frac{2\pi ik}{2m},\ y + bh^{2m}\right) = \tag{3.15}$$

$$f(x, y) + \frac{h^{2m}}{1!} Ef(x, y) + \dots + \frac{h^{2mp}}{p!}[E^p f(x, y) + \varepsilon_p(h)]$$

unde Y este operatorul (3.2), *B numărul dat de* (3.3), *iar E operatorul* (3.8).

Demonstrație. Dacă aplicăm lui (3.14) operatorul $\frac{1}{B} Y$, în condițiile din enunțul teoremei, rezultă relația (3.15).

Dacă $f(x, y)$ este o funcție $(E, p + 1)$, atunci $\varepsilon_p(h) = 0$ și rezultă teorema (3.12) fără condițiile de analiticitate.

Observație. Dacă în funcția

$$u_0^0 u_1^1 \dots u_{2m-2}^{2m-2} \exp(-u_0^{2m}) \exp(-u_1^{2m}) \dots$$

$$\dots \exp(-u_{2m-2}^{2m}) f\left(x + ahu_0 u_1 \dots u_{2m-2} \exp\frac{2\pi ik}{2m},\ y + bh^{2m}\right)$$

facem înlocuirea

$$x + ahu_0 u_1 \dots u_{2m-2} \exp\frac{2\pi ik}{2m} = \xi \text{ sau } u_0 = \frac{\xi - x}{ahu_1 u_2 \dots u_{2m-2}} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{-2\pi ik}{2m}\right)$$

în afara unui factor constant și modificînd puțin notațiile obținem

$$\frac{1}{ah} u_0^0 u_1^1 \dots u_{2m-3}^{2m-3} \exp(-u_0^{2m}) \dots \times \tag{3.16}$$

$$\times \dots \exp(-u_{2m-3}^{2m}) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^{2m}}{(ahu_0 u_1 \dots u_{2m-3})^{2m}}\right] f(\xi, y + bh^{2m})$$

unde dacă facem $h = (t - \tau)^{1/2m}$, $b = -1$, $a = 2m$, $m = 1$, $y = t$, obţinem integrantul din formula lui Poisson de la ecuaţia căldurii :

$$\frac{1}{2\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right] f(\xi, \tau).$$

Dacă aplicăm operatorul

$$Y^* = \int_0^\infty \mathrm{d}u_0 \int_0^\infty \mathrm{d}u_1 \ldots \int_0^\infty \mathrm{d}u_{2m-3}$$

funcţiei

$$g(u\,;\, x-\xi,\, ah) = \frac{1}{ah} u_0^0 u_1^1 \ldots u_{2m-3}^{2m-3} \exp\left(-u_0^{2m}\right) \times$$

$$\times \ldots \exp\left(-u_{2m-3}^{2m}\right) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^{2m}}{(ahu_0u_1\ldots u_{2m-3})^{2m}}\right]$$

folosind formula mediei ponderate, rezultă existenţa unui număr $0 < \theta < \infty$ astfel încît

$$Y^* g(u\,;\, x-\xi,\, ah) = A\, \frac{1}{ah} \exp\left[-\theta^{2m}\left(\frac{x-\xi}{ah}\right)^{2m}\right]$$

A fiind un număr pozitiv.

Revenind acum la operatorul Y, urmează că integrela (3.1) are sens, deci formula de medie este valabilă dacă funcţia $f(\xi, \tau)$ şi derivatele ei pînă la ordinul $2m(p-1)$ în raport cu ξ, $D_\xi^\alpha f(\xi, \tau)$ îndeplinesc condiţia ca expresiile

$$\frac{1}{ah} \exp\left[-\theta^{2m}\left(\frac{x-\xi}{ah}\right)^{2m}\right] D_\xi^\alpha f(\xi, \tau)$$

să fie integrabile pe $[0, \infty)$.

3.4. Să notăm în formula din teorema 3.1.2 primul termen cu $\mu_0(f, h)$; obţinem pentru funcţiile $(E, p+1)$ relaţia

$$f(x, y) + \frac{h^{2m}}{1\,!} E(f) + \ldots + \frac{h^{2mp}}{p\,!} E^p(f) = \mu_0(f, h). \tag{3.17}$$

Dacă punem

$$\mu_1(f, h) = \frac{2m}{h^{2m}} \int_0^h h^{2m-1} \mu_0(u, h)\, \mathrm{d}h$$

obţinem

$$f(x, y) + \frac{1}{2} \cdot \frac{h^{2m}}{1\,!} E(f) + \ldots + \frac{h^{2mp}}{p+1} \frac{1}{\mathrm{p}\,!} E^p(f) = \mu_1(f, h). \tag{3.18}$$

În general cu

$$\mu_s(f, h) = \frac{2m}{h^{2m}} \int_0^h h^{2m-1} \mu_{s-1}(f, h)\, \mathrm{d}h$$

obținem relația

$$(3.19)\quad f(x,y)+\frac{1}{2^s}\frac{h^{2m}}{1!}E(f)+\dots+\frac{1}{(p+1)^s}\frac{h^{2mp}}{p!}E^p(f)=\mu_s(f,h).$$

Dacă în (3.19) facem $s=0,1,\dots,p$, obținem un sistem în $\frac{h^{2mr}}{r!}E^r(f)$, $r=0,1,\dots,p$; rezolvat, obținem pe $f(x,y)$ în funcție de $\mu_0(f,h),\mu_1(f,h),\dots,\mu_p(f,h)$.

TEOREMA 3.4.1. *Dacă $f(x,y)$ satisface condițiile 1° și 2° din teorema 3.3.1 și este în plus o funcție $(E,p+1)$, atunci verifică următoarea formulă de medie*

$$f(x,y)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\mu_0(f,h) & 1 & 1 & \dots & 1\\ \mu_1(f,h) & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{p+1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mu_p(f,h) & \frac{1}{2^p} & \frac{1}{3^p} & \dots & \frac{1}{(p+1)^p}\end{vmatrix}$$

unde

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{p+1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & \frac{1}{2^p} & \frac{1}{3^p} & \dots & \frac{1}{(p+1)^p}\end{vmatrix}$$

Primită la redacție la 7 februarie 1968

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej",
București, str. Polizu nr. 1

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu Nr. 47, București

L'ÉQUATION $\frac{\partial^{2m}u}{\partial x_1^{2m}}+\frac{\partial^{2m}u}{\partial x_2^{2m}}+\dots+\frac{\partial^{2m}u}{\partial x_n^{2m}}-\frac{\partial u}{\partial t}=0$ ITÉRÉE

RÉSUMÉ

Dans la première partie du travail on donne des propriétés de structure pour les solutions de l'équation $E^p(u)=0$.

Ces propriétés sont contenues dans les théorèmes 1.1.1. et 1.2.1. A la suite on résout des problèmes aux limites. Citons le théorème 2.2.1. La solution $u(x,t)$ de l'équation $E^p(u) = 0$ définie pour $t > 0$, $x \in R$, qui satisfait les conditions

$$E^{(k)}(u(x, t))\Big|_{t=0} = \psi_k(x),\ x \in R,\ k=0,1,\ \dots,\ p-1,$$

et

$$|\psi_k(x)| < M + N|x|^s, \quad M > 0, \quad N > 0,$$

est donnée par

$$u(x, t) = \frac{1}{\mu(m)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(\xi, t)}{t^{\frac{1}{2m}}}\, \mathrm{d}\xi \int_0^{\infty} \exp(-\eta^{2m}) \cos \frac{(x-\xi)\,\eta}{t^{\frac{1}{2m}}}\, \mathrm{d}\eta$$

ou

$$\psi(x, t) = \psi_0(x) - \frac{t}{1!}\,\psi_1(x) + \dots + (-1)^{p-1}\,\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\,\psi_{p-1}(x).$$

Finalement on établit des formules de moyenne pour les solutions de $E(u) = 0$ et de $E^p(u) = 0$; elles sont contenues dans les théorèmes 3.1.1, 3.3.1 et 3.4.1.

BIBLIOGRAFIE

1. Miron Nicolescu, *Ecuaţia iterată a căldurii*. St. cerc. mat., 5, *3—4* (1954).

2. Marcel N. Roşculeţ, *Contribuţii la studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale de tip parabolic. III. Problema lui Cauchy pentru o clasă de ecuaţii cu derivate parţiale de ordin superior*. Bul. Inst. politehnic Bucureşti, **XXIII**, *IV* (1961).

3. Mariana Craiu, Marcel N. Roşculeţ, *Probleme la limită pentru ecuaţia* $\sum_{p=1}^{m} \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_p^{2m}} = \frac{\partial u}{\partial t}$, *m impar*. Bul. Inst. politehnic, Bucureşti, **XXX** (1968).

4. Marcel N. Roşculeţ, *Operatori integrali care generalizează ecuaţiile diferenţiale*. IV. *Formule de medie pentru soluţiile analitice ale unor ecuaţii cu derivate parţiale de ordin superior*. St. cerc. mat., **14**, *2* (1963).

OPERATORI LINIARI MĂRGINIŢI PE SPAŢII LINIARE RETICULATE TOPOLOGICE

DE

ROMULUS CRISTESCU

În această lucrare se consideră operatori liniari definiţi pe un spaţiu liniar reticulat topologic, cu valori într-un spaţiu liniar complet reticulat, şi avînd proprietatea că aplică mulţimile mărginite topologic, în mulţimi mărginite în sensul ordinei. Terminologia şi notaţiile sînt cele din [1].

§ 1.

Fie $\mathcal{X}$ un spaţiu liniar topologic (real), cu topologia τ, iar $\mathcal{Y}$ un spaţiu liniar complet reticulat 1).

DEFINIŢIE. Un operator U care aplică $\mathcal{X}$ în $\mathcal{Y}$ va fi numit *operator* (τo)*-mărginit*, dacă pentru orice mulţime (τ)*-mărginită* $A \subset \mathcal{X}$, mulţimea $U(A)$ este (o)-mărginită.

Dacă U este un operator liniar (τo)-mărginit, atunci pentru orice mulţime (τ)-mărginită $A \subset \mathcal{X}$, vom pune

$$\|U\|_A = \sup_{x \in A} |U(x)|. \tag{1}$$

Este evident că mulţimea operatorilor liniari (τo)-mărginiţi (care aplică $\mathcal{X}$ în $\mathcal{Y}$ formează un spaţiu liniar şi că pentru fiecare mulţime (τ)-mărginită $A \subset \mathcal{X}$, formula (1) defineşte o seminormă vectorială pe spaţiul acestor operatori.

Următoarele două propoziţii se stabilesc cu uşurinţă.

---

1) Prin mulţime (τ)-mărginită vom înţelege mulţime mărginită în topologia τ, iar prin mulţime (o)-mărginită vom înţelege mulţime mărginită în sensul ordinei.

Un operator U care aplică $\mathcal{X}$ în $\mathcal{Y}$ se va zice secvenţial (τo)-continuu, dacă din $x_n \xrightarrow{\tau} x$ (în topologia τ) rezultă $U(x_n) \xrightarrow{o} U(x)$.

ST. CERC. MAT.. TOM. 20, NR. 9, P. 1313-1316, BUCUREŞTI, 1968

PROPOZIŢIA 1. *Dacă $\mathcal{Y}$ este un spaţiu de tip mărginit, atunci orice operator liniar, secvenţial* (τo)*-continuu (care aplică $\mathcal{X}$ în $\mathcal{Y}$ este* (τo)*-mărginit.*

PROPOZIŢIA 2. *Dacă $\mathcal{Y}$ este un spaţiu cu unitate tare, iar τ' este topologia dată de norma asociată unităţii, atunci orice operator liniar* $(\tau\tau')$*-continuu* [2]*, este* (τo)*-mărginit.*

Observaţii. Fie U un operator liniar (care aplică $\mathcal{X}$ în $\mathcal{Y}$) avînd proprietatea : există o vecinătate E a originii în $\mathcal{X}$ aşa ca $U(E)$ să fie (o)-mărginită. Atunci U este (τo)-mărginit.

Dacă $\mathcal{X}$ este un spaţiu local convex, atunci proprietatea precedentă revine la următoarea : există o seminormă continuă p pe $\mathcal{X}$ şi un element pozitiv $y_0 \in \mathcal{Y}$ aşa ca

$$|U(x)| \leqslant p(x)\, y_0 \tag{2}$$

oricare ar fi $x \in \mathcal{X}$.

Operatorii liniari satisfăcînd condiţia (2) au fost studiaţi de L. Tsitsas în [2] sub denumirea de operatori (τo)-mărginiţi. Definiţia operatorului (τo)-mărginit dată în prezenta lucrare, este însă mai generală.

§ 2.

În acest paragraf vom presupune că $\mathcal{X}$ este un *spaţiu liniar reticulat, topologic*, adică : $\mathcal{X}$ este un spaţiu liniar reticulat, un spaţiu liniar topologic (cu o topologie separată τ) şi există în $\mathcal{X}$ un sistem fundamental de vecinătăţi ale originii format din mulţimi solide[3].

Vom nota cu $\mathcal{G}$ mulţimea tuturor părţilor solide şi (τ)-mărginite ale lui $\mathcal{X}$.

Ca şi în paragraful precedent, vom nota prin $\mathcal{Y}$ un spaţiu liniar complet reticulat.

Remarcăm că în ipoteza că $\mathcal{X}$ este un spaţiu liniar reticulat topologic, pentru ca un operator U (care aplică $\mathcal{X}$ în $\mathcal{Y}$) să fie (τo)-mărginit, este suficient ca pentru orice $A \in \mathcal{G}$, mulţimea $U(A)$ să fie (o)-mărginită.

TEOREMA 1. *Mulţimea operatorilor aditivi şi* (τo)*-mărginiţi (care aplică $\mathcal{X}$ în $\mathcal{Y}$), formează un subspaţiu normal al spaţiului operatorilor regulaţi.*

Demonstraţie. Dacă U este un operator aditiv şi (τo)-mărginit iar A o parte (o)-mărginită a lui $\mathcal{X}$, atunci A este şi (τ)-mărginită, de unde rezultă că $U(A)$ este (o)-mărginită. Spaţiul $\mathcal{Y}$ fiind complet reticulat, rezultă că U este un operator regulat (a se vedea de ex. [1]).

Mulţimea operatorilor aditivi şi (τo)-mărginiţi este deci o submulţime şi evident un subspaţiu liniar al spaţiului $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})_r$ al operatorilor regulaţi.

Dacă U este aditiv şi (τo)-mărginit, atunci $|U|$ este de asemenea (τo)-mărginit. Într-adevăr, dacă $A \in \mathcal{G}$, atunci pentru orice $x \in A$

$$||U|(x)| \leqslant |U|(|x|) = \sup_{|x'| \leqslant |x|} |U(x')| \leqslant \| U \|_A .$$

---

[2] adică continuu în raport cu topologia τ din $\mathcal{X}$ şi topologia τ' din $\mathcal{Y}$.

[3] O mulţime $A \subset \mathcal{X}$ este solidă, dacă $|x| \leqslant |x'|$ şi $x' \in A$ rezultă $x \in A$.

Fie acum U_1 și U_2 operatori aditivi așa ca $0 \leqslant U_1 \leqslant U_2$. Dacă U_2 este (τo)-mărginit, atunci și U_1 este (τo)-mărginit. Într-adevăr, dacă $A \in \mathcal{G}$, atunci

$$|U_1(x)| \leqslant U_1(|x|) \leqslant \| U_2 \|_A .$$

Fie, în sfîrșit, U_0 aditiv și (τo)-mărginit iar U un operator regulat așa ca $|U| \leqslant |U_0|$. Cu cele de mai înainte, $|U_0|$ este (τo)-mărginit și deci $|U|$ este (τo)-mărginit. Din $O \leqslant U_+$, $U_- \leqslant |U|$ rezultă că U_+, U_- sînt (τo)-mărginiți, deci U este (τo)-mărginit.

Teorema este demonstrată.

COROLAR. *Mulțimea operatorilor aditivi și (τo)-mărginiți formează un spațiu liniar complet reticulat.*

Observații. 1) Dacă U este un operator aditiv și (τo)-mărginit și dacă $U \geqslant O$, atunci pentru orice $A \in \mathcal{G}$

$$\| U \|_A = \sup_{\mathbf{0} \leqslant x \in A} U(x).$$

2) Dacă U_1 și U_2 sînt operatori aditivi și (τo)-mărginiți și dacă $|U_1| \leqslant |U_2|$, atunci pentru orice $A \in \mathcal{G}$

$$\| U_1 \|_A \leqslant \| U_2 \|_A .$$

TEOREMA 2. *Dacă U_0 este un operator aditiv, pozitiv și (τo)-mărginit definit pe un subspațiu normal $\mathcal{X}_0$ al spațiului liniar reticulat topologic $\mathcal{X}$, atunci U_0 se poate prelungi pe $\mathcal{X}$ cu păstrarea aditivității pozitivității și (τo)-mărginirii.*

Demonstrație. Pentru orice element $x \geqslant \mathbf{0}$ al spațiului $\mathcal{X}$ vom pune

$$U(x) = \sup_{\substack{\mathbf{0} \leqslant x' \leqslant x \\ x' \in \mathcal{X}_0}} U_0(x') \tag{3}$$

iar pentru x oarecare

$$U(x) = U(x_+) - U(x_-). \tag{4}$$

Operatorul dat de formulele (3), (4) este evident o prelungire a lui U_0. Să arătăm că U este aditiv. Pentru aceasta este suficient să considerăm elemente pozitive.

Fie x_1, $x_2 \geqslant \mathbf{0}$ și $\mathbf{0} \leqslant a \leqslant x_1 + x_2$ cu $a \in \mathcal{X}_0$. Atunci a se reprezintă sub forma $a = b + c$ cu $\mathbf{0} \leqslant b \leqslant x_1$ și $\mathbf{0} \leqslant c \leqslant x_2$. Deoarece $\mathcal{X}_0$ este un subspațiu normal, b, $c \in \mathcal{X}_0$ și avem

$$U_0(a) = U_0(b) + U_0(c) \leqslant U(x_1) + U(x_2)$$

de unde

$$U(x_1 + x_2) \leqslant U(x_1) + U(x_2).$$

Fie acum $\mathbf{0} \leqslant b \leqslant x_1$ și $\mathbf{0} \leqslant c \leqslant x_2$ cu $b, c \in \mathcal{X}_0$.
Atunci

$$\mathbf{0} \leqslant b + c \leqslant x_1 + x_2 \text{ cu } b + c \in \mathcal{X}_0 \text{ și avem}$$

$$U_0(b) + U_0(c) = U_0(b + c) \leqslant U(x_1 + x_2)$$

de unde

$$U(x_1) + U(x_2) \leqslant U(x_1 + x_2).$$

Am stabilit deci aditivitatea lui U.

Faptul că U este pozitiv este evident.

Să arătăm că U este (τo)-mărginit. Fie $A \in \mathcal{G}$. Deoarece U_0 este (τo)-mărginit pe $\mathcal{X}_0$, există $y_0 \in \mathcal{Y}$ așa că $|U_0(x)| \leqslant y_0$ dacă $x \in A \cap \mathcal{X}_0$. Dacă $\mathbf{0} \leqslant x \in A$ și $\mathbf{0} \leqslant x' \leqslant x$ cu $x' \in \mathcal{X}_0$, atunci $U_0(x') \leqslant y_0$, de unde rezultă $U(x) \leqslant y_0$. Pentru orice element $x \in A$ avem deci

$$|U(x)| \leqslant U(|x|) \leqslant y_0$$

ceea ce arată că mulțimea $U(A)$ este (o)-mărginită.

Teorema este demonstrată.

Primită la redacție la 11 februarie 1968

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, București

OPÉRATEURS LINÉAIRES BORNÉS SUR LES ESPACES LINÉAIRES RÉTICULÉS TOPOLOGIQUES

RÉSUMÉ

On établit certains théorèmes sur les opérateurs linéaires définis sur un espace linéaire réticulé topologique à valeurs dans un espace linéaire complètement réticulé et ayant la propriété d'appliquer les ensembles bornés topologiquement dans les ensembles bornés par rapport à l'ordre.

BIBLIOGRAFIE

1. Romulus Cristescu, *Spații liniare ordonate*, Ed. Academiei, București, 1959.
2. Leonidas Tsitsas, *Integral representations of linear maps*. Bull. Soc. Mat. de Grèce, 6 298—355, (1965).

ASUPRA MIŞCĂRII FLUIDELOR COMPRESIBILE ÎN PREZENŢA UNUI CORP POROS OMOGEN

DE

HORIA I. ENE

Se studiază mişcarea subsonică a unui fluid perfect compresibil, în prezenţa unui corp poros omogen. Pentru mişcarea în exteriorul corpului se consideră valabilă prima aproximaţie din metoda lui A. B. Tayler [2], ştiind că aceasta asigură rezultate bune [4], [5], iar pentru mişcarea în mediu poros se adoptă legea lui Darcy. Se indică o metodă de rezolvare prin aproximaţii succesive [1] şi se tratează ca exemplu cazul unui corp poros de forma unui cilindru circular.

1. Problema mişcării unui fluid perfect compresibil în prezenţa unui corp poros omogen a fost pusă pentru prima dată de Şt. I. Gheorghiţă [1]. Pornind de la ecuaţia de mişcare a fluidelor compresibile şi aplicîndu-i o metodă de aproximaţii succesive, s-a văzut [1] că rezolvarea pe această cale conduce la o serie de dificultăţi practic de netrecut. Abordarea astfel a problemei nu este posibilă deoarece pentru cea de a doua aproximaţie se ajunge la rezolvarea unei ecuaţii cu derivate parţiale, neliniară de ordinul doi.

Recent, A. B. Tayler [2], [3] a propus o metodă de aproximaţii pentru studiul mişcării subsonice a unui fluid perfect compresibil. Metoda asigură deja pentru prima aproximaţie rezultate foarte apropiate de rezultatele care se obţin cu metodele cunoscute Karman-Tsien, Ciaplîghin-Demtchenko sau Caius Iacob [4], [5]. Această primă aproxinaţie revine la a determina o funcţie armonică φ_1 definită în exteriorul corpului.

Vom încerca de aceea să determinăm funcţia φ_1 şi funcţia P, care defineşte mişcarea în mediul poros, folosindu-ne de aceeaşi metodă de aproximaţii propusă în [1].

Să notăm că rezultatele astfel obţinute prezintă un interes pur calitativ, deoarece metoda noastră de aproximaţii este aplicată unei ecuaţii deja aproximative.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 9, P. 1317-1322, BUCUREŞTI, 1968

2. Să notăm cu D_1 domeniul exterior corpului poros, cu D_2 domeniul ocupat de mediul poros, iar cu S frontiera de separare dintre cele două domenii.

Domeniul D_1 este ocupat de un fluid perfect compresibil animat de o viteză de translaţie $\vec{V}_\infty$ paralelă cu axa Ox la mari distanţe. Domeniul D_2 este un mediu poros omogen de coeficient de filtraţie k. Frontiera S se presupune a fi o curbă simplă închisă.

Să scriem mai întîi ecuaţiile de mişcare în D_1:

Folosind transformarea [2]:

$$\vec{s} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/2} \frac{\vec{v}}{c_0}; \quad \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/2} = e^{\sigma},$$

ecuaţiile de mişcare se vor scrie:

$$\operatorname{div} \vec{s} = \vec{s} \cdot \operatorname{grad} \sigma,$$

$$\operatorname{rot} \vec{s} = \vec{s} \times \operatorname{grad} \sigma,$$

astfel încît prima aproximaţie $\sigma = \text{const.}$ ne conduce la:

$$\operatorname{div} \vec{s}_1 = 0,$$

$$\operatorname{rot} \vec{s}_1 = 0,$$

adică:

$$\vec{s}_1 = \operatorname{grad} \varphi_1,$$

cu

$$\Delta \varphi_1 = 0. \tag{1}$$

Din ecuaţia lui Bernoulli scrisă în prima aproximaţie şi în noile variabile, rezultă pentru presiune expresia:

$$p = p_0 \left[e^{-2\sigma} - \frac{\gamma - 1}{2} (\operatorname{grad} \varphi_1)^2 \right]. \tag{2}$$

Ecuaţiile de mişcare în D_2 vor fi, presupunînd că în mediul poros se menţine valabilă legea lui Darcy, [1]:

$$\gamma \vec{v} = -k \operatorname{grad} P, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

unde

$$P = \frac{\gamma}{\beta(\gamma + 1)} p^{\frac{\gamma+1}{\gamma}},$$

β fiind dat de legea de stare a gazului în mediu poros propusă de M. Muskat [1]:

$$\gamma = \frac{1}{\beta} p^{1/\gamma}.$$

În felul acesta funcția P, avînd în vedere a doua ecuație (3), rezultă că este o funcție armonică,

$$\Delta P = 0. \tag{4}$$

Condițiile la limită pe frontiera de separare S rezultă din continuitatea presiunilor la traversarea frontierei

$$p_0 \left[e^{-2\sigma} - \frac{\gamma - 1}{2} (\text{grad } \varphi_1)^2 \right] = \left[\frac{\beta(\gamma + 1)}{\gamma} P \right]^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} \text{ pe } S, \tag{5}$$

și din continuitatea vitezelor normale

$$c_0 e^{\sigma} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = - k \frac{\partial P}{\partial n} \text{ pe } S. \tag{6}$$

Avem deci de rezolvat următoarea problemă la limită: să se determine două funcții armonice, φ_1 definită în D_1 și P definită în D_2, care îndeplinesc condițiile (5) și (6) pe frontiera de separare a celor două domenii.

3. Pentru rezolvarea problemei, vom căuta funcțiile armonice sub formă de dezvoltări după puterile coeficientului de filtrație k:

$$\varphi_1 = \varphi_{10} + k\varphi_{11} + k^2 \varphi_{12} + \ldots \tag{7}$$

$$P = P_0 + kP_1 + k^2 P_2 + \ldots \tag{8}$$

Cu dezvoltările (7) și (8) condiția (5) se scrie:

$$\begin{aligned} & p_0 \left[e^{-2\sigma} - \frac{\gamma - 1}{2} (\text{grad } \varphi_{10})^2 \right] = B P_0^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} \\ (5') \quad & (1 - \gamma) p_0 \,\text{grad } \varphi_{10} \,\text{grad } \varphi_{11} = \frac{\gamma}{\gamma + 1} B P_1 P_0^{-1/(\gamma+1)} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ pe } S, \end{aligned}$$

unde:

$$B = \left[\frac{\beta(\gamma + 1)}{\gamma} \right]^{\gamma/(\gamma+1)},$$

iar condiţia de continuitate a vitezelor normale devine :

$$\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial n} = 0$$

$$(6')\qquad c_0\,e^{\sigma}\,\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial n} = -\,\frac{\partial P_0}{\partial n}$$

$$c_0\,e^{\sigma}\,\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial n} = -\,\frac{\partial P_1}{\partial n}$$

. . . . pe S.

Cunoscînd deci pe φ_{10} ca fiind soluţia din cazul corpului impermeabil, P_0 se determină ca soluţie a unei probleme Dirichlet interioară, φ_{11} ca soluţia unei probleme Neuman exterioară, ş.a.m.d. Rezolvarea problemei se reduce deci la o succesiune de probleme la limită clasice.

4. Să aplicăm cele expuse mai sus la cazul cilindrului circular de rază a. Se ştie că soluţia pentru cazul mişcării în prezenţa cilindrului impermeabil de rază a este [2] :

$$(9)\qquad \varphi_{10} = \sqrt{h}\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta,$$

unde s-a notat :

$$h = M_\infty^2\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\right)^{-\gamma/(\gamma-1)}.$$

Prima condiţie la limită (6′) este îndeplinită, iar celelalte devin :

$$(5'')\qquad p_0\left[e^{-2\sigma} - \frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial\theta}\right)^2\right] = BP_0^{\gamma/(\gamma+1)}.$$

$$(1-\gamma)p_0\,\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial\theta}\,\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial\theta} = \frac{\gamma}{\gamma+1}\,BP_1\,P_0^{-1/(\gamma+1)}$$

. . . . .pentru $r = a$

$$(6'')\qquad c_0\,e^{\sigma}\,\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial r} = -\,\frac{\partial P_0}{\partial r}$$

$$c_0\,e^{\sigma}\,\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial r} = -\,\frac{\partial P_1}{\partial r}$$

. . . . pentru $r = a$.

Dacă în dezvoltări ne vom mărgini doar la termenii în M_∞^4, explicitarea primei condiţii (5″) cu (9) ne va da valoarea lui P_0 pentru $r = a$, şi după rezolvarea problemei lui Dirichlet corespunzătoare, avem :

$$(10)\quad P_0 = T\left\{ \mathrm{e}^{-2\sigma} + \frac{R}{\gamma}\left(\frac{r^2}{a^2}\cos 2\theta - 1\right) M_\infty^2 + \left[\frac{R}{2}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\cos 2\theta\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + S\mathrm{e}^{2\sigma}\left(\frac{3}{4} - \frac{r^2}{a^2}\cos 2\theta + \frac{r^4}{4a^4}\cos 4\theta\right)\right] M_\infty^4 \right\},$$

unde am notat :

$$R = \gamma^2 - 1$$

$$S = \frac{(\gamma^2 - 1)(\gamma - 1)}{\gamma^2}$$

$$T = B^{-(\gamma+1)/\gamma} p_0^{(\gamma+1)/\gamma}\, \mathrm{e}^{-2\sigma/\gamma}.$$

Cu (10) se poate explicita prima condiţie la limită (6″) şi după rezolvarea problemei lui Neuman corespunzătoare avem :

$$(11)\qquad \varphi_{11} = \frac{Ta^2}{2c_0r^2}\left\{ \frac{2R\mathrm{e}^{-\sigma}}{\gamma}\cos 2\theta\, M_\infty^2 + \left[\frac{a^2 S\mathrm{e}^{\sigma}}{2r^2}\cos 4\theta - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (R\mathrm{e}^{-\sigma} + 2S\mathrm{e}^{\sigma})\cos 2\theta\right] M_\infty^4 \right\}.$$

Soluţia problemei propuse se poate deci obţine, aplicînd doar teoria funcţiilor armonice.

Primită la redacţie la 26 ianuarie 1968

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

SUR LE MOUVEMENT DES FLUIDES COMPRESSIBLES EN PRÉSENCE D'UN CORPS POREUX HOMOGÈNE

RÉSUMÉ

Ce problème a été étudié pour la première fois par Şt. I. Gheorghiţă [1], à l'aide d'une méthode d'approximation successive. Le problème se réduit ainsi à la résolution de quelques équations non linéaires de deuxième ordre.

Observant que la méthode de Tayler [2], [3] assure des résultats très bons dans la première approximation [4], [5], nous avons adopté cette première approximation comme solution du mouvement à l'extérieur du corps poreux. A cette solution nous avons appliqué la même

méthode d'approximation successive [1]. De cette manière, la détermination de la solution se ramène à la résolution successive et alternative des deux problèmes fondamentaux de la théorie du potentiel.

Comme application nous avons étudié le problème du mouvement en présence d'un cylindre circulaire poreux homogène.

BIBLIOGRAFIE

1. ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, St. cerc. mat., **6**, *3–4*, 273 (1955).
2. A. B. TAYLER, Proc. Roy. Soc., A **255**, 101 (1960).
3. — , Proc. Roy. Soc., A **255**, 114 (1960).
4. H. I. ENE, St. cerc. mat., **18**, *10*, 1567 (1966).
5. — , St. cerc. mat., **19**, *6*, 825 (1967).

ASUPRA INTERACȚIUNILOR ÎN ANALIZA DISPERSIONALĂ BIFACTORIALĂ

DE

E. MĂRGĂRITESCU

Această lucrare conține cîteva rezultate cu privire la interacțiunile corespunzătoare diverselor sisteme de ponderi din analiza bifactorială cu factori constanți și, de asemenea, relativ la transformatele unor tabele de analiză dispersională (în cazul factorilor calitativi) prin funcții strict crescătoare.

§ 1. NOȚIUNI INTRODUCTIVE

Fie A și B doi factori care se schimbă într-o anumită experiență, sau în mulțimea de condiții, iar I și J nivelele corespunzătoare ale acestor factori. În acest caz observațiile pot fi dispuse după cei doi factori sub forma unei tabele cu două intrări (tabelă bifactorială), ale cărei I linii și J coloane corespund nivelelor factorilor A și B. În celula (i, j), situată la intersecția liniei i cu coloana j, se înscriu observațiile obținute prin cercetarea simultană a nivelului i al factorului A cu nivelul j al factorului B. Admițînd că observațiile făcute în celula (i, j) sînt selecții aleatoare din populația corespunzătoare acestei celule, se poate vorbi despre media acestei populații, ca despre adevărata medie a celulei. Dacă însemnăm prin η_{ij} adevărata medie a celulei (i, j), iar prin $\{v_i\}$ și $\{w_j\}$ două sisteme de ponderi[1]) corespunzătoare nivelelor factorilor A și B respectiv, atunci [1]:

$$A_i = \sum_j w_j \eta_{ij} \tag{1.1}$$

se numește *media nivelului i al factorului A*;

$$B_j = \sum_i v_i \eta_{ij} \tag{1.2}$$

---

[1]) Ponderile $\{v_i\}$, $\{w_j\}$ sînt nenegative și $\sum_{i=1}^{I} v_i = \sum_{j=1}^{J} w_j = 1$.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 9, P. 1323–1331, BUCUREȘTI, 1968

se numește *media nivelului j al factorului B* ;

$$\mu = \sum_i \sum_j v_i w_j \eta_{ij} \tag{1.3}$$

se numește *media generală.*

Efectul principal al liniei i se numește diferența dintre media nivelului i și media generală :

$$\alpha_i = A_i - \mu. \tag{1.4}$$

Analog, *efectul principal al coloanei j* se numește diferența dintre media nivelului j și media generală :

$$\beta_j = B_j - \mu. \tag{1.5}$$

În sfîrșit, constanta

$$\gamma_{ij} = \eta_{ij} - B_j - A_j + \mu \tag{1.6}$$

se numește *interacțiunea nivelului i al factorului A cu nivelul j al factorului B.*

Adevărata medie a celulei (i, j) are deci expresia

$$\eta_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}. \tag{1.7}$$

§ 2. INTERACȚIUNI ÎN ANALIZA BIFACTORIALĂ

În acest paragraf ne propunem să studiem dependența dintre interacțiuni și sistemele de ponderi corespunzătoare. Răspunsul la această chestiune este dat de :

TEOREMA 1. *Dacă* $\{\gamma^0_{ij}\}$ *sînt interacțiunile corespunzătoare unui anumit sistem de ponderi* $\{v^0_i\}$, $\{w^0_j\}$, *atunci* $\{\gamma_{ij}\}$, *interacțiunile corespunzătoare oricărui alt sistem de ponderi* $\{v_i\}$, $\{w_j\}$, *sînt date de formula*

$$\gamma_{ij} = \sum_i \sum_j v_i w_j \gamma^{0j}_{ij} - \sum_i v_i \gamma^0_{ij} - \sum_j w_j \gamma^0_{ij} + \gamma^0_{ij}.$$

Demonstrație. Conform relației (1.7), putem scrie

$$\eta_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} \tag{2.1}$$

și

$$\eta_{ij} = \mu^0 + \alpha^0_i + \beta^0_j + \gamma^0_{ij}, \tag{2.2}$$

unde μ^0, α^0_i, β^0_j, γ^0_{ij} sînt mărimile definite mai sus, corespunzătoare sistemului de ponderi $\{v^0_i\}$, $\{w^0_j\}$. Din relațiile precedente rezultă :

$$\gamma_{ij} = (\mu^0 - \mu) + (\alpha^0_i - \alpha_i) + (\beta^0_j - \beta_j) + \gamma^0_{ij}. \tag{2.3}$$

Ținînd seama de (1.3), (1.4), (1.5) și (2.2), obținem :

$$\mu = \sum_i \sum_j v_i w_j \eta_{ij} = \sum_i \sum_j v_i w_j (\mu^0 + \alpha_i^0 + \beta_j^0 + \gamma_{ij}^0) =$$

$$= \mu^0 + \sum_i v_i \alpha_i^0 + \sum_j w_j \beta_j^0 + \sum_i \sum_j v_i w_j \gamma_{ij}^0,$$

$$\alpha_i = A_i - \mu = \sum_j w_j \eta_{ij} - \mu = \sum_j w_j (\mu^0 + \alpha_i^0 + \beta_j^0 + \gamma_{ij}^0) - \mu =$$

$$= \mu^0 + \alpha_i^0 + \sum_j w_j \beta_j^0 + \sum_j w_j \gamma_{ij}^0 - \mu,$$

$$\beta_j = B_j - \mu = \mu^0 + \sum_i v_i \alpha_i^0 + \beta_j^0 + \sum_i v_i \gamma_{ij}^0 - \mu.$$

Introducînd valorile găsite pentru μ, α_i și β_j în (2.3), se obține formula din enunțul teoremei.

Observație. În particular, pentru $\gamma_{ij}^0 = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, I$; $j = 1, 2, \ldots, J$), din teorema 1 se obține imediat un rezultat cunoscut [2], cu aplicații importante în analiza bifactorială :

Dacă într-un anumit sistem de ponderi interacțiunile corespunzătoare sînt nule, atunci ele sînt nule în oricare alt sistem de ponderi.

Să demonstrăm acum următoarea teoremă, care, într-un anumit sens, constituie o reciprocă a teoremei amintite mai sus :

TEOREMA 2. *Dacă* $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^0$ *în orice sistem de ponderi* $\{v_i\}$, $\{w_j\}$, *atunci* $\gamma_{ij}^0 = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, I$; $j = 1, 2, \ldots, J$).

Demonstrație. Conform teoremei 1, relația

$$\sum_i \sum_j v_i w_j \gamma_{ij}^0 - \sum_i v_i \gamma_{ij}^0 - \sum_j w_j \gamma_{ij}^0 = 0 \tag{2.4}$$

este satisfăcută oricare ar fi sistemul de ponderi $\{v_i\}$, $\{w_j\}$. În particular, pentru sistemele de ponderi $v_i = \delta_{1i}$ ($i = 1, 2, \ldots, I$), $w_j = \delta_{jk}$ ($j = 1, 2, \ldots, J$; $k = 1, 2, \ldots, J$) [2]), se obțin următoarele relații :

$$\begin{aligned} &\gamma_{11}^0 - \gamma_{1j}^0 - \gamma_{i1}^0 = 0, \\ &\gamma_{12}^0 - \gamma_{1j}^0 - \gamma_{i2}^0 = 0, \qquad (i=1, 2, \ldots, I;\ j=1, 2, \ldots, J) \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\gamma_{1J}^0 - \gamma_{1j}^0 - \gamma_{iJ}^0 = 0. \end{aligned}$$

Pentru $i = 1$, din prima relație obținem :

$$\gamma_{1j}^0 = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, J),$$

iar pentru $j = 1$:

$$\gamma_{i1}^0 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, I).$$

Analog, luînd în a doua relație $j = 1$ și ținînd seama de rezultatele precedente, găsim :

$$\gamma_{i2}^0 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, I).$$

---

[2] δ_{jk} este simbolul lui Kronecker.

Continuînd procedeul, din ultima relație deducem pentru $j = J$:

$$\gamma_{iJ}^{0} = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, I).$$

Așadar $\gamma_{ij}^{0} = 0\,(i = 1, 2, \ldots, I;\ j = 1, 2, \ldots, J)$.

Cu aceasta teorema 2 este demonstrată.

§ 3. ELIMINAREA INTERACȚIUNILOR CUNOSCUTE ÎN CAZUL FACTORILOR CALITATIVI

În analiza dispersională prezintă un interes deosebit cazul în care *lipsesc interacțiunile* (toate $\gamma_{ij} = 0$). Din (1.7) se deduce că aceasta este posibil dacă și numai dacă $\eta_{ij} = a_i + b_j + c$; de aceea, cazul lipsei interacțiunilor se mai numește și *cazul aditivității efectelor.*

Dacă însă nu toate interacțiunile sînt nule, se pune problema existenței unei funcții strict crescătoare [3]) prin care o tabelă dată să se transforme într-una în care să lipsească interacțiunile. Cazurile ambilor factori cantitativi, sau a unuia cantitativ, iar celălalt calitativ sînt studiate complet. Pentru tabelele bifactoriale cu factori calitativi este utilă următoarea definiție [1] :

Două linii

$$a_1\, a_2 \ldots a_J$$
$$b_1\, b_2 \ldots b_J$$

se numesc *ordonate consistent* dacă cele J diferențe $\{a_j - b_j\}$ sînt toate pozitive, nule, sau negative. Analog se definește ordonarea consistentă a două coloane. O tabelă ale cărei oricare două linii și coloane sînt ordonate consistent o vom numi, pentru prescurtare, *tabelă ordonată consistent.*

În lucrarea citată se arată că o tabelă bifactorială este ordonată consistent dacă și numai dacă, prin permutări corespunzătoare ale liniilor și coloanelor sale, se obține o tabelă ale cărei linii și coloane sînt nedescrescătoare. Așadar fiecărei tabele ordonate consistent i se poate atașa, în mod unic, o tabelă ale cărei linii și coloane sînt nedescrescătoare. De aici rezultă că, fără să restrîngem generalitatea, putem considera mai departe numai astfel de tabele.

Ordonarea consistentă constituie o condiție necesară, dar nu și suficientă, pentru eliminarea interacțiunilor din *unele* tabele de analiză bifactorială prin transformări strict crescătoare (suficiența este infirmată de un exemplu al lui W. A. Kruskal pentru o tabelă (3×3)). Acest rezultat pune în evidență utilitatea noțiunii de ordonare consistentă, dar nu poate fi considerat decît ca un studiu preliminar al problemei următoare :

Fiind dată tabela

$$\left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right\} \tag{3.1}$$

să se precizeze dacă există, sau nu, cel puțin o funcție strict crescătoare φ^* *care să o transforme într-una în care interacțiunile să fie nule.*

---

[3]) Se consideră numai transformările strict crescătoare deoarece vrem să se păstreze ordinea de mărime a observațiilor și a mediilor η_{ij} ale celulelor.

Pentru a da răspunsul complet acestei probleme, vom considera mai întîi următoarea tabelă, pentru care $I = J = 2$:

$$\left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}\right\}. \tag{3.2}$$

Este evident că în fiecare din cazurile $a_{11} = a_{21}$, $a_{11} = a_{12}$, $a_{22} = a_{21}$, $a_{22} = a_{12}$, $a_{11} = a_{22}$ diferenţa celor două linii sau coloane din tabela (3.2) este constantă (constanta nu este neapărat aceeaşi) şi deci transformata sa prin orice funcţie strict crescătoare ne conduce la cazul aditivităţii efectelor. În celelalte cazuri, ţinînd seama de relaţiile $a_{11} < a_{12} < a_{22}$, $a_{11} < a_{21} < a_{22}$ (rezultate din faptul că liniile şi coloanele tabelei (3.2) sînt nedescrescătoare), pentru orice funcţie φ^* strict crescătoare trebuie să avem :

$$\varphi^*(a_{22}) - \varphi^*(a_{21}) = \varphi^*(a_{12}) - \varphi^*(a_{11}),$$
$$\varphi^*(a_{22}) - \varphi^*(a_{12}) = \varphi^*(a_{21}) - \varphi^*(a_{11}),$$

adică

$$\varphi^*(a_{22}) = -\varphi^*(a_{11}) + \varphi^*(a_{12}) + \varphi^*(a_{21}).$$

Reciproc, orice funcţie φ^* definită în felul următor :

$$\varphi^* : \left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} \varphi(a_{11}) & \varphi(a_{12}) \\ \varphi(a_{21}) & -\varphi(a_{11}) + \varphi(a_{12}) + \varphi(a_{21}) \end{matrix}\right\} \tag{3.3}$$

(φ este o funcţie strict crescătoare arbitrară) este strict crescătoare şi transformă tabela (3.2) într-una în care interacţiunile sînt nule deoarece

$$\varphi^*(a_{12}) - \varphi^*(a_{11}) = \varphi^*(a_{22}) - \varphi^*(a_{21}), \quad \varphi^*(a_{21}) - \varphi^*(a_{11}) = \varphi^*(a_{22}) - \varphi^*(a_{12})$$

şi relaţiile de ordine dintre a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} se păstrează în tabela transformată prin φ^*. Rezultatul obţinut poate fi formulat în următoarea :

LEMĂ. *O funcţie φ^* strict crescătoare transformă tabela* (3.2) *într-o tabelă în care lipsesc interacţiunile dacă şi numai dacă această funcţie este de forma* (3.3)[4])

Aplicînd această lemă tabelei (3.1), rezultă că este necesar ca funcţia strict crescătoare φ^* să fie definită astfel :

(3.4)

$$\varphi^* : \left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right\} \to$$

$$\to \left\{\begin{matrix} \varphi(a_{11}) & \varphi(a_{12}) & \varphi(a_{13}) \\ \varphi(a_{21}) & -\varphi(a_{11}) + \varphi(a_{12}) + \varphi(a_{21}) & -\varphi(a_{11}) + \varphi(a_{13}) + \varphi(a_{21}) \\ \varphi(a_{31}) & -\varphi(a_{11}) + \varphi(a_{12}) + \varphi(a_{31}) & -\varphi(a_{11}) + \varphi(a_{13}) + \varphi(a_{31}) \end{matrix}\right\}$$

---

[4]) În cazul $a_{11} < a_{12} < a_{22}$, H. Scheffé consideră funcţia particulară $\varphi^*(\eta) = \left\{\begin{matrix} \eta \text{ dacă } \eta = a_{11}, a_{12}, a_{21}, \\ -a_{11} + a_{12} + a_{21} \text{ dacă } \eta = a_{22} \end{matrix}\right.$ adică, folosind notaţia introdusă mai sus :

$$\varphi^* : \left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} + a_{12} + a_{21} \end{matrix}\right\}.$$

Aici, spre deosebire de (3.3), analiza relației de ordine între elementele tabelei transformate este mai dificilă. De exemplu, dacă se cunoaște semnul diferenței $a_{32} - a_{23}$, nu se poate preciza *a priori* semnul diferenței $\varphi^* (a_{32}) - \varphi^* (a_{23})$ și deci nu se poate decide, deocamdată, dacă există, sau nu, cel puțin o funcție (3.4) pentru o tabelă (3×3) dată.

Dacă însă, în particular, două linii sau două coloane ale tabelei (3.1) sînt identice, se obține

TEOREMA 3. *Pentru orice tabelă de analiză bifactorială* (3×3), *cu două linii sau două coloane identice, există cel puțin o funcție strict crescătoare care să transforme tabela considerată într-una în care să lipsească interacțiunile.*

Demonstrație. Fără să restrîngem generalitatea, putem presupune că tabela (3.1) are primele două linii identice, adică este de forma :

$$\left\{\begin{matrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right\}. \tag{3.5}$$

Se constată imediat că, în acest caz, mulțimea $\{a_{ij}\}$ poate fi ordonată într-una din formele :

$$(\alpha_1) : a_{21} < a_{22} < a_{31} < a_{23} < a_{32} < a_{33},$$

$$(\alpha_2) : a_{21} < a_{22} < a_{31} = a_{23} < a_{32} < a_{33},$$

$$(\alpha_3) : a_{21} < a_{22} < a_{23} < a_{31} < a_{32} < a_{33},$$

$$(\alpha_4) : a_{21} < a_{22} = a_{31} < a_{23} < a_{32} < a_{33},$$

$$(\alpha_5) : a_{21} < a_{31} < a_{22} < a_{23} < a_{32} < a_{33},$$

dacă $a_{23} < a_{32}$;

$$(\beta_1) : a_{21} < a_{22} < a_{31} < a_{23} = a_{32} < a_{33},$$

$$(\beta_2) : a_{21} < a_{22} = a_{31} < a_{23} = a_{32} < a_{33},$$

$$(\beta_3) : a_{21} < a_{31} < a_{22} < a_{23} = a_{32} < a_{33},$$

dacă $a_{23} = a_{32}$;

$$(\gamma_1) : a_{21} < a_{22} < a_{31} < a_{32} < a_{23} < a_{33},$$

$$(\gamma_2) : a_{21} < a_{22} = a_{31} < a_{32} < a_{23} < a_{33},$$

$$(\gamma_3) : a_{21} < a_{31} < a_{22} < a_{32} < a_{23} < a_{33},$$

dacă $a_{32} < a_{23}$.

De asemenea, se poate arăta, prin exemple, că în toate cele 11 cazuri posibile de mai sus există cel puțin o funcție strict crescătoare ⁵)

---

⁵) De fapt, după cum se vede imediat, există o mulțime infinită de astfel de funcții.

care transformă tabela corespunzătoare într-una în care interacţiunile sînt nule. De pildă, pentru cazurile (α_1), (β_2), (γ_3) se pot alege, respectiv, funcţiile :

$$\varphi^* : \left\{\begin{matrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{matrix}\right\},$$

$$\varphi^* : \left\{\begin{matrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}\right\},$$

$$\varphi^* : \left\{\begin{matrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{matrix}\right\}.$$

Considerăm acum tabela (3 × 3) fără să impunem restricţii asupra liniilor sau coloanelor sale. Incluzînd în enunţ şi conţinutul teoremei 3, vom demonstra

TEOREMA 4. *Pentru orice tabelă* (3×3) *nu există nici o funcţie strict crescătoare care să o transforme într-una în care interacţiunile să fie nule dacă şi numai dacă*

$$a_{23} \leqslant a_{32}, \; a_{12} \leqslant a_{21}, \; a_{31} \leqslant a_{13} \tag{3.6}$$

sau

$$a_{32} \leqslant a_{23}, \; a_{21} \leqslant a_{12}, \; a_{13} \leqslant a_{31}{}^{6}). \tag{3.7}$$

Demonstraţie. Dacă sînt satisfăcute inegalităţile (3.6), atunci din (3.4) rezultă :

$$\varphi^*(a_{32}) - \varphi^*(a_{23}) = [\varphi(a_{12}) - \varphi(a_{21})] + [\varphi(a_{31}) - \varphi(a_{13})].$$

Deoarece membrul drept al egalităţii este negativ sau nul, iar $\varphi^*(a_{32}) - \varphi^*(a_{23}) \geqslant 0$, s-a ajuns la o contradicţie (conform ipotezei făcute, ambii membri nu sînt nuli simultan).

Absolut la fel se tratează şi cazul (3.7).

Rămîne să arătăm că pentru orice ordonare necontradictorie a elementelor tabelei (3.1), şi care nu satisface condiţiile (3.6) sau (3.7), există cel puţin o funcţie strict crescătoare φ^* care transformă tabela considerată într-una cu toate interacţiunile nule.

Din inegalităţile $a_{11} < a_{12} < a_{13} < a_{23} < a_{33}$, $a_{11} < a_{21} < a_{31} < a_{32} < a_{33}$, $a_{21} < a_{22} < a_{23}$, $a_{12} < a_{22} < a_{32}$ rezultă că elementele tabelei (3.1) se pot ordona în 197 moduri diferite. Dacă se ţine seama de faptul că inegalităţile (3.6) şi (3.7) conduc la 55 cazuri în care problema considerată nu admite soluţii, rămîn de studiat 197 − 55 = 142 cazuri distincte. Se poate arăta, prin

---

6) În inegalităţile (3.6) şi (3.7) semnul egal nu apare simultan.

exemple, că în toate aceste cazuri problema admite cel puţin o soluţie. De exemplu, pentru ordonările

$$a_{11} < a_{12} < a_{21} < a_{31} < a_{13} < a_{22} < a_{32} < a_{23} < a_{33},$$

$$a_{11} < a_{12} = a_{21} < a_{22} < a_{13} = a_{31} < a_{23} = a_{32} < a_{33}$$

se pot considera funcţiile :

$$\varphi^* : \left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} 0 & 3 & 9 \\ 7 & 10 & 16 \\ 8 & 11 & 17 \end{matrix}\right\},$$

$$\varphi^* : \left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{matrix}\right\}.$$

Observaţia 1. Din teorema precedentă rezultă că există numai 55 cazuri tipice în care problema nu admite soluţie. Ele se construiesc cu uşurinţă, ţinînd seama de (3.6) şi (3.7). De exemplu, pentru ordonările

$$a_{11} < a_{12} < a_{21} < a_{31} < a_{13} < a_{22} < a_{23} < a_{32} < a_{33},$$

$$a_{11} < a_{12} < a_{21} < a_{31} < a_{22} < a_{13} < a_{23} < a_{32} < a_{33},$$

$$a_{11} < a_{12} < a_{21} < a_{31} < a_{13} = a_{22} < a_{23} = a_{32} < a_{33},$$

corespunzătoare inegalităţilor (3.6), se pot construi tabelele

$$\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 8 \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 8 \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{matrix}\right\}.$$

Prima dintre ele constituie exemplul lui W. H. Kruskal.

Observaţia 2. Ţinînd seama că tabela

$$\left\{\begin{matrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right\}$$

se obţine din (3.5) prin eliminarea primei linii, tabela

$$\left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}\right\}$$

se obţine din (3.2) prin adăugarea unei linii identică cu prima, tabela

$$\left\{\begin{matrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{23} & a_{31} \\ a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right\}$$

se obţine din

$$\left\{\begin{matrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right\}$$

prin schimbarea liniilor şi coloanelor între ele şi permutările corespunzătoare ale elementelor, rezultă că pentru fiecare dintre aceste tabele există cel puţin o funcţie φ^*.

Cu aceasta s-a studiat complet problema existenţei funcţiei strict crescătoare φ^* pentru tabelele de analiză dispersională $(I \times J)$ $(2 \leqslant I, J \leqslant 3)$.

Primită la redacţie la 29 februarie 1968

Centrul de statistică matematică al
Academiei Republicii Socialiste România
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

SUR LES INTERACTIONS DANS L'ANALYSE DE LA VARIANCE BIFACTORIELLE

RÉSUMÉ

Cet ouvrage contient quelques résultats concernant les interactions qui correspondent à divers systèmes de poids dans l'analyse bifactorielle avec des facteurs constants et, aussi, relativement aux transformées de certains tableaux d'analyse de la variance (dans le cas des facteurs qualitatifs) par des fonctions strictement croissantes.

Dans le § 1 on étudie la dépendance entre deux systèmes d'interactions et les poids respectifs.

Dans le § 2 on résout complètement le problème de l'existence d'une fonction strictement croissante qui transforme un tableau donné $(I \times J)$ $(2 \leqslant I, J \leqslant 3)$ en un autre à toutes les interactions nulles.

BIBLIOGRAFIE

1. H. Scheffé, *Analysis of variance.*
2. I. Văduva, *Elemente de analiză dispersională.* St. cerc. mat., **20** (1968).

O METODĂ PENTRU DETERMINAREA TUTUROR CIRCUITELOR DINTR-UN GRAF

DE

L. NÉMETI

(Cluj)

În lucrare se prezintă un algoritm pentru determinarea tuturor circuitelor dintr-un graf, algoritm ce pare a fi mai simplu decît metodele cunoscute pînă acum.

Prin studierea figurii reprezentînd un graf dat pot fi întreprinse diferite analize privind structura acestui graf. Această metodă intuitivă devine însă ineficientă dacă graful posedă multe vîrfuri şi arce; pentru acest caz se cere o metodă ce poate fi uşor mecanizată, respectiv automatizată. În acest scop se foloseşte mult aşa-numita matrice ataşată grafului. Elementul m_{ij} al acestei matrice pătratice de ordin $n \times n$ (n: numărul de vîrfuri) este 1, dacă există un arc de la vîrful i la vîrful j, altfel 0. Această matrice determină graful considerat în mod univoc şi poate fi folosită cu succes la unele din analizele sus-menţionate, ca de exemplu determinarea succesorilor sau predecesorilor unui vîrf, numărul drumurilor de un ordin dat între două vîrfuri, numărul circuitelor etc.

Pentru alte probleme matricea ataşată grafului nu dă răspunsul cerut; de exemplu, determinarea tuturor drumurilor elementare între două vîrfuri. În cele ce urmează se va descrie un algoritm pentru găsirea tuturor circuitelor dintr-un graf. În acest algoritm se determină, pas cu pas, succesorii unor vîrfuri; pentru acest scop poate fi folosită cu succes matricea ataşată grafului. Menţionăm că algoritmul se bazează pe o metodă de marcare indicată de Ford şi Fulkerson.

Fie dat un graf G (orientat) prin mulţimea vîrfurilor şi arcelor sale. Vîrfurile sînt numerotate de la 1 la n; aceste numere ce reprezintă vîrfurile fac parte din mulţimea $N = \{1, \ldots, n\}$. Un arc de la vîrful i la vîrful j este notat prin perechea ordonată de numere naturale (i, j); acestea fac parte din mulţimea dată $U \subset N \times N$. Graful G este complet caracterizat prin aceste două mulţimi; vom nota $G = [N, U]$.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 9, P. 1333–1336, BUCUREŞTI, 1968

4 – c. 5602

Algoritmul pentru recenzarea tuturor circuitelor din graful dat $G_0 = [N_0, U_0]$ este următorul. Se va construi un șir $T = \{t_k\}$ de șiruri; șirurile t_k conțin elemente din N_0.

Pasul 1. $N := N_0$; $U := U_0$; $T := \emptyset$.

Pasul 2. Din graful $G = [N, U]$ se elimină vîrfurile ce nu au succesori sau nu au predecesori, împreună cu arcele adiacente la ele. Subgraful astfel obținut îl notăm cu $G' = [N', U']$. Se va pune

$$G := G'.$$

Dacă în acest fel G a devenit vid, atunci calculul s-a terminat (vezi pasul 8). În caz contrar urmează

Pasul 3. Se alege, arbitrar, un vîrf $i \in N$. Acest număr se adaugă la T ca un termen nou al acestuia; el nu se marchează.

Pasul 4. Dacă toți termenii din T sînt marcați (cu un cerculeț), sau dacă T a devenit vid, urmează pasul 7; altfel

Pasul 5. Se alege primul termen nemarcat din $T : t$.

a) Dacă ultimul element al lui t este egal cu i, atunci t se marchează (cu un cerculeț), urmează pasul 4.

b) Dacă ultimul element din t este egal cu vreun alt element din t (dar nu cu primul care este i), atunci t se șterge din T și urmează pasul 4.

c) Dacă t conține n elemente și nu avem nici cazul a) nici cazul b), atunci t se bifează.

Dacă nu are loc nici cazul a) nici cazul b), urmează

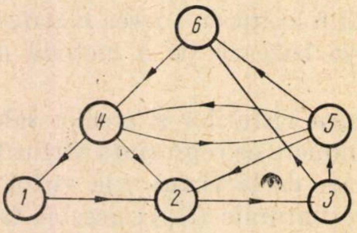
Pasul 6. Se determină succesorii ultimului element din t și aceștia se atașează, pe rînd, la t. În acest fel se formează un număr de noi termeni ai lui T care se atașează la acesta. Termenul t se șterge din T. Urmează pasul 4.

Pasul 7. $N := N - \{i\}$

$$U := U - \big(\{(i, k) \mid k \in S(i)\} \cup \{(k, i) \mid k \in P(i)\}\big).$$

Aici s-a notat cu $S(i)$ mulțimea succesorilor vîrfului i și cu $P(i)$ mulțimea predecesorilor lui.

Pasul 8. Dacă $N = \emptyset$, atunci calculul s-a terminat. Termenii lui T, marcați cu un cerculeț, conțin vîrfurile din circuite ale lui G. Termenii bifați sînt așa-numite drumuri hamiltoniene din G ce parcurg o dată și numai o dată toate vîrfurile grafului.



Dacă $N \neq \emptyset$, urmează pasul 2.

Este limpede că acest algoritm poate fi folosit și pentru determinarea tuturor drumurilor între două vîrfuri i, j, cu modificări evidente.

Pentru ilustrarea metodei vom da un exemplu.

Se dă graful din figură. Să se determine: a) toate circuitele elementare din graf; b) drumurile elementare de la vîrful 2 la 4.

a) Se redă șirul T. Elementele nemarcate sînt anulate pe rînd.

$i = 1$

1
1 2
1 2 3
1 2 3 5
1 2 3 6
1 2 3 5 4
1 2 3 5 6
1 2 3 6 4
1 2 3 5 4 1 ○
1 2 3 5 6 4 ✓
1 2 3 6 4 1 ○
1 2 3 6 4 5 ✓
1 2 3 5 6 4 1

$i = 2$

2
2 3
2 3 5
2 3 6
2 3 5 2 ○
2 3 5 4
2 3 5 6
2 3 6 4
2 3 5 4 2 ○
2 3 5 6 4
2 3 6 4 2 ○
2 3 6 4 5
2 3 5 6 4 2 ○
2 3 6 4 5 2 ○

$i = 3$

3
3 5
3 6
3 5 4
3 5 6
3 6 4
3 5 6 4
3 6 4 5

$i = 4$

4
4 5
4 5 4 ○
4 5 6
4 5 6 4 ○

$i = 5$

5
5 6

Circuitele grafului sînt așadar :

1 2 3 5 4 1
1 2 3 6 4 1
1 2 3 5 6 4 1 (circuit Hamiltonian)
2 3 5 2
2 3 5 4 2
2 3 6 4 2
2 3 5 6 4 2
2 3 6 4 5 2
4 5 4
4 5 6 4

b) 2
2 3
2 3 5
2 3 6
2 3 5 4 ○
2 3 5 6
2 3 6 4 ○
2 3 5 6 4 ○

Drumurile de la vîrful 2 la 4 sînt deci :

2 3 5 4
2 3 6 4
2 3 5 6 4.

Menţionăm că termenii *t* corespunzînd punctului b) din pasul 5 nici nu au fost scrişi.

Primită la redacţie la 22 februarie 1968

Academia Republicii Socialiste România—Filiala Cluj
Institutul de calcul

EINE METHODE ZUR BESTIMMUNG ALLER KREISBAHNEN IN EINEM GRAPH

(ZUSAMMENFASSUNG)

In vorliegender Arbeit wird ein Algorithmus zur Bestimmung aller Kreisbahnen in einem gerichteten Graph angegeben, der einfacher als die bisher bekannten Methoden zu sein scheint. Das Verfahren beruht auf einer systematischen Durchsicht der Nachfolger der Knotenpunkte, verbunden mit einer Markierung, welche Wiederholungen vermeiden läßt.

ASUPRA UNICITĂŢII SOLUŢIEI PROBLEMEI LUI DIRICHLET RELATIV LA SISTEME TARI ELIPTICE DE ORDINUL AL DOILEA

DE

IOAN A. RUS
(Cluj)

Se dau condiţii algebrice asupra coeficienţilor sistemului (1) astfel ca să aibă loc afirmaţia (U). Se pune în evidenţă şi posibilitatea extinderii anumitor rezultate din cazul liniar pentru cazul neliniar.

Fie

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} A_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + A_0 u = 0 \tag{1}$$

un sistem de ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale de ordinul al doilea. Elementele matricelor A_{ij}, A_i, A_0 sînt funcţii definite pe un domeniu mărginit $\Omega \subset R^m$. Presupunem că frontiera Γ a lui Ω este suficient de regulară iar $A_{ij}(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, $A_i(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $A_0(x) \in C(\overline{\Omega})$. Problema ce ne-o propunem spre rezolvare este aceea de a stabili condiţii, de natură algebrică, asupra coeficienţilor A_{ij}, A_i, A_0 astfel ca să aibă loc următoarea afirmaţie :

$$\left.\begin{array}{r} u \in C^2(\overline{\Omega}) \\ L(u) = 0 \text{ în } \Omega \\ u = 0 \text{ pe } \Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow u \equiv 0 \text{ în } \Omega. \tag{U}$$

Probabil că primele contribuţii în această direcţie se datoresc lui Somigliana (1894) [27]. Ar urma apoi teza de doctorat a matematicianului român N. Ciorănescu (1929) [7]. El studiază sisteme în care partea principală este formată din laplacieni. Sisteme de o formă puţin mai generală fac obiectul unor cercetări ale lui G. Giraud [10]. G. Cimmino (1936) obţine [6] diferite criterii de unicitate folosind teoreme de comparaţie.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 9, P. 1337–1352, BUCUREŞTI, 1968

Prin aceeași metodă problema este reluată mai tîrziu de L. M. Kuks [16]. Prin prisma principiilor de maxim problema este abordată de Bițadze [3], Skorobogatko [26], M. M. Lavrentiev [21], T. Stys [28], [29], J. Bochenek [4]. L. M. Kuks mai studiază această problemă prin metode variaționale [17]. Citām de asemenea lucrările [20], [22], [24]. Pentru sisteme cu coeficienți constanți de o formă particulară, în [8] se dă o condiție necesară și suficientă pentru unicitatea soluției problemei lui Dirichlet. Pentru același tip de sisteme problema este reluată de Zolotareva [34], [35] și P. Szilagyi [30].

În lucrarea de față ne propunem să dăm condiții algebrice asupra coeficienților sistemului (1) astfel ca să aibă loc afirmația (U). Planul lucrării este următorul. În §1 se stabilesc în mod direct anumite condiții suficiente. În §2 se consideră această problemă prin prisma teoremelor de comparație. Unele aspecte ale sistemelor cu coeficienți constanți sînt analizate în §3. În §4 considerăm afirmația (U) în contextul teoriei problemelor la limită. Paragrafele §5 și §6 sînt rezervate cazului neliniar.

§ 1. STABILIREA CONDIȚIILOR SUFICIENTE DE EXISTENȚĂ ALE AFIRMAȚIEI (*C*)

Considerăm sistemul

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{m} A_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + A_0 u. \tag{2}$$

Relativ la acest sistem are loc

TEOREMA 1. *Fiecare din următoarele șase condiții sînt condiții suficiente ca afirmația* (*U*) *să aibă loc*

i) $$\sum_{i,j=1}^{m} \tau_i A_{ij} \tau_j^* - \sum_{i=1}^{m} \tau_0 A_i \tau_i^* - \tau_0 A_0 \tau_0^* > 0$$

pentru orice $\tau_k \in R^n$ *și* $\sum_{i=0}^{m} \| \tau_i \| \neq 0,\ x \in \Omega.$

ii) $$\sum_{i,j=1}^{m} \tau_i A_{ij} \tau_j^* + \sum_{i=1}^{m} \tau_i A_i \tau_0^* + \tau_0 \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} - A_0\right) \tau_0 > 0$$

pentru orice $\tau_k \in R^n$ *și* $\sum_{i=1}^{m} \| \tau_i \| \neq 0,\ x \in \Omega.$

iii) (*Bițadze*) *Matricele* A_i *sînt simetrice și*

$$\sum_{i,j=1}^{m} \tau_i A_{ij} \tau_j^* > 0,\ \sum_{i=1}^{m} \| \tau_i \| \neq 0,\ \tau_0 \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_i} - 2A_0\right) \tau_0^* > 0,\ \tau_0 \in R^n,\ \tau_0 \neq 0.$$

iv) *Există matricele pătratice* $F_i \in C^1(\overline{\Omega})$, $i = 1, \ldots, m$, *astfel ca*

$$\sum_{i,j=1}^{m} \tau_i A_{ij} \tau_j^* + \sum_{i=1}^{m} \tau_0 (F_i - A_i) \tau_i^* + \sum_{i=1}^{m} \tau_i F_i \tau_0^* + \tau_0 \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} - A_0\right) \tau_0^* > 0$$

pentru orice $\tau_k \in R^n,\ \sum_{k=0}^{m} \| \tau_k \| \neq 0,\ x \in \Omega.$

v) *Există matricele patratice* $F_i \in C^1(\overline{\Omega})$, $i = 1, \ldots, m$, *astfel ca*

$$\sum_{i,j=1}^{m} \tau_i A_{ij} \tau_j^* + \sum_{i=1}^{m} \tau_i (A_i + F_i) \tau_0^* +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \tau_0 F_i \tau_i^* + \tau_0 \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} (A_i + F_i) - A_0 \right) \tau_0^* > 0$$

pentru orice $\tau_k \in R^n$, $k = 0, 1, \ldots, m$, $\sum\limits_{k=0}^{m} \| \tau_i \| \neq 0$.

vi) *Există matricele pătratice* $F_i \in C^1(\overline{\Omega})$, $i = 1, \ldots, m$, *astfel ca*

$$\sum_{i,j=1}^{m} \tau_i A_{ij} \tau_j^* + \sum_{i=1}^{m} \tau_i F_i \tau_0^* + \sum_{i=1}^{m} \tau_0 F_i \tau_i^* +$$

$$+ \tau_0 \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} - A_0 \right) \tau_0 > 0$$

pentru orice $\tau_k \in R^n$, $\sum\limits_{k=0}^{m} \| \tau_k \| \neq 0$, $x \in \Omega$.

Demonstrație. Presupunem că are loc condiția i). Fie $u = u(x)$ o soluție nebanală a sistemului (2), astfel ca $u|_{\Gamma} = 0$. Din identitatea

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u^* A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = u^* Lu - \sum_{i=1}^{m} u^* A_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - u^* A_0 u + \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial u^*}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

rezultă

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial u^*}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} u^* A_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - u^* A_0 u \right) \mathrm{d}x = 0.$$

Utilizînd condiția i), rezultă $u \equiv 0$ în Ω și deci o contradicție. În cazul condiției ii) se folosește identitatea

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{m} u^* A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} + u^* A_i u \right) = u^* Lu +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial u^*}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u^*}{\partial x_i} A_i u + \sum_{i=1}^{m} u^* \frac{\partial A_i}{\partial x_i} u - u^* A_0 u.$$

Teorema de mai sus în cazul condiției iii) constituie un rezultat al lui Bițadze [3].

În cazul condițiilor iv), v), și vi), teorema rezultă imediat, pe baza următoarei observații.

Fie $F_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots m$, matrice pătratice de ordinul n, definite pe $\overline{\Omega}$ și $F_i \in C^1(\overline{\Omega})$. În aceste condiții pentru orice vector — funcție $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $u \in C^1(\overline{\Omega})$ și $u|_{\Gamma} = 0$ are loc relația

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} (u^* F_i u) \, \mathrm{d}x = 0. \right.$$

Observația 1. Teorema 1 generalizează unele rezultate datorită lui L. M. Kuks [17] (a se vedea de asemenea Bițadze [3]).

Observația 2. Teorema 1 poate fi enunțată în condiții mai restrictive dar mai practice. Astfel de exemplu în locul condiției i) putem impune următoarea :

i') Determinantul

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & \ldots & 0 & -\frac{1}{2}\|A_1\| \\ 0 & \alpha & \ldots & 0 & -\frac{1}{2}\|A_2\| \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -\frac{1}{2}\|A_m\| \\ -\frac{1}{2}\|A_1\| & -\frac{1}{2}\|A_2\| & \ldots & -\frac{1}{2}\|A_m\| & \varepsilon^2 \end{vmatrix} > 0.$$

Aici α este o constantă ce caracterizează uniform tare elipticitatea sistemului (2), adică

$$\sum_{i,j=1}^{m} \tau_i A_{ij} \tau_j^* \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{m} \tau_i^2, \quad \alpha > 0$$

iar ε este astfel încît

$$\tau_0 A_0 \tau_0^* < -\varepsilon^2 \|\tau_0\|^2.$$

Prin $\|A_i\|$ am notat norma matricei A_i, față de norma euclidiană din R^n (F. R. Gantmaher [9]).

Vom încheia acest paragraf prin următorul exemplu : Se consideră ecuația metaarmonică

$$\Delta^2 u + a_1 \Delta u + a_2 u = 0 \tag{3}$$

cu condițiile la limită

$$u|_\Gamma = \Delta u|_\Gamma = 0. \tag{4}$$

Ne propunem de a determina condiții asupra coeficienților $a_1(x)$, $a_2(x)$ astfel ca problema (3) — (4) să admită numai soluția banală. Această problemă poate fi scrisă sub forma

$$\begin{cases} \Delta u - V = 0 \\ \Delta V + a_2 u + a_1 V = 0 \end{cases} \tag{5}$$

$$u|_p = V|_p = 0. \tag{6}$$

Aplicînd pentru sistemul (5), teorema 1 (iv), obținem

TEOREMA 2. *Dacă* :

iv′) *Există matricele simetrice,* F_i, *de ordinul al doilea, astfel ca partea simetrică a matricei*

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \dots 0 & F_1 \\ 0 & I & 0 \dots 0 & F_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \quad I & F_m \\ F_1 & F_2 & F_3 \dots F_m & \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

să fie pozitiv definită, atunci problema (3) — (4) *admite numai soluţia banală.*

§ 2. CONSECINŢE ALE TEOREMELOR DE COMPARAŢIE

Este evident că teoremele de comparaţie stabilite în [22] ne furnizează condiţii asupra coeficienţilor sistemului (2), astfel ca afirmaţia (U) să aibă loc. În acest paragraf ne propunem de a aplica aceste teoreme la anumite sisteme de o formă particulară.

Este bine cunoscut faptul că problema lui Dirichlet relativ la un sistem tare eliptic este totdeauna rezolvabilă în mod unic dacă domeniul are diametrul suficient de mic [5]. Prin diametrul unui domeniu înţelegem diametrul sferei de rază minimă ce conţine domeniul respectiv. ,,Mărimea'' domeniului se mai poate exprima şi prin latura cubului de latură minimă ce-l conţine. Problema este aceea de a preciza în funcţie de coeficienţii sistemului, cît de mare poate fi diametrul domeniului pentru ca problema lui Dirichlet să fie rezolvabilă în mod unic. Teoremele de comparaţie ne dau posibilitatea de a obţine informaţii în acest sens. Amintim că această problemă a mai fost studiată, printre alţii, de Skorobogatko [26], Kuks [17]. Vom extinde în cele ce urmează aceste rezultate pentru sisteme de o formă mai generală, ca acelea considerate în lucrările mai sus amintite.

Considerăm sistemul (2) şi îl comparăm cu ecuaţia

$$(7) \qquad \Delta V + k^2 V = 0,$$

unde k este un număr real pozitiv.

Se observă uşor că funcţia

$$y = \sin \frac{k\sqrt{m}}{m} x_1 \cdot \sin \frac{k\sqrt{m}}{m} x_2 \dots \sin \frac{k\sqrt{m}}{m} x_m$$

este o soluţie a ecuaţiei (7), ce se anulează pe frontiera cubului m-dimensional

$$\left[0, \frac{m\pi}{k\sqrt{m}}\right] \times \left[0, \frac{m\pi}{k\sqrt{m}}\right] \times \dots \times \left[0, \frac{m\pi}{k\sqrt{m}}\right]$$

şi este pozitivă în interiorul acestui cub.

Din teoremele de comparație date în [22], rezultă

TEOREMA 3. *Presupunem că:*

1. *Sistemul* (2) *este tare eliptic în* $\overline{\Omega}$.

2. *Domeniul* Ω *este astfel încît este conținut într-un cub m-dimensional de latură* $\frac{m\pi}{k\sqrt{m}}$, $k > 0$.

În aceste condiții, oricare din următoarele afirmații reprezintă condiții suficiente ca (U) să aibă loc.

$$\text{i)}\quad \sum_{i,j=1}^{m} \tau_i (A_{ij} - I\delta_{ij}) \tau_j^* - \sum_{i=1}^{m} \tau_0 A_i \tau_i^* + \tau_0 (k^2 I - A_0) \tau_0^* \geqslant 0$$

pentru orice $\tau_k \in R^n$, $k = 0, 1, \ldots, m$.

$$\text{ii)}\quad \sum_{i,j=1}^{m} \tau_i (A_{ij} - I\delta_{ij}) \tau_j^* + \sum_{i=1}^{m} \tau_i A_i \tau_0 + \tau_0 \left(k^2 I + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} - A_0\right) \tau_0^* \geqslant 0$$

pentru orice $\tau_k \in R^n$, $k = 0, 1, \ldots, m$.

iii) Există matricele pătratice, F_i, $ce \in C^1$ $(\overline{\Omega})$, astfel ca

$$\sum_{i,j=1}^{m} \tau_i (A_{ij} - I\delta_{ij}) \tau_j^* + \sum_{i=1}^{m} \tau_0 (F_i - A_i) \tau_i^* + \sum_{i=1}^{m} \tau_i F_i \tau_0^* +$$
$$+ \tau_0 \left(k^2 I + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} - A_0\right) \tau_0^* \geqslant 0$$

pentru orice $\tau_k \in R^n$, $k = 0, 1, \ldots, m$.

iv) Există matricele pătratice, F_i, de ordinul n, $F_i \in C^1(\overline{\Omega})$, astfel ca

$$\sum_{i,j=1}^{m} \tau_i (A_{ij} - I\delta_{ij}) \tau_j^* + \sum_{i=1}^{m} \tau_i (A_i + F_i) \tau_0^* + \sum_{i=1}^{m} \tau_0 F_i \tau_i^* +$$
$$+ \tau_0 \left(k^2 I + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} (A_i + F_i) - A_0\right) \tau_0^* \geqslant 0$$

pentru orice $\tau_k \in R^n$, $k = 0, 1, \ldots, m$.

Aici δ_{ij} este simbolul lui Kronecker.

Aplicînd teorema 3 ecuației metaarmonice (3) — (4) ($\equiv$(5) — (6)!) obținem

TEOREMA 4. *Presupunem că domeniul* Ω *este conținut într-un cub m-dimensional de latură* $\frac{m\pi}{k\sqrt{m}}$, $k > 0$. *Următoarele afirmații sînt condiții suficiente ca problema* (3) — (4) *să admită numai soluția banală*

$$\text{i}')\quad \tau \begin{pmatrix} k^2 & 1 \\ -a_2 & k^2 - a_1 \end{pmatrix} \tau^* \geqslant 0, \text{ pentru orice } \tau \in R^2$$

iii′) Există matricele pătratice de ordinul al doilea, $F_i \in C^1$ $(\overline{\Omega})$, astfel ca

$$\sum_{i=1}^{m} \tau_i^2 + \sum_{i=1}^{m} \tau_0 F_i \tau_i^* + \sum_{i=1}^{m} \tau_i F_i \tau_0^* + \tau_0 \left(k^2 I + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} - 2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}\right) \tau_0^* \geqslant 0$$

pentru orice $\tau_k \in R^n$, $k = 0, 1, \ldots, m$.

Dacă considerăm ecuația metaarmonică

$$\Delta^3 u + a_1 \Delta^2 u + a_2 \Delta u + a_3 u = 0 \tag{8}$$

cu condițiile la limită

$$u|_\Gamma = \Delta u|_\Gamma = \Delta^2 u|_\Gamma = 0 \tag{9}$$

în aceeași manieră putem obține condiții suficiente, ca problema (8) — (9) să admită numai soluția banală.

Într-adevăr, problema (8) — (9) este echivalentă cu următoarea

$$\begin{cases} \Delta u - v = 0 \\ \Delta v - w = 0 \\ \Delta w + a_3 u + a_2 v + a_1 w = 0 \end{cases} \tag{10}$$

$$u|_\Gamma = v|_\Gamma = w|_\Gamma = 0. \tag{11}$$

Aplicînd sistemului (10) teorema 3, obținem

TEOREMA 5. *Presupunem că domeniul Ω este astfel încît este conținut în cubul m-dimensional de latură* $\dfrac{m\pi}{k\sqrt{m}}$, $k > 0$.

Fiecare din următoarele afirmații reprezintă o condiție suficientă ca problema (8) — (9) *să admită numai soluția banală*

i'') $$\tau \begin{pmatrix} k^2 & 1 & 0 \\ 0 & k^2 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & k^2 - a_1 \end{pmatrix} \tau^* \geqslant 0$$

pentru orice $\tau \in R^3$.

iii'') *Există matricele pătratice de ordinul al treilea,* $F_i \in C^1(\overline{\Omega})$, *astfel ca*

$$\sum_{i=1}^{m} \tau_i^2 + \sum_{i=1}^{m} \tau_0 F_i \tau_i^* + \sum_{i=1}^{m} \tau_i F_i \tau_0^* +$$

$$+ \tau_0 \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} - \begin{pmatrix} -k^2 & -2 & 0 \\ 0 & -k^2 & -2 \\ 2a_3 & 2a_2 & -k^2 + 2a_1 \end{pmatrix} \right) \tau_0^* \geqslant 0$$

pentru orice $\tau_i \in R^3$, $i = 0, 1, \ldots, m$.

Dacă în condiția iii'') luăm

$$F_1 = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}, F_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ pentru } i = 2, 3, \ldots, m.$$

atunci această condiție devine :

iii''') Există funcția $f \in C^1(\overline{\Omega})$, astfel ca

a) Pentru $m = 1$, matricea

$$\begin{Vmatrix} k^2 + \frac{df}{dx} & 1 & -a_3 \\ 1 & k^2 + \frac{df}{dx} & 1-a_2 \\ -a_3 & 1-a_2 & k^2 + \frac{df}{dx} - 2a_1 \end{Vmatrix}$$

este semipozitiv definită.

b) Pentru $m \geqslant 2$, la condiţia de la punctul a) se mai adaugă condiţia ca matricea

$$\begin{pmatrix} I & fI \\ fI & I \end{pmatrix}$$

să fie semipozitiv definită. I este matricea unitate de ordinul al treilea.

§ 3. ASUPRA UNEI CLASE PARTICULARE DE SISTEME CU COEFICIENŢI CONSTANŢI

În acest paragraf vom considera sisteme de forma

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{12}$$

unde A, B, C sînt matrice pătratice constante, de ordinul 2.

Polinomul caracteristic al acestui sistem este

$$P(\lambda) = |A + 2B\lambda + C\lambda^2|, \quad |C| > 0.$$

Sistemul (12) se numeşte eliptic în sensul lui Petrovski dacă $P(\lambda)$ este diferit de zero pentru orice λ real. Sistemul se numeşte *normal eliptic* [8], dacă polinomul său caracteristic are forma

$$P(\lambda) = |C| (1 + \lambda^2)(k^2 + \lambda^2), \; k > 0, \text{ real.}$$

Se ştie [8] că condiţia necesară şi suficientă pentru normal elipticitatea sistemului (12) este ca să aibă loc relaţiile

1° $|A| = k^2 |C|$

2° $|A + B| = |A| + |B|$

3° $|B + C| = |B| + |C|$

4° $|A - C| = 4|B|$.

Tot în lucrarea mai sus amintită se dă o condiţie necesară şi suficientă pentru unicitatea soluţiei problemei lui Dirichlet, relativ la sistemul (12) şi orice domeniu mărginit Ω. Această condiţie este următoarea

$$|A + 2Bb + Cc| \neq 0 \tag{13}$$

pentru orice b şi c reali şi $b^2 < c$.

În cele ce urmează vom da o condiție echivalentă cu condiția de mai sus. Mai precis, vom concretiza condiția (13) pentru sistemele normal eliptice, în limbajul coeficienților.

Relația $b^2 < c$ este echivalentă cu $c = b^2 + \varepsilon^2$. Condiția devine

$$(13') \qquad |A + 2\,Bb + Cb^2 + C\varepsilon^2| \neq 0$$

pentru orice b și ε reali.

Avem

$$\begin{aligned} |A + 2Bb + Cb^2 + C\varepsilon^2| &= |C|\,b^4 + 2b^3\left(\begin{vmatrix} c_{11} & b_{12} \\ c_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & c_{12} \\ b_{21} & c_{22} \end{vmatrix}\right) + \\ &+ b^2\left(\begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} \\ c_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + 4\,|B| + \begin{vmatrix} a_{11} & c_{12} \\ a_{21} & c_{22} \end{vmatrix} + 2\,\varepsilon^2 |C\right) + \\ &+ b\left(2\begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + 2\,\varepsilon^2\begin{vmatrix} c_{11} & b_{12} \\ c_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + 2\,\varepsilon^2\begin{vmatrix} b_{11} & c_{12} \\ b_{21} & c_{22} \end{vmatrix}\right) + \\ &+ |A| + \varepsilon^2\begin{vmatrix} a_{11} & c_{12} \\ a_{21} & c_{22} \end{vmatrix} + \varepsilon^2\begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} \\ c_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \varepsilon^4 |C| = |C|\,b^4 + (\,|A| + |C| + \\ &+ 2\,|C|\,\varepsilon^2)\,b^2 + |A| + (|A| + |C| - 4\,|B|)\,\varepsilon^2 + |C|\,\varepsilon^4. \end{aligned}$$

Prin urmare condiția (13) este echivalentă cu următoarea

$$\begin{aligned} &|C|\,b^4 + (|A| + |C| + 2\,|C|\,\varepsilon^2)b^2 + |A| + (|A| + \\ &+ |C| - 4\,|B|\,)\varepsilon^2 + |C|\,\varepsilon^4 \neq 0 \end{aligned}$$

pentru orice b și ε reali.

TEOREMA 6. *Condiția necesară și suficientă ca problema omogenă Dirichlet relativ la sistemul normal eliptic* (12) *să admită numai soluția banală oricare ar fi domeniul mărginit* Ω, *este ca*

sau

$$|A| = |C| > 0, \quad |B| < 0$$

(14) *sau*

$$|B| \geqslant 0, \quad |C| > 0, \quad |A| + |C| - 4\,|B| > 0$$

sau

$$|B| \geqslant 0, \quad |C| > 0, \quad (|A| + |C| - 4\,|B|)^2 - 4|A|\,|C| < 0.$$

Amintim că rezolvabilitatea problemei lui Dirichlet relativ la sistemul (12) a mai fost studiată de Tovmazian [31], Zolotareva [34] [35], Szilagyi [30]. A se vedea de asemenea [15], unde se dau forme canonice pentru sistemele de tipul (12).

§ 4. CONDIȚIA (U) ȘI EXISTENȚA SOLUȚIEI PROBLEMEI LUI DIRICHLET

Considerăm sistemul

$$(15) \qquad Lu = \sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} A_i\,\frac{\partial u}{\partial x_i} + A_0\,u = F$$

în domeniul mărginit $\Omega \subset R^m$, cu condiţia la limită

$$u|_{\Gamma} = 0. \tag{16}$$

Presupunem că sînt îndeplinite următoarele condiţii de regularitate. Relativ la coeficienţii A_{ij}, A_i, A_0 presupunem că $A_{ij}(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, $A_i(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, $A_0(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, şi că condiţia de tare elipticitate este satisfăcută în $\overline{\Omega}$. Ω este un domeniu mărginit din R^m, cu frontiera Γ o varietate de dimensiune $m-1$, de clasă C^3, astfel că $\overline{\Omega}$ este o varietate cu frontieră, de clasă C^3, avînd ca frontieră pe Γ. În aceste condiţii, se ştie (Vişik [32], Browder [5], Agmond-Douglis-Nirenberg [1], Ladîjinskaia-Uralţeva [19]) că dacă F satisface la condiţia lui Lipschitz de indice $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$, în $\overline{\Omega}$, atunci condiţia (U) asigură existenţa şi unicitatea soluţiei problemei (15)—(16) în spaţiul funcţiilor ce aparţin lui $C^2(\overline{\Omega})$, ale căror derivate de ordinul al doilea satisfac la condiţia lui Lipschitz de indice α. Este uşor de văzut că în condiţiile de regularitate precizate mai sus, afirmaţia (U) asigură existenţa şi unicitatea soluţiei problemei lui Dirichlet şi pentru alte tipuri de spaţii.

Ataşăm lui L operatorul

$$T_p : u \to (L\,u, \gamma\, u)$$

din $W_p^{(2)}(\Omega)$ în $L_p(\Omega) \times W_p^{2-\frac{1}{p}}(\Gamma)$.

Prin $\gamma\, u$ am notat urma lui u pe frontiera Γ. Să notăm cu Ker (T_p) nucleul operatorului T_p, definit mai sus. Dintr-o teoremă a lui G. Geymonat [11], [12] (a se vedea de asemenea Browder [5] Ladîjinskaia-Uralţeva [19]) rezultă că

$$\operatorname{Ker}(T_p) = \{u \in C^2(\overline{\Omega})\,;\; L(u) = 0, \quad u = 0\}.$$

De aici rezultă că condiţiile din teoremele 1, 3 asigură existenţa şi unicitatea soluţiei problemei (15) — (16), în spaţiul $W_p^{(2)}(\Omega)$ pentru orice $F \in L_p(\Omega)$.

În paragrafele ce urmează, ne propunem să punem în evidenţă cîteva tipuri de sisteme neliniare pentru care pot fi extinse rezultatele stabilite în paragrafele anterioare.

§ 5. SISTEME SEMILINIARE

Considerăm sistemul

$$L(x,u)\,u = \sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}(x,u)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} A_i(x,u)\,\frac{\partial u}{\partial x_i} + A_0(x,u)\,u = 0, \tag{17}$$

unde matricele pătratice de ordinul n, $A_{ij}(x,u)$, $A_i(x,u)$ $A_0(x,u)$ sînt definite în domeniul $\Omega \times R^n$, Ω fiind un domeniu mărginit din R^m. Pentru sistemele de tipul (17) se pot extinde cu uşurinţă, prin aceleaşi metode, rezultatele stabilite în capitolele anterioare. În acest paragraf vom da doar cîteva exemple, în acest sens. Astfel teorema, stabilită în [24], se extinde în modul următor

TEOREMA 7. *Dacă*

1°. $\sum_{i,j=1}^{m} \tau_i A_{ij}(x, \eta)\, \tau_j^* > 0$

pentru orice $\eta \in R^n$ *și pentru orice* $\tau_k \in R^n$, $\sum_{k=1}^{m} \| \tau_k \| \neq 0$, $x \in \Omega$ *(condiția lui Somigliana, relativ la sistemul* (17)) ;

2°. $e^* L(x, \eta)\, e < 0$

pentru orice $\eta \in R^n$ *și pentru orice* $e \in C^2(\Omega)$, $\| e \| = 1$.

Atunci, dacă $u = u(x)$ *este o soluție regulară a sistemului (17), norma lui* u, $\| u \| = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \right)^{1/2}$ *își atinge valorile maxime pe frontiera* Γ, *a domeniului* Ω.

Demonstrație. Se urmează punct cu punct demonstrația dată teoremei din [24].

Dacă avem un sistem semiliniar de forma

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^{m} A_i(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} + A_0(x, u)\, u = 0, \tag{18}$$

coeficienții fiind definiți în același domeniu ca și în cazul sistemului (17), are loc

TEOREMA 8. *Fiecare din următoarele condiții sînt condiții suficiente ca problema omogenă Dirichlet relativ la sistemul (18) să admită numai soluția banală*:

i') $\sum_{i,j=1}^{m} \tau_i A_{ij}(x, \eta)\, \tau_j^* - \sum_{i=1}^{m} \tau_0 A_i(x, \eta)\, \tau_i^* - \tau_0 A_0(x, \eta)\, \tau_0^* > 0$ *pentru orice* $\eta \in R^n$ *și pentru orice* $\tau_k \in R^n$, $\sum_{i=0}^{m} \| \tau_i \| \neq 0$, $x \in \Omega$.

iv') *Există matricele pătratice* $F_i \in c^1(\overline{\Omega})$, $i = 1, \ldots, m$, *astfel ca*

$$\sum_{i,j=1}^{m} \tau_i A_{ij}(x, \eta) \tau_j^* + \sum_{i=1}^{m} \tau_0 (F_i - A_i(x, \eta))\, \tau_i^* + \sum_{i=1}^{m} \tau_i F_i \tau_0^* +$$
$$+ \tau_0 \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} - A_0(x, \eta) \right) \tau_0^* > 0$$

pentru orice $\eta \in R^n$ *și pentru orice* $\tau_k \in R^n$, $\sum_{i=}^{m} \| \tau_i \| \neq 0$, $x \in \Omega$.

Demonstrație. A se vedea demonstrația teoremei 1 (i) iv)). Dacă comparăm sistemul (18) cu ecuația (7), printr-un raționament analog cu acela folosit în cazul teoremei 3, obținem

TEOREMA 9. *Presupunem că*

1°. *Sistemul (18) satisface condiția lui Somigliana.*

2°. *Domeniul* Ω *este astfel încît este conținut într-un cub m-dimensional de latură* $\frac{m\pi}{k\sqrt{m}}$, $k > 0$.

În aceste condiții, oricare din următoarele afirmații reprezintă condiții suficiente pentru ca problema omogenă a lui Dirichlet relativ la sistemul (18) și domeniul Ω să admită numai soluția banală.

$$\text{i}') \sum_{i,j=1}^{m} \tau_i(A_{ij}(x, \eta) - I\,\delta_{ij})\,\tau_j^{*} - \sum_{i=1}^{m} \tau_0\,A_i(x, \eta)\,\tau_i^{*} +$$

$$+ \tau_0(k^2 I - A_0(x, \eta))\,\tau_0^{*} \geqslant 0$$

pentru orice $\eta \in R^n$, $\tau_k \in R^n$, $k = 0, 1, \ldots, m$.

iii') Există matricele pătratice F_i, $ce \in c^1(\overline{\Omega})$, astfel ca

$$\sum_{i,j=1}^{m} \tau_i(A_{ij}(x, \eta) - I\,\delta_{ij})\,\tau_i^{*} + \sum_{i=1}^{m} \tau_0(F_i - A_i(x, \eta))\,\tau_i^{*} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \tau_i F_i\,\tau_0^{*} + \tau_0\left(k^2 I + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} - A_0(x, \eta)\right)\tau_0 \geqslant 0$$

pentru orice $\eta \in R^n$, $\tau_k \in R^n$, $k = 0, 1, \ldots, m$.

§ 6. CONSECINȚE ALE PRINCIPIULUI LINIARIZĂRII

1. *Principiul liniarizării.* Considerăm sistemul

$$(19) \quad \begin{cases} F_1(x, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_m}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \ldots, u_{x_m x_m}) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n(x, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_m}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \ldots, u_{x_m x_m}) = 0. \end{cases}$$

Presupunem relativ la funcțiile F_i că sînt continue în domeniul $\Omega \times R^p$, împreună cu derivatele în raport cu u_k, $u_{k x_i}$, $u_{k x_i x_j}$, $k = 1, \ldots, n$; $i, j = 1, \ldots, m$, iar $p = m + nm + \frac{nm(m+1)}{2}$, $\Omega \subset R^m$.

Fie u și v două soluții ale sistemului (19).

Formăm funcția vector

$$\Phi(t) = u - t(v - u),\ \Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n),\ t \in [0, 1].$$

Notăm

$$\Psi_k(t) = F_k(x, \Phi, \Phi_{x_i}, \Phi_{x_i x_j}), \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Din ipotezele de mai sus rezultă că

$$\Psi_k(0) = \Psi_k(1) = 0.$$

Deci există $\theta_k \in (0, 1)$, astfel ca

$$\Psi_k'(\theta_k) = 0$$

adică

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 F_k}{\partial u_{l\,x_i x_j}} (v. - u_l)_{i x_j} + \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial u_{l x i}} (v_l - u_l)_{x_i} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial u_l} (v_l - u_l) = 0.$$

Am ataşat astfel sistemului neliniar (19), sistemul liniar

$$(20) \quad \sum_{l=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 F_k}{\partial u_{l x_i x_j}} W_{l x_i x_j} + \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial u_{l x i}} W_{l x_i} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial u_l} W_l = 0.$$

Prin urmare în condiţiile de regularitate de mai sus, diferenţa a două soluţii ale unui sistem neliniar, este o soluţie a unui sistem liniar.

Obţinem astfel

TEOREMA 10. *Dacă*

1°. F_k *este continuă în* $\Omega \times R^\nu$ *şi admite derivate parţiale continue, în raport cu* u_l, $u_{l x_i}$, $u_{l x_i x_j}$, $k, l = 1, \ldots, n$; $i, j = 1, \ldots, m$.

2°. $F_k(x, 0, 0, 0) = 0$ *pentru orice* $x \in \Omega$, $k = 1, \ldots, n$.

Atunci dacă $u = u(x)$ *este o soluţie a sistemului neliniar* (*19*), *ea este o soluţie a sistemului* (*20*).

2. *Consecinţe ale principiului liniarizării.* Principiul liniarizării ne permite să extindem unele rezultate obţinute în cazul liniar, pentru cazul neliniar. În cele ce urmează vom da cîteva exemple în acest sens.

Exemplul 1. Considerăm sistemul eliptic

$$(21) \qquad L(u) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + F(x, u) = 0$$

unde $u = (u_1, \ldots, u_n)$; $a_{ij} = a_{ji}(x)$, $b_i = b_i(x)$, sînt funcţii scalare definite într-un domeniu $\Omega \subset R^m$, iar

$$F(x, u) = (F_1(x, u), \ldots, F_n(x, u)).$$

Din principiul liniarizării şi din teorema demonstrată în [25], rezultă

TEOREMA 11. *Presupunem că*

1°. F_k *este continuă în* $\Omega \times R^n$ *şi admite derivate parţiale continue, în raport cu* $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

2°. $F_k(x, 0) = 0$, *pentru orice* $x \in \Omega$, $k = 1, \ldots, m$.

3°. $\tau \cdot \left\| \dfrac{\partial F_k}{\partial u_i} \right\| \cdot \tau^* < 0$, *pentru orice* $\tau \in R^n$, $\tau \neq 0$.

În aceste condiţii, orice soluţie regulară, $u = u(x)$, *a sistemului* (*21*) *se bucură de proprietatea că* u^2 *își atinge valorile extreme pe* $\overline{\Omega}$, *pe frontiera* Γ *a lui* Ω.

Exemplul 2. Considerăm sistemul

$$F(x, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \ldots, u_{x_m x_m}) + G(x, u) = 0 \tag{22}$$

unde $F = (F_1, \ldots, F_n)$, $F(x, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \ldots, u_{x_m x_m})$, este definită în $\Omega \times R^s$, $s = \dfrac{nm(m+1)}{2}$, iar $G = (G_1, \ldots, G_n)$ este definită în $\Omega \times R^n$.

Mai presupunem că sistemul (22) satisface condiţia lui Somigliana în Ω adică

$$\sum_{i,j=1}^{m} \tau_i \left\| \frac{\partial F_k}{\partial u_{l\, x_i x_j}} \right\| \tau_j^* > 0$$

pentru orice $\tau_k \in R^n$, şi $\sum_{k=1}^{m} \| \tau_k \| \neq 0$.

Avem

TEOREMA 12. *Presupunem că*

1°. *F şi G sînt continue şi admit derivate parţiale continue în raport cu funcţiile necunoscute şi derivatele lor parţiale.*

2°. $F(x, 0) = 0$, $G(x, 0) = 0$, *pentru orice* $x \in \Omega$.

3°. *Sistemul* (*22*) *satisface condiţia lui Somigliana.*

4°. $\tau \left\| \dfrac{\partial G_k}{\partial u_i} \right\| \tau^* < 0$

pentru orice $\tau \in R^n$, $\tau \neq 0$.

În aceste condiţii, problema omogenă Dirichlet ataşată sistemului (*22*) *şi domeniului* Ω, *admite numai soluţia banală.*

Demonstraţie. Se aplică principiul liniarizării şi teorema 1, punctul iii).

Observaţie. Această metodă de liniarizare a fost folosită de J. Hadamard [13] pentru ecuaţiile cu derivate parţiale de ordinul al doilea. Aceeaşi metodă este utilizată în cazul ecuaţiilor eliptice de E. Hopf. [14], A. D. Alexandrov [2], L. M. Kuks [18]. Noi de asemenea am folosit această metodă în cazul sistemelor de ecuaţii diferenţiale neliniare de ordinul I [23].

Primită la redacţie la 27 ianuarie 1968

Universitatea „Babeş-Bolyai", Cluj.

SUR L'UNICITÉ DE LA SOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET POUR LES SYSTÈMES FORTEMENT ELLIPTIQUES DU SECOND ORDRE

RÉSUMÉ

L'auteur donne des conditions suffisantes pour l'unicité de la solution du problème de Dirichlet correspondant au système fortement elliptique du second ordre. Dans les paragraphes 1, 2 et 3 sont considérés des systèmes linéaires (1), (2), (5), (10), (12) et dans les § 5 et 6, des systèmes semi-linéaires (17), (18), (19), (21), (22). Quelques remarques sur l'existence de la solution sont faites dans le § 3.

BIBLIOGRAFIE

1. Agmon-Douglis-Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions.* I, II, Comm. pure appl. Math., **12**, 623—727 (1959), **17**, 35—92 (1964).
2. А. Д. АЛЕКСАНДРОВ, *Некоторые теоремы о дифференцильных уравнениях в частных производных второго порядка.* Вест. Ленинград. унив. **8**, 3—17 (1954).
3. А. В. БИЦАДЗЕ, *Об эллиптических системах дифференциальных уравнений с частным производным второго порядка.* Докл. Акад. наук., **112**, 983—986 (1957).
4. J. Bochenek, *On the Dirichlet problem for a class of the elliptic systems of differential equations of the second order.* Prace Mat. (Krakow), **11**, 21—26 (1966).
5. F. E. Browder, *Strong elliptic systems of differential equations.* Ann. of Math. Stud., **33**, 15—51 (1954).
6. G. Cimmino, *Teoremi di confronto fra equazioni o sistemi di equazioni differenziali lineari del second ordine.* Rend. Sem. della Univ. di Roma, **1**, 31—52 (1936).
7. N. Ciorănescu, *Le probléme de Dirichlet pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles du second ordre.* Thèse, Paris, 1929.
8. ДИН СИА-СИ, ЧИЖАН ТУН, МА ЖИ-НNАНИ, ВАН КОН-ТИН, *Об определении эллиптичности системы дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.* Шк. Рек., **4**, 160—163 (1960).
9. ГАНТМАХЕР, *Теория матриц.* Москва, 1966.
10. G. Giraud, *Sur certains problèmes concernantes des systèmes d'équations du type elliptique* C.R. Acad. Sci. Paris, **192**, 471—473 (1931).
11. G. Geymonat, *Sui problemi ai limiti per i sistemi lineari ellitici.* Ann. di mat. pura ed, applic., **LXIX**, 207—284 (1965).
12. G. Geymonat, *Su alcuni problemi ai limiti per i sistemi lineari ellittici secondo Petrowsky.* Le Matematiche, **XX**, 211—253 (1965).
13. J. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodinamique.* Paris, 1903.
14. E. Hopf. *Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Diff.* Sitz-Ber. Preuss Akad. Wiss., 147—152 (1927).
15. Hua Loo Keng, Wu Tzen-Ghien, Lin Wu, *On the classification of the system of diffleg. of the second order.* Sc. Sinica, **XIV**, 461—465 (1965).
16. Л. М. КУКС, *Теоремы качественной теории сильно эллиптических систем второго порядка.* Усп. мат. наук, **3**, 181—184 (1962).
17. Л. М. КУКС, *Об областях разрешимости первой краевой задачи для сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений.* Изв. высш. учеб зав., *I*, 90—99 (1961).

18. Л. М. Кукс, *О некоторых свойствах решений нелинейных уравнений эллиптического типа*. Изв. высш. учеб. зав., *4*, 131—139 (1958).

19. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*. Москва, 1964.

20. Лопатинсий, *Условия существования решения первой граничной задачи для системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа*. Доповиди АН УССР, *1*, 5—9 (1956).

21. М. М. Лаврентьев, *О принципе максимума решений сильно эллиптических систем второго порядка*. Докл. Акад. наук СССР, **116**, 175—176 (1957).

22. Ioan A. Rus, *Téhorèmes de comparaison pour les systèmes elliptiques aux dérivées partielles du second ordre*. Boll. Unione Mat. Ital.

23. Ioan A. Rus, *Cîteva proprietăţi ale zerourilor componentelor soluţiilor unui sistem de două ecuaţii diferenţiale neliniare de ordinul* I. St. cerc. mat., **18**, 1549–1533 (1966).

24. Ioan A. Rus, *Sur un théorème de T. Stys*.

25. Ioan A. Rus, *Sur les propriétés des normes des solutions d'un système d'équations diff. du second ordre*. Studia Univ. ,,Babeş-Bolyai'', *1* (1968).

26. В. Скоробогатко, *Принцип экстремума для системы дифференциальных уравнений второго порядка*. Сибир. мат. ж., **2**, 746—758 (1961).

27. Somigliana, Ann. di Mat., ser. II, **22**, 143 (1894).

28. T. Stys, *Hopf's theorem for certain elliptic system of the second order linear diff. equations*. Prace Mat., **8**, 143–146 (1964).

29. T. Stys, *Aprioristic estimations of solutions of a certain elliptic system of partial diff. second order equations*. Bull. Acad. Pol. Sc., **13**, 639–640 (1965).

30. P. Szilagyi, *Asupra formelor canonice pentru sistemele eliptice de forma*

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F.$$

31. Х. Е. Товмазьян, *К теории общих линейных краевых задач для эллиптических систем*. Сибир. мат. ж., **8**, 1105—1123 (1967).

32. М. И. Вишик, *О сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений*. Мат. сборник, **29**, 615—676 (1951).

33. М. И. Вишик, *О разрешимости первой краевой задачи для нелинейных эллиптических систем дифференциальных уравнений*. Докл. Акад. наук, **134**, 749—752 (1960).

34. Е. В. Золотарева, *О задаче Дирихле для некоторых эллиптических систем второго порядка*. Дир. урав. **3**, *1*, (1967).

35. Е. В. Золотарева, *Об единственности задачи Дирихле для некоторых эллиптических систем*. Сибир. Мат. Ж., 3 (1967).

APLICAŢII ALE TEORIEI OPERATORILOR MONOTONI

DE

ALEXANDRU I. ŞCHIOP

În această lucrare se expun rezultate privind programarea neliniară pe spaţii funcţionale.

Înlocuind operatorii pozitiv definiţi prin operatori monotoni, pe spaţii Hilbert, se obţin minimizări de funcţionale convexe, deci se extind proprietăţile de minim ale funcţionalelor pătratice.

1. INTRODUCERE

În [1] se formulează şi se rezolvă următoarea problemă:

A fiind un operator liniar, mărginit, pe un spaţiu Hilbert real X, se cere să se determine:

$$\Phi(c) = \min_{x} \|y + Ax\|^2 \text{ cu condiţia } \|x\|^2 \leqslant c \tag{1}$$

şi

$$\Psi(c) = \min_{x} \|x\|^2 \text{ cu condiţia } \|Ax + y\|^2 \leqslant c. \tag{2}$$

Pentru rezolvarea acestor probleme se ataşează lui (1) şi (2) funcţionala pătratică

$$J_\lambda(x) = \|Ax + y\|^2 + \lambda\|x\|^2 \text{ cu } \lambda > 0. \tag{3}$$

Punctele critice ale funcţionalei (3) sînt date de punctele în care se anulează derivata Fréchét a funcţionalei $J_\lambda(x)$, de unde se obţine:

$$x_\lambda = (A^*A + \lambda I)^{-1}(-A^*y), \tag{4}$$

unde A^* este operatorul adjunct al lui A, iar I este operatorul identitate.

Notînd cu R_λ operatorul $(A^*A + \lambda I)^{-1}$, se studiază proprietăţile acestui operator, se ţine seama că funcţionala 3) este slab inferior semicontinuă şi se rezolvă problema pusă.

ST. CERC. MAT., TOM. 20. NR. 9, P. 1353–1358 BUCUREŞTI 1968.

Operatorul R_λ este strict monotom (în sensul definiţiei (2), din această lucrare) continuu.

În această lucrare vom rezolva următoarea problemă : $f : X \to R$, fiind o funcţională al cărei gradient este un operator monoton continuu şi în plus $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$, să se determine :

$$\Phi(c) = \min_x f(x) \text{ cu condiţia } \|x\|^2 \leqslant c. \tag{5}$$

şi

$$\Psi(c) = \min_x \|x\|^2 \text{ cu condiţia } f(x) \leqslant c. \tag{6}$$

Ideea rezolvării este utilizarea teoriei operatorilor monotoni introduşi de G. I. Minty în [6] şi apoi studiaţi şi dezvoltaţi de diverşi autori în [3], [4], [5] etc.

Unele proprietăţi ale operatorilor monotoni utilizate în lucrare, apar pentru prima dată aici.

2. FUNCŢIONALE CONVEXE ŞI OPERATORI MONOTONI

În cele ce urmează X va fi considerat un spaţiu Hilbert real.

Definiţia 1. Funcţionala $f : X \to R$ se numeşte convexă dacă $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$, unde $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$ şi $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$; $x_1 x_2$ fiind arbitrari în X.

Definiţia 2. Operatorul $T : X \to X$ se numeşte monoton dacă $\langle Tx_1 - Tx_2, x_1 - x_2 \rangle \geqslant 0$ oricare ar fi $x_1\ x_2 \in X$ (Am notat $\langle\ \rangle$ produsul scalar din X.)

Dacă grad $f(x)$ este un operator monoton, atunci funcţionala $f(x)$ este slab inferior semicontinuă [5] sau [3].

Definiţia 3. Spunem că funcţionala f este slab inferior semicontinuă în $x_0 \in X$ dacă oricare ar fi şirul $x_n \rightharpoonup x_0$ (am notat cu $\rightharpoonup$ convergenţa slabă din X) avem $f(x_0) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

Să asociem acum problemelor (5) şi (6) următoarea funcţională :

$$J_\lambda(x) = f(x) + \frac{\lambda}{2}\|x\|^2 \text{ cu } \lambda > 0. \tag{7}$$

Funcţionala $J_\lambda(x)$ este slab inferior semicontinuă pe spaţiul Hilbert real X (deci cu sferă slab compactă) în plus $\lim\limits_{\|n\|\to+\infty} J_\lambda(x) = +\infty$, deci $J_\lambda(x)$ are un punct de minim absolut pe spaţiul X [3] sau [5].

Punctul de minim al lui $J_\lambda(x)$ este dat de grad $J_\lambda(x) = 0$, care ne dă următoarea ecuaţie funcţională :

$$(T + \lambda I)\, x = y \quad (\text{grad } \|x\|^2 = 2x).$$

Prin ipoteză T este monoton, $T + \lambda I$ este strict monoton căci : $\langle (T + \lambda I)\, u - (T + \lambda I)\, v, u - v \rangle = \langle Tu - Tr, u - v \rangle + \lambda \|u - v\|^2 \geqslant$ $\geqslant \lambda \|u - v\|^2$ oricare ar fi u şi $v \in X$.

Atunci, conform cu [3], $T + \lambda I$ fiind continuu şi strict monoton, este un homeomorfism al lui X pe el însuşi, aşadar $R = (T + \lambda I)^1$ există şi este continuu pe X.

3. STUDIUL OPERATORULUI $R_\lambda = (T + \lambda I)^{-1}$

Să notăm

$$x_\lambda = (T + \lambda I)^{-1} y. \tag{8}$$

Elementul x_λ realizează minimul funcţionalei (7).

Definiţia 4. Operatorul $T : X \to X$ se zice coercitiv, dacă există o funcţie crescătoare $c(r) : R_+ \to R_+$ cu $\lim\limits_{r \to +\infty} c(r) = +\infty$, astfel încît $\langle Tu, u \rangle \geqslant c(\| u \|) \| u \|$.

Definiţia 4. Operatorul $T : X \to X$ se numeşte lipschitzian pe X dacă, oricare ar fi $u, v \in X$, avem $\| Tu - Tv \| \leqslant k \| u - v \|$, unde k este o constantă pozitivă.

Teorema 1. *Dacă $T : X \to X$ este un operator coercitiv şi lipschitzian, atunci aplicaţia $\lambda \to x_\lambda$ (din R_+ în X) este continuă.*

Demonstraţie. Fie $x_\lambda = (T + \lambda I)^{-1} y$ şi $x_\mu = (T + \mu I)^{-1} y$ cu $\lambda, \mu > 0$.

Avem :

$$(T + \lambda I)\, x_\lambda = y \text{ şi } (T + \mu I)\, x_\mu = y \text{ deci } \lambda\, x_\mu - \mu\, x_\mu = T x_\mu - T x_\lambda.$$

T fiind coercitiv şi lipschitzian ne dă :

$$\langle T x_\lambda, x_\lambda \rangle \geqslant c(\| x_\lambda \|) \| x_\lambda \|$$

şi $\| T x_\lambda - T x_\mu \| \leqslant k \| x_\lambda - x_\mu \|$.

Mulţimea $\{x_\lambda\}_{\lambda > 0}$ este uniform mărginită căci

$$c(\| x_\lambda \|) \| x_\lambda \| \leqslant \langle (T + \lambda I)\, x_\lambda, x_\lambda \rangle = \langle y, x_\lambda \rangle \leqslant \| y \| \| x_\lambda \|$$

şi $c(\| x_\lambda \|) \leqslant \| y \|$ implică $\| x_\lambda \| \leqslant M$, independent de λ.

Să evaluăm diferenţa $\| x_\lambda - x_\mu \|$:

$$\| x_\lambda - x_\mu \| \leqslant \frac{1}{\lambda} \| T x_\mu - T x_\lambda \| + | \mu - \lambda | \| x_\mu \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k \| x_\mu - x_\lambda \|}{\lambda} + | \mu - \lambda | \| x_\mu \|$$

deci

$$\| x_\lambda - x_\mu \| \leqslant \frac{| \mu - \lambda | \| x_\mu \|}{1 - \dfrac{k}{\lambda}}$$

deci

$$\lim_{\mu \to \lambda} \| x_\lambda - x_\mu \| = 0 \qquad \text{q.e.d.}$$

Lema 1. *Aplicaţia $\lambda \to \| x_\lambda \|^2$ este strict descrescătoare de λ iar $\lambda \to f(x_\lambda)$ este strict crescătoare de λ.*

Demonstraţie. Ţinînd seama că x_λ realizează minimul unic al funcţionalei $J_\lambda(x)$, pentru $0 < \lambda < \mu$ avem :

$$u_\lambda + \lambda v_\lambda \leqslant u_\mu + \lambda v_\mu, \text{ unde } u_\lambda = f(x_\lambda) \text{ iar } v_\lambda = \| x_\lambda \| ;$$

la fel : $u_\mu + \mu v_\mu < u_\lambda + \mu v_\lambda$

Deci :

$$u_\mu + \mu v_\mu < u_\lambda + \lambda v_\lambda + (\mu - \lambda) v_\lambda < u_\mu + \lambda v_\mu + (\mu - \lambda) v_\lambda,$$

de unde $v_\mu < v_\lambda$. Considerînd relaţiile :

$$- \lambda v_\lambda < - \lambda v_\mu \text{ şi } u_\lambda + \lambda v_\lambda < u_\mu + \lambda v_\mu$$

primim

$$u_\lambda < u_\mu \qquad \text{q.e.d.}$$

În continuare vom face cîteva observaţii asupra operatorilor lipschitzieni.

LEMA 2. *Dacă X este un spaţiu Hilbert real şi $U : X \to X$ este un operator lipschitzian, atunci oricare ar fi $\lambda > k$ (k fiind constanta Lipschitz) operatorul $\lambda I - U$ este un homeomorfism.*

Demonstraţie. Fie $T = \lambda I - U$, evident, T este continuu, în plus :

$$\langle Tu - Tv, u - v \rangle \geqslant < (\lambda - k) \| u - v \|^2 > 0$$

deci T este strict monoton, aşadar $\lambda I - U$ este un homeomorfism [3].

q.e.d.

LEMA 3. *Dacă X este un spaţiu Hilbert real şi $U : X \to X$ este lipschitzian, atunci pentru $\lambda > k$ şi $x_j \to x$ din $\lambda x_j - U(x_j) \to 0$ rezultă $Ux = \lambda x$.*

Demonstraţie. Fie $T = \lambda I - U$; atunci T este monoton şi $Tx_j \to 0$ deci :

$$0 \leqslant \langle Ty - Tx_j, y - x_j \rangle \to \langle Ty, y - x \rangle \text{ oricare ar fi } y \in X.$$

Fie $y_t = x + tv$; cu $t > 0$ şi v arbitrar în X, atunci avem :

$\langle Ty_t, y_t - x \rangle \geqslant 0$, trecînd la limită obţinem $\langle Tx, v \rangle \geqslant 0$ oricare ar fi $v \in X$, deci $Tx = 0$ sau $Ux = \lambda x$.

q.e.d.

Observaţie. Dacă T este lipschitzian, atunci pentru $\lambda > k$, operatorul $T + \lambda I$ este coercitiv.

Într-adevăr :

$$\frac{\langle Tu, u \rangle + \lambda \| u \|^2}{\| u \|} \geqslant (\lambda - k) \| u \| - \| T(0) \|$$

deci

$$\lim_{\| u \| \to + \infty} \frac{\langle (T + \lambda I)(u), u \rangle}{\| u \|} = + \infty, \text{ adică } T + \lambda I \text{ este coercitiv.}$$

4. REZOLVAREA PROBLEMELOR (5) ŞI (6)

Cu ipotezele făcute în teorema 1 asupra lui T rezultă că $\| x_\lambda \| \leqslant M$ (independent de λ).

Fie $\lim\limits_{\lambda \to 0} \| x_\lambda \| = b$ şi $0 < c < b$; atunci, conform teoremei lui Darboux, există un singur $\lambda > 0$ astfel ca $\| x_{\lambda_c} \| = c$ ($\| x_\lambda \|$ este continuă şi strict descrescătoare de λ conform teoremei 1 şi lemei 1).

În acest caz x_{λ_c} este soluţia problemei (5). Într-adevăr, fie x cu $\| x \|^2 \leqslant \| x_{\lambda_c} \|^2$ şi $f(x) \leqslant f(x_{\lambda_c})$, atunci $J_\lambda(x) \leqslant J_\lambda(x_{\lambda_c})$, ceea ce contrazice unicitatea minimului lui $J_\lambda(x)$.

Acum să considerăm că $c \geqslant \sup\limits_{\lambda \to 0} \| x_\lambda \|$.

Deoarece $\| x_\lambda \| \leqslant M$, mulţimea $\{x_\lambda\}$ are un punct de limită slabă x_0 şi

$$\| x_0 \|^2 < \lim_{\lambda \to 0} \| x_\lambda \|^2.$$

Cum funcţionala $f(x)$ este slab inferior semicontinuă, avem:

$$f(x_0) \leqslant \varliminf_{\lambda \to 0} f(x_\lambda)$$

deci

$$f(x_0) \leqslant \varliminf_{\lambda \to 0} f(x_\lambda) \leqslant f(x_\lambda) \quad (f(x_\lambda) \text{ este crescătoare de } \lambda).$$

Dacă pentru un oarecare $x \in X$ am avea: $f(x) < f(x_0)$, atunci pentru λ suficient de mic $J_\lambda(x) < J_\lambda(x_\lambda)$ ceea ce ar contrazice proprietatea lui x_λ de a realiza minimul lui $J_\lambda(x)$ Aşadar avem:

$$f(x_0) \leqslant f(x) \quad (\forall)\ x \in X$$

Dacă $f(x) = f(x_0)$ iar $f(x) \leqslant f(x_\lambda)$ pentru toţi $\lambda > 0$, atunci pentru toţi $\lambda > 0$ trebuie ca $\| x \| > \| x_\lambda \|$; aşadar avem: $\| x \| \geqslant \lim\limits_{\lambda \to 0} \| x_\lambda \| \geqslant \| x_0 \| \geqslant \lim\limits_{\lambda \to 0} \| x_\lambda \|$.

Pe mulţimea convexă $K = \{x \in X \mid f(x) = f(x_0)\}$ x_0 este elementul de normă minimă.

Din $\| x_\lambda \| \to \| x_0 \|$ şi $x_\lambda \dashrightarrow x_0 \Rightarrow x_\lambda \to x_0$

Am obţinut astfel:

TEOREMA 2. *Funcţionala $f(x)$ îşi atinge minimul $\Phi(c)$ într-un singur punct x_{λ_c} dacă $\lim\limits_{\lambda \to 0} \| x_\lambda \| > c$, iar dacă $\| x_\lambda \|^2 < c$, atunci pentru toţi $\lambda > 0$, punctul ce realizează pe $\Phi(c)$ este $x_0 = \lim\limits_{\lambda \to 0} x_\lambda$.*

În continuare să ne ocupăm de problema (6).

Avem de determinat min $\| x \|^2$ cu condiţia $f(x) \leqslant c$.

Mulţimea $K = \{x \mid f(x) \leqslant c\}$ este convexă şi închisă căci f este convexă şi continuă, deci există un x_0 ce realizează $\min\limits_{x \in K} \| x \|^2$.

Dacă c aparţine mulţimii valorilor lui $f(x)$, atunci există un singur λ astfel ca $f(x_\lambda) = c$. Dacă c nu aparţine mulţimii valorilor lui $f(x_\lambda)$, avem două situaţii: sau $f(x_\lambda) > c$ pentru toţi $\lambda > 0$ şi cum $\| x_\lambda \| \leqslant M$ (teorema 1) avem $\psi(c) = \| x_0 \|^2 \cdot (x_0 = \lim\limits_{\lambda \to 0} x_\lambda)$.

Dacă $c > f(x_\lambda)$, oricare ar fi $\lambda > 0$, atunci $\psi(c) = 0$, căci $\lim\limits_{\lambda \to 0} \| x_\lambda \|^2 = 0$.

Aşadar avem:

TEOREMA 3. *Dacă există un* $\lambda > 0$ *astfel ca* $f(x_\lambda) = c$, *atunci* x_λ *realizează pe* $\psi(c)$.

Dacă $c < f(x_\lambda)$ *pentru toţi* $\lambda > 0$, *atunci* $\psi(c) = \| x_0 \|^2$, *unde* $c = f(x_0)$; *dacă* $f(x_\lambda) < c$ *pentru orice* $\lambda > 0$, *atunci minimul se realizează pentru* $x = 0$.

În concluzie. Operatorii liniari pozitiv definiţi folosiţi în teoria minimizării funcţionalelor pătratice pe spaţii Hilbert, au fost înlocuiţi de operatorii monotoni, ceea ce a permis extensia rezultatelor pentru funcţionale convexe.

Primită la redacţie la 1 aprilie 1968

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

APPLICATIONS OF THE THEORY OF MONOTONE OPERATORS

ABSTRACT

This paper is devoted to the consideration of some problems concerning nonlinear programming of functional spaces.

Using monotone operators on Hilbert spaces instead of positively defined operators, minimizations of convex functionals are obtained; consequently new properties regarding the minimum properties of square functionals are extended.

BIBLIOGRAFIE

1. R. E. BELLMAN, I. GLICKSBERG, O. A. GROSS, *Some aspects of the mathematical theory of control processes*. Rand Cooperation, 1958.
2. R. F. BELLMAN, *Notre on control processes*. Quart. Appl. Math., **14**, 419–423 (1957).
3. F. E. BROWDER, *Problemes nonlinéaires*. Montréal, 1966.
4. F. E. BROWDER, *Nonlinear operators in Banach spaces*. Math. Annalen, **162**, 280–283 (1966).
5. P. U. CACIUROVSHI, M. M. VAINBERG, *On the variational theory of nonlinear operators and equations*. Dokladi Akad. Nauk. S.S.S.R., **V**, *129*, 1199–1202 (1959).
6. G. J. MINTY, *Monotone (non linear) operators in Hilbert space*. Duke Math. Journal, **29**, 341–346 (1962).
7. G. J. MINTY, *Maximal monotone sets in Hilbert space*. Journal Math.-Anal. and Apl., **11**, *1–3*, 434–439 (1965).
8. A. I. ŞCHIOP, St. cerc. mat., **18**, *8* (1966).

CONTRIBUȚII LA TEORIA SPECTRALĂ A REPREZENTĂRILOR OPERATORIALE ALE ALGEBRELOR DE FUNCȚII

DE

ION SUCIU

Lucrarea are un caracter de sinteză, prezentînd într-un cadru unitar rezultate obținute de C. Foiaş şi autor în [20], [21] şi de autor în [63], [64], [66], [68], precum şi unele rezultate noi cuprinse mai ales în capitolul 4.

INTRODUCERE

Teoria reprezentărilor operatoriale ale algebrelor Banach comutative, pe lîngă importanța ei intrinsecă, prezintă interes şi datorită faptului că, prin intermediul unui calcul funcțional adecvat ea devine un puternic instrument în studiul diverselor clase de operatori pe spații Hilbert. Este suficient să amintim rolul pe care l-a avut teoria reprezentărilor algebrelor simetrice în sistematizarea şi definitivarea teoriei spectrale a operatorilor normali, unitari sau autoadjuncți.

În ultimele două decenii studiul operatorilor de tip general pe un spațiu Hilbert a cunoscut o dezvoltare deosebită, ideea găsirii unui calcul funcțional ocupînd şi în acest cadru un loc central.

Spre deosebire de cazul clasic al operatorilor normali, calculele funcționale pentru operatori generali nu mai conduc la reprezentări de algebre simetrice, ci la reprezentări de algebre arbitrare de funcții continue pe un spațiu compact.

Pe de altă parte, amploarea deosebită pe care studiul algebrelor de funcții continue a luat-o în ultimul timp, construirea unei teorii a funcțiilor relativ la astfel de algebre fac ca aceste calcule funcționale să aibă o însemnătate mare, cu ajutorul lor rezultatele mai sus amintite putînd fi folosite în studiul operatorilor.

În mod cu totul natural se impune atunci studierea reprezentărilor algebrelor de funcții, aceste reprezentări fiind cadrul cel mai general în care studiul început de calculele funcționale amintite trebuie să se dezvolte.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 9, P. 1359-1407, BUCUREŞTI, 1968.

Una din direcţiile care s-au impus în studiul operatorilor generali pe un spaţiu Hilbert este aceea iniţiată de B. Sz. Nagy în [70] şi [71] şi dezvoltată de B. Sz. Nagy şi C. Foiaş în seria de lucrări asupra contracţiilor pe spaţii Hilbert [72]—[76]. Ideea centrală a acestei direcţii este aceea a folosirii noţiunii de dilatare adică a privirii unui operator oarecare ca o proiecţie a unui operator de tip special (unitar, normal etc.) definit pe un spaţiu Hilbert lărgit.

Această idee are un corespondent perfect în limbaj de reprezentări, locul operatorilor de tip special fiind luat de reprezentările simetrice ale algebrelor cu involuţie.

Este bine cunoscut faptul că o bună parte din teoria predicţiei se reduce la studiul operatorilor izometrici sau a semigrupurilor de izometrii pe spaţii Hilbert (vezi [18], [32], [33]). În cadrul teoriei reprezentărilor algebrelor de funcţii, elementele de teoria predicţiei se regăsesc într-un cadru mai general şi într-o legătură mai intimă cu teoria funcţiilor (referitoare la aceste algebre).

Lucrarea de faţă prezintă aceste idei într-un cadru unitar. Ea are la bază rezultate obţinute în colaborare de C. Foiaş şi de autor în [20], [21] precum şi rezultatele obţinute de autor în [60], [61], [63], [64], [66], [68]. De asemenea unele din rezultate au fost obţinute de autor în timpul elaborării acestei lucrări.

Lucrarea este împărţită în cinci capitole.

În capitolul 1 „Preliminarii" sînt concentrate în cîteva teoreme (fără demonstraţii) rezultate fundamentale din teoria algebrelor de funcţii, a aplicaţiilor de tip pozitiv ale algebrelor cu involuţie, a măsurilor spectrale şi semispectrale şi a dilatării unitare şi spectrale, care sînt folosite ulterior. Aceste rezultate sînt extrase din [19], [22], [35], [37], [67], [71], [76] etc. unde se găsesc expuse pe larg.

Capitolul 2 tratează din punct de vedere spectral reprezentările algebrelor de funcţii în general. După ce în paragraful 2.1 se introduc noţiunile de bază printre care acelea de reprezentare spectrală, complet nespectrală şi subspaţiu spectral, în paragraful 2.2 se demonstrează teorema de descompunere canonică a unei reprezentări în partea sa spectrală şi cea complet nespectrală. Paragraful 2.3 se ocupă cu existenţa dilatărilor spectrale şi a măsurilor spectrale ataşate. În paragraful 2.4 se introduce noţiunea de măsură Szegö şi se stabileşte legătura dintre această noţiune şi cea de reprezentare complet nespectrală.

Capitolul 3 se ocupă cu studiul semigrupurilor de contracţii. În paragraful 3.1 se dă o teoremă de dilatare unitară iar în paragraful 3.2 se demonstrează teorema de descompunere canonică a unui semigrup în partea sa unitară şi partea sa complet neunitară. În cazul existenţei dilatării unitare se dă o caracterizare a părţii unitare a unui semigrup de contracţii. Paragraful 3.3 se ocupă cu cazul special al semigrupurilor de izometrii. După ce se introduc noţiunile de semigrup cvasiunitar respectiv total neunitar se demonstrează o generalizare a teoremei de descompunere a lui Wold. În paragraful 3.4 se studiază semigrupul translaţiilor unilaterale care caracterizează semigrupurile total neunitare şi se obţin rezultate privind subspaţiile dublu invariante ale acestor semigrupuri.

Capitolul 4 se ocupă cu studiul reprezentărilor algebrelor generate de funcţii interioare. După ce în paragraful 4.1 se dau cîteva teoreme de structură, în paragraful 4.2 se stabilește legătura dintre reprezentările acestor algebre și semigrupurile de contracții, rezultatele din capitolul 3 putîndu-se astfel transpune în limbaj de reprezentări. În paragraful 4.3 se demonstrează o teoremă de predicție pe astfel de algebre utilizînd noțiunile și rezultatele din capitolele 3 și 4.

În capitolul 5 se dau cîteva exemple. Se arată ce devin noțiunile folosite în lucrare pe exemplele standard și felul în care rezultatele obținute în lucrare generalizează rezultate cunoscute. De asemenea se dau exemple de aplicabilitate a rezultatelor lucrării care arată că generalizările pe care ea le prezintă sînt esențiale.

În bibliografie pe lîngă lucrările care sînt folosite direct sau ale căror rezultate sînt generalizate în lucrare, mai sînt trecute și alte lucrări cu caracter general sau care stabilesc legături ale subiectului tratat cu alte ramuri ale analizei funcționale.

CAPITOLUL I

PRELIMINARII

1.1. *Algebre de funcții*. Peste tot vom nota cu X un spațiu Hausdorff compact, iar cu $C(X)$ algebra Banach a funcțiilor continue pe X, cu valori complexe, normată cu

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|. \tag{1.1.1}$$

Cu $C_R(X)$ vom nota mulțimea funcțiilor din $C(X)$ care iau valori reale.

O subalgebră închisă a lui $C(X)$ care conține constantele și separă punctele lui X se numește *algebră de funcții pe X*.

O măsură pozitivă (nenulă) m pe X se numește măsură *de reprezentare a lui A* dacă ea este multiplicativă pe A. Pentru orice măsură de reprezentare m a lui A avem:

$$\|m\| = m(1) = 1. \tag{1.1.2}$$

Măsurile ε_x definite prin $\varepsilon_x(\varphi) = \varphi(x)$, $\varphi \in C(X)$, $x \in X$ sînt evident măsuri de reprezentare ale lui A.

În mulțimea tuturor măsurilor de reprezentare ale lui A să definim relația de echivalență:

$$m_1 \sim m_2 \quad \text{dacă} \quad \int f\,dm_1 = \int f\,dm_2 \qquad (f\in A). \tag{1.1.3}$$

Fie $\mathfrak{M}$ mulțimea claselor de echivalență după această relație.

Teorema 1.1. *Există o corespondență biunivocă între următoarele mulțimi*:

— *Mulțimea* $\mathfrak{M}$.

— *Mulțimea funcționalelor nenule, liniare și multiplicative pe* A.

— *Mulțimea idealelor maximale ale lui* A.

Mulțimea $\mathfrak{M}$ poate fi privită deci ca o submulțime a dualului A^* al lui A. Din teoria lui Ghelfand rezultă că $\mathfrak{M}$ este o submulțime compactă a lui A^*, înzestrat cu topologia slabă.

Spaţiul Hausdorff compact $\mathfrak{M}$ se numeşte *spaţiul idealelor maximale* ale lui A. În sensul teoremei 1, vom privi elementele M ale lui $\mathfrak{M}$ fie ca funcţionale multiplicative pe A, fie ca ideale maximale ale lui A, fie ca mulţimi de măsuri de reprezentare echivalente, relaţia dintre cele trei moduri de a-l privi pe M fiind următoarea : o măsură m din M este o prelungită liniară şi de aceeaşi normă la $C(X)$ a funcţionalei M pe A, iar idealul maximal M este nucleul funcţionalei M.

Spaţiul X se scufundă homeomorf în $\mathfrak{M}$ prin aplicaţia $x \to$ clasa lui ε_x. Funcţiile din A se prelungesc în mod natural de la X la $\mathfrak{M}$ prin :

$$f(M) = M(f) \qquad (M \in \mathfrak{M},\ f \in A).$$

Algebrele de funcţii avînd proprietatea

$$\|f^2\| = \|f\|^2$$

rezultă că :

$$\|f\| = \sup_{M \in \mathfrak{M}} |f(M)|. \tag{1.1.4}$$

O măsură din M se numeşte o *măsură de reprezentare pentru* M. Avem relaţia :

$$f(M) = \int f \, \mathrm{d}m. \tag{1.1.5}$$

Se numeşte *frontieră Silov* a lui A cea mai mică submulţime închisă Γ a lui $\mathfrak{M}$ pe care orice funcţie din A îşi atinge maximul modulului pe $\mathfrak{M}$. Din (1.1.4) rezultă că $\Gamma \subset X$.

TEOREMA 1.2. *Frontiera Silov nu este vidă. Un punct $x \in X$ aparţine frontierei Silov dacă şi numai dacă pentru orice vecinătate U a lui x există $f \in A$ astfel încît $|f| < \|f\|$ în afara lui U.*

1.2. *Aplicaţii de tip pozitiv ale algebrei $C(X)$. Măsuri spectrale şi semispectrale.* Fie H un spaţiu Hilbert complex şi $L(H)$ algebra operatorilor liniari şi mărginiţi pe H.

Aplicaţia liniară $\varphi \to T_\varphi$ a lui $C(X)$ în $L(H)$ *se zice de tip pozitiv* dacă pentru orice $\varphi \in C(X)$, $\varphi \geqslant 0$, avem $T_\varphi \geqslant 0$.

Se verifică uşor că dacă $\varphi \to T_\varphi$ este de tip pozitiv, atunci ea este simetrică ($T_{\bar\varphi} = T_\varphi^*$, unde $\bar\varphi$ este conjugata complexă a lui φ) şi continuă ($\|T_\varphi\| \leqslant k \|\varphi\|$).

Pentru $h_1, h_2 \in H$ să punem :

$$\mu_{h_1, h_2}(\varphi) = (T_\varphi h_1, h_2), \qquad (\varphi \in C(X)). \tag{1.2.1}$$

Obţinem astfel o familie $(\mu_{h_1, h_2})_{h_1, h_2 \in H}$ de măsuri pe X cu următoarele proprietăţi :

$$\begin{aligned} &\mu_{\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2, h} = \lambda_1 \mu_{h_1, h} + \lambda_2 \mu_{h_2, h} \\ &\mu_{h_1, h_2}(\varphi) = \overline{\mu_{h_2, h_1}(\bar\varphi)} \\ &\mu_{h, h} \geqslant 0 \\ &\mu_{h_1, h_2} \leqslant k \|h_1\| \|h_2\| \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

O familie de măsuri $(\mu_{h_1, h_2})_{h_1, h_2 \in H}$ pe X *se numește semispectrală* dacă verifică relațiile (1.2.2.).

TEOREMA 1.3. *Există o corespondență biunivocă dată de* (1.2.1) *între mulțimea aplicațiilor de tip pozitiv ale lui* $C(X)$ *în* $L(H)$ *și mulțimea familiilor semispectrale* $(\mu_{h, h_2})_{h_1, h_2 \in H}$ *pe* X.

Să notăm cu $B(X)$ mulțimea părților boreliene ale lui X. O aplicație $\sigma \to F(\sigma)$ a lui $B(X)$ în $L(H)$ se numește *măsură semispectrală* (pe X cu valori în $L(H)$) dacă pentru orice $\sigma \in B(X)$ și $h \in H$ aplicația $\sigma \to (F(\sigma)h, h)$ este o măsură boreliană pozitivă pe X. O măsură semispectrală pe X cu valori în $L(H)$ va fi notată $(F(\sigma))_{\sigma \in B(X)}$.

TEOREMA 1.4. *Există o corespondență biunivocă între mulțimea familiilor semispectrale* $(\mu_{h_1, h_2})_{h_1, h_2 \in H}$ *și mulțimea măsurilor semispectrale* $(F(\sigma))_{\sigma \in B(X)}$ *dată de*

$$\mu_{h,h}(\sigma) = (F(\sigma)\, h, h). \tag{1.2.3}$$

Tripletul $\varphi \to T_\varphi$ — aplicație de tip pozitiv a lui $C(X)$ în $L(H)$, $(\mu_{h_1, h_2})_{h_1, h_2 \in H}$ — familie semispectrală, $(F(\sigma))_{\sigma \in B(X)}$ — măsura semispectrală este deci bine definit, în sensul teoremelor 1.2 și 1.3 de unul din termenii săi.

Măsura semispectrală $(F(\sigma))_{\sigma \in B(X)}$ se numește spectrală dacă pentru orice $\sigma_1, \sigma_2 \in B(X)$ avem $F(\sigma_1 \cap \sigma_2) = F(\sigma_1) \cdot F(\sigma_2)$.

TEOREMA 1.5. *Fie* $\varphi \to T_\varphi$ *o aplicație de tip pozitiv și* $(F(\sigma))_{\sigma \in B(X)}$ *măsura ei semispectrală. Măsura* $(F(\sigma))_{\sigma \in B(X)}$ *este spectrală dacă și numai dacă aplicația* $\varphi \to T_\varphi$ *este multiplicativă.*

În general vom nota cu $\varphi \to U_\varphi$ aplicațiile multiplicative și cu $(E(\sigma))_{\sigma \in B(X)}$ măsurile spectrale. O familie semispectrală atașată unei aplicații multiplicative (sau unei măsuri spectrale) o vom numi *familie spectrală*.

1.3. *Dilatări unitare și spectrale.* Fie $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$ o familie oarecare de operatori liniari și mărginiți pe H. Spunem că familia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$ de operatori unitari pe un spațiu Hilbert K *este o dilatare unitară* a familiei $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$ dacă H este un subspațiu Hilbert al lui K și avem

$$T_\alpha h = PU_\alpha h \qquad (h \in H),$$

unde P este proiecția ortogonală a lui K pe H.

Următoarea teoremă a lui M. A. Naimark și B. Sz. Nagy este fundamentală în această teorie:

TEOREMA 1.6. *Fie* G *un grup abelian și* $g \to T_g$ *o aplicație a lui* G *în* $L(H)$ *astfel încît* $T_1 = I$, $T_{g^{-1}} = T_g^*$ *și pentru orice sistem finit* $g_1 \ldots g_n$ *de elemente din* G *și orice sistem finit* $h_1 \ldots h_n$ *de elemente din* H *avem*:

$$\sum_{i,j=1}^{n} (T_{g_i^{-1} g_j} h_j, h_i) \geqslant 0.$$

Atunci există un spațiu Hilbert K, $H \subset K$ *și o aplicație* $g \to U_g$ *a lui* G *în* $L(K)$ *astfel încît* $U_1 = I$, $U_{g^{-1}} = U_g^*$, $U_{g_1} U_{g_2} = U_{g_1 g_2}$ *și*

$$T_g h = PU_g h, \qquad (h \in H),$$

unde P este proiecţia ortogonală a lui K pe H. Dacă în plus mulţimea $\{U_g h,\ g \in G,\ h \in H\}$ generează un subspaţiu dens în K atunci spaţiul K, şi aplicaţia $g \to U_g$ sînt unic determinate în sensul că dacă spaţiul K' şi aplicaţia $g \to U'_g$ au toate proprietăţile de mai sus ale lui K respectiv $g \to U_g$, atunci există un operator unitar U de la K pe K' astfel încît:

$$UU_g = U'_g U.$$

Să remarcăm că operatorii U_g sînt unitari.

Ca o consecinţă a acestei teoreme se demonstrează şi următoarea teoremă a lui M. A. Naimark:

TEOREMA 1.7. *Fie $(F(\sigma))_{\sigma \in B(X)}$ o măsură semispectrală pe X cu valori în $L(H)$ astfel încît $F(\sigma) \leqslant I$, $\sigma \in B(X)$. Atunci există un spaţiu K, $H \subset K$ şi o măsură spectrală $(E(\sigma))_{\sigma \in B(X)}$ pe X cu valori în $L(K)$ astfel încît:*

$$F(\sigma)h = PE(\sigma)h \qquad (h \in H),$$

unde P este proiecţia ortogonală a lui K pe H. Dacă mulţimea $\{E(\sigma)h,\ h \in H,\ \sigma \in B(X)\}$ generează un subspaţiu dens în K, atunci măsura $(E(\sigma))_{\sigma \in B(X)}$ este unic determinată (în sensul de mai sus).

Evident, enunţuri similare cu teorema 1.7 obţinem înlocuind măsura semispectrală respectiv spectrală cu familii semispectrale sau cu aplicaţii de tip pozitiv respectiv familii spectrale sau aplicaţii multiplicative.

În cuprinsul lucrării vom folosi această teoremă în forma cerută de context.

CAPITOLUL II

REPREZENTĂRI ALE ALGEBRELOR DE FUNCŢII

2.1. *Definiţii şi notaţii de bază.* Fie X un spaţiu Hausdorff compact, A o algebră de funcţii pe X, H un spaţiu Hilbert complex şi $L(H)$ algebra operatorilor liniari şi mărginiţi pe H.

Un omomorfism de algebră $f \to T_f$ al lui A în $L(H)$ care satisface:

$$T_1 = I \tag{2.1.1}$$

şi

$$\|T_f\| \leqslant \|f\| \tag{2.1.2}$$

se numeşte *reprezentare a lui A* pe H.

PROPOZIŢIA 2.1. *Fie $f \to T_f$ o reprezentare a lui A pe H. Dacă f şi $\bar{f} \in A$, atunci $T_{\bar{f}} = T_f^*$.*

Demonstraţie. Este suficient să arătăm că dacă f este o funcţie reală din A, atunci $T_f = T_f^*$. În adevăr, dacă $f, \bar{f} \in A$, atunci funcţiile reale $u = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$, $v = \frac{i}{2}(f - \bar{f})$ aparţin lui A şi cum $f = u + iv$ avem:

$$T_f = T_u + iT_v, \quad T_{\bar{f}} = T_u - iT_v.$$

Dar cum $T_u = T_u^*$, $T_v = T_v^*$ avem:

$$T_f^* = T_u^* - iT_v^* = T_u - iT_v = T_{\bar{f}}.$$

Fie deci f o funcţie reală din A. Fie t un număr real, $t > \|f\|$. Atunci funcţiile $(f \pm it)^{-1}$ aparţin lui A. Fie

$$g_1 = (f + it)(f - it)^{-1}; \quad g_2 = (f - it)(f + it)^{-1}.$$

Avem $g_1, g_2 \in A$, $g_1 g_2 = 1$, $\|g_1\| = \|g_2\| = 1$. Deci $T_{g_1}^{-1}$ există şi avem $T_{g_1}^{-1} = T_{g_2}$. Cum $\|T_{g_1}\| \leqslant \|g_1\| = 1$, $\|T_{g_1}^{-1}\| \leqslant \|T_{g_2}\| \leqslant \|g_2\| = 1$, rezultă că T_{g_1} este un operator unitar. Dar:

$$T_{g_1}(T_f - itI) = T_f + itI \tag{2.1.3}$$

şi atunci pentru orice $h \in H$ avem:

$$4 \operatorname{Re} it\,(T_f, h, h) = \|(T_f - itI)h\|^2 - \|(T_f + itI)h\|^2 =$$
$$= \|(T_f - itI)h\|^2 - \|T_{g_1}(T_f - itI)h^2\| = 0.$$

Am folosit o cunoscută relaţie din geometria spaţiilor lui Hilbert, formula (2.1.3) şi faptul că T_{g_1} este unitar. Deci $(T_f\, h, h)$ este real pentru orice h în H şi deci $T_f = T_f^*$.

PROPOZIŢIA 2.2. *Fie* $f \to T_f$ *o reprezentare a lui* A *pe* H. *Dacă* $\operatorname{Re} f \geqslant 0$, *atunci* $\operatorname{Re} T_f \geqslant 0$.

Demonstraţie. Dacă $\operatorname{Re} f \geqslant 0$, atunci $(f + 1)^{-1} \in A$. Fie $g = (f - 1)(f + 1)^{-1}$. Avem $g \in A_1$, $\|g\| \leqslant 1$ şi deci $\|T_g\| \leqslant 1$. Cum

$$T_g(T_f + I) = T_f - I,$$

pentru orice $h \in H$ avem:

$$4 \operatorname{Re}(T_f\, h, h) = \|(T_f + I)h\|^2 - \|(T_f - I)h\|^2 =$$
$$= \|(T_f + I)h\|^2 - \|T_g(T_f + I)h\|^2 \geqslant 0.$$

Deci:

$$\operatorname{Re} T_f = \frac{1}{2}(T_f + T_f^*) \geqslant 0.$$

COROLARUL 2.1. *Pentru orice* $f \in A$ *avem*

$$\|\operatorname{Re} T_f\| \leqslant \|\operatorname{Re} f\|.$$

COROLARUL 2.2. *O reprezentare* $\varphi \to U_\varphi$ *a lui* $C(X)$ *pe* H *este o aplicaţie de tip pozitiv şi multiplicativă a lui* $C(X)$ *în* $L(H)$.

Orice reprezentare $\varphi \to U_\varphi$ a lui $C(X)$ pe H este dată deci de o măsură spectrală $(E(\sigma))_{\sigma \in B(X)}$,

O reprezentare $f \to T_f$ a lui A pe H o vom numi *X-spectrală* sau pe scurt *spectrală* dacă ea este restricţia la A a unei reprezentări $\varphi \to U_\varphi$ a lui $C(X)$ pe H. Reprezentarea $\varphi \to U_\varphi$ a lui $C(X)$ pe H care verifică

$$T_f = U_f \qquad (f \in A)$$

o vom numi *prelungita* la $C(X)$ a lui $f \to T_f$.

PROPOZIŢIA 2.3. *O reprezentare spectrală* $f \to T_f$ *a lui* A *pe* H *admite o singură prelungită la* $C(X)$.

Demonstrație. În adevăr, fie $\varphi \to U_\varphi$ și $\varphi \to V_\varphi$ două prelungite la $C(X)$ ale reprezentării $f \to T_f$. Cum $U_f = T_f = V_f$ pentru $f \in A$, rezultă că $U_f^* = T_f^* = V_f^*$ și deci

$$U_{\Sigma c_i f_i \overline{g}_i} = \sum c_i U_{f_i} U^*_{g_i} = \sum c_i V_{f_i} V^*_{g_i} = V_{\Sigma c_i f_i \overline{g}_i}$$

pentru $f_i, g_i \in A$.

Deci $U_\varphi = V_\varphi$ pentru orice funcție de forma $\varphi = \sum c_i f_i \overline{g}_i$ cu $f_i, g_i \in A$. Mulțimea funcțiilor de această formă fiind densă în $C(X)$ și reprezentările $\varphi \to U_\varphi$, $\varphi \to V_\varphi$ fiind continue, rezultă că $U_\varphi = V_\varphi$ pentru orice $\varphi \in C(X)$.

Un subspațiu închis M al lui H se numește *invariant* (la $f \to T_f$) dacă $T_f M \subset M$ pentru orice $f \in A$. Subspațiul M se numește *dublu invariant* (la $f \to T_f$) dacă $T_f M \subset M$, $T_f^* M \subset M$ pentru orice $f \in A$.

PROPOZIȚIA 2.4. *Fie $f \to T_f$ o reprezentare spectrală a lui A pe H, $\varphi \to U_\varphi$ prelungita sa la $C(X)$ și M un spațiu dublu invariant. Atunci $U_\varphi M \subset M$ pentru orice $\varphi \in C(X)$.*

Demonstrație. E clar că $U_\varphi M \subset M$ pentru orice φ de forma $\sum f_i \overline{g}_i$ cu $f_i, g_i \in A$ și din continuitate rezultă că $U_\varphi M \subset M$ pentru orice $\varphi \in C(X)$.

COROLARUL 2.3. *Dacă $f \to T_f$ este o reprezentare spectrală a lui A pe H, $\varphi \to U_\varphi$ este prelungita sa la $C(X)$ și M un spațiu dublu invariant, atunci reprezentarea $f \to T_f | M$ a lui A pe M este spectrală și $\varphi \to U_\varphi | M$ este prelungita sa la $C(X)$.*

Un subspațiu închis M al lui H se numește *X-spectral* sau pe scurt *spectral* (pentru $f \to T_f$) dacă el este dublu invariant și reprezentarea $f \to T_f | M$ a lui A pe M este spectrală.

Reprezentarea $f \to T_f$ a lui A pe H se zice *complet nespectrală* dacă nu are subspații spectrale diferite de zero.

2.2. *Descompunerea canonică.* Demonstrăm mai întîi următoarea propoziție:

PROPOZIȚIA 2.5. *Fie M_1 și M_2 două subspații spectrale pentru reprezentarea $f \to T_f$ a lui A pe H. Atunci subspațiul $M = \overline{M_1 + M_2}$ este spectral.*

Demonstrație. E clar că M este dublu invariant și că:

$$T_f^* T_g h = T_g T_f^* h \qquad (h \in M;\ f, g \in A). \tag{2.2.1}$$

Pentru sistemele finite $f_1 \ldots f_n$, $g_1 \ldots g_n$ să definim operatorul

$$T = (\sum T^*_{f_i} T_{g_i}) | M. \tag{2.2.2}$$

Din (2.2.1) rezultă că T este un operator normal pe M. Vom arăta că:

$$\| T \| \leqslant \| \sum \overline{f}_i g_i \|. \tag{2.2.3}$$

Pentru aceasta fie $k = \| \sum \overline{f}_i g_i \|$ și $E_T(\sigma)$ măsura spectrală a lui T. Pentru a demonstra (2.2.3) este suficient să arătăm că

$$E_T(\{\lambda : |\lambda| \leqslant k\}) M = M$$

și deci este suficient să arătăm că

$$M_p \subset E_T(\{\lambda : |\lambda| \leqslant k\}) M, \qquad (p = 1, 2).$$

Fie $h \in M_p$ şi să presupunem că $k \notin E_T(\{\lambda : |\lambda| < k) M$. Aceasta înseamnează că

$$E_T(\{\lambda : |\lambda| > k\})\, h \neq 0$$

şi deci există $\varepsilon > 0$ astfel încît :

$$h' = E_T(\{\lambda : |\lambda| \geqslant k + \varepsilon\})\, h \neq 0.$$

Să calculăm :

$$(k + \varepsilon)^{2n} \| h' \|^{2n} = (k + \varepsilon)^{2n} \int_{\{\lambda : |\lambda| \geqslant k + \varepsilon\}} \mathrm{d}(E_T(\lambda) h, h) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\{\lambda : |\lambda| \geqslant k + \varepsilon\}} |\lambda|^{2n}\, \mathrm{d}(E_T(\lambda) h, h) \leqslant \int |\lambda|^{2n}\, \mathrm{d}(E_T(\lambda) h, h) = \| T^{2n} h \|^2.$$

Adică :

$$(k + \varepsilon)^{2n} \|h'\|^2 \leqslant \| T^{2n} h \|^2. \tag{2.2.4}$$

Fie $\varphi \to U^p_\varphi$ prelungita la $C(X)$ a reprezentării spectrale $f \to T_f | M_p$. Cum $h \in M_p$, avem :

$$Th = \sum T^*_{f_i} T_{g_i} h = \sum U^p_{\bar{f}_i} U^p_{g_i} h = U^p_{\Sigma \bar{f}_i g_i} h.$$

Deci :

$$T^n h = U_{(\Sigma \bar{f}_i g_i)^n}\, h$$

şi atunci :

$$\| T^n h \| = \| U_{(\Sigma \bar{f}_i g_i)} h \| \leqslant \| \Sigma \bar{f}_i g_i \|^n \| h \| = k^n \| h \|. \tag{2.2.5}$$

Ţinînd cont de (2.25), formula (2.24) devine :

$$(k + \varepsilon)^{2n} \| h' \|^2 \leqslant k^{2n} \| h \|^2$$

ceea ce nu se poate. Inegalitatea (2.2.3) este deci adevărată.

Fie $\varphi \in C(X)$ de forma $\varphi = \sum \bar{f}_i g_i$ cu f_i, $g_i \subset A$ şi fie $U_\varphi = T$, T construit ca mai sus. Din (2.23) rezultă că aplicaţia $\varphi \to U_\varphi$ a lui $C(X)$ în $L(M)$ este bine definită şi se verifică uşor că ea este chiar o reprezentare a lui $C(X)$ pe M care prelungeşte pe $f \to T_f \mid M$. Rezultă că M este spectral, ceea ce trebuia să arătăm.

PROPOZIŢIA 2.6. *Fie* $\{M_i\}_{i \in I}$ *o familie filtrantă crescător de subspaţii spectrale. Atunci închiderea mulţimii* $\bigcup\limits_{i \in I} M_i$ *este un subspaţiu spectral*

Demonstraţie. Familia $\{M_i\}_{i \in I}$ fiind filtrantă crescător, rezultă că $\bigcup\limits_{i \in I} M_i$ este un spaţiu vectorial. Fie M închiderea lui în H. E clar că M este dublu invariant.

Fie $\varphi \to U^i_\varphi$ prelungita la $C(X)$ a reprezentării spectrale $f \to T_f \mid M_i$. Din corolarul 2.3 rezultă că dacă M_1 şi M_2 sînt spectrale, atunci $M_1 \cap M_2$ este spectral şi avem : $U^1_\varphi h = U^2_\varphi h$ pentru $h \in M_1 \cap M_2$.

Fie $h \in \bigcup\limits_{i \in \mathcal{I}} M_i$. Definim $U_\varphi h = U^i_\varphi h$ dacă $h \in M_i$. Din cele de mai sus rezultă că operatorii U_φ sînt bine definiţi pe $\bigcup\limits_{i \in \mathcal{I}} M_i$ şi avem pentru orice $\varphi \in C(X)$ şi $h \in \bigcup\limits_{i \in \mathcal{I}} M_i$

$$\| U_\varphi h \| \leqslant \| \varphi \| \, \| h \| .$$

Operatorii U_φ pot fi prelungiţi deci prin continuitate la M şi se verifică uşor că $\varphi \to U_\varphi$ este o prelungită la $C(X)$ a reprezentării $f \to T_f \mid M$.

Următoarea teoremă este unul din rezultatele de bază ale lucrării :

TEOREMA 2.1. *Fie $f \to T_f$ o reprezentare a lui A pe H. Spaţiul H se descompune în mod unic sub forma :*

$$H = H_s \oplus H_c$$

astfel încît H_s şi H_c sînt subspaţii dublu invariante, reprezentarea $f \to T_f \mid H_s$ este spectrală şi reprezentarea $f \to T_f \mid H_c$ este complet nespectrală. Subspaţiul H_s este cel mai mare subspaţiu spectral al lui H.

Demonstraţie. Fie $\{M_i\}_{i \in I}$ mulţimea subspaţiilor spectrale ale lui H. Subspaţiul $\{0\}$ este evident spectral şi deci această mulţime nu este vidă. Din propoziţia 2.5 rezultă că $\{M_i\}_{i \in I}$ este filtrantă crescător. Fie H_s închiderea mulţimii $\bigcup\limits_{i \in \mathcal{I}} H_i$. Din propoziţia 2.6 rezultă că H_s este spectral şi e clar că el este cel mai mare subspaţiu spectral al lui H. Fie

$$H = H_s \oplus H_c .$$

Cum H_s este dublu invariant, rezultă că şi H_c este dublu invariant. Sub spaţiul H_s fiind spectral, $f \to T_f \mid H_c$ este spectrală şi din maximalitatea lui H_s rezultă că $f \to T_f \mid H_c$ este complet nespectrală.

Fie

$$H = H_1 \oplus H_2 ,$$

o altă descompunere a lui H astfel încît H_1 şi H_2 sînt dublu invariante, $f \to T_f \mid H_1$ este spectrală şi $f \to T_f \mid H_2$ este complet nespectrală. Subspaţiul H_1 este deci spectral şi din maximalitatea lui H_s rezultă că $H_1 \subset H_s$.

Fie

$$H_s = H_1 \oplus M .$$

Cum H_s şi H_1 sînt dublu invariante, rezultă că M este dublu invariant. Din corolarul 2.3 rezultă că M este spectral. Dar M fiind ortogonal pe H_1, avem $M \subset H_2$ şi reprezentarea $f \to T_f \mid H_2$ fiind complet nespectrală rezultă că $M = \{0\}$. Deci :

$$H_s = H_1 , \; H_c = H_2$$

şi teorema este complet demonstrată.

Reprezentarea $f \to T_f \mid H_s$ o vom numi *partea spectrală* a reprezentării $f \to T_f$, iar $f \to T_f \mid H_c$ — partea complet nespectrală.

2.3. *Dilatarea spectrală și măsuri spectrale atașate.* O reprezentare $\varphi \to U_\varphi$ a lui $C(X)$ pe un spațiu Hilbert K se numește *dilatare spectrală a reprezentării* $f \to T_f$ a lui A pe H dacă H este un subspațiu Hilbert a lui K și avem

$$T_f h = P U_f h \qquad (f \in A\,;\ h \in H), \tag{2.3.1}$$

unde P este proiecția lui K pe H.

Avem evident:

$$T_f^* h = P U_f^* h = P U_{\bar{f}} h \qquad (f \in A\,;\ h \in H). \tag{2.3.2}$$

Dilatarea spectrală $\varphi \to U_\varphi$ a lui $f \to T_f$ se zice *minimală* dacă spațiul generat de elementele de forma $U_\varphi h$ cu $\varphi \in C(X)$ și $h \in H$ este dens în K.

Dacă reprezentarea $f \to T_f$ admite o dilatare spectrală, atunci e clar că ea admite și una minimală. În cele ce urmează vom subînțelege că dilatările spectrale considerate sînt cele minimale.

Fie $\varphi \to U_\varphi$ o dilatare spectrală a lui $f \to T_f$ și $(\mu_{k_1,k_2})_{k_1,k_2 \in K}$ familia spectrală atașată reprezentării $\varphi \to U_\varphi$ a lui $C(X)$ pe K. Pentru $h \in H$ să punem $\mu_h = \mu_{h,h}$. Pentru orice $f, g \in A$ avem:

$$(T_f h, h) = (P U_f h, h) = (U_f h, h) = \int f \mathrm{d}\mu_h$$

și

$$\|(T_f + T_g^*)h\|^2 = \|P U_{f+\bar{g}} h\|^2 \leqslant \|U_{f+\bar{g}} h\|^2 = (U_{f+\bar{g}} h, U_{f+\bar{g}} h) =$$

$$= (U_{|f+\bar{g}|^2} h, h) = \int |f + \bar{g}|^2 \mathrm{d}\mu_h.$$

O măsură pozitivă μ_h pe X care verifică

$$(T_f h, h) = \int f \mathrm{d}\mu_h \qquad (f \in A). \tag{2.3.3}$$

și

$$\|(T_f + T_g^*)h\|^2 \leqslant \int |f + \bar{g}|^2 \mathrm{d}\mu_h \qquad (f, g \in A) \tag{2.3.4}$$

o vom numi *măsură spectrală atașată* lui h prin $f \to T_f$.

Măsura $\mu_h = \mu_{h,h}$, $h \in H$, unde $(\mu_{k_1,k_2})_{k_1,k_2 \in K}$ este familia spectrală atașată unei dilatări $\varphi \to U_\varphi$ a lui $f \to T_f$ este, după cum am văzut mai sus, o măsură spectrală atașată lui h prin $f \to T_f$.

În cele ce urmează ne vom ocupa de existența măsurilor spectrale atașate și a dilatărilor spectrale.

Algebra de funcții A pe X se numește *algebră Dirichlet* (pe X) dacă spațiul $\operatorname{Re} A = \{u \in C_R(X) : u = \operatorname{Re} f, f \in A\}$ este dens în $C_R(X)$.

Cum avem evident :

$$A + \overline{A} = \operatorname{Re} A + i \operatorname{Re} A,$$

rezultă că algebra A este Dirichlet pe X dacă și numai dacă $A + \overline{A}$ este dens în $C(X)$.

Algebra A se numește logmodulară (pe X) dacă mulțimea $\lg |A|^{-1} = \{u \in C_R(X) : u = \lg |f|;\ f \in A,\ f^{-1} \in A\}$ este densă în $C_R(X)$.

Cum $\operatorname{Re} A \subset \lg |A|^{-1}$, rezultă că orice algebră Dirichlet este logmodulară.

TEOREMA 2.2. *Fie A o algebră Dirichlet pe X și $f \to T_f$ o reprezentare a lui A pe H. Există o unică dilatare spectrală $\varphi \to U_\varphi$ a lui $f \to T_f$.*

Demonstrație. Din corolarul 2.1 rezultă că :

$$\| \operatorname{Re} T_f \| \leqslant \| \operatorname{Re} f \|. \tag{2.3.5}$$

Utilizînd (2.3.5) obținem :

$$\begin{aligned} \| T_f + T_g^* \| &= \| \operatorname{Re} T_f + \operatorname{Im} T_f + \operatorname{Re} T_g - \operatorname{Im} T_g \| = \\ &= \| \operatorname{Re} T_{f+g} + i(\operatorname{Re} T_{-if+ig}) \| \leqslant \| \operatorname{Re} T_{f+g} \| + \| \operatorname{Re} T_{-if+ig} \| \leqslant \\ &\leqslant \| \operatorname{Re}(f+g) \| + \| \operatorname{Re}(-if+ig) \| \leqslant \| \operatorname{Re}(f+g) \| + \| \operatorname{Re}(-if+ig) \| \leqslant \\ &\leqslant 2 \| f + \overline{g} \| \end{aligned}$$

adică :

$$\| T_f + T_g^* \| \leqslant 2 \| f + \overline{g} \| \tag{2.3.6}$$

Pentru $h_1, h_2 \in H$ definim pe $A + \overline{A}$ funcționala

$$\mu_{h_1, h_2}(f + \overline{g}) = (T_f + T_g^* h_1, h_2).$$

Din (2.3.6) rezultă că μ_{h_1, h_2} este bine definită pe $A + \overline{A}$ și mărginită și deci, algebra A fiind Dirichlet pe X, o putem prelungi pînă la o măsură Radon μ_{h_1, h_2} pe X. Se verifică ușor că familia $(\mu_{h_1, h_2})_{h_1, h_2} \in H$ satisface (1.2.2), deci este o familie semispectrală.

Aplicînd teorema 1.7 obținem o reprezentare $\varphi \to U_\varphi$ a lui $C(X)$ pe un supraspațiu K al lui H care este o dilatare spectrală a lui $f \to T_f$.

Fie $\varphi \to U_\varphi$ și $\varphi \to U'_\varphi$ două dilatări spectrale ale lui $f \to T_f$ și $(\mu_{k_1, k_2})_{k_1, k_2 \in K}$, $(\mu_{k'_1, k'_2})_{k'_1, k'_2 \in K'}$ familiile spectrale corespunzătoare. Pentru $f, g \in A$ și $h_1, h_2 \in H$ avem

$$\begin{aligned} \mu_{h_1, h_2}(f + \overline{g}) &= (U_{f+\overline{g}} h_1, h_2) = (U_f h_1, h_2) + (U_g^* h_1, h_2) = \\ &= (PU_f h_1, h_2) + (PU_g^* h_1, h_2) = \\ &= (T_f h_1, h_2) + (T_g^* h_1, h_2) = (PU'_f h_1, h_2) + (PU'_{\overline{g}} h_1, h_2) \\ &= (U'_{f+\overline{g}} h_1, h_2) = \mu'_{h_1, h} (f + \overline{g}) \end{aligned}$$

Deci măsurile μ_{h_1, h_2} şi μ'_{h_1, h_2} coincid pe $A + \overline{A}$ şi A fiind algebră Dirichlet sînt egale. Cum familiile spectrale $(\mu_{k_1, k_2})_{k_1, k_2 \in K}$ şi $(\mu'_{k'_1, k'_2})_{k'_1, k'_2 \in K'}$ sînt dilatări minimale ale familiilor semispectrale $(\mu_{h_1, h_2})_{h_1, h_2 \in H}$ respectiv $(\mu'_{h_1, h_2})_{h_1, h_2 \in H}$, din teorema 1.7 rezultă că ele sînt egale (în sensul precizat în teorema 1.7). Aceasta demonstrează unicitatea dilatării spectrale în cazul algebrelor Dirichlet.

Din formula (2.3.6), adevărată pentru orice reprezentare $f \to T_f$ a unei algebre de funcţii pe H, rezultă că dacă pentru orice $\varphi \in A + \overline{A}$ de forma $\varphi = f + \overline{g}, f, g \in A$ punem :

$$T_\varphi = T_f + T_g^*,$$

atunci aplicaţia $\varphi \to T_\varphi$ a lui $A + \overline{A}$ în $L(H)$ este bine definită, liniară şi mărginită.

În cele ce urmează vom demonstra existenţa măsurii spectrale ataşate la h pentru reprezentările $f \to T_f$ ale lui A care verifică în plus condiţia :

(2.3.7) $\sum \| T_{\varphi_i} h \|^2 \leqslant \| h \|^2$ pentru orice sistem finit $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de elemente din $A + \overline{A}$ cu $\sum | \varphi_i |^2 \leqslant 1$.

În cazul algebrelor logmodulare vom arăta că o reprezentare $f \to T_f$ are o dilatare spectrală dacă şi numai dacă (2.3.7) este adevărată pentru orice $h \in H$.

PROPOZIŢIA 2.7. *Fie* $f \to T_f$ *o reprezentare a lui* A *pe* H *astfel că pentru* $h \in H$, *condiţia* (2.3.7) *este îndeplinită. Atunci există o măsură pozitivă* μ_h *pe* X *astfel încît* $\mu_h(1) = \| h \|^2$ *şi*

$$\| (T_f + T_g^*) h \|^2 \leqslant \int | f + \overline{g} |^2 \, d\mu_h . \tag{2.3.8}$$

Demonstraţie. Pentru $g \in C_R(X)$, $g \geqslant 0$ să punem

$$\mu_*(g) = \sup_{\sum | \varphi_i |^2 \leqslant g} \sum \| T_{\varphi_i} h \|^2 \tag{2.3.9}$$

superiorul luîndu-se după toate sistemele finite $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de elemente din $A + \overline{A}$ astfel încît $\sum | \varphi_i |^2 \leqslant g$.

Avem evident :

$$\mu_*(\alpha g) = \alpha \mu_*(g) \text{ pentru } \alpha \geqslant 0 \tag{2.3.10}$$

şi din (2.3.7) rezultă că :

$$\mu_*(g) \leqslant \| g \| \, \| h \|^2 . \tag{2.3.11}$$

Pentru $g_1, g_2 \in C_R(X)$, $g_1, g_2 \geqslant 0$, avem :

$$\mu_*(g_1 + g_2) = \sup_{\sum | \varphi_i |^2 \leqslant g_1 + g_2} \sum \| T_{\varphi_i} h \|^2 \geqslant$$

$$\sup_{\sum | \varphi_i |^2 \leqslant g_1} \sum \| T_{\varphi_i} h \|^2 + \sup_{\sum | \varphi_i |^2 \leqslant g_2} \sum \| T_{\varphi_i} h \|^2 =$$

$$= \mu_*(g_1) + \mu_*(g_2)$$

adică:

(2.3.12) $$\mu_*(g_1 + g_2) \geqslant \mu_*(g_1) + \mu_*(g_2).$$

Să mai observăm că:

(2.3.13) $$\mu_*(1) = \| h \|^2.$$

Pentru un g oarecare din $C_R(X)$, să punem:

(2.3.14) $$\mu^*(g) = \inf_{c \geqslant |g|} (c \| h \|^2 - \mu_*(c - |g|)).$$

Din (2.3.12) şi (2.3.13) rezultă că pentru orice $c \geqslant |g|$ avem:

$$\mu_*(|g|) + \mu_*(c - |g|) \leqslant \mu_*(c) = c \| h \|^2.$$

Deci:

$$c \| h \|^2 - \mu_*(c - |g|) \geqslant \mu_*(|g|) \geqslant 0$$

pentru orice $c > |g|$. Rezultă că pentru orice $g \in C_R(X)$,

(2.3.15) $$\mu^*(g) \geqslant 0$$

E clar că pentru orice $\alpha \geqslant 0$ avem:

(2.3.16) $$\mu^*(\alpha g) = \alpha \mu^*(g)$$

Fie acum $g_1, g_2 \in C_R(X)$ şi c_1, c_2 două constante astfel încît $c_1 > |g_1|$, $c_2 > |g_2|$ şi

$$c_1 \| h \|^2 - \mu_*(c_1 - |g_1|) \leqslant \mu^*(g_1) + \varepsilon$$

$$c_2 \| h \|^2 - \mu_*(c_2 - |g_2|) \leqslant \mu^*(g_2) + \varepsilon.$$

Atunci $c_1 + c_2 \geqslant |g_1 + g_2|$ şi

$$(c_1 + c_2) \| h \|^2 - \mu_*(c_1 + c_2 - |g_1 + g_2|) \leqslant (c_1 + c_2) \| h \|^2 -$$
$$- \mu_*(c_1 + c_2 - |g_1| - |g_2|) \leqslant c_1 \| h \|^2 - \mu_*(c_1 - |g_1|) + c_2 \| h \|^2 -$$
$$- \mu_*(c_2 - |g_2|) \leqslant \mu^*(g_1) + \mu^*(g_2) + 2\varepsilon.$$

Am utilizat faptul că μ_* este crescătoare şi (2.3.12).

Deci pentru orice $g_1, g_2 \in C_R(X)$ avem:

(2.3.17) $$\mu^*(g_1 + g_2) \leqslant \mu^*(g_1) + \mu^*(g_2).$$

Din (2.3.14) rezultă:

(2.3.18) $$\mu^*(g) \leqslant \| g \| \| h \|^2 - \mu^*(\| g \| - |g|) \leqslant \| g \| \| h \|$$

şi deci:

(2.3.19) $$\mu^*(1) = \| h \|^2.$$

Din (2.3.15), (2.3.16), (2.3.17) şi (2.3.18) rezultă că μ^* este o seminormă pe $C_R(X)$ şi din teorema lui Hahn-Banach şi (2.3.19) rezultă că există o măsură reală μ_h pe X astfel încît $\mu_h(1) = 1$ şi

$$|\mu_h(g)| \leqslant |\mu^*(g)| \leqslant \|g\| \, \|h\|^2. \tag{2.3.20}$$

Atunci este clar că:

$$\|\mu_h\| = \mu_h(1) = \|h\|^2$$

şi deci μ_h este o măsură pozitivă pe X.

Pentru $g \geqslant 0$ şi $c \geqslant g$ avem:

$$\mu_h(g) \leqslant \mu^*(g) \leqslant \|h\|^2 c - \mu_*(c - g)$$

şi deci

$$\mu_h(c - g) \geqslant \mu_*(c - g)$$

pentru orice $g \geqslant 0$ şi $c \geqslant g$. Cum orice funcţie pozitivă din $C_R(X)$ se poate scrie sub formă $c - g$ cu $g \geqslant 0$, $c \geqslant g$, rezultă că pentru orice $g \in C_R(X)$, $g \geqslant 0$, avem:

$$\mu_h(g) \geqslant \mu_*(g). \tag{2.3.21}$$

Deci:

$$\mu_h(|f + \bar{g}|^2) \geqslant \mu_*(|f + \bar{g}|)^2 \geqslant \|T_f h + T_g^* h\|^2$$

adică

$$\|T_f h + T_g^* h\|^2 \leqslant \int |f + \bar{g}|^2 \, \mathrm{d}\mu_h$$

şi propoziţia este complet demonstrată.

PROPOZIŢIA 2.8. *Fie μ_h o măsură pozitivă pe X astfel încît $\mu_h(1) = 1$ şi*

$$\|T_f h + T_g^* h\|^2 \leqslant \int |f + \bar{g}|^2 \, \mathrm{d}\mu_h, \qquad (f, g \in A). \tag{2.3.22}$$

Atunci μ_h este o măsură spectrală ataşată la h prin $f \to T_f$.

Demonstraţie. Mai rămîne de arătat că

$$(T_f h, h) = \int f \mathrm{d}\,\mu_h. \tag{2.3.23}$$

Pentru aceasta fie λ un număr complex arbitrar şi $f \in A$. Din (2.3.22) rezultă că:

$$\|T_f h + \lambda h\|^2 \leqslant \int |f + \lambda|^2 \, \mathrm{d}\mu_h$$

şi deci :

$$\| T_f h \|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\lambda(T_f h, h) + |\lambda|^2 \| h \|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int |f|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\lambda \int f \mathrm{d}\,\mu_\lambda\right) + |\lambda|^2 \| h \|^2$$

sau :

$$2\,\mathrm{Re}\left[\lambda\left((T_f, h, h) - \int f \mathrm{d}\,\mu_h\right)\right] \leqslant \int |f|^2 \,\mathrm{d}\mu_h - \| T_f h \|^2 \tag{2.3.24}$$

Deoarece (2.3.24) este adevărată pentru orice număr complex, rezultă că :

$$(T_f h, h) = \int f \mathrm{d}\,\mu_h$$

şi demonstraţia propoziţiei este terminată.

Din propoziţiile 2.7 şi 2.8 rezultă următoarea teoremă :

TEOREMA 2.3. *Fie* $f \to T_f$ *o reprezentare a algebrei* A *pe* H *şi* $h \in H$ *pentru care* (2.3.7) *este îndeplinită. Atunci există o măsură spectrală ataşată la* h *prin* $f \to T_f$.

În cazul algebrelor logmodulare vom demonstra unicitatea măsurilor spectrale ataşate precum şi existenţa şi unicitatea dilatării spectrale atunci cînd există măsuri spectrale ataşate fiecărui punct h din H.

TEOREMA 2.4. *Dacă* A *este logmodulară şi* $f \to T_f$ *este o reprezentare a lui* A *pe* H, *atunci măsura spectrală ataşată lui* $h \in H$ *prin* $f \to T_f$ *este unică.*

Demonstraţie. Fie μ_1, μ_2 două măsuri spectrale ataşate la $h \in H$ prin $f \to T_f$. Pentru $f, f^{-1} \in A$ avem :

$$\| h \|^4 = (h, h)^2 = (T_{f^{-1}}\, T_f h, h)^2 = (T_f h,\ T^*_{f^{-1}} h)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \| T_f h \|^2 \| T_{f^{-1}} h \|^2 \leqslant \int |f|^2 \,\mathrm{d}\mu_1 \int |f^{-1}|^2 \,\mathrm{d}\mu_2 .$$

Algebra A fiind logmodulară, rezultă că pentru orice $u \in C_R(X)$ avem

$$\| h \|^4 \leqslant \int \mathrm{e}^{2u} \,\mathrm{d}\mu_1 \int \mathrm{e}^{-2u} \,\mathrm{d}\mu_2 .$$

Deci funcţia reală :

$$\varphi(t) = \int \mathrm{e}^{2tu} \,\mathrm{d}\mu_1 \int \mathrm{e}^{-2tu} \,\mathrm{d}\mu_2$$

are în 0 un punct extrem pentru orice $u \in C_R(X)$ şi deci pentru orice $u \in C_R(X)$ avem :

$$0 = \varphi'(t) = 2\left(\int u \, \mathrm{d}\mu_1 - \int u \, \mathrm{d}\mu_2\right)$$

adică $\mu_1 = \mu_2$

TEOREMA 2.5. *Fie A o algebră logmodulară pe X şi $f \to T_f$ o reprezentare a lui A pe H astfel încît pentru orice $h \in H$ există o măsură spectrală ataşată la h prin $f \to T_f$. Atunci există o dilatare spectrală a lui $f \to T_f$ şi una singură.*

Demonstraţie. Fie μ_h măsura spectrală ataşată la h prin $f \to T_f$. Vom demonstra întîi următoarea egalitate a paralelogramului :

$$\mu_{h_1+h_2} + \mu_{h_1-h_2} = 2\mu_{h_1} + 2\mu_{h_2}. \tag{2.3.25}$$

Pentru aceasta fie $f, f_{-1} \in A$. Avem :

$$\begin{aligned}
&2(\| h_1 \|^2 + \| h_2 \|^2) = \| h_1 + h_2 \|^2 + \| h_1 - h_2 \|^2 = \\
&= (T_f(h_1 + h_2), T^*_{f-1}(h_1 + h_2) + (T_f(h_1 - h_2), T^*_{f-1}(h_1 - h_2)) \leqslant \\
&\leqslant \| T_f(h_1 + h_2) \| \, \| T^*_{f-1}(h_1 + h_2) \| + \| T_f(h_1 - h_2) \| \, \| T^*_f(h_1 - h_2) \| \leqslant \\
&\leqslant (\| T_f(h_1 + h_2) \|^2 + \| T_f(h_1 - h_2) \|^2)^{1/2} (\| T_{f-1}(h_1 + h_2) \|^2 + \\
&+ \| T^*_{f-1}(h_1 - h_2) \|^2)^{1/2} = (\| T_f(h_1 + h_2) \|^2 + \| T_f(h_1 - h_2) \|^2)^{1/2} \cdot \\
&\cdot (2 \| T^*_{f-1} h_1 \|^2 + 2 \| T^*_{f-1} h_2 \|^2)^{1/2} \leqslant \\
&\qquad \left[\int |f|^2 \mathrm{d}(\mu_{h_1+h_2} + \mu_{h_1-h_2})\right]^{1/2} \left[\int \frac{1}{|f|^2} \mathrm{d}(2\mu_{h_1} + 2\mu_{h_2})\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

Deci, A fiind logmodulară, avem :

$$4(\| h_1 \|^2 + \| h_2 \|^2)^2 \leqslant \left[\int e^{2u} \mathrm{d}(\mu_{h_1+h_2} + \mu_{h_1-h_2})\right] \cdot$$

$$\cdot \left[\int e^{-2u} \mathrm{d}(2\mu_{h_1} + 2\mu_{h_2})\right]$$

pentru orice $u \in C_R(X)$. Făcînd raţionamentul standard folosit şi în demonstraţia teoremei precedente, deducem relaţia (2.3.25).

Din teorema lui Jordan — N. Newmann rezultă că, punînd :

$$4\mu_{h_1, h_2} = \mu_{h_1+h_2} - \mu_{h_1-h_2} + \mathrm{i}\mu_{h_1+h_2} - \mathrm{i}\mu_{h_1-h_2}$$

obţinem o familie semispectrală $(\mu_{h_1, h_2})_{h_1, h_2 \in H}$ pe X astfel încît

$$(T_f h_1, h_2) = \int f \mathrm{d}\mu_{h_1, h_2}.$$

Aplicînd teorema 1.7 obţinem o reprezentare $\varphi \to U_\varphi$ a lui $C(X)$ pe un supraspaţiu K al lui H care este o dilatare spectrală a lui $f \to T_f$

Fie $\varphi \to U'_\varphi$ o altă dilatare spectrală a lui $f \to T_f$. Punînd pentru $h_1, h_2 \in H$,

$$m_{h_1,h_2}(\varphi) = (U'_\varphi h_1, h_2),$$

atunci măsura $m_h = m_{h,h}$, după cum am văzut, este o măsură spectrală atașată la h prin $f \to T_f$. Din teorema 2.4 rezultă că $m_h = \mu_h$ și deci familiile semispectrale :

$$(m_{h_1,h_2})_{h_1,h_2 \in H} \quad \text{și} \quad (\mu_{h_1,h_2})_{h_1,h_2 \in H} \quad \text{coincid.}$$

Din unicitatea dilatării spectrale pentru familiile semispectrale (teorema 1.7) rezultă că dilatările spectrale $\varphi \to U_\varphi$ și $\varphi \to U'_\varphi$ ale lui $f \to T_f$ coincid (în sensul dat anterior). Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

TEOREMA 2. 6. *Fie A o algebră logmodulară pe X și $f \to T_f$ o reprezentare a sa. Necesar și suficient ca $f \to T_f$ să aibă o dilatare spectrală este ca pentru orice $h \in H$, condiția* (2.3.7) *să fie îndeplinită. Dacă $f \to T_f$ admite o dilatare spectrală, atunci această dilatare spectrală este unică.*

Demonstrație. Suficiența condiției (2.3.7) și unicitatea dilatării rezultă din teoremele 2.3 și 2.5.

Fie $\varphi \to U_\varphi$ o dilatare spectrală a lui $f \to T_f$ și $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ un sistem finit de elemente din $A + \overline{A}$ de forma $\varphi_i = f_i + \overline{g}_i$, astfel încît $\sum |\varphi_i|^2 \leqslant 1$ și $h \in H$. Avem

$$\sum \| T_{\varphi_1} h \|^2 = \sum \| (T_{f_i} + T_{g_i}) h \|^2 = \sum \| P(U_{f_i+g_i}) h \|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum \| U\varphi_i h \|^2 \leqslant \sum \| \varphi_i \|^2 \| h \|^2 \leqslant \| h \|^2.$$

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

2.4. ***Măsuri Szegö și reprezentări naturale***. Fie μ o măsură pozitivă pe X. Vom nota cu $H^2\,(d\mu)$ spațiul Hilbert obținut prin închiderea lui A în $L^2\,(d\mu)$.

Măsura μ se numește *măsură Szegö* (relativ la A) dacă pentru orice mulțime boreliană E a lui X pentru care :

$$\chi_E L^2(d\mu) \subset H^2(d\mu)$$

avem $\mu(E) = 0$ (χ_E = funcția caracteristică a lui E).

Următoarea teoremă ne asigură de existența măsurilor Szegö pentru orice algebră $A \neq C\,(X)$.

TEOREMA 2.7. (i) *Orice măsură de reprezentare a lui A este fie o măsură Szegö, fie o măsură punctuală.*

(ii) *Dacă ν este o măsură complexă, nenulă pe X, ortogonală pe A, atunci $|\nu|$ este o măsură Szegö.*

(iii) *Dacă $A \neq C\,(X)$, atunci există măsuri Szegö pe X (relativ la A).*

Demonstrație. (i) Fie μ o măsură de reprezentare a lui A. Se verifică ușor că μ este multiplicativă pe $H^2\,(d\mu)$. Fie că pentru o mulțime boreliană E avem :

$$\chi_E L^2(d\mu) \subset H^2(d\mu). \tag{2.4.1}$$

Rezultă că $\chi_E \in H^2(\mathrm{d}\mu)$ şi deci avem :

$$\int \chi_E \,\mathrm{d}\mu = \int \chi_E^2 \,\mathrm{d}\mu = \left[\int \chi_E \,\mathrm{d}\mu\right]^2 .$$

Deci $\mu(E) = 0$ sau $\mu(E) = 1$. Dacă $\mu(E) = 1$, atunci din (2.4.1) rezultă că $L^2(\mathrm{d}\mu) = H^2(\mathrm{d}\mu)$ şi deci μ este multiplicativă pe $L^2(\mathrm{d}\mu)$ şi în particular pe $C(X)$. Astfel de măsuri se ştie (vezi [22]) că sînt punctuale.

(ii). Fie ν o măsură complexă, ortogonală pe A. Atunci ν este ortogonală pe $H^2(\mathrm{d}\mu)$ şi punînd $\mu = |\nu|$, avem :

(2.4.2) $$\mathrm{d}\nu = F\mathrm{d}\mu, F \in L^\infty(\mathrm{d}\mu), \quad |F| = 1.$$

Fie că $\chi_E L^2(\mathrm{d}\mu) \subset H^2(\mathrm{d}\mu)$. Rezultă că $\chi_E \overline{F} \in H^2(\mathrm{d}\mu)$ şi ţinînd cont de (2.4.2) avem :

$$\mu(E) = \int \chi_E \mathrm{d}\mu = \int \chi_E F \overline{F} \,\mathrm{d}\mu = \int \chi_E \overline{F} \mathrm{d}\nu = 0.$$

Punctul (iii) este o consecinţă a punctului (ii) şi a teoremei Hahn-Banach.

Teorema este deci complet demonstrată.

O măsură pozitivă μ pe X o vom numi *Szegö-singulară* (relativ la A) dacă $L^2(\mathrm{d}\mu) = H^2(\mathrm{d}\mu)$.

În cele ce urmează vom stabili legătura dintre noţiunea de măsură Szegö şi reprezentare complet nespectrală.

TEOREMA 2. 8 . *Fie $f \to T_f$ o reprezentare a lui A pe H şi μ_h o măsură spectrală ataşată elementului $h \in H$. Fie M un subspaţiu închis al lui H astfel încît $h \in M$ şi $T_f M \subset M$ pentru orice $f \in A$. Dacă reprezentarea $f \to T_f | M$ a lui A pe M este complet nespectrală, atunci măsura μ_h este o măsură Szegö.*

Demonstraţie. Fie $V_f = T_f | M$ şi să definim operatorul V pe $A + \overline{A}$ cu valori în M prin :

$$V(f + \overline{g}) = V_f h + V_g^* h \qquad (f, g \in A)$$

Măsura μ_h fiind o măsură spectrală ataşată la h prin $f \to T_f$, avem :

$$\| V(f + \overline{g}) \|^2 = \| V_f h + V_g^* h \|^2 \leqslant \| T_f h + T_g^* h \|^2 \leqslant \int |f + \overline{g}|^2 \mathrm{d}\mu_h .$$

Deci V poate fi prelungit pînă la o contracţie (pe care o notăm tot cu V) de la spaţiul K generat de $A + \overline{A}$ în $L^2(\mathrm{d}\mu_h)$ în M.

Pentru $\varphi \in C(X)$ să notăm cu U_φ operatorul de înmulţire cu φ în $L^2(\mathrm{d}\mu_h)$. Pentru $f, g \in A$ avem :

$$V(U_f g) = V(fg) = V_{fg} h = V_f V_g h = V_f V g \qquad (f, g \in A)$$

şi prin continuitate :

(2.4.3) $$V(U_f | H^2(\mathrm{d}\mu_h)) = V_f (V | H^2(\mathrm{d}\mu_h)).$$

În mod analog găsim :

$$V(U_f^* \mid \overline{H^2(\mathrm{d}\mu_h)}) = V_f^*(V \mid \overline{H^2(\mathrm{d}\mu_h)}), \tag{2.4.4}$$

unde :

$$\overline{H^2(\mathrm{d}\mu_h)} = \{h : \bar{h} \in H^2(\mathrm{d}\mu_h)\}$$

Fie E o mulţime boreliană a lui X astfel încît :

$$\chi_E L^2(\mathrm{d}\mu_h) \subset H^2(\mathrm{d}\mu_h).$$

Avem, evident, atunci :

$$\chi_E L^2(\mathrm{d}\mu_h) \subset H^2(\mathrm{d}\mu_h) \cap \overline{H^2(\mathrm{d}\mu_h)}$$

Cum $\chi_E L^2(\mathrm{d}\mu_h)$ este dublu invariant la $\varphi \to U_\varphi$, rezultă, utilizînd (2.4.3) şi (2.4.4), că subspaţiul N obţinut prin închiderea lui $V\chi_E L^2(\mathrm{d}\mu_h)$ în M este dublu invariant la $f \to V_f$ şi că avem :

$$\begin{aligned} V(U_f \mid \chi_E L^2(\mathrm{d}\mu_h)) &= V_f(V \mid \chi_E L^2(\mathrm{d}\mu_h)) \\ V(U_f^* \mid \chi_E L^2(\mathrm{d}\mu_h)) &= V_f^*(V \mid \chi_E L^2(\mathrm{d}\mu_h)). \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Din (2.4.5) rezultă că pentru orice $e \in \chi_E L^2(\mathrm{d}\mu_h)$ avem

$$V_g^* V_f V e = U_{\bar{g}} V U_f e = V U_{\bar{g}} U_f e = V U_{\bar{g}f} e = V U_{f\bar{g}} e = V U_{f\bar{g}} e =$$
$$= V U_f U_g^* e = V_f V_g^* V e$$

şi prin continuitate :

$$V_g^* V_f n = V_f V_g^* n \qquad (f, g \in A,\ n \in N). \tag{2.4.6}$$

Pentru $\varphi \in C(X)$ de forma

$$\varphi = \Sigma \bar{f}_i g_i \tag{2.4.7}$$

cu $f_i, g_i \in A$ şi $n \in N$ să punem :

$$V'_\varphi n = \Sigma V^*_{f_i} V_{g_i} n. \tag{2.4.8}$$

Pentru $e \in \chi_E L^2(\mathrm{d}\mu_h)$ avem, utilizînd (2.4.5),

$$V'_\varphi V e = \Sigma V^*{}_{f_i} V_{g_i} V e = V(\varphi e). \tag{2.4.9}$$

Deci dacă $\varphi = 0$, atunci $V'_\varphi\, Ve = 0$ pentru orice $e \in \chi_E L^2(\mathrm{d}\mu_h)$ şi prin continuitate $V'_\varphi = 0$. De aici rezultă că aplicaţia $\varphi \to V'_\varphi$ este bine definită şi liniară pe elemente φ de forma (2.4.7). Tot din (2.4.9) rezultă :

$$V'_{\varphi_1} V'_{\varphi_2} = V'_{\varphi_1\varphi_2}. \tag*{2.4.10)}$$

Utilizînd (2.4.9) şi (2.4.10) obţinem :

$$\|V'^{\,m}_\varphi V e\|^2 = \|V'_{\varphi^m} V e\|^2 = \|V(\varphi^m e)\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int |\varphi|^{2m} |e|^2 \,\mathrm{d}\mu_h = (\|\varphi^m\| \|e\|)^2$$

Aici $\|\varphi\|$, $\|e\|$ înseamnează normă în $L^2(\mathrm{d}\mu_h)$. Avem deci :

$$\|V_\varphi'^m Ve\| \leqslant \|\varphi\|^m \|e\| \tag{2.4.11}$$

Operatorii V'_φ fiind normali avem :

$$\|V'_\varphi Ve\| = (V'_\varphi Ve, V'_\varphi Ve)^{1/2} = (V'_\varphi V_\varphi'^* Ve, Ve)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \|V_\varphi'^* V'_\varphi Ve\|^{1/2} \|Ve\|^{1/2} = (V_\varphi'^* V'_\varphi Ve, V_\varphi'^* V'_\varphi Ve)^{1/2^2} \|Ve\|^{1/2} =$$
$$= (V_\varphi'^{*2} V_\varphi'^2 Ve, Ve)^{1/2} \|Ve\|^{1/2} \leqslant \|V_\varphi^{*2} V_\varphi'^2 Ve\|^{2} \|Ve\|.$$

Ținînd cont de (2.4.11) obținem :

$$\|V'_\varphi Ve\| \leqslant \|Ve\|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^m}} \|\varphi\| \|e\|^{\frac{1}{2^m}} \tag{2.4.12}$$

Făcînd pe $m \to \infty$ în (2.4.12), obținem :

$$\|V'_\varphi Ve\| \leqslant \|Ve\| \, \|\varphi\|$$

și deci

$$\|V'_\varphi\| \leqslant \|\varphi\|. \tag{2.4.13}$$

Mulțimea funcțiilor de forma (2.4.7) fiind densă în $C(X)$ și ținînd cont de (2.4.13) rezultă că putem prelungi aplicația $\varphi \to V'_\varphi$ pînă la o reprezentare a lui $C(X)$ pe N. Deoarece pentru $f \in A$ avem $V_f = V'_f$, rezultă că subspațiul N este spectral pentru reprezentarea $f \to V'_f$.

Reprezentarea $f \to V_f$ fiind complet nespectrală, rezultă că $N = \{0\}$. Deci $Ve = 0$ pentru orice $e \in \chi_E L^2(\mathrm{d}\mu_h)$. Cum $\chi_E L^2(\mu_h) \subset H^2(\mathrm{d}\mu_h)$, rezultă că pentru orice $e \in \chi_E L^2(\mathrm{d}\mu_h)$ există șirul f_n de funcții din A astfel încît $e = \lim_{L_2} f_n$.

Avem

$$0 = (Ve, h) = \lim (V_{f_n}, h) = \lim (V_{f_n} h, h) =$$
$$= \lim (T_{f_n} h, h) = \lim \int f_n \, \mathrm{d}\mu_h = \int e \, \mathrm{d}\mu_h$$

pentru orice $e \in \chi_E L^2(\mathrm{d}\mu_n)$.

În particular :

$$0 = \int \chi_E \mathrm{d}\mu_h = \mu_h(E) \cdot$$

Rezultă că μ_h este o măsură Szegö. Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Această teoremă admite o reciprocă în cazul *reprezentărilor izometrice* de care ne vom ocupa în continuare.

Reprezentarea $f \to T_f$ a lui A pe H o vom numi *izometrică* dacă există o dilatare spectrală $\varphi \to U_\varphi$ a lui $f \to T_f$ astfel încît $U_f h \in H$ pentru orice $f \in A$ și $h \in H$.

Fie $(\mu_{k_1,k_2})_{k_1,k_2\in K}$ familia spectrală atașată reprezentării $\varphi \to U_\varphi$ a lui $C(X)$ pe K (K este spațiul lărgit al dilatării) și pentru orice $h \in H$, $\mu_h = \mu_{h,h}$ măsura spectrală atașată la h prin $f \to T_f$. Avem :

$$\| T_f h \|^2 = (T_f h, T_f h) = (U_f h, U_f h) = (U_{|f|^2} h, h) = \int |f|^2 \, d\mu_h$$

adică

$$\| T_f h \|^2 = \int |f|^2 \, d\mu_h . \tag{2.4.14}$$

Pentru $h \in H$ să notăm cu M_h subspațiul închis al lui H generat de $T_f h$ cu $f \in A$. Definim operatorul V pe M_h cu valori în $L^2(d\mu_h)$ punînd

$$V(T_f h) = f$$

și prelungind prin continuitate cu ajutorul formulei (2.4.14). Operatorul V este o izometrie de la M_h la $V(M_h)$. E clar că $V(M_h)$ este invariant la înmulțirea cu funcții din A și că avem :

$$T_f m = V^{-1} f V m \qquad (f \in A, m \in M_h). \tag{2.4.15}$$

PROPOZIȚIA 2. 9. *Subspațiul închis M al lui M_h este X-spectral față de $f \to T_f/M_h$ dacă și numai dacă există o submulțime boreliană E a lui X astfel încît $VM = \chi_E L^2(d\mu_h)$. Mulțimea E este μ_h — esențial unic determinată de M :*

Demonstrație. Fie $V_f = T_f | M_h$. Să presupunem că $VM = \chi_E L^2(d\mu_h)$. Pentru $m \in M$ și $\varphi \in C(X)$ definim

$$U_\varphi m = V^{-1} \varphi V m .$$

Subspațiul $\chi_E L^2(d\mu_h)$ fiind invariant la înmulțirea cu funcții din $C(X)$, U_φ sînt bine definiți și liniari pe M. Avem evident :

$$\| U_\varphi \| \leqslant \| \varphi \| .$$

De asemenea :

$$U_{\varphi_1} U_{\varphi_2} m = V_{\varphi_1}^{-1} V V_{\varphi_2}^{-1} V m = V_{\varphi_1 \varphi_2}^{-1} V m = U_{\varphi_1 \varphi_2} m$$

Deci $\varphi \to U_\varphi$ este o reprezentare a lui $C(X)$ pe M.

Din (2.4.15) rezultă că pentru $m \in M$ avem :

$$T_f m = V_f m = U_f m \qquad (f \in A, m \in M).$$

De asemenea pentru $m \in M$ și $k \in M_h$ avem :

$$(V_f m, k) = (m, V_f k) = (m, T_f k) = (m, V^{-1} f V k) =$$
$$= (Vm, fVk) = (\bar{f} Vm, Vk) = (V^{-1} \bar{f}\, Vm, k) = (U_{\bar{f}} m, k).$$

Am folosit (2.4.15) și faptul că V și V^{-1} sînt izometrii.

Rezultă că M este dublu invariant la $f \to V_f$ și că $\varphi \to U_\varphi$ este o prelungită la $C(X)$ a lui $f \to V_f$, adică subspațiul M este X-spectral față de $f \to V_f$.

Reciproc, fie că M este X-spectral față de $f \to V_f$ și fie $\varphi \to U_\varphi$ reprezentarea lui $C(X)$ pe M, care prelungește pe $f \to V_f \mid M$. Din (2.4.15) rezultă că VM este invariant la înmulțirea cu funcții din A. Fie P proiecția lui $L^2(\mathrm{d}\mu_h)$ pe VM.

Pentru $m,\ n \in M$ avem :

$$(V_f^* m, n) = (m, V_f n) = (m, T_f n) = (m, V^{-1} f V n) =$$
$$= (Vm, fVn) = (\bar{f} Vm, Vn) = (P\bar{f}Vm, Vn) = (V^{-1}P\bar{f}Vm, n).$$

Deci :

$$V_f^* m = V^{-1}P\bar{f}Vm. \tag{2.4.16}$$

Operatorii V_f fiind normali avem :

$$\| P\bar{f}Vm \| = \| V^{-1}P\bar{f}Vm \| = \| V_f^* m \| = \| V_f m \| =$$
$$= \| V^{-1}fVm \| = \| fVm \| = \| \bar{f}Vm \|$$

pentru orice $m \in M$. Deci $\bar{f}\, V M \subset VM$, pentru orice $f \in A$. Rezultă că VM este invariant la înmulțirea cu orice funcție φ din $C(X)$ de forma $\varphi = \sum f_i \bar{g}_i$ și prin continuitate la înmulțirea cu orice funcție φ din $C(X)$. Astfel de subspații se știe (vezi [13]) că sînt de forma $\chi_E L^2(\mathrm{d}\mu_h)$ cu E mulțime boreliană — esențial unică.

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

TEOREMA 2.9. *Fie $f \to T_f$ o reprezentare izometrică a lui A pe H și μ_h măsura spectrală atașată lui h prin $f \to T_f$. Măsura μ_h este o măsură Szegö dacă și numai dacă reprezentarea $f \to T_f / M_h$ a lui A pe M_h este complet nespectrală.*

Demonstrație. Cum, evident, $V(M_h) \subset H^2(\mathrm{d}\mu_h)$, din propoziția 2.9 rezultă că $f \to T_f \mid M_h$ nu are subspații X-spectrale nenule dacă și numai dacă pentru orice E, borelian cu proprietatea $\chi_E\, L^2(\mathrm{d}\mu_h) \subset H^2(\mathrm{d}\mu_h)$, avem $\mu_h\,(E) = 0$, adică dacă și numai dacă μ_h este o măsură Szegö.

O clasă importantă de reprezentări izometrice este aceea a reprezentărilor naturale ale algebrei A.

Fie μ o măsură pozitivă pe X și pentru orice $f \in A$ definim pe $H^2\,(\mathrm{d}\mu)$ operatorii :

$$T_f h = fh \qquad (f \in A,\ h \in H^2\,(\mathrm{d}\mu)). \tag{2.4.17}$$

Reprezentarea $f \to T_f$, cu T_f dați de (2.4.17), a lui A pe $H^2\,(\mathrm{d}\mu)$ o vom numi *reprezentarea naturală* a lui A pe $H^2\,(\mathrm{d}\mu)$.

Reprezentarea $\varphi \to U_\varphi$, unde U_φ sînt definiți de :

$$U_\varphi\, k = \varphi k, \qquad (\varphi \in C(X),\ k \in L^2(\mathrm{d}\mu)) \tag{2.4.18}$$

a lui $C(X)$ pe $L^2(\mathrm{d}\mu)$ este evident o dilatare spectrală a lui $f \to T_f$. Avem evident $T_f h = U_f h$ pentru orice $f \in A$ și $h \in H^2(\mathrm{d}\mu)$ și deci reprezentarea $f \to T_f$ este izometrică.

Avem :

$$\mu_1(\varphi) = (U_\varphi\, 1, 1) = (\varphi, 1) = \int \varphi\, \mathrm{d}\mu$$

şi deci μ este măsura spectrală ataşată prin reprezentarea naturală elementului 1 din $H^2(d\mu)$.

De asemenea $M_1 = H^2(d\mu)$ şi operatorul V definit mai sus este operatorul de incluziune a lui $H^2(d\mu)$în $L^2(d\mu)$.

TEOREMA 2.10. *Fie* μ *o măsură pozitivă pe* X *şi* $f \to T_f$ *reprezentarea naturală a lui* A *pe* $H^2(d\mu)$.

(i) *Subspaţiul* M *al lui* $H^2(d\mu)$ *este* X*-spectral dacă şi numai dacă* $M = \chi_E L^2(d\mu)$, *unde* E *este o mulţime boreliană a lui* X. *Mulţimea* E *este unic determinată de* M.

(ii) *Reprezentarea naturală a lui* A *pe* $H^2(d\mu)$ *este complet nespectrală, dacă şi numai dacă* μ *este o măsură Szegö.*

(iii) *Reprezentarea* $f \to T_f$ *este spectrală dacă şi numai dacă* μ *este Szegö-singulară*

(iv) *Măsura* μ *se descompune în mod unic sub forma* $\mu = \mu_1 + \mu_2$, *unde* μ_1 *este o măsură Szegö-singulară, iar* μ_2 *este o măsură Szegö. Mai mult, avem :*

$$H^2(d\mu) = H^2(d\mu_1) \oplus H^2(d\mu_2),$$

subspaţiile $H^2(d\mu_1)$, $H^2(d\mu_2)$, *sînt dublu invariante, iar* $f \to T_f | H^2(d\mu_1)$ *este partea spectrală a lui* $f \to T_f$, $f \to T_f | H^2(d\mu_2)$ *este partea complet nespectrală a lui* $f \to T_f$. *Măsura* μ_2 *este supremumul măsurilor Szegö de pe sub* μ.

Demonstraţie. Punctele (i), (ii), (iii) sînt consecinţe directe ale propoziţiei 2.9 şi teoremei 2.9.

Să demonstrăm punctul (iv). Pentru aceasta fie

$$H^2(d\mu) = H_s \oplus H_c$$

descompunerea canonică a reprezentării $f \to T_f$. Subspaţiul H_s fiind X-spectral, rezultă din (i) că este de forma :

$$H_s = \chi_E L^2(d\mu)$$

cu E mulţime boreliană în X. Tie $\mu_1 = \chi_E \mu$. Avem :

$$L^2(d\mu_1) = \chi_E L^2(d\mu) = H_s \subset H^2(d\mu).$$

Cum orice funcţie din $L^2(d\mu_1)$ care aparţine lui $H^2(d\mu)$ aparţine şi lui $H^2(d\mu_1)$, rezultă că $L^2(d\mu_1) = H_s = H^2(d\mu_1)$ şi deci μ_1 este o măsură Szegö-singulară.

Fie $\mu_2 = (1 - \chi_E)\mu$. Cum $\chi_E \in H^2(d\mu)$, rezultă că :

$$H_c = (1 - \chi_E) H^2(d\mu) = H^2(d\mu_2).$$

Deci :

$$H^2(d\mu) = H^2(d\mu_1) \oplus H^2(d\mu_2).$$

Reprezentarea $f \to T_f | H_c$ este deci reprezentarea naturală a lui A pe $H^2(d\mu_2)$ şi ea fiind complet nespectrală, rezultă că μ_2 este o măsură Szegö. Avem deci :

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 \qquad 2.4.19)$$

cu μ_1 măsură Szegö — singulară și μ_2 măsură Szegö.

Fie ν o măsură Szegö, $\nu \leqslant \mu$. Avem:

$$\chi_E C(X) \subset H^2(\mathrm{d}\mu) \leqslant H^2(\mathrm{d}\nu)$$

și deci $\nu(E) = 0$, adică $\nu \leqslant \mu_2$. Deci μ_2 este supremul măsurilor Szegö de pe sub μ. Aceasta demonstrează și unicitatea descompunerii (2.4.19).

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Măsura μ_1 se numește partea Szegö singulară a lui μ, iar μ_2 partea *Szegö a lui* μ.

CAPITOLUL III

SEMIGRUPURI DE CONTRACȚII

3.1. *O teoremă de dilatare unitară.* Fie G un grup abelian și $S \subset G$ un subsemigrup al său astfel încît $S \cap S^{-1} = \{1\}$.

Fie H un spațiu Hilbert și $g \to T_g$ o aplicație a lui G în $L(H)$, astfel încît $T_1 = I$, $T_{g^{-1}} = T_g^*$ și $\| T_g \| \leqslant 1$. Am văzut (teorema 1.6) că o condiție necesară și suficientă pentru existența dilatării unitare este ca pentru orice sistem finit $g_1 \ldots g_n$ de elemente distincte din G și orice sistem finit $h_1 \ldots h_n$ de elemente din H să avem:

$$\sum (T_{g_i^{-1}} h_j, h_i) \geqslant 0. \tag{3.1.1}$$

Următoarea teoremă dă o condiție suficientă pentru ca (3.1.1) să fie îndeplinită.

TEOREMA 3.1. *Fie G un grup abelian, $S \subset G$ un subsemigrup al său astfel încît $S \cap S^{-1} = \{1\}$. Fie $g \to T_g$ o aplicație a lui G în $L(H)$ astfel încît $T_1 = \mathrm{I}$, $T_{g^{-1}} = T_g^*$, $\| T_g \| \leqslant 1$ și*

$$T_{g_1} T_{g_2} = T_{g_1 g_2} \text{ pentru } g_1, g_2, g_1 g_2 \notin S^{-1}. \tag{3.1.2}$$

Atunci $g \to T_g$ satisface condiția (3.1.1).

Demonstrație. Fie $g_1 \ldots g_n$ un sistem finit de elemente din G astfel încît $g_i \neq g_j$ pentru $i \neq j$. Alegînd succesiv elemente minimale în raport cu relația de ordine indusă de S în G, putem renumerota acest sistem astfel încît:

$$g_i^{-1} g_j \notin S^{-1} \text{ pentru orice } i < j. \tag{3.1.3}$$

Fie $\widetilde{T} = (T_{ij})$ matricea operatorială dată de $T_{ij} = T_{g_j g_i}$. $\widetilde{T}$ este un operator pe $\bigoplus_{k=1}^{n} H^k$ (cu $H^k = H$ pentru orice k).

Dacă $\widetilde{h} = (h_k)$ este un vector din $\bigoplus_{k=1}^{n} H^k$, atunci

$$(\widetilde{T}\, \widetilde{h}, \widetilde{h}) = \sum_{ij=1}^{n} (T_{g_i^{-1} g_j} x_j, x_i)$$

și deci condiția (3.11) este echivalentă cu pozitivitatea operatorului $\widetilde{T}$.

Vom arăta că $\widetilde{T} = W^*DW$, unde W şi D sînt operatori pe $\bigoplus\limits_{k-1}^{n} H^k$ cu D pozitiv.

Pentru aceasta să punem:

$$W_{ij} = \begin{cases} T_{g_i^{-1} g_j} & \text{dacă } i \leqslant j \\ 0 & \text{dacă } i > j \end{cases}$$

şi

$$D_{11} = I$$

$$D_{ij} = 0 \qquad \text{dacă } i \neq j$$

$$D_{ii} = I - T^*_{g_{i-1}^{-1} g_i} \, T_{g_{i-1}^{-1} g_i} \text{ pentru } i = 2, 3, \ldots, n$$

iar $W = (W_{ij})$, $D = (D_{ij})$.

Deoarece T_g sînt contracţii, e clar că D este un operator pozitiv.
Vom arăta că $T = W^*DW$.

Operatorii T şi $W^* DW$ fiind autoadjuncţi, este suficient să arătăm că $T_{ij} = (W^*DW)_{ij}$ pentru $i \leqslant j$. Avem de asemenea $(W^*)_{ij} = (W^*_{ji}) = 0$ pentru $j > i$ şi deci

$$(W^* DW)_{ij} = \sum_{l=1}^{i} (W^*)_{il} (DW)_{lj}.$$

Pentru $i = 1$ avem

$$(W^* DW)_{1j} = (W^*)_{11} D_{11} W_{1j} = W_{1j} = T_{1j}.$$

Pentru $i > 1$ obţinem:

$$(W^* DW)_{ij} = \sum_{l=1}^{i} (W^*)_{il} D_{ll} W_{lj} =$$

$$= \sum_{l=1}^{i} T^*_{g_l^{-1} g_i} D_{ll} T_{g_l^{-1} g_j} = T^*_{g_1^{-1} g_i} T_{g_1^{-1} g_j} +$$

$$+ \sum_{l=q}^{i} T^*_{g_l^{-1} g_i} T_{g_l^{-1} g_j} - \sum_{l=2}^{i} T^*_{g_{l-1}^{-1} g_l} T^*_{g_l^{-1} g_i} T_{g_{l-1}^{-1} g_l} T_{g_l^{-1} g_j}.$$

Dar din (3.1.2) şi (3.1.3) rezultă:

$$T^*_{g_l^{-1} g_i} T^*_{g_{l-1}^{-1} g_l} = T^*_{g_{l-1}^{-1} g_i}$$

$$T_{g_{l-1}^{-1} g_l} T_{g_l^{-1} g_j} = T_{g_{l-1}^{-1} g_j}$$

şi deci

$$(W^*DW)_{ij} = T^*_{g_1^{-1} g_i} T_{g_1^{-1} g_j} + \sum_{l=2}^{i} T^*_{g_l^{-1} g_i} T_{g_l^{-1} g_j}$$

$$- \sum_{l=2}^{i} T^*_{g_{l-1}^{-1} g_i} T_{g_{l-1}^{-1} g_j} = T_{g_i^{-1} g_j} = T_{ij}.$$

Avem deci

$$\widetilde{T} = \widetilde{W}^* D W$$

şi atunci

$$(\widetilde{T}\widetilde{h}, \widetilde{h}) = (W^* D W \widetilde{h}, \widetilde{h}) = (D W \widetilde{h}, W \widetilde{h}) \geqslant 0.$$

Rezultă că operatorul $\widetilde{T}$ este pozitiv şi deci $g \to T_g$ satisface condiţia (3.1.1).

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Fie G, S, H ca mai sus. Vom numi *semigrup de contracţii* (pe H) şi-l vom nota $\{T_s\}_{s \in S}$ o aplicaţie $s \to T_s$ a lui S în $L(H)$ astfel încît $T_1 = I$, $T_{s_1} T_{s_2} = T_{s_1 s_2}$ pentru orice $s_1, s_2 \in S$ şi $\| T_s \| \leqslant 1$ pentru orice $s \in S$.

Un *grup* de operatori unitari $\{U_g\}_{g \in G}$ pe un supraspaţiu K al lui H se numeşte dilatare *unitară* a semigrupului $\{T_s\}_{s \in S}$ dacă

$$T_s h = P U_s h \qquad (s \in S,\ h \in H),$$

unde P este proiecţia lui K pe H.

Corolar (W. Mlak). *Dacă G este total ordonat de S, adică dacă $G = S \cup S^{-1}$, atunci orice semigrup $\{T_s\}_{s \in S}$ de contracţii pe H are dilatare unitară.*

Demonstraţie. În adevăr, dacă punem

$$T_g = \begin{cases} T_s & \text{dacă} \quad g = s \in S \\ T_s^* & \text{dacă} \quad g = s^{-1},\ s \in S, \end{cases}$$

atunci obţinem o aplicaţie $g \to T_g$ a lui G în $L(H)$ care verifică evident condiţiile din teorema 3.1. Rezultă că $g \to T_g$ verifică relaţia (3.1.1) şi din teorema 1. 6 rezultă existenţa dilatării unitare.

Teorema 3.2. *Fie G, S, H ca mai sus astfel încît $G = SS^{-1}$. Fie $\{T_s\}_{s \in S}$ un semigrup de contracţii astfel încît*

$$T^*_{\sigma_1} T_{s_1} = T^*_{\sigma_2} T_{s_2} \quad \text{pentru } s_1 \sigma_1^{-1} = s_2 \sigma_2^{-1} \notin S^{-1} \tag{3.1.4}$$

şi

$$T^*_{\sigma} T_s = T_s T^*_{\sigma} \text{ pentru } s\sigma^{-1} \notin S \cup S^{-1}. \tag{3.1.5}$$

Atunci există o dilatare unitară a semigrupului $\{T_s\}_{s \in S}$.

Demonstraţie. Să punem

$$T_g = \begin{cases} T^*_{\sigma} T_s & \text{dacă} \quad g = s\sigma^{-1} \notin S^{-1} \\ T^*_{\sigma} & \text{dacă} \quad g = \sigma^{-1},\ \sigma \in S. \end{cases}$$

După (3.1.4) aplicaţia $g \to T_g$ este bine definită şi avem $T_1 = I$, $T_{g^{-1}} = T_g^*$, $\| T_g \| \leqslant 1$. Vom arăta că ea verifică şi condiţia (3.1.2). Pentru aceasta fie $g_1, g_2 \in G$ astfel încît $g_1, g_2, g_1 g_2 \notin S^{-1}$. Să punem $g_1 = s_1 \sigma_1^{-1}$, $g_2 = s_2 \sigma_2^{-1}$. Deoarece $g_1, g_2, g_1 g_2 \notin S^{-1}$ avem

$$T_{g_1} = T^*_{\sigma_1} T_{s_1}, \ T_{g_2} = T^*_{\sigma_2} T_{s_2}, \ T_{g_1 g_2} = T^*_{\sigma_1 \sigma_2} T_{s_1 s_2}.$$

Din condiția (3.1.4) rezultă

$$T_{g_1} T_{g_2} = T^*_{\sigma_1} T_{s_1} T^*_{\sigma_2} T_{s_2} = T^*_{\sigma_1 s_2} T_{s_1 s_2} T^*_{\sigma_2 s_1} T_{s_2 s_1}. \tag{3.1.6}$$

Dacă g_1, $g_2 \in S$, condiția (3.1.2) este evident satisfăcută. Fie ca $g_2 \notin S$. Avem

$$s_1 s_2 \sigma_2^{-1} s_1^{-1} = s_2 \sigma_2^{-1} = g_2 \notin S^{-1} \cup S$$

și folosind (3.1.5) obținem

$$T_{s_1 s_2} T^*_{\sigma_2 s_1} = T^*_{\sigma_2 s_1} T_{s_1 s_2}. \tag{3.1.7}$$

Ținînd cont de (3.1.7) în (3.1.6) obținem :

$$T_{g_1} T_{g_2} = T^*_{\sigma_1 s_2} T^*_{\sigma_2 s_1} T^2_{s_1 s_2} = T^*_{\sigma_1 \sigma_2} T_{s_1 s_2} = T_{g_1 g_2}.$$

În mod analog avem

$$T_{g_2} T_{g_1} = T^*_{\sigma_2} T_{s_2} T^*_{\sigma_1} T_{s_1} = T^*_{\sigma_1 \sigma_2} T_{s_2 \sigma_1} T^*_{\sigma_1 \sigma_2} T_{s_1 \sigma_2} =$$

$$= T^*_{\sigma_1 \sigma_2} T^*_{\sigma_1 \sigma_2} T_{s_2 \sigma_1} T_{s_1 \sigma_2} = T^*_{\sigma_1 \sigma_2} T^*_{s_1 s_2} = T_{g_1 g_2}.$$

Condiția (3.1.2) este deci verificată de aplicația $g \to T_g$. Aplicînd teorema 3.1 și 1.6 deducem existența dilatării unitare pentru semigrupul $\{T_s\}_{s \in S}$.

3.2. *Descompunerea canonică.* Fie G, S, H ca mai sus și $\{T_s\}_{s \in S}$ un semigrup de contracții pe H.

Un subspațiu închis M al lui H se numește *invariant* (la $\{T_s\}_{s \in S}$) dacă $T_s M \subset M$ pentru orice $s \in S$. Subspațiul M se zice *dublu invariant* dacă $T_s M \subset M$, $T_s^* M \subset M$ pentru orice $s \in S$.

Dacă M este invariant, vom nota cu $T_s \mid M$ restricția lui T_s la M și prin $\{T_s \mid M\}_{s \in S}$ semigrupul de contracții corespunzător.

Semigrupul de contracții $\{T_s\}_{s \in S}$ pe H se zice *unitar* dacă pentru orice $s \in S$, operatorul T_s este unitar pe H.

Semigrupul $\{T_s\}_{s \in S}$ se zice *complet neunitar* dacă pentru orice subspațiu dublu invariant M al lui H pentru care $\{T_s | M\}_{s \in S}$ este unitar avem $M = \{0\}$.

TEOREMA 3.3. *Fie $\{T_s\}_{s \in S}$ un semigrup de contracții pe H. Spațiul H se descompune în mod unic sub forma*

$$H = H_u \oplus H_c$$

astfel încît H_u și H_c sînt dublu invariante, $\{T_s \mid H_u\}_{s \in S}$ este unitar și $\{T_s | H_c\}_{s \in S}$ este complet neunitar.

Demonstrație. Fie $\mathcal{M}$ familia subspațiilor M ale lui H dublu invariante astfel încît $\{T_s | M\}_{s\in S}$ este unitar. Fie H_u subspațiul generat de $\bigcup\limits_{M\in\mathcal{M}} M$. Se verifică ușor că H_u este dublu invariant și că $\{T_s | H_u\}_{s\in S}$ este unitar. H_u este deci cel mai mare subspațiu dublu invariant M, pentru care $\{T_s | M\}_{s\in S}$ este unitar.

Fie

$$H = H_u \oplus H_c.$$

Rezultă că H_c este dublu invariant. Fie $M\subset H_c$ dublu invariant astfel încît $\{T_s | M\}_{s\in S}$ este unitar. Rezultă că $M\subset H_u$ și cum M este ortogonal pe H_u, avem $M = \{0\}$. Deci semigrupul $\{T_s | H_c\}_{s\in S}$ este complet neunitar.

Fie

$$H = H_1 \oplus H_2$$

o altă descompunere a lui H astfel încît H_1 și H_2 sînt dublu invariante, $\{T_s | H_1\}_{s\in S}$ este unitar și $\{T_s | H_2\}_{s\in S}$ este complet neunitar. Din maximalitatea lui H_u rezultă că $H_1\subset H_u$. Fie

$$H_u = H_1 \oplus M.$$

Atunci M este dublu invariant și cum $M\subset H_u$ rezultă că $\{T_s | M\}_{s\in S}$ este unitar. Dar M fiind ortogonal pe H_1, avem $M\subset H_2$ și cum $\{T_s | H_2\}_{s\in S}$ este complet neunitar, rezultă că $M = \{0\}$. Deci $H_u = H_1$ și $H_s = H_2$ ceea ce demonstrează unicitatea descompunerii.

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

TEOREMA 3.4. *Fie* $\{T_s\}_{s\in S}$ *un semigrup de contracții pe* H *și* $\{U_g\}_{g\in G}$ *o dilatare unitară a sa.*

Fie

$$H = H_u \oplus H_c$$

descompunerea canonică a lui $\{T_s\}_{s\in S}$. *Avem*

$$H_u = \{h\in H : U_g h\in H,\ g\in G\} = \{h : \|T_s T_\sigma^* h\| = \|h\|, s,\ \sigma\in S\}. \tag{3.2.1}$$

Demonstrație. Fie

$$H_1 = \{h \in H : U_g\, h \in H,\ g\in G\},\ H_2 = \{h\in H :\ \|T_s T_\sigma^* h\| = \|h\|, s,\ \sigma\in S\}.$$

Pentru $h\in H_2$ avem

$$\|PU_s h\| = \|T_s h\| = \|h\| = \|U_s h\|$$

$$\|PU_{\sigma^{-1}} h\| = \|PU_\sigma^* h\| = \|T_\sigma^* h\| = \|h\| = \|U_{\sigma^{-1}} h\|.$$

Deci $U_s h\in H$, $U_{\sigma^{-1}} h\in H$ pentru orice s, $\sigma\in S$. Pentru $g = s\sigma^{-1}$ avem :

$$\|PU_g h\| = \|PU_s U_\sigma^* h\| = \|PU_s PU_{\sigma^{-1}} h\| = \|T_s T_\sigma^* h\| = \|h\| = \|U_g h\|.$$

Rezultă că $U_g h \in H$ pentru orice $g \in G$ și deci $H_2 \subset H_1$. Subspațiul H_1 este evident dublu invariant și $\{T_s | H_1\}_{s \in S}$ este unitar. Din maximalitatea lui H_u rezultă că $H_1 \subset H_u$. Cum $T_s | U_u$ este unitar pentru orice $s \in S$, rezultă că

$$\| T_s T_\sigma^* h \| = \| h \|$$

pentru orice $h \in H_u$ și s, $\sigma \in S$, deci $H_u \subset H_2$. Avem deci

$$H_2 \subset H_1 \subset H_u \subset H_2$$

ceea ce demonstrează relația (3.2.1).

3.3. *Cazul semigrupului de izometrii.* În cazul cînd semigrupul $\{T_s\}_{s \in S}$ este format din izometrii, obținem o teoremă de descompunere de tip Wold.

Semigrupul de izometrii $\{T_s\}_{s \in S}$ îl vom numi *cvasiunitar* dacă

$$clm \,[\bigcup_{\sigma^{-1} s \notin S^{-1}} T_\sigma^* T_s H] = H. \tag{3.3.1}$$

Semigrupul de izometrii $\{T_s\}_{s \in S}$ se numește *total neunitar* dacă oricare ar fi subspațiul dublu invariant M pentru care $\{T_s | M\}_{s \in S}$ este cvasiunitar avem $M = \{0\}$.

Este clar că orice semigrup unitar este cvasiunitar și deci orice semigrup total neunitar este complet neunitar.

Se poate întîmpla ca un semigrup de izometrii să fie cvasiunitar și complet neunitar. Astfel de semigrupuri le vom numi *singulare*.

Fie $\{T_s\}_{s \in S}$ un semigrup cvasiunitar și M un subspațiu dublu invariant. Avem $clm \,[\bigcup_{\sigma^{-1} s \notin S^{-1}} T_\sigma^* T_s M] \subset M$. Fie $m \in M$ ortogonal pe $clm \,[\bigcup_{\sigma^{-1} s \notin S^{-1}} T_\sigma^* T_s M]$ și $h \in H$. Dacă $h = h_1 + h_2$ cu $h_1 \in M$ și $h_2 \in M^\perp$ avem :

$$(m, T_\sigma^* T_s h) = (m, T_\sigma^* T_s h_1) + (m, T_\sigma^* T_s h_2) = 0$$

pentru $\sigma^{-1} s \notin S^{-1}$. Deci m este ortogonal pe $clm \,[\bigcup_{\sigma^{-1} s \notin S^{-1}} T_\sigma^* T_s H] = H$ adică $m = 0$. Deci

$$M = clm \,[\bigcup_{\sigma^{-1} s \notin S^{-1}} T_\sigma^* T_s M]$$

adică $\{T_s | M\}_{s \in S}$ este cvasiunitar.

Dacă M este un subspațiu dublu invariant, atunci $\{T_s | M\}_{s \in S}$ este unitar (cvasiunitar, complet neunitar, total neunitar singular) *dacă $\{T_s\}_{s \in S}$ are aceeași proprietate.*

TEOREMA 3.5. *Fie $\{T_s\}_{s \in S}$ un semigrup de izometrii pe H. Spațiul H se descompune în mod unic sub forma*

$$H = H_q \oplus H_t$$

astfel încît H_q, H_t sînt subspații dublu invariante, $\{T_s | H_q\}_{s \in S}$ este cvasiunitar și $\{T_s | H_t\}_{s \in S}$ este total neunitar.

Demonstraţie. Să punem:

$$N = [\bigcup_{\sigma^{-1}s\notin S^{-1}} T^*_\sigma T_s H]^\perp. \tag{3.3.2}$$

Pentru $n\in N$, $h\in H$ şi $\sigma^{-1}s\notin S$ avem:

$$(T^*_\sigma T_s n, h) = (n, T^*_s T_\sigma h) = 0$$

şi deci

$$T^*_\sigma T_s n = 0 \qquad (n\in N,\ \sigma^{-1}s\notin S). \tag{3.3.3}$$

Subspaţiile $T_s N$ sînt două cîte două ortogonale. În adevăr, deoarece $S\cap S^{-1} = \{1\}$ avem

$$(T_s n, T_\sigma m) = (n, T^*_s T_\sigma m) = (T^*_\sigma T_s n, m) = 0$$

pentru orice $n, m\in N$, s, $\sigma\in S$, $s\neq\sigma$.

Să punem

$$H_t = \bigoplus_{s\in S} T_s N \tag{3.3.4}$$

şi

$$H = H_q \oplus H_t$$

Subspaţiile H_q şi H_t sînt dublu invariante. În adevăr, H_t este evident invariant. Dacă $m\in H_q$ şi $s\in S$, atunci

$$(T_\sigma m, T_s n) = (m, T^*_\sigma T_s n) = 0$$

pentru orice $\sigma\in S$ pentru care $\sigma^{-1}s\notin S$ şi pentru orice $n\in N$, din (3.3.3). Dacă $\sigma^{-1}s = s_1\in S$, atunci $s = \sigma s_1$ şi avem

$$(T_\sigma m, T_s n) = (m, T^*_\sigma T_\sigma T_{s_1} n) = (m, T_{s_1} n) = (m, T_{s_1} n) = 0$$

pentru orice $n\in N$, din definiţia lui H_q. Deci $T_\sigma m$ este ortogonal pe H_t, adică $T_\sigma m\in H_q$. Rezultă că şi H_q este invariant şi atunci H_q şi H_t sînt dublu invariante.

Semigrupul $\{T_s | H_q\}_{s\in S}$ este cvasiunitar. În adevăr, cum H_q este dublu invariant, avem:

$$clm\,[\bigcup_{\sigma^{-1}s\notin S^{-1}} T^*_\sigma T_s H_q] \subset H_q.$$

Fie $m\in H_q$ ortogonal pe $clm\,[\bigcup_{\sigma^{-1}s\notin S^{-1}} T^*_\sigma T_s H_q]$ şi $h\in H$ de forma $h = h_1 + h_2$ cu $h_1\in H_q$, $h_2\in H_t$.

Avem:

$$(m, T^*_\sigma T_s h) = (m, T^*_\sigma T_s h_1) + (m, T^*_\sigma T_s h_2) = 0$$

pentru orice s, $\sigma\in S$, $\sigma^{-1}s\notin S^{-1}$. Deci m este ortogonal pe $clm\,[\bigcup_{\sigma^{-1}s\notin S^{-1}} T^*_\sigma T_s H] \supset H_q$ şi atunci $m = 0$. Rezultă că

$$H_q = clm\,[\bigcup_{\sigma^{-1}s\notin S^{-1}} T^*_\sigma T_s H_q]$$

adică $\{T_s | H_q\}_{s\in S}$ este cvasiunitar.

Fie acum M un subspațiu dublu invariant inclus în H_t astfel încît $\{T_s \mid M\}_{s\in S}$ este cvasiunitar. Cum $M = clm\ [\bigcup_{\sigma^{-1}s\notin S^{-1}} T_\sigma^* T_s M]$ rezultă că M este ortogonal pe N. Atunci pentru orice $m \in M$, $n \in N$ și $s \in S$ avem

$$(m, T_s n) = (T_s^* m, n) = 0.$$

Deci M este ortogonal pe $H_t \supset M$, adică $M = 0$. Deci $\{T_s \mid H_t\}_{s\in S}$ este total neunitar.

Fie acum

$$H = H_1 \oplus H_2$$

o nouă descompunere a lui H astfel încît H_1, H_2 sînt dublu invariante $\{T_s \mid H_1\}_{s\in S}$ este cvasiunitar, $\{T_s \mid H_2\}_{s\in S}$ este total neunitar. Cum H_1 este dublu, invariant și $H_1 = clm\ [\bigcup_{\sigma^{-1}s\in S^{-1}} T_\sigma^* T_s H_1]$, rezultă (ca mai sus) că H_1 este ortogonal pe H_t, adică $H_1 \subset H_q$. Fie

$$H_q = H_1 \oplus M.$$

Este clar că M este dublu invariant și cum $M \subset H_q$, rezultă că $\{T_s \mid M\}_{s\in S}$ este cvasiunitar. Dar M fiind ortogonal pe H_1, avem $M \subset H_2$ și $\{T_s \mid H_2\}_{s\in S}$ fiind total neunitar, avem $M = \{0\}$. Deci $H_q = H_1$, $H_t = H_2$ și unicitatea descompunerii este demonstrată.

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Combinînd teorema 3.3 cu teorema 3.5 obținem următoarea generalizare a teoremei de descompunere a lui Wold :

TEOREMA 3.6. *Fie* $\{T_s\}_{s\in S}$ *un semigrup de izometrii pe* H. *Spațiul* H *se descompune în mod unic sub forma*

$$H = H_u \oplus H_\sigma \oplus H_t$$

astfel încît H_u, H_σ, H_t *sînt subspații dublu invariante* $\{T_s \mid H_u\}_{s\in S}$ *este unitar*, $\{T_s \mid H_\sigma\}_{s\in S}$ *este singular și* $\{T_s \mid H_t\}_{s\in S}$ *este total neunitar*.

Demonstrație. Descompunerea se obține aplicînd succesiv teorema 3.3 și teorema 3.5. Pentru unicitate să observăm de exemplu că $H_\sigma \oplus H_t$ este partea complet neunitară a lui $\{T_s\}_{s\in S}$.

3.4. *Semigrupul translațiilor unilaterale*. Pentru un spațiu Hilbert N să notăm cu $L^2(N ; G)$ spațiul Hilbert al familiilor $\tilde{h} = (h_g)$ $g \in G$, $h_g \in N$ pentru care

$$\|\tilde{h}\|^2 = \sum_{g\in G} \|h_g\|^2 < +\infty,$$

cu operațiile uzuale și cu produsul scalar

$$(\tilde{h}, \tilde{k}) = \sum_{g\in G} (h_g, k_g)$$

unde $\tilde{h} = (h_g)$, $\tilde{k} = (k_g)$.

Prin $H^2(N ; S)$ vom nota subspațiul închis al lui $L^2(N ; G)$ al elementelor $\tilde{h} = (h_g)$ din $L^2(N ; G)$ pentru care $h_g = 0$ dacă $g \notin S$.

Dacă notăm cu P proiecția lui $L^2(N\,;G)$ pe $H^2\,(N\,;S)$, atunci avem $P(h_g) = (h'_g)$, unde

$$h'_g = \begin{cases} h_g & \text{dacă } g \in S \\ 0 & \text{dacă } g \notin S. \end{cases}$$

Aplicația lui N în $H^2(N\,;S)$ definită de $n \to (n_g)$, unde $n_g = 0$ dacă $g \neq 1$ și $n_1 = n$, este o injecție izometrică a lui N în $H^2\,(N\,;S)$, deci N poate fi scufundat prin ea în $H^2(N\,;S)$.

Pentru $s \in S$ definim pe $H^2\,(N\,;S)$ operatorul

$$T_s(h_g) = (h_{s^{-1}g}). \tag{3.4.1}$$

Se verifică ușor că $\{T_s\}_{s\in S}$ este un semigrup de izometrii pe $H^2(N\,;S)$. Acest semigrup îl vom numi *semigrupul translațiilor unilaterale în* $H^2(N\,;S)$.

Dacă $\{T_s\}_{s\in S}$ este semigrupul translațiilor unilaterale în $H^2(N\,;S)$, atunci pentru orice $s \in S$ avem

$$T_s^*(h_g) = P\,(h_{sg}) \tag{3.4.2}$$

și

$$H^2(N\,;S) = \bigoplus_{s\in S} T_sN. \tag{3.4.3}$$

TEOREMA 3.7. *Fie* $\{T_s\}_{s\in S}$ *un semigrup de izometrii pe* H. *Următoarele afirmații sînt echivalente* :

a) *Există un spațiu Hilbert* N *astfel încît semigrupul* $\{T_s\}_{s\in S}$ *este unitar echivalent cu semigrupul translațiilor unilaterale în* $H^2\,(N\,;S)$.

b) *Semigrupul* $\{T_s\}_{s\in S}$ *este total neunitar.*

c) *Dacă* M *este un subspațiu dublu invariant al lui* H *astfel încît* $M \subset \mathrm{clm}\,[\bigcup_{\sigma^{-1}s\notin S^{-1}} T_s^*T_sH]$, *atunci* $M = \{0\}$.

d) *Dacă* M *este un subspațiu dublu invariant al lui* H *astfel încît* $M \cap [\bigcup_{\sigma^{-1}s\notin S^{-1}} T_\sigma^*T_sH]^\perp = \{0\}$, *atunci* $M = \{0\}$.

Demonstrație. Implicațiile d → *c*, *c* → *b* sînt evidente. Să demonstrăm implicația *b* → *a*. Fie că $\{T_s\}_{s\in S}$ este total neunitar. Din teorema 3.5 rezultă că

$$H = H_t = \bigoplus_{s\in S} T_sN, \tag{3.4.4}$$

unde

$$N = [\bigcup_{\sigma^{-1}s\notin S^{-1}} T_\sigma^*T_sH]^\perp.$$

Aplicația $h \to (h_g)$, unde $h_s = n_s$ dacă $h = \sum_{s\in S} T_sn_s$ și $h_g = 0$ pentru $g \notin S$ este o echivalență unitară între H și $H^2\,(N\,;S)$ care transformă semigrupul $\{T_s\}_{s\in S}$ în semigrupul translațiilor unilaterale în $H^2\,(N\,;S)$. Deci implicația $b \to a$ este demonstrată.

Să demonstrăm implicația $a \to c$. Fie N un spațiu Hilbert și $\{T_s\}_{s \in S}$ semigrupul translațiilor unilaterale în $H^2(N, S)$. Vom demonstra mai întîi relația

$$N = [\bigcup_{\sigma^{-1}s \notin S^{-1}} T_\sigma^* T_s H^2(N; S)]^\perp, \tag{3.4.5}$$

unde N este scufundat în $H^2(N; S)$ ca mai sus.

Pentru aceasta fie $n \in N$, $n = (n_g)$ cu $n_g = 0$ pentru $g \neq 1$. Folosind (3.4.2) avem :

$$T_\sigma^* T_s n = T_\sigma^* T_s (n_g) = T_\sigma^*(n_{s^{-1}g}) = P(n_{s^{-1}\sigma g}) = (n'_g),$$

unde

$$n'_g = \begin{cases} n_{s^{-1}\sigma g} & \text{dacă } g \in S \\ 0 & \text{dacă } g \notin S. \end{cases}$$

Dar $n_g = 0$ pentru $g \neq 1$ și deci $n'_g = 0$ pentru $g \neq \sigma^{-1} s$. Deci pentru $n \in N$ și $\sigma^{-1}s \notin S$ avem

$$T_\sigma^* T_s n = 0. \tag{3.4.6}$$

Deci

$$(n, T_s^* T_\sigma \widetilde{h}) = (T_\sigma^* T_s n, \widetilde{h}) = 0$$

pentru s, $\sigma \in S$, $s\sigma^{-1} \notin S$. Deci

$$N \subset [\bigcup_{\sigma^{-1}s \notin S^{-1}} T_\sigma^* T_s H^2(N; S)]^\perp.$$

Invers, dacă $\widetilde{n} = (n_g) \in [\bigcup_{\sigma^{-1}s \notin S^{-1}} T_\sigma^* T_s H^2(N; S)]^\perp$, atunci avem

$$(T_\sigma^* T_s \widetilde{n}, \widetilde{h}) = (\widetilde{n}, T_s^* T_\sigma \widetilde{h}) = 0$$

pentru orice $\widetilde{h} \in H^2(N; S)$, $\sigma^{-1} s \notin S$. Deci

$$T_\sigma^* T_s \widetilde{n} = 0$$

pentru orice $s, \sigma \in S$, $s\sigma^{-1} \notin S$. În particular $T_\sigma^* \widetilde{n} = 0$ pentru orice $\sigma \in S$ $\sigma \neq 1$. Dacă $T_\sigma^* \widetilde{n} = (n'_g)$, atunci $n'_g = 0$ pentru orice $g \in G$. D a $n_\sigma = n'_1 = 0$. Deci $n_\sigma = 0$. pentru orice $\sigma \neq 1$ și deci $\widetilde{n} \in N$. Aceasta termină demonstrația relației (3.4.5).

Fie acum M un subspațiu dublu invariant inclus în $clm\ [\bigcup_{\sigma^{-1}s \notin S^{-1}} T_\sigma^* T_s H^2(N, S)]$. Din (3.4.5) rezultă că $M \subset N^\perp$ și deci

$$(T_s n, m) = (n, T_s^* m) = 0,$$

deoarece M este dublu invariant. Deci M este ortogonal pe $T_s N$ pentru orice $s \in S$ și din (3.4.2) rezultă că $M = \{0\}$.

Cu aceasta implicaţia $a \to c$ este demonstrată.

Pentru a termina demonstraţia teoremei mai arătăm implicaţia $b \to d$. Pentru aceasta fie M un subspaţiu dublu invariant al lui H astfel încît

$$M \cap [\bigcup_{\sigma^{-1}s \notin S^{-1}} T_\sigma^* T_s H]^\perp = \{0\}. \tag{3.4.7}$$

Avem :

$$M = cl\,m\,[\bigcup_{\sigma^{-1}s \notin S^{-1}} T_\sigma^* T_s M]. \tag{3.4.8}$$

În adevăr, M fiind dublu invariant, avem $clm\,[\bigcup_{\sigma^{-1}s \notin S^{-1}} T_\sigma^* T_s M] \subset M$.

Fie $m \in M$ ortogonal pe $[\bigcup_{\sigma^{-1}s \notin S^{-1}} T_\sigma^* T_s M]$ şi $h \in H$ de forma $h = h_1 + h_2$ cu $h_1 \in M$ şi $h_2 \in M^\perp$. Avem

$$(m,\ T_\sigma^* T_s h) = (m,\ T_\sigma^* T_s h_1) + (m,\ T_\sigma^* T_s h_2) = 0$$

pentru orice s, $\sigma \in S$, $\sigma^{-1}s \notin S^{-1}$. Deci $m \in [\bigcup_{\sigma^{-1}s \notin S^{-1}} T_\sigma^* T_s H]^\perp$ şi din (3.4.7) rezultă că $m = 0$. Deci (3.4.8) este adevărată.

Din b) rezultă că $M = \{0\}$ şi deci implicaţia $b \to d$ este demonstrată.

Avînd demonstrate implicaţiile

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d] & b \arrow[l] \arrow[d] \\ c \arrow[ur] & d \arrow[l] \end{tikzcd}$$

rezultă că teorema este complet demonstrată.

Următoarea teoremă este o completare a teoremei 3.7 în cazul cînd N este uni-dimensional.

TEOREMA 3.8. *Fie* $\{T_s\}_{s \in S}$ *un semigrup de izometrii pe* H. *Semigrupul* $\{T_s\}_{s \in S}$ *este unitar echivalent cu semigrupul translaţiilor unilaterale pe un* $H^2(N\,;\,S)$ *cu* N *unidimensional dacă şi numai dacă* $\{T_s\}_{s \in S}$ *nu este cvasiunitar şi nu are subspaţii dublu invariante proprii.*

Demonstraţie. Fie $\{T_s\}_{s \in S}$ semigrupul translaţiilor unilaterale pe $H^2(N\,;\,S)$ cu N unidimensional. Fie $M \subset H^2(N\,;S)$ un subspaţiu dublu nvariant al lui $H^2(N\,;\,S)$. Dacă

$$M \cap [\bigcup_{\sigma^{-1}s \notin S^{-1}} T_\sigma^* T_s H^2\,(N\,;\,S)]^\perp = 0,$$

atunci din teorema 3.7 rezultă că $M = \{0\}$.

Fie că

$$M \cap [\bigcup_{\sigma^{-1}s \notin S^{-1}} T_\sigma^* T_s H^2\,(N\,;\,S)]^\perp \neq 0.$$

Din (3.4.5) rezultă că $M \cap N \neq 0$. Cum N este unidimensional, avem $M \cap N = N$ şi deci $H^2\,(N\,;\,S) = \bigoplus_{s \in S} T_s N \subset M$.

Fie acum $\{T_s\}_{s \in S}$ un semigrup de izometrii pe H care nu este cvasiunitar şi nu are subspaţii dublu invariante proprii. Atunci e clar că $\{T_s\}_{s \in S}$

satisface efirmația d) din teorema 3.7. Rezultă deci că $\{T_s\}_{s\in S}$ este unitar echivalent cu semigrupul translațiilor unilaterale într-un $H^2(N\,;\,S)$. Fie $n_0 \in N$, $n_0 \neq 0$ și fie N_0 spațiul unidimensional generat de n_0. Să punem

$$M = \bigoplus_{s\in S} T_s N_0 .$$

Spațiul M este dublu invariant. În adevăr, dacă $m = \sum\limits_{s\in S} T_s n_s$ cu $n_s \in N_0$, atunci avem :

$$T_\sigma m = \sum_{s\in S} T_{s\sigma} n_s \in M$$

$$T_\sigma^* m = \sum_{s_1 = \sigma^{-1}s} T_{s_1} n_s \in M.$$

Cum $M \cap N = N_0 \neq 0$ avem $H = M$ și deci $N = N_0$ este unidimensional.

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

CAPITOLUL IV

ALGEBRE GENERATE DE FUNCȚII INTERIOARE

4.1. *Teoreme de structură.* Fie A o algebră de funcții pe X, $\mathfrak{M}$ spațiul idealelor maximale ale lui A și Γ frontiera sa Silov.

O funcție $s \in A$ o vom numi (X—) *interioară* dacă $|s(x)| = 1$ pentru orice $x \in X$.

Fie S un sistem multiplicativ închis de funcții interioare din A. Presupunem că $1 \in S$.

Algebra A o vom numi *S-generată* dacă algebra polinoamelor $p(s_1 \ldots$ $\ldots s_n)$ cu coeficienți constanți și cu $s_1 \ldots s_n$ un sistem finit, arbitrar de elemente din S este densă în A. Sistemul S fiind multiplicativ închis, e clar că A este S-generată dacă și numai dacă mulțimea combinațiilor liniare $\sum c_i s_i$ cu c_i constante și $s_i \in S$ este densă în A.

PROPOZIȚIA 4.1. *Dacă A este S-generată, atunci*

$$\Gamma = X = \{M \in \mathfrak{M} : |\, s(M) \,| = 1,\ s \in S\}.$$

Demonstrație. Fie

$$\mathfrak{M}_S = \{M \in \mathfrak{M} : |\, s(M) \,| = 1,\ s \in S\}.$$

Avem evident

$$\Gamma \subset X \subset \mathfrak{M}_S .$$

Să considerăm mulțimea A_S a funcțiilor din $C\,(\Gamma)$ de forma

$$g = \sum c_i s_i \bar{s} \quad (s_i ,\, s \in S). \tag{4.1.1}$$

Se verifică ușor că A_S este o subalgebră a lui $C(\Gamma)$ și avem evident $A \subset A_S$. Deci A_S separă punctele lui Γ. Algebra A_S este simetrică. În adevăr, fie $g \in A_S$ de forma (4.1.1). Atunci

$$\bar{g} = \sum \bar{c}_i \bar{s} s_i = \sum c_i\ \sigma_i\ \bar{\sigma},$$

unde

$$\sigma_i = ss_1 \ldots s_n \bar{s}_i \in S$$

$$\sigma = s_1 \ldots s_n \in S$$

și deci $\bar{g} \in A_s$. Din teorema lui Stone-Weierstrass rezultă că A_s este densă în $C(\Gamma)$.

Fie acum $M \in \mathfrak{M}_s$. Definim pe A_s aplicația

$$\hat{M}(\sum c_i s_i \bar{s}) = \sum c_i M(s_i) \overline{M(s)}. \tag{4.1.2}$$

Avem

$$|\hat{M}(\sum c_i s_i \bar{s})| = |\sum c_i M(s_i) \overline{M(s)}| = |\sum c_i M(s_i)|\,|M(s)| = |\sum c_i M(s_i)| \leqslant$$
$$\leqslant \|\sum c_i s_i\| = \|\sum c_i s_i \bar{s}\|$$

adică

$$|\hat{M}(\sum c_i s_i s)| \leqslant \|\sum c_i s_i \bar{s}\|. \tag{4.1.3}$$

Funcționala $\hat{M}$ este liniară pe A_s. În adevăr,

$$\hat{M}(\sum a_i s_i \bar{s} + \sum b_i \sigma_i \bar{\sigma}) = \hat{M}[\sum (a_i s_i \sigma + b_i \sigma_i s) \overline{s\sigma}] =$$
$$= \sum M(a_i s_i \sigma + b_i \sigma_i s) \overline{M(s\sigma)} = \sum [a_i M(s_i) M(\sigma) +$$
$$+ b_i M(\sigma_i) M(s)] \overline{M(s)}\,\overline{M(\sigma)} = \sum a_i M(s_i) \overline{M(s)} +$$
$$+ \sum b_i M(\sigma_i) \overline{M(\sigma)} = M(\sum c_i s_i \bar{s}) + M(\sum b_i \sigma_i \bar{\sigma}).$$

Am utilizat faptul că $M \in \mathfrak{M}_s$ și deci $|s(M)| = 1$ pentru orice $s \in S$.

Rezultă că $\hat{M}$ este bine definită, liniară și continuă pe A_s. Se verifică ușor că M este și multiplicativă. Deci M se poate prelungi pînă la o funcțională multiplicativă pe $C(\Gamma)$. Cum $\hat{M}$ coincide cu M pe A, rezultă că M se poate prelungi pînă la o funcțională multiplicativă pe $C(\Gamma)$ și de aici rezultă că $M \in \Gamma$.

Cu aceasta propoziția este complet demonstrată.

Un sistem multiplicativ închis S de funcții interioare îl vom numi *analitic liber* dacă pentru orice aplicație multiplicativă α de la S în planul complex, pentru care $|\alpha(s)| = 1$, pentru orice sistem finit de constante $c_1 \ldots c_n$, și pentru orice sistem finit $s_i \ldots s_n$ de elemente din S avem

$$|\sum c_i \alpha(s_i)| \leqslant \|\sum c_i s_i\|. \tag{4.1.4}$$

Fie G grupul abelian $G = S\bar{S}$ și $\hat{G}$ dualul grupului discret G. Vom nota cu $A(S)$ algebra funcțiilor continue pe $\hat{G}$ a căror transformată Fourier se anulează în afara lui S.

TEOREMA 4.1. *Fie A o algebră S-generată pe X cu S analitic liber. Spațiul X este homeomorf cu dualul $\hat{G}$ al grupului discret G iar A este izometric izomorfă cu $A(S)$.*

Demonstrație. Pentru $x \in X$ fie α_x caracterul grupului G definit prin

$$\alpha_x(s_1 s_2) = s_1(x)\,\overline{s_2(x)}.$$

Evident, $\alpha_x \in \hat{G}$. Dacă $\alpha_{x_1} = \alpha_{x_2}$ atunci $s(x_1) = s(x_2)$ pentru orice $s \in S$ și cum S separă punctele lui X, avem $x_1 = x_2$. Deci aplicația $x \to \alpha_x$ este o injecție a lui X în $\hat{G}$.

Vom arăta că această injecție duce spațiul X pe $\hat{G}$. Pentru aceasta fie $\alpha \in \hat{G}$. Definim

$$M_\alpha(\sum c_i s_i) = \sum c_i \alpha(s_i).$$

Cum α este un caracter al lui G_1 este multiplicativ pe S și $|\alpha(s)| = 1$ pentru orice $s \in S$. Sistemul S fiind analitic liber, avem

$$|M_\alpha(\sum c_i s_i)| = |\sum c_s \alpha(s_i)| \leqslant \|\sum c_i s_i\|.$$

De aici rezultă că M poate fi prelungită pînă la o funcțională multiplicativă pe A, adică $M_\alpha \in \mathfrak{M}$. Dar

$$|s(M_\alpha)| = |\alpha(s)| = 1 \qquad (s \in S).$$

Deci, după propoziția 4.1, $M_\alpha \in X$. Fie $x = M_\alpha$. E clar atunci că $\alpha_x = \alpha$.

Am demonstrat că $x \to \alpha_x$ aplică biunivoc spațiul X pe $\hat{G}$. Continuitatea acestei aplicații rezultă din felul cum sînt definite topologiile pe $\mathfrak{M}$ și $\hat{G}$ și deci $x \to \alpha_x$ este un homeomorfism între X și $\hat{G}$.

Acest homeomorfism transportă izometric-izomorf algebra A în algebra funcțiilor pe $\hat{G}$ generată de caracterele din S. Această algebră este tocmai $A(S)$.

Cu aceasta demonstrația teoremei este terminată.

În cele ce urmează dăm o condiție suficientă pentru ca un sistem S de funcții interioare să fie analitic liber.

Pentru un sistem finit $\tau = [s_1, s_2, \ldots s_n]$ de funcții interioare să notăm cu π_τ aplicația lui X în torul de dimensiune n, $T^n = \prod_1^n \{|z| = 1\}$ definită prin:

$$\pi_\tau(x) = (s_1(x), s_2(x), \ldots, s_n(x)) \tag{4.1.5}$$

PROPOZIȚIA 4.2. *Fie S_0 un sistem de funcții interioare pe X astfel încît pentru orice sistem finit τ de elemente distincte din S_0 aplicația π_τ a lui X în T^n definită de* (4.1.5) *este o surjecție. Atunci sistemul multiplicativ închis S, generat de S_0 este analitic liber.*

Demonstrație. Fie α o aplicație multiplicativă a lui S în T^1 și $s_1 \ldots s_n$ un sistem finit de elemente din S. Fie $\tau = [\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n]$ un sistem finit de elemente distincte din S_0 astfel încît

$$s_i = \sigma_1^{p_{i_1}} \sigma_2^{p_{i_2}} \ldots \sigma_m^{p_{i_m}}, \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Aplicaţia π_τ fiind surjectivă, rezultă că există $x \in X$ astfel încît $\sigma_i(x) = \alpha(\sigma_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Rezultă că pentru orice sistem finit de constante $c_1, c_2, \ldots, c_n$, avem :

$$|\sum c_i \alpha(s_i)| = |\sum c_i \alpha(\sigma_1^{p_{i_1}} \sigma_2^{p_{i_2}} \ldots \sigma_m^{p_{im}})| = |\sum c_i \alpha(\sigma_1^{p_{i_1}}) \alpha(\sigma_2^{p_{i_2}}) \ldots \alpha(\sigma_m^{p_{im}}) =$$

$$= |\sum c_i \sigma_1^{p_{i_1}}(x) \sigma_2^{p_{i_2}}(x) \ldots \sigma_m^{p_{im}}(x)| = |\sum c_i s_i(x)| \leqslant \| \sum c_i s_i \|.$$

Rezultă că

$$|\sum c_i \alpha(s_i)| \leqslant \| \sum c_i s_i \|$$

adică S este analitic liber.

COROLAR. *Fie* $X = \prod_1^n \{z : |z| = 1\}$, $1 \leqslant n \leqslant \infty$, *şi* A *algebra generată de funcţiile coordonate* $z_1, z_2, \ldots z_n$. *Atunci sistemul multiplicativ închis generat de* $z_1, z_2, \ldots z_n$ *este analitic liber.*

4.2. *Reprezentări ale algebrelor* S*-generate.* Fie A o algebră S-generată pe X astfel încît $S \cap S^{-1} = \{1\}$, H un spaţiu Hilbert şi $f \to T_f$ o reprezentare a lui A pe H. E clar atunci că $\{T_s\}_{s \in S}$ este un semigrup de contracţii pe H.

TEOREMA 4.2. (i) *Subspaţiul* M *al lui* H *este spectral pentru* $f \to T_f$ *dacă şi numai dacă* M *este dublu invariant la* $\{T_s\}_{s \in S}$ *şi semigrupul* $\{T_s | M\}_{s \in S}$ *este unitar.*

(ii) *Reprezentarea* $f \to T_f$ *este spectrală dacă şi numai dacă* $\{T_s\}_{s \in S}$ *este unitar.*

(iii) *Reprezentarea* $f \to T_f$ *este complet nespectrală dacă şi numai dacă* $\{T_s\}_{s \in S}$ *este complet neunitar.*

(iv) *Reprezentarea* $f \to T_f$ *şi semigrupul* $\{T_s\}_{s \in S}$ *au aceeaşi descompunere canonică.*

Demonstraţie. (i) Fie că M este spectral pentru $f \to T_f$ şi fie $\varphi \to U_\varphi$ prelungita la $C(X)$ a reprezentării $f \to T_f | M$. E clar atunci că M este dublu invariant la $\{T_s\}_{s \in S}$ şi avem :

$$T_s^* T_s m = U_s^* U_s m = U_{\bar{s}s} m = m = U_s U_s^* m = T_s T_s^* m$$

pentru orice $m \in M$ şi $s \in S$. Rezultă că $\{T_s | M\}_{s \in S}$ este unitar.

Fie acum că subspaţiul M este dublu invariant la $\{T_s\}_{s \in S}$ şi $\{T_s | M\}_{s \in S}$ este unitar. Pentru $f \in A$ de forma $f = \sum c_i s_i$, e clar că $T_f M \subset M$, $T_f^* M \subset M$ şi prin continuitate rezultă că M este dublu invariant la $f \to T_f$.

Pentru o funcţie $\varphi \in C(X)$ de forma $\varphi = \sum c_i s_i \bar{s}$ şi $m \in M$ să punem

$$U_\varphi m = \sum c_i T_{s_i} T_s^* m.$$

Dacă $\varphi_1 = \sum a_i s_i \bar{s}$, $\varphi_2 = \sum b_i \sigma_i \bar{\sigma}$, atunci $\varphi_1 + \varphi_2 = \sum (a_i s_i \sigma + b_i \sigma_i s) \bar{s} \bar{\sigma}$ şi deci

$$U_{\varphi_1 + \varphi_2} m = \sum (a_i T_{s_i} T_\sigma + b_i T_{\sigma i} T_s) T_s^* T_\sigma^* m = \sum (a_i T_{s_i} T_\sigma + b_i T_{\sigma i} T_s) T_s^* T_\sigma^* m =$$

$$= \sum (a_i T_{s_i} T_s^* m) + \sum b_i T_{\sigma i} T_\sigma^* m = U_{\varphi_1} m + U_{\varphi_2} m$$

pentru orice $m \in M$. Am folosit faptul că $T_s | M$ este unitar pentru orice $s \in S$.

În plus

$$\| U_\varphi m \| = \| \sum c_i T_{s_i} T_s^* m \| \leqslant \| \sum c_i T_{s_i} \| \, \| T_s^* m \| =$$

$$= \| \sum c_i T_{s_i} \| \, \| m \| \leqslant \| \sum c_i s_i \| \, \| m \| = \| \varphi \| \, \| m \|.$$

Deci aplicația $\varphi \to U_\varphi$ a lui $C(X)$ în $L(M)$ este bine definită pe elemente de forma $\varphi = \sum c_i s_i \bar{s}$, este liniară și continuă. Se verifică ușor că $\varphi \to U_\varphi$ este și multiplicativă. Elementele φ de forma $\varphi = \sum c_i s_i \bar{s}$ fiind dense în $C(X)$, rezultă că $\varphi \to U_\varphi$ se poate extinde pînă la o reprezentare a lui $C(X)$ pe M care este evident o prelungită la $C(X)$ a reprezentării $f \to T_f | M$. Deci subspațiul M este spectral pentru $f \to T_f$ și demonstrația punctului (i) este terminată.

Punctele (ii), (iii), (iv) sînt consecințe imediate ale punctului (i).

În cele ce urmează S va fi presupus analitic liber.

PROPOZIȚIA 4.3. *Fie A o algebră S-generată pe X și $\{U_s\}_{s \in S}$ un semigrup de operatori unitari pe H. Atunci pentru orice sistem finit de constante $c_1 \ldots c_n$ și orice sistem finit $s_1 \ldots s_n$ de elemente din S avem*

$$\| \sum c_i U_{s_i} \| \leqslant \| \sum c_i s_i \|. \tag{4.2.1}$$

Demonstrație. Punînd $U_g = U_\sigma^* U_s$ pentru $g \in G$ de forma $g = s\bar{\sigma}$, obținem grupul de operatori unitari $\{U_g\}_{g \in G}$. Fie $\{E(\sigma)\}_{\sigma \in B(X)}$ măsura spectrală a lui $\{U_g\}_{g \in G}$ suportată pe dualul X al lui G. Avem

$$|(\sum c_i U_{s_i} h_1, h_2)| = \left| \int \sum c_i s_i(x) \, \mathrm{d}(E(x) h_1, h_2) \right| \leqslant \| \sum c_i s_i \| \, \| h_1 \| \, \| h_2 \|.$$

TEOREMA 4.3. *Fie A o algebră S-generată pe X și $f \to T_f$ o reprezentare a lui A pe H. Reprezentarea $f \to T_f$ are o dilatare spectrală dacă și numai dacă semigrupul $\{T_s\}_{s \in S}$ are o dilatare unitară.*

Demonstrație. Fie $\varphi \to U_\varphi$ o dilatare spectrală a reprezentării $f \to T_f$. E clar atunci că grupul $\{U_g\}_{g \in G}$ este o dilatare unitară a semigrupului $\{T_s\}_{s \in S}$.

Fie acum $\{U_g\}_{g \in G}$ o dilatare unitară a semigrupului $\{T_s\}_{s \in S}$. Utilizînd (4.2.1) pentru semigrupul $\{U_s\}_{s \in S}$, putem defini pentru φ de forma $\varphi = \sum c_i s_i \bar{s}$,

$$U_\varphi = \sum c_i U_{s_i} U_s^*$$

și cu procedeul deja folosit în teorema 4.2 obținem reprezentarea $\varphi \to U_\varphi$ a lui $C(X)$ pe K (spațiul lărgit) care este o dilatare spectrală a reprezentării $f \to T_f$.

TEOREMA 4.4. *Reprezentarea $f \to T_f$ a algebrei S-generate A este izometrică dacă și numai dacă semigrupul $\{T_s\}_{s \in S}$ este izometric.*

Demonstrație. Fie că $f \to T_f$ este izometrică și fie $\varphi \to U_\varphi$ dilatarea sa spectrală pentru care U_f $h \in H$ pentru $f \in A$ și $h \in H$. Avem

$$\| T_s h \| = \| U_s h \| = \| h \|$$

pentru orice $s \in S$ și $h \in H$. Deci T_s este o izometrie pe H pentru orice $s \in S$.

Reciproc, fie că T_s sînt izometrici. Orice semigrup de izometrii admite o dilatare unitară [38]. Fie $\{U_g\}_{g\in G}$ dilatarea unitară a lui $\{T_s\}_{s\in S}$. Avem

$$\| PU_s h \| = \| T_s h \| = \| h \| = \| U_s h \|$$

şi deci $U_s h \in H$ pentru orice $s \in S$ şi $h \in H$. Fie $\varphi \to U_\varphi$ dilatarea spectrală a lui $f \to T_f$ construită ca în teorema 4.3. Pentru $f \in A$ de forma $f = \sum c_i s_i$ avem

$$U_f h = \sum c_i U_{s_i} h \in H \qquad (h \in H)$$

şi atunci e clar că $U_f h \in H$ pentru orice $f \in A$ şi $h \in H$. Deci reprezentarea $f \to T_f$ este izometrică.

Vom spune că reprezentarea izometrică $f \to T_f$ a algebrei S-generate A pe H este *total nespectrală* (*cvasispectrală*, *singulară*) dacă semigrupul de izometrii $\{T_s\}_{s\in S}$ este total neunitar (cvasiunitar, singular).

Teorema 3.6 se transpune atunci în limbaj de funcţii în felul următor:

TEOREMA 4.5. *Fie* $f \to T_f$ *o reprezentare izometrică a algebrei* S*-generate* A *pe* H*. Spaţiul* H *se descompune în mod unic sub forma*

$$H = H_s \oplus H_\sigma \oplus H_t$$

astfel încît H_s, H_σ, H_t *sînt subspaţii dublu invariante, reprezentarea* $f \to T_f | H_s$ *este spectrală,* $f \to T_f | H_\sigma$ *este singulară iar* $f \to T_f | H_t$ *este total nespectrală.*

Să notăm cu $\mathrm{d}x$ măsura Haar a lui X (privit ca dual al grupului discret G). Spaţiul $L^2(N\,;\,G)$ introdus în paragraful 3.4 este izometric izomorf cu spaţiul $L^2_N(\mathrm{d}x)$ iar $H^2(N\,;\,S)$ cu $H^2_N(\mathrm{d}x)$ — spaţiul funcţiilor din $L^2_N(\mathrm{d}x)$ a căror transformată Fourier se anulează în afara lui S. În $H^2_N(\mathrm{d}x)$ are sens înmulţirea cu funcţii din A. Reprezentarea $f \to T_f$ a lui A pe $H^2_N(\mathrm{d}x)$, unde T_f este înmulţirea cu f în $H^2_N(\mathrm{d}x)$ o vom numi (printr-un mic abuz) reprezentarea naturală a lui A pe $H^2_N(\mathrm{d}x)$. Semigrupul translaţiilor unilaterale în $H^2(N\,;\,S)$ este unitar echivalent cu semigrupul $\{T_s\}_{s\in S}$, unde $f \to T_f$ este reprezentarea naturală a lui A pe $H^2_N(\mathrm{d}x)$.

Teoremele 3.7 şi 3.8 au următoarea corespondenţă în acest limbaj.

TEOREMA 4.6. *Reprezentarea izometrică* $f \to T_f$ *a algebrei* S*-generate* A *pe* H *este unitar echivalentă cu reprezentarea naturală a lui* A *pe un* $H^2_N(X)$ *dacă şi numai dacă ea este total nespectrală.*

Reprezentarea $f \to T_f$ *este unitar echivalentă cu reprezentarea naturală a lui* A *pe* $H^2(\mathrm{d}x) = H^2_N(\mathrm{d}x)$ *cu* N *unidimensional dacă şi numai dacă* $f \to T_f$ *nu este cvasispectrală şi nu are subspaţii dublu invariante proprii.*

4.3. *Elemente de teoria predicţiei pe algebra* S*-generate.* Fie A o algebră S-generată pe X şi μ o măsură pozitivă pe X cu $\mu(X) = 1$. Ne propunem să studiem reprezentarea naturală $f \to T_f$ a lui A pe $H^2(\mathrm{d}\mu)$.

PROPOZIŢIA 4.4. *Fie* $N = [\bigcup_{\sigma^{-1}s \notin S^{-1}} T^*_\sigma T_s H^2(\mathrm{d}\mu)]^\perp$. *Atunci* $\dim N \leqslant 1$.

Demonstraţie. Fie C corpul numerelor complexe. Algebra A fiind S generată, e clar că avem

$$H^2(\mathrm{d}\mu) = \overline{C + N^\perp}.$$

Fie P proiecţia lui $H^2(\mathrm{d}\mu)$ pe C. Dacă n_1, $n_2 \in N$ şi $P_{n_1} = P_{n_2}$, atunci $P(n_1 - n_2) = 0$ şi deci

$$(n_1 - n_2, c + n^{\perp}) = (n_1 - n_2, c) + (n_1 - n_2, n^{\perp}) = 0$$

pentru orice $c \in C$ şi $n^{\perp} \in N^{\perp}$, rezultă că $n_1 = n_2$. Deci $P \mid N$ este o injecţie a lui N în C şi deci dim $N \leqslant 1$.

COROLAR. *Reprezentarea naturală $f \rightarrow T_f$ a lui A pe $H^2(\mathrm{d}\mu)$ este total nespectrală dacă şi numai dacă ea nu este cvasispectrală şi nu are subspaţii dublu invariante proprii.*

PROPOZIŢIA 4.5. *Orice subspaţiu dublu invariant M al reprezentării naturale $f \rightarrow T_f$ a lui A pe $H^2(\mathrm{d}\mu)$ este de forma $M = \chi_E L^2 \cap H^2$, unde E este o submulţime boreliană a lui X. Mulţimea E este esenţial unic determinată de M.*

Demonstraţie. Fie $L(M)$ subspaţiul minimal din $L^2(\mathrm{d}\mu)$ invariant la înmulţirea cu funcţii din $C(X)$ care-l conţine pe M. E clar că elementele de forma $\bar{s}m$ cu $s \in S$ şi $m \in M$ generează pe $L(M)$. Dacă P este proiecţia lui $L^2(\mathrm{d}\mu)$ pe $H^2(\mathrm{d}\mu)$, avem

$$P\bar{s}m = T_s^{*} m \in M.$$

Deci

$$PL(M) \subset M \subset PL(M)$$

adică

$$M = PL(M).$$

Subspaţiul $L(M)$ fiind invariant la înmulţirea cu funcţii din $C(X)$ el este de forma

$$L(M) = \chi_E L^2(\mathrm{d}\mu)$$

cu E mulţimea boreliană esenţial unic determinată. Rezultă că avem

$$\chi_E L^2 \cap H^2 \subset PL(M) = M \subset \chi_E L^2 \cap H^2$$

adică

$$M = \chi_E L^2 \cap H^2$$

ceea ce trebuia demonstrat.

O măsură pozitivă μ pe X, $\mu(X) = 1$, o vom numi măsură *Szegö — totală* dacă ea nu este punctuală şi pentru orice submulţime boreliană E a lui X pentru care $\chi_E L^2 \cap H^2 \neq 0$, avem $\mu(E) = 1$.

Se vede imediat că *măsura nepunctuală μ este Szegö-totală dacă şi numai dacă orice funcţie din $H^2(\mathrm{d}\mu)$ care se anulează pe o mulţime de măsură pozitivă a lui X este egală cu zero aproape peste tot pe X.*

PROPOZIŢIA 4.6. *Orice măsură Szegö-totală pe X este o măsură Szegö.*

Demonstraţie. Fie că măsura Szegö totală μ nu este Szegö. Atunci există o submulţime boreliană E a lui X cu $\mu(E) > 0$ astfel încît $\chi_E L^2(\mathrm{d}\mu) \subset H^2(\mathrm{d}\mu)$. Rezultă că $\chi_E L^2(\mathrm{d}\mu) \cap H^2(\mathrm{d}\mu) = \chi_E L^2(\mathrm{d}\mu) \neq 0$. Măsura μ fiind Szegö-totală, obţinem $\mu(E) = 1$ şi deci $L^2(\mathrm{d}\mu) = \chi_E L^2(\mathrm{d}\mu) \subset H^2(\mathrm{d}\mu) \subset L^2(\mathrm{d}\mu)$. Deci $L^2(\mathrm{d}\mu) = H^2(\mathrm{d}\mu)$.

De aici rezultă că $\chi_E L^2(\mathrm{d}\mu) \subset H^2(\mathrm{d}\mu)$ pentru orice mulțime boreliană E și deci $\mu(E) = 0$ sau $\mu(E) = 1$ pentru orice mulțime boreliană E a lui X ceea ce înseamnă că μ este o măsură punctuală în contradicție cu faptul că μ este Szegö-totală.

Următoarea teoremă poate fi considerată ca o teoremă de predicție.

TEOREMA 4.7. *Fie μ o măsură pozitivă pe X, $\mu(X) = 1$ și $f \to T_f$ reprezentarea naturală a lui A pe $H^2(\mathrm{d}\mu)$. Atunci :*

(i) *Dacă μ este o măsură Szegö-singulară, reprezentarea $f \to T_f$ este spectrală.*

(ii) *Dacă μ este o măsură Szegö și $N = [\bigcup_{\sigma^{-1}s \in S^{-1}} T\, T_s H^2(\mathrm{d}\mu)]^{\perp} = \{0\}$, atunci $f \to T_f$ este singulară.*

(iii) *Dacă μ este o măsură Szegö-totală și $N \neq \{0\}$, atunci $f \to T_f$ este total nespectrală.*

Demonstrație. Punctele (i) și (ii) rezultă din teorema 2.10. Punctul (iii) rezultă din corolarul la propoziția 4.4 și propoziția 4.5.

Punctele (i) și (ii) știm că admit și reciproce. Pentru punctul (iii) avem următoarea afirmație :

PROPOZIȚIA 4.7. *Dacă $f \to T_f$ este total nespectrală, atunci pentru orice mulțime boreliană E a lui X pentru care*

$$\chi_E \in H^2(\mathrm{d}\mu) \text{ avem } \mu(E) = 0 \text{ sau } \mu(E) = 1.$$

Demonstrație. Fie E boreliană pentru care $\chi_E \in H^2(\mathrm{d}\mu)$. Atunci subspațiul $M = \chi_E H^2(\mathrm{d}\mu)$ al lui $H^2(\mathrm{d}\mu)$ este dublu invariant. În adevăr, e clar că $T_s M \subset M$ pentru orice $s \in S$. Fie $h \in M$ și $\bar{s}h = h_1 + h_2$ cu $h_1 \in M$ și $h_2 \in \chi_E L^2(\mathrm{d}\mu)$ ortogonal pe $\chi_E H^2(\mathrm{d}\mu)$. Pentru orice $k \in H^2(\mathrm{d}\mu)$ avem :

$$\int k\, \overline{h}_2\, \mathrm{d}\mu = \int \chi_E\, k\, \overline{h}_2\, \mathrm{d}\mu = 0$$

și deci $h_2 \in H^2(\mathrm{d}\mu)^{\perp}$. Rezultă că $T_s^* h = P\bar{s}h = h_1 \in M$ și deci $T_s^* M \subset M$. Subspațiul M este deci dublu invariant și $f \to T_f$ fiind total nespectrală din corolarul la propoziția 4.4, rezultă că $M = \{0\}$ sau $M = H^2(\mathrm{d}\mu)$ adică $\mu(E) = 0$ sau $\mu(E) = 1$ ceea ce trebuia demonstrat.

CAPITOLUL V

EXEMPLE. CONCRETIZĂRI. COMENTARII

5.1. *Algebra standard.* Fie X cercul unitate $\{z : |H = 1\}$ din planul complex și A algebra funcțiilor din $C(X)$ care se prelungesc analitic în interior. Spațiul idealelor maximale ale lui A este $\mathfrak{M} = \{z;\ |z| \leqslant 1\}$ iar frontiera Silov este X.

Algebra A este Dirichlet pe X. De asemenea ea este generată de sistemul analitic liber de funcții interioare $S = \{1, z, z^2, \ldots\}$. Grupul $G = S\bar{S}$ este izomorf cu grupul întregilor, lui S corespunzîndu-i semigrupul întregilor pozitivi. Avem, evident, $S \cap \bar{S} = \{1\}$ și $G = S \cup \bar{S}$.

Fie H un spațiu Hilbert și T o contracție pe H. Punînd pentru $s \in S$ de forma $s = z^n$, $T_s = T^n$ obținem semigrupul de contracții $\{T_s\}_{s \in S}$. Din teorema 3.1 (corolar) rezultă că $\{T_s\}_{s \in S}$ admite o dilatare unitară

$\{U_g\}_{g\in G}$ deci teorema 3.1 este o generalizare a teoremei clasice de dilatare unitară a lui B. Sz. Nagy [70]. Folosind propoziția 4.3 obținem :

$$\| \sum_i c_i T_{s_i} \| = \| P \sum_i c_i U_{s_i} \| \leqslant \| \sum c_i U_{s_i} \| \leqslant \| \sum c_i s_i \| \tag{5.1.1}$$

și deci semigrupul $\{T_s\}_{s\in S}$ poate fi prelungit pînă la o reprezentare $f \to T_f$ a lui A pe H. E clar că orice reprezentare a lui A pe H poate fi obținută în acest fel. Avem de fapt $T_f = f(T)$, $f(T)$ fiind calculat în sensul calculului funcțional Foiaș — Nagy [75], [76].

Reprezentarea $f \to T_f$ (semigrupul $\{T_s\}_{s\in S}$) este spectrală (unitar) dacă și numai dacă T este unitar, deci teoremele de descompunere, teorema 2.1 și teorema 3.3, sînt generalizări ale teoremei de descompunere canonică a unei contracții în partea sa unitară și partea complet neunitară date de B. Sz. Nagy și C. Foiaș [73], [76].

Fie $\mathrm{d}x$ măsura lui Lebesgue normalizată pe X și μ o măsură pozitivă pe X. *Măsura* μ *este o măsură Szegő pe* X *dacă și numai dacă* μ *este absolut continuă în raport cu măsura Lebesgue și log* $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}$ *este integrabilă.*

În adevăr, dacă $\mu = \mu_a + \mu_s$ este descompunerea Lebesgue a lui μ în raport cu $\mathrm{d}x$, se știe că (vezi [35]).

$$H^2(\mathrm{d}\mu) = H^2(\mathrm{d}\mu_a) \oplus H^2(\mathrm{d}\mu_s). \tag{5.1.2}$$

Rezultă că dacă μ este o măsură Szegö, atunci $\mu_s = 0$. După teorema lui Szegö (vezi [35]) rezultă că $H^2(\mathrm{d}\mu) \neq L^2(\mathrm{d}\mu)$ dacă și numai dacă log $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}$ este integrabilă.

Teorema 2.8 este deci o generalizare a teoremei de absolut continuitate a măsurilor spectrale atașate dilatării unitare a unei contracții complet neunitare demonstrată în [73], [76], [45].

Să presupunem acum că T este o izometrie pe H. Atunci semigrupul $\{T_s\}_{s\in S}$ este izometric și avem

$$clm\,[\bigcup_{\sigma^{-1}s\in S^{-1}} T_\sigma^* T_s H] = TH. \tag{5.1.3}$$

Rezultă că semigrupul $\{T_s\}_{s\in S}$ este cvasiunitar dacă și numai dacă $TH = H$, adică dacă și numai dacă T este unitar. Deci în acest caz noțiunea de unitaritate coincide cu cea de cvasi-unitaritate, cea de complet-neunitaritate cu cea de total neunitaritate iar noțiunea de semigrup *singular* nu apare.

Teorema 3.6 este deci o generalizare a cunoscutei teoreme de descompunere a lui Wold [80] iar teorema 3.7 și teorema 3.8 generalizează cunoscutele rezultate clasice ale lui Beurling, Halmos, Wermer, Wold asupra operatorului de translație în $H^2(\mathrm{d}x)$ [6], [25], [79], [80].

În acest caz, teorema 4.7 este teorema clasică de predicție [39].

Să remarcăm aici că întreaga teorie depinde efectiv de spațiul X. Așa, de exemplu, dacă în loc de $\{z : |z| = 1\}$ luăm drept X în acest exemplu pe $\{z : |z| \leqslant 1\}$, atunci teorema 2.1 ne dă descompunerea lui T în partea sa normală și partea sa complet nenormală [1], [38].

5.2. *Algebre grupale.* Fie G un grup abelian și $S \subset G$ un subsemigrup al său astfel încît $S \cap S^{-1} = \{1\}$, $G = SS^{-1}$. Fie X dualul grupului discret G și A algebra funcțiilor din $C(X)$ a căror transformată Fourier se anulează în afara lui S.

După cum am văzut (teorema 4.1), algebra A este prototipul algebrelor S-generate cu S analitic liber.

Dacă $G = R$ și $S = R_+$, atunci X este compactificarea Bohr a lui R. G fiind total ordonat de S, orice semigrup $\{T_s\}_{s\in S}$ admite o dilatare unitară (teorema 3.1) și atunci

$$(5.2.1) \qquad \| \sum c_i T_{s_i} \| \leqslant \| \sum c_i U_{s_i} \| \leqslant \| \sum c_i s_i \|,$$

unde $\{U_g\{_{g\in G}$ este dilatarea unitară a lui $\{T_s\}_{s\in S}$. Orice semigrup de contracție $\{T\}_{s\in S}$ se poate prelungi deci pînă la o reprezentare $f \to T_f$ a lui A. Studiul reprezentărilor $f \to T_f$ ale lui A pe H este echivalent cu studiul semigrupurilor de contracții $\{T_s\}_{s\in S}$.

În această direcție au fost demonstrate foarte multe rezultate în [70], [71], [72], [73], [76], [47], teoremele din paragrafele 3.1, 3.2, 4.3 fiind generalizări ale acestor rezultate la cazul unui semigrup general.

Studiul semigrupului $\{T_s\}_{s\in S}$ cînd $\{T_s\}_{s\in S}$ este format din izometrii este echivalent cu o teorie a predicției cu timp continuu. Acest studiu a fost făcut în mod complet de H. Helson și D. Lowdenslager în [33], aici apărînd pentru prima dată o teoremă de tip Wold în a cărui formulă de descompunere apar trei termeni. Teorema de predicție dată în paragraful 4.3 (teorema 4.7) este o generalizare a teoremei de predicție din [33].

În cazul cînd semigrupul $\{T_s\}_{s\in S}$ este tare continuu avem

$$(5.2.2) \qquad clm\,[\bigcup_{\sigma^{-1}-s\notin S^{-1}} T_\sigma^* T_s H] = H$$

și deci în acest caz $\{T_s\}_{s\in S}$ este cvasiunitar. Aceste semigrupuri nu au deci parte de translații (discrete), partea lor complet neunitară fiind singulară.

Studiul semigrupurilor singulare este deci important, el cuprinzînd studiul semigrupurilor complet neunitare care depind continuu de un parametru real. În cazul real, acest studiu s-a făcut cu ajutorul generatorului infinitezimal și al cogeneratorului [7], [76].

Teoremele din capitolele III și IV se pot aplica însă și în cazul cînd G nu este total ordonat de S și acesta este avantajul lor major. Așa, de exemplu, ele se pot aplica în cazul algebrelor de funcții de mai multe variabile complexe, analitice pe polidiscuri, obținîndu-se rezultate analoge cu cele din cazul planului.

Următorul exemplu ne arată că teorema 3.7 se aplică și în cazuri în care G nu este total ordonat de S.

Fie G grupul multiplicativ al numerelor complexe și $S = \{\lambda : |\lambda| < 1\} \cup \{1\}$. Avem, evident, $S^{-1} \cap S = \{1\}$, $G = SS^{-1}$ și $S \cup S^{-1} \neq G$.

Fie H^2 spațiul funcțiilor de pătrat integrabil pe $\{|z| = 1\}$ care au prelungite analitice în interior. Elementele lui H^2 sînt de forma $h = \sum a_k z^k$. Definim aplicația $g \to T_g$ a lui G pe H^2 în felul următor :

$$T_g h = \begin{cases} \Sigma a_k g^k z^k \text{ pentru } |g| \leqslant 1 \\ \Sigma a_k \bar{g}^{-k} z^k \text{ pentru } |g| > 1. \end{cases}$$

Se verifică uşor că $T_1 = I$, $T_{g^{-1}} = T_g^*$, $\| T_g \| \leqslant 1$. Dacă $g_1, g_2, g_1 g_2 \in S^{-1}$, atunci, evident,

$$T_{g_1} T_{g_2} = T_{g_1 g_2}$$

şi deci condiţia (3.12) este îndeplinită.

Rezultă că aplicaţia $g \to T_g$ satisface condiţiile teoremei 3.1.

Unele din teoremele privind reprezentările naturale ale algebrelor S-generate ne conduc la rezultate de teoria predicţiei a unor procese în care timpul nu mai este privit scurgîndu-se liniar, ci într-o ordonare dată de un semigrup arbitrar.

În general, în întreaga teorie, posibilitatea de a manevra cu spaţiul compact X şi cu semigrupul S îmbogăţeşte semnificaţia rezultatelor.

Primită la redacţie la 15 februarie 1968

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

ON THE SPECTRAL THEORY OF OPERATOR REPRESENTATION OF FUNCTION ALGEBRAS

(ABSTRACT)

This expository paper presents in the unitary context the results published by C. Foiaş and the author in [20], [21], by the author in [63], [64], [66], [68] and some new results which appear especially in section 4.

Let A be a function algebra on a compact Hausdorff space X and H a Hilbert space. A *representation* of A on H is an algebra homomorphism $f \to T_f$ of A on $B(H)$ — the algebra of all bounded linear operators on H — which verifies $T_1 = I$, $\| T_f \| \leqslant \| f \|$.

The representation $f \to T_f$ of A on H is called *spectral* if it is the restriction to A of a representation of $C(X)$ on H. A subspace M of H is called *spectral* if it reduces $f \to T_f$ to a spectral representation. The representation $f \to T_f$ is called *completely nonspectral* if it has no non-zero spectral subspaces.

THEOREM. 2.1. *Let $f \to T_f$ be a representation of A on H. The space H may be decomposed uniquely in the form*

$$H = H_s \oplus H_c$$

in such a way that H_s reduces $f \to T_f$ to a spectral representation and H_c to a completely non-unitary one.

A representation $\varphi \to U_\varphi$ of $C(X)$ on K is called *a spectral dilation* of $f \to T_f$ if K contains H as a subspace and

$$T_f h = P U_f h \qquad (f \in A,\ h \in H)$$

where P is the orthogonal projection of K on H.

In paragraph 2.3 dilation theorems for the representation of Dirichlet and logmodular algebras are proved.

In paragraph 2.4 the notion of Szegő measure is introduced and the relation between them and completely nonspectral representation is established.

Section 3 deals with the spectral theory of the semigroup of contradictions (unitary dilation, canonical decomposition etc.) Let us remark the following generalization of Wold's decomposition theorem for isometries.

THEOREM 3.6. *Let* $\{T\}_{s\in S}$ *be a semi-group of isometries on* H. *The space* H *may be decomposed uniquely in the form*

$$H = H_s \oplus H_\sigma \oplus H$$

in such a way that the subspace H *reduces* $\{T_s\}_{s\in S}$ *to the unitary semi-group,* H_t *to the totally non-unitary semi-group and* H_σ *to the strange one* (for the definitions see also [68]).

The totally non-unitary semi-group characterizes the semi-group of unilateral translations on $H^2(N; S)$

In section 4 the relation between semi-groups of contractions and representation of the algebras generated by inner functions is established. In paragraph 4.3 a prediction theorem for natural representation of S-generated algebras is proved (Theorem 4.7).

BIBLIOGRAFIE

1. APOSTOL, C., *Sur la partie normale d'un ensemble d'opérateurs de l'espace de Hilbert.* Acta Math. Aci. Hung. **17** (**1**—**2**), 1—4 (1966).
2. ARENS, R., *The boundary integral of log* $|\Phi|$ *for generalized analytic functions.* Trans. Amer. Math. Soc., **86**, 57—69 (195).
3. ARENS, R., CALDERON, A., *Analytic functions of several Banach algebra elements.* Ann of Math., **62**, 204—216 (1955).
4. ARENS, R., SINGER, I. M., *Functions values as boundary integrals.* Proc. Amer. Math. Soc., **5**, 735—745 (1954).
5. — *Generalized analytic functions.* Trans. Amer. Math. Soc., **81**, 379—395 (1956).
6. BEURLING, A., *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space.* Acta Math., **81**, 239—255 (1949).
7. BISHOP, E., *Representing measures for points in a uniform algebra.* Bull. Amer. Math. Soc., **70**, 121—122 (1964).
8. BOCHNER, S., *Generalized conjugate and analytic functions without expansions.* Proc. Nat. Acad. Sci., **45**, 555—857.
9. BOHR, H., *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen* III. *Dirichletentwicklung analytischer Funktionen.* Acta Math., **47**, 237—281 (1926).
10. BOURBAKI, N., *Eléments de mathématique, Livre* VI, *Intégration.* Hermann et C-ie, Act. Sci. et Ind. 1175, Paris, 1952.
11. BREHMER, S., *Über vertauschbare Kontraktionen des Hilbertschen Raumes.* Acta Sci. Math., **22**, 106—111 (1961).
12. COOPER, I. L. B., *One-parameter semi-groupe of isometrie operators in Hilbert space.* Annals of Math., **48**, 827—842 (1947).
13. DUNFORD, N. I. — SCHWARTZ, I. *Linear operator.* Part. I, New-York, 1958.
14. FOIAȘ, C., *La mesure harmonique-spectrale et la théorie spectrale des opérateurs généraux d'un espace de Hilbert.* Bull. Soc. Math. France, **85**, 263—283 (1957).
15. — *Unele aplicații ale mulțimilor spectrale,* I. *Măsura armonică spectrală.* St. cerc. mat., **10**, 263—282 (1957).
16. — *On Hille's spectral theory and operational calculus for semi-groups of operators in Hilbert space.* Compositio Math., **14**, 71—73 (1959).
17. — *Teoria spectrală în algebre (necomutative) axată pe noțiunea de rezolventă.* Seminarul M. Nicolescu (1959—1960), București, 1962.
18. — *Modèles fonctionnels, liaison entre la théories de la prédiction, de la fonction caractéristique et de la dilatation unitaire, Deuxième colloque sur l'analyse fonctionnelle,* Liège, 4—6 mai 1964, 63—76.
19. — *Măsuri spectrale și semispectrale.* St. cerc. mat., **18**, 7—56 (1966).

20. Foiaş, C.-Suciu, I., *Szegö measures and spectral theory in Hilbert space*. Rev. Roum. de math. pures et appl., **11**, 147–159 (1966).

21. — *Asupra existenţei dilatării reprezentărilor operatoriale ale algebrelor de funcţii* (în preparare).

22. Gelfand, I. M., Raikov, A., Silov, G., *Commutativnie normirovannie kolţa*. Fizmatghiz, Moscova, 1960.

23. Gleason, A., *Function algebras*. Seminars on Analytic Functions, Institute for Advanced Study, Princeton, 1957.

24. Gorin, E. A., *Macsimal'nie algebra kommutativnih Banachovih algebr s involuţiei*. Matem. Zametki, **1** 173–178 (1967).

25. Halmos, P. R., *Shifts on Hilbert spaces*, J. reine angew Math., **288** (1961), 102–112.

26. Halperin, I., *The unitary dilation of a contraction operators*. Duke, Math. J., **28**, 563–571 (1961).

27. — *Sz. Nagy-Brehmer dilations*. Acta Sci. Math., **23**, 279–289 (1962).

28. — *Unitary dilations which are orthogonal bilateral shift operators*, Duke Math. J., **29**, 573–580 (1962).

29. — *Intrinsic description of the Sz. Nagy-Brehmer dilation*. Studia Math., **22**, 211–219 (1963).

30. — *Interlocking dilations*. Duke Math. J., **30**, 475–484 (1963).

31. Helson, H., *Lectures on invariant subspaces*. Academic Press, New York, 1964.

32. Helson, M., Lowdenslager, D., *Prediction theory and Fourier series in several variables I*. Acta Math., **99**, 165–202 (1952).

33. — *Prediction theory and Fourier series in several variables. II*. Acta Math., **99**, 175–213 (1961).

34. Hille, E., *Functional analysis and semi-groups*. New York, 1948.

35. Hoffman, R., *Banach space of analytic functions*. Englewood Cliffe, N. Y., 1962.

36. — *Analytic functions and logmodular, Banach algebras*. Acta Math., **108**, 271–317 (1962).

37. Ionescu Tulcea, C. T., *Spaţii Hilbert*. Ed. Academiei, Bucureşti, 1956.

38. Ito, T., *On the commutative family of subnormal operators*. J. Fasc. Sci. Yoshide, Univ., **11**, *14*, 1–15 (1958).

39. Kolmogorov, A. N., *Stationary sequences in Hilbert space*. Bull. N.G.U., **2** (1941).

40. Loomis, L. H., *An introduction to abstract harmonic analysis*. New York, 1953.

41. Marinescu, G., *Spaţii vectoriale normate*. Ed. Academiei, Bucureşti, 1956.

42. Mesani, P., *The prediction theory of multivariate stochastic processes. III*. Acta Math., **104**, 41–162 (1959).

43. — *Shift invariant spaces and prediction theory*, Acta Math., **107**, 275–290 (1962).

44. Mlak, W., *Characterization of completely non-unitary contractions in Hilbert space*. Bull. Acad. Polon. Sci. (rev. math. phys.), **12**, 111–114 (1963).

45. — *Note on the unitary dilation of a contraction in Hilbert space*. Bull. Acad. Polon. Sci. (rev. math. and. phys.), **12**, 111–114 (1963).

46. Mlak, W., *Some prediction theoretical properties of unitary dilations*. Bull. Acad. Polon. Sci., **13**, 211–214 (1965).

47. — *Unitary dilation of contractione operator mat.*, **46**, 31–88 (1965).

48. — *Unitary dilation in case of ordered groups*. Ann. Pol. Math., **17**, 321–328 (1965).

49. — *On semigroups of contractions in Hilbert spaces*. Studia Math., **26**, 263–272 (1966).

50. — *Representation of some algebras of generalized analytic functions*. Bull. Acad. Polon. Sci., **13**, 211–214 (1965).

51. Neumark, M. A., *Positive definite operator valued functions on a commutative group*. Bull. (Izvestia) Acad. Sci. URSS, **7**, 237–244 (1943).

52. — *Self-adjoint extensions of second kind of a symmetry operator*. Bull. Acad. Sci. URSS, **4**, 53–104 (1940).

53. — *On a representation of additive operator set functions*. C.R. (Dokladi) Acad. Sci. URSS, **41**, 359–361 (1943).

54. — *Normirovannie kolţa*, Moskva, 1956.

55. Nicolescu, M., *Analiza Matematică*, vol. III, Ed. tehnică, Bucureşti, 1960.

56. Riesz, F-B. Sz. Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Budapest–Paris (IVe éd), 1965.

57. Schäffer, I. I., *On unitary dilations of contractions*. Proc. Amer. Math. Soc., **6**, 322 (1955).

58. Schreiber, M., *Unitary dilations of operators*. Duke Math. J., **23**, 579–594 (1956).

59. — *A functional calculus for general operators in Hilbert space*. Trans. Amer. Math. Soc., **87**, 108–118 (1958).

60. Suciu, I., *Natürliche Erweiterung der kommutativen Banach-algebra*. Rev. de math. pures et appl., **7**, 483–491 (1962).

61. — *Bruchalgebra der Banachalgebren*. Rev. de math. pures et appl., **8**, 313—316 (1963).

62. — *Algebre Banach analitice*. St. cerc. mat., **15** 55—76 (1964).

63. — *Reprezentări spectral dilatabile ale unei algebre Banach comutative*. St. cerc. mat., **16**, 1211—1220 (1964).

64. — *On the algebras generated by the inner functions*. Rev. Roum. de math. pures et appl., **10**, 1423—1430 (1965).

65. — *Şiruri de interpolare şi spaţiul idealelor maximale ale lui H^{∞}*. St. cerc. mat., **18** 1029—1038 (1966).

66. — *Unitary dilation in case of partially ordered group*. Bull. Acad. Polon. Sci. (rev. math. phys), **VX**, 271—275 (1967).

67. — *Teoria spaţiilor H^{p} în cazul algebrelor de funcţii*. St. cerc. mat., **19**, 757—801 (1967).

68. — *On the semigroups of isometrics*. Studia Math., **XXX**, 177—186 (1968).

69. Szegö, G., *Über die Randwerte analytischer Funktionen*. Math. Ann., **84**, 232—244 (1921).

70. Sz. Nagy, B., *Transformations de l'espace de Hilbert, fonctions de type positif sur un groupe*. Acta. Sci. Math., **15** 104—114 (1954).

71. — *Prolongements de transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace*. Appendice la cartea *Leçons d'analyse fonctionnelle* de F. Riesz, B. Sz. Nagy (ed. VI, 1955).

72. Sz. Nagy, B. Foiaş, C., *Sur les contractions de l'espace de Hilbert*. III. Acta Sci. Math., **19** (1958).

73. — *Sur les contractions de l'espace de Hilbert*. IV. Acte Sci. Math., **21**, 251—259 (1960).

74. — *Sur les contractions de l'espace de Hilbert. V. Translations bilatérales*. Acta Sci. Math., **23**, 6—129 (1962).

75. — *Sur les contractions de l'espace de Hilbert*. VI. *Calcul fonctionnel*. Acta Sci. Math., **23**, 130—167 (1962).

76. — *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*. Acad. U., Budapest, 1967.

77. Wermer, I., *Dirichlet algebras*. Duke J. Math., **27**, 373—382 (1960).

78. — *Banach algebra and analytic functions*. Adnoces in Mathem. Acad. Press, New York, 1961.

79. — *On restrictions of operators*. Proc. Amer. Math. Soc., **4**, 860—865 (1953).

80. Wold, M. A., *Study in the analysis of stationary time series*. Stockholm, 1938.

DETERMINAREA UNOR MĂRIMI STATISTICE CARACTERISTICE ÎN CAZUL DIFERITELOR PROCESE STOHASTICE

DE

HUBA SZÖCS
(Baia Mare)

În lucrarea de față sînt prezentate o serie de mărimi statistice, uzuale sau propuse de diferiți autori, în vederea unei caracterizări cît mai adecvate ale proceselor stohastice diferite.

Autorul definește ,,valoarea de X procente", ,,dispersia de X procente" și altele derivate din cele din urmă, stabilește corespondența funcțională între acestea și, precizînd semnificația lor, le sistematizează.

Rezultatele obținute în cazul proceselor stohastice ergodice le generalizează pentru cazul proceselor structural omogene (staționare și nestaționare), transformînd în prealabil aceste procese în ansambluri statistice.

În sfîrșit, autorul obține niște mărimi statistice generalizate ale proceselor structural-omogene, depinzînd evident de limita omogeneității, dar independente de momentul analizei și de durata procesului stohastic.

Dată fiind importanța crescîndă a teoriei proceselor stohastice în știință și tehnică (procese tehnologice diferite), în teoria și tehnica automatelor și calculatoarelor diferite precum și în teoria și tehnica transmisiunii informației, în ultimii ani s-au sporit eforturile în vederea introducerii unor mărimi caracteristice noi [1], [2], [3] pentru o descriere cît mai adecvată a diferitelor procese stohastice.

Cu toate că mărimile respective se dovedesc foarte utile, ele se definesc empiric sau grafic (v. lucrările citate), iar o fundamentare matematică riguroasă a acestor mărimi lipsește cu desăvîrșire. În plus, în majoritatea covîrșitoare a cazurilor, implicit se admite ergodicitatea *a priori* a procesului stohastic considerat, evident în dauna generalității.

Ne propunem deci, avînd în vedere cele spuse, de a defini cîteva noțiuni de bază, a fundamenta mărimile propuse, generalizîndu-le și pentru

ST. CERC. MAT., TOM. 20 NR. 9, P. 1409–1416, BUCUREȘTI. 1968

unele procese stohastice mai generale, în vederea integrării lor în teoria statistică generală a proceselor stohastice.

1. În vederea unei dezvoltări sistematice, luînd în considerație [1] și [2] definim următoarele mărimi :

1.1. *Valoarea de X procente*, este acea valoare a variabilei aleatoare $\xi(t)$, care a fost realizată sau chiar depășită în $X\%$ a intervalului de timp $[0, T]$ (timpul de observație). Simbol ξ_X.

Să considerăm o realizare particulară oarecare

$$\xi = \xi(t) \tag{1}$$

a unui proces stohastic

$$\{\xi^{(k)}(t)\}, \quad k = 1, 2, \ldots, n \text{ și } t \in [0, T],$$

și să considerăm suma intervalelor de timp

$$\Delta T = \sum_{i=1}^{m} \Delta t_i \tag{2}$$

în care variabila ξ rămîne sub o valoare-prag x

$$\xi < x.$$

Atunci, în ipoteza că intervalul de observație $[0, T]$ este suficient de lung, respectiv T este suficient de mare [4], raportul $\Delta T/T$ aproximează *probabilitatea* realizării acestui eveniment, adică

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \Delta t_i}{T} \simeq P[\xi(t) < x] = p. \tag{3}$$

Procedînd analog pentru toate valorile posibile ale lui x, obținem funcția de repartiție corespunzătoare

$$F(x) = P[\xi(t) < x]. \tag{4}$$

Evident, probabilitatea q ca variabila ξ să fie egală sau chiar să depășească această valoare

$$\xi \geqslant x$$

adică tocmai probabilitatea evenimentului contrar, se obține aplicînd principiul probabilității evenimentelor incompatibile, adică

$$q = P[\xi(t) \geqslant x] = 1 - p \simeq 1 - \frac{\Delta T}{T} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{m} \Delta t_i}{T}. \tag{5}$$

Astfel valoarea de X procente ξ_X a variabilei ξ, este tocmai valoarea care se realizează cu probabilitatea

$$q = 1 - p \simeq 1 - \frac{\frac{X}{100} \cdot T}{T} = 1 - \frac{X}{100}. \tag{6}$$

Adică vom avea

$$(7) \qquad \xi_X = F^{-1}(q) = F^{-1}(1-p) = F^{-1}\left(1 - \frac{X}{100}\right) = G^{-1}\left(\frac{X}{100}\right),$$

unde $F(x)$ este funcţia de repartiţie a variabilei $\xi = \xi(t)$ şi

$$G(x) = P[\,\xi(t) \geqslant x] = 1 - P[\xi(t) < x] = 1 - F(x)$$

funcţia integrală de repartiţie a probabilităţii evenimentului complementar, iar F^{-1} şi G^{-1} funcţiile inverse corespunzătoare.

1.2. *Valoarea de 50 procente* ξ_{50} a variabilei ξ (valoarea mediană) se caracterizează prin probabilitatea

$$p = 1 - q = 1 - 50/100 = 1 - 1/2 = 1/2$$

deci avem

$$\xi_{50} = F^{-1}(50/100) = F^{-1}(1/2) = G^{-1}(1/2).$$

1.3. Valoarea de 5 procente sau *valoarea cvasimaximă* ξ_5 evident, va avea expresia

$$\xi_5 = F^{-1}(1 - 5/100) = G^{-1}(5/100).$$

1.4. *Dispersia de X procente* σ_X a variabilei ξ este abaterea (diferenţa) valorii de X procente ξ_X de la valoarea de 50 procente ξ_{50} (valoare mediană) a variabilei ξ:

$$(8) \qquad \begin{aligned} \sigma_X = \xi_X - \xi_{50} &= F^{-1}(1 - X/100) - F^{-1}(50/100) = \\ &= G^{-1}(X/100) - G^{-1}(50/100). \end{aligned}$$

Observaţia 1. Valoarea de 50 procente ξ_{50} (valoarea mediană) nu este identică cu valoarea medie $M[\xi]$ a variabilei ξ. Drept ilustrare să considerăm funcţia de variabilă aleatoare

$$Y = \mathrm{e}^X, \quad \text{unde} \quad X \in [a,\, b]$$

iar X se caracterizează printr-o distribuţie uniformă:

$$(9) \qquad F(x) = P[X < x] = \frac{x-a}{b-a}.$$

Din (9) rezultă [4] funcţia de distribuţie a lui Y

$$(10) \qquad \Phi(y) = P[Y < y] = \frac{\ln y - a}{b-a}$$

de unde:

— valoarea de 50 procente (valoare mediană)

$$Y_{50} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(a+b)};$$

— valoarea medie (pe interval)

$$M(Y) = \frac{1}{b-a}(e^b - e^a).$$

2. Luînd în considerație definițiile 1.1 — 1.4, precum și observația 1, putem asigura o formulare exactă a mărimilor propuse în [1].

Astfel vom da următoarele definiții :

2.1. *Valoarea logaritmică de X procente* $\langle \xi_x \rangle$ a variabilei ξ, caracterizînd procesul stohastic *în condițiile unui nivel de referință* ξ_{ref} dinainte stabilit, este proporțională cu logaritmul raportului valorii de X procente ξ_x și a valorii (nivelului) de referință ξ_{ref} a variabilei ξ :

$$\langle \xi_x \rangle = K \cdot \lg \frac{\xi_x}{\xi_{\text{ref}}}, \tag{11}$$

unde K este o constantă pozitivă arbitrară.

Observația 2. În cazul particular , destul de frecvent în practică, ξ_{ref} este egală cu unitatea, $\xi_{\text{ref}} = 1$. În aceste cazuri obținem

$$\langle \xi_x \rangle = K \,.\, \lg \xi_x \tag{12}$$

iar dacă $K = 20$, avem

$$\langle \xi_x \rangle = 20.\lg \xi_x$$

și $\langle \xi_x \rangle$ se exprimă în decibeli (dB), caracterizînd *atenuarea procesului.*

2.2. *Dispersia logaritmică de X procente* $\langle \sigma_x \rangle$ a variabilei ξ, caracterizînd procesul stohastic în condițiile unui nivel de referință dinainte stabilit ξ_{ref}, este diferența între valoarea logaritmică de X procente $\langle \xi_x \rangle$ respectiv valoarea logaritmică de 50 procente $\langle \xi_{50} \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x \rangle &= 20 \cdot \lg \xi_x - 20 \cdot \lg \xi_{50} = 20 \cdot \lg \frac{\xi_x}{\xi_{50}} = \\ &= 20 \cdot \lg \frac{F^{-1}(1 - X/100)}{F^{-1}(50/100)} = 20 \cdot \lg \frac{G^{-1}(X/100)}{G^{-1}(50/100)}. \end{aligned} \tag{13}$$

Pentru caracterizarea statistică a procesului stohastic pe o durată mai lungă (lună sau an) se consideră :

2.3. Dispersia medie logaritmică de 10 procente, lunară sau anuală a variabilei ξ (caracterizînd desfășurarea procesului stohastic într-o lună sau an), este valoarea medie aritmetică a dispersiei logaritmice de 10 procente

$$\langle \sigma_m \rangle = \frac{1}{z} \sum_{i=1}^{z} \langle \sigma_{10,i} \rangle. \tag{14}$$

unde z indică numărul zilelor de observație.

Avem

$$(15)\qquad \langle \sigma_m \rangle = \frac{1}{z}\sum_{i=1}^{z} 20\,(\lg \xi_{10,i} - \lg \xi_{50,i}) = 20\sum_{i=1}^{z}\left(\frac{1}{z}\lg \xi_{10,i} - \frac{1}{z}\lg \xi_{50,i}\right) = 20\left(\frac{1}{z}\lg\prod_{i=1}^{z}\xi_{10,i} - \frac{1}{z}\lg\prod_{i=1}^{z}\xi_{50,i}\right) =$$

$$= 20\left[\lg\left(\prod_{i=1}^{z}\xi_{10,i}\right)^{1/z} - \lg\left(\prod_{i=1}^{z}\xi_{50,i}\right)^{1/z}\right] = 20\cdot\lg\frac{\sqrt[z]{\prod_{i=1}^{z}\xi_{10,i}}}{\sqrt[z]{\prod_{i=1}^{z}\xi_{50,i}}}$$

În consecință, măsura dispersiei medii logaritmice de 10 procente este proporțională cu logaritmul raportului *mediilor geometrice* a valorilor de 10 procente $\xi_{10,i}$ și valorilor de 50 procente $\xi_{50,i}$, obținute din observațiile zilnice într-o lună sau an.

3. În cele ce urmează se vor determina mărimile statistice definite la punctele 1 și 2 în cazul proceselor stohastice degenerate. Este evident că definițiile date sub 1 și 2 pot fi valabile numai dacă admitem că procesul stohastic considerat $\xi = \xi(t)$ este o realizare particulară oarecare a unui proces stohastic ergodic $\{\xi^{(k)}(t)\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ (n suficient de mare), deoarece numai în cazul acesta mediile statistice (mediile pe mulțimi) pot fi înlocuite prin mediile temporare pe realizații [4].

În cele ce urmează vom generaliza noțiunile introduse sub 1 și 2 pentru procesele stohastice degenerate [6], adică pentru acele procese stohastice la care spațiul realizațiilor particulare $\{\xi^{(k)}(t)\}$ conține numai o singură realizare $\xi = \xi(t)$, și *fără ca să admitem a priori ergodicitatea procesului stohastic.*

Astfel, pentru o cunoaștere mai adîncă a caracterului de variație a variabilei ξ *se impune în primul rînd* **analiza structural-temporară** a procesului stohastic considerat.

Presupunînd cunoscută valoarea medie temporară M a procesului stohastic

$$(16)\qquad M(t, T) = M[\xi(t)]$$

se pot ivi două cazuri :

3.1. Procesul este structural omogen, adică avem

$$|M[\xi(T)] - M[\xi(T_0)]| \leqslant \varepsilon$$

pentru $T \geqslant T_0$, unde T_0 este limita omogeneității [6], [7], T durata observației, iar ε un număr pozitiv arbitrar, dar suficient de mic (de exemplu eroarea de măsură admisibilă).

În acest caz, așa cum am demonstrat în lucrarea [6], este posibilă transformarea procesului stohastic degenerat într-un ansamblu statistic echivalent, ca atare este posibilă analiza statistică a fenomenului.

Pentru transformare vom aplica metoda ciclizării [6]: Fie deci $t = t_0$ momentul inițial al analizei (observației) și să luăm intervalul Δt între momentele echivalente de timp astfel ca

$$\Delta t \geqslant T_0. \tag{17}$$

Variabila ξ în acest caz ia valorile:

$$\xi(t_0; \Delta t) = [\xi^{(1)}(t_0), \xi^{(2)}(t_0), \ldots, \xi^{(n+1)}(t_0)], \tag{18}$$

unde

$$\begin{aligned} \xi^{(1)}(t_0) &= \xi(t_0) \\ \xi^{(2)}(t_0) &= \xi(t_0 + \Delta t) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi^{(n+1)}(t_0) &= \xi(t_0 + n \cdot \Delta t) \end{aligned} \tag{19}$$

iar

$n + 1$ este ordinea ansamblului statistic (numărul de realizații particulare).

În felul acesta am asigurat independența statistică a valorilor variabilei $\{\xi^{(k)}(t_0)\}$, $k = 1, 2, \ldots, n + 1$ și în baza lui (19) vom determina funcțiile integrale de repartiție:

$$F(x_i; t_0, \Delta t) = P[\xi < x_i] \tag{20}$$

$$G(x_i; t_0, \Delta t) = P[\xi \geqslant x_i] \tag{21}$$

unde x_i constituie niște valori discrete pozitive dinainte stabilite. Din (20) și (21) rezultă, conform (7) și (8) respectiv (12) și (13), valorile de X procente și valorile logaritmice de X procente:

$$\xi_x(t_0, \Delta t) = G^{-1}(X/100; t_0, \Delta t) \tag{22}$$

$$\sigma_x(t_0, \Delta t) = G^{-1}(X/100; t_0, \Delta t) - G^{-1}(50/100; t_0, \Delta t) \tag{23}$$

$$\langle \xi_x(t_0, \Delta t) \rangle = 20 \cdot \lg \xi_x(t_0, \Delta t) \tag{24}$$

și

$$\langle \sigma_x(t_0, \Delta t) \rangle = 20 \lg \frac{G^{-1}(X/100; t_0, \Delta t)}{G^{-1}(50/100; t_0, \Delta t)}. \tag{25}$$

În general, cantitățile (22)—(25) depind efectiv de t_0 și Δt, căci și funcțiile F respectiv G depind efectiv de acestea.

Cazuri particulare:

3.1.a. Procesul stohastic $\{\xi^{(k)}(t_0)\}$ este staționar. În acest caz funcțiile de repartiție F și G nu depind de momentul inițial al observației t_0, numai de intervalul Δt, deci

$$F = F(x_i; \Delta t)$$
$$G = G(x_i; \Delta t)$$

și evident valorile (22)—(25) sînt și ele staționare (constante).

3.1.b. Procesul stohastic $\{\xi^{(k)}(t_0)\}$ este nestaționar. În cazul acesta valorile (22)—(25) nu sînt constante și *se impune o nouă mediere a lor.*

Acest lucru poate fi făcut prin medierea în timp a funcţiilor integrale de repartiţie (20) şi (21).

Extinzînd metoda de mediere a lui Harkevici [8], să considerăm mulţimea discretă a momentelor iniţiale

$$\{t_p\}, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots, P \tag{26}$$

Funcţia (20) o vom scrie sub forma :

$$F(x_i\,;\, t_p, \Delta t) = \sum_{x_i < x} P(x_i\,;\, t_p, \Delta t) = \sum_{x_i < x} P(x_i, t_p, \Delta t)\cdot u(x - x_i), \tag{27}$$

unde $u = u(x - x_i)$ este funcţia treaptă-unitate a lui Heaviside [9].

Funcţia — medie de repartiţie va fi în acest caz

$$F_m(x_i\,;\, \Delta t) = \frac{1}{t_P - t_0} \sum_{p=0}^{P-1} F(x_i\,;\, t_p,\, \Delta t)\cdot(t_{p+1} - t_p) \tag{28}$$

respectiv în cazul evenimentului complementar

$$G_m(x_i\,;\, \Delta t) = \frac{1}{t_P - t_0} \sum_{p=0}^{P-1} G(x_i\,;\, t_p,\, \Delta t)\cdot(t_{p+1} - t_p). \tag{29}$$

În concluzie, valorile de X procente, obţinute în baza lui (28) şi (29) nemai conţinînd parametrul t_0,

$$\xi_X(\Delta t) = G_m^{-1}(X/100), \tag{30}$$

$$\sigma_X(\Delta t) = G_m^{-1}(X/100) - G_m^{-1}(50/100), \tag{31}$$

vor fi determinate în mod unic pentru intervalul $t_p - t_0$; ca atare ele *constituie nişte caracteristici statistice generalizate* ale variabilei ξ, respectiv ale procesului stohastic $\xi = \xi(t)$ considerat.

3.2. Procesul stohastic nu este structural-omogen, în consecinţă procesul trebuie studiat în baza mediilor temporare (pe interval), întrucît mediile statistice (mediile pe mulţimi) sînt lipsite de sens. Mediile temporare vor fi dependente de lungimea intervalului de observaţie T, şi de t (momentul iniţial).

Primită la redacţie la 12 februarie 1968.

Institutul pedagogic Baia Mare

DÉTERMINATION DE QUELQUES QUANTITÉS STATISTIQUES CARACTÉRISTIQUES DANS DIFFÉRENTS PROCESSUS STOCHASTIQUES

RÉSUMÉ

Dans cet article on présente quelques quantités statistiques usuelles ou proposées par divers auteurs pour caractériser les différents processus stochastiques. Etant donné que ceux-ci présentent une très grande importance pour les sciences et la technique, on les soumet

dans le présent ouvrage à une analyse mathématique rigoureuse, en les intégrant dans la théorie générale de la statistique mathématique. Le procédé devient nécessaire puisque les notions et les quantités considérées sont définies jusqu'à présent seulement empiriquement, sans un fondement mathématique adéquat.

L'auteur définit «la valeur de X pour cent», «la dispersion de X pour cent», ainsi que d'autres dérivées qui en résultent, tout en établissant la correspondance fonctionnelle entre ces quantités et en indiquant leur signification, pour les systématiser ensuite.

Les résultats obtenus dans le cas des processus stochastiques ergodiques sont généralisés pour les processus structuralo-homogènes (stationnaires et non stationnaires) en les transformant préalablement en un ensemble statistique.

Enfin, on obtient quelques quantités statistiques généralisées pour les processus structuralo-homogènes qui dépendent évidemment de la limite d'homogénéité, mais sont indépendantes du moment de l'analyse et de la durée des processus stochastiques.

BIBLIOGRAFIE

1. H. Fricke, *Feldstärkemessungen in Hochfrequenzfeldern I. Begriffsbestimmungen.* ATM (Archiv für technisches Messen), **L**, 276, Jan. 1959.
2. Gh. Cosma, *Propagarea undelor electromagnetice.* Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1965.
3. H. Meinke-F. W. Gundlach, *Taschenbuch der Hochfrequenztechnik.* Springer-Verlag, Berlin, 1955.
4. A. Spătaru, *Teoria transmisiunii informației.* Ed. tehnică, București, 1965.
5. M. R. Fazlollah, *An Introduction to Information Theory.* Mc. Graw-Hill Book Co., Inc.
6. H. Szöcs, *O metodă de transformare a proceselor structural-omogene în ansambluri statistice* St. cerc. mat., **20**, 2 (1968).
7. V. V. Furduev, *O nekotorih osnovnih poniatiah teorii signalov.* Radiotehnika, **12**, *4* (1957).
8. A. A. Harkevici, *O vicislenii spektrov sluciainih protessov.* Radiotehnika, **12**, *5* (1957).
9. C. Vazaca, *Analiza și sinteza sistemelor automate liniare.* Ed. Academiei, București, 1961.
10. Gy. Fodor, *Laplace Transforms in Engineering.* Akadémiai Könyvkiadó, Budapesta, 1965.

ASUPRA VERIFICĂRII IPOTEZEI EGALITĂȚII MEDIILOR CU AJUTORUL CONTRASTELOR

DE

EMILIANA URSIANU

În această lucrare se dă un test F pentru verificarea ipotezei din analiza dispersională referitoare la egalitatea mediilor, folosind un contrast în aceste medii. Acest test se bazează pe o variabilă aleatoare F_{1,f_e}. Importanța sa este că pune în evidență posibilitatea aplicării testului t pentru verificarea ipotezei menționate.

1. Forma generală a unui model de analiză dispersională este ([3], § 3.1)

$$(1)\quad \Omega \begin{cases} y_{ij} = \beta_i + e_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, i; \quad j = 1, 2, \ldots, J_i \\ \{e_{ij}\} \text{ sînt independente și repartizate } N(0, \sigma^2) \end{cases}$$

unde $(y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{iJ_i})$ este o selecție din a i-a populație normală cu dispersii egale, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i$ sînt mediile lor și $\{e_{ij}\}$ sînt erorile. Modelul matematic se mai poate scrie ([3], § 3.1):

$$(2)\quad \Omega' \begin{cases} y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij} \\ \{e_{ij}\} \text{ sînt independente și repartizate } N(0, \sigma^2). \end{cases}$$

Ipoteza fundamentală care se verifică în analiza dispersională este pentru (2):

$$H : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_i = 0,$$

ceea ce este echivalent pentru modelul (1) cu ipoteza:

$$(3)\qquad H : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_i = \beta\ (= \text{const.})$$

Se observă că:

$$(4)\qquad \eta_{ij} = M(y_{ij}) = \mu + \alpha_i = \beta_i.$$

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 9, P. 1417–1427, BUCUREȘTI, 1968

Suma pătratelor $\mathcal{S}(y, \beta)$ care trebuie minimizată în ipoteza Ω este :

$$\mathcal{S}(y, \beta) = \sum_{i=1}^{i} \sum_{j=1}^{J_i} (y_{ij} - \beta_i)^2,$$

de unde se deduce că ecuațiile normale în ipoteza Ω sînt :

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \beta_\nu} = -2 \sum_{j=1}^{J_i} (y_{\nu j} - \beta_\nu) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, I$$

Aceste ecuații dau estimațiile liniare nedeplasate ale parametrilor β_i ([3], § 3.1) :

$$\hat{\beta}_i = \frac{\sum_{j=1}^{J_i} y_{ij}}{J_i} = y_{i*}.$$

În ipoteza $\omega = \Omega \cap H$ suma pătratelor devine :

$$\mathcal{S}\omega = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J_i} (y_{ij} - \beta)^2$$

de unde se deduce că estimația liniară nedeplasată a lui $\beta = \beta_i$, $1 \leqslant i \leqslant I$ este :

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J_i} y_{ij}}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{J_i} J_i y_{i*}}{n}.$$

2. Verificarea ipotezei H asupra parametrilor β_i este echivalentă cu verificarea unei ipoteze nule asupra unui contrast în parametrii β.

Se numește *funcție parametrică* o funcție liniară de parametrii necunoscuți $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_I\}$ cu coeficienții cunoscuți $\{c_1, c_2, \ldots, c_I\}$:

$$\Psi = \sum_{i=1}^{I} c_i \beta_i .$$

Se numește *contrastul parametrilor* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_I$ sau *contrastul în mediile* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_I$ ale observațiilor y_{ij} o funcție parametrică în care coeficienții c_i satisfac relația

$$\sum_{i=1}^{I} c_i = 0 , \qquad I \geqslant 2.$$

În [2] s-a stabilit următoarea teoremă :

O funcție parametrică Ψ admite estimație dacă și numai dacă $\Psi = u'XX'\beta$, unde u este un vector arbitrar și X' este o matrice de următoarea formă : primele J_1 linii sînt de forme ρ_1', următoarele J_2 linii sînt de forma ρ_2' etc., ultimele J_I linii sînt de forma ρ_I', unde $\rho_i' = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{iI})$ este i-a linie a matricii unitare :

$$X'^{(nxI)} = \begin{pmatrix} 1\ 0\ 0\ \ldots\ldots\ldots\ 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1\ 0\ 0\ \ldots\ldots\ldots\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ \ldots\ldots\ldots\ 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ 1\ 0\ \ldots\ldots\ldots\ 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ 0\ 0\ \ldots\ldots\ldots\ 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ 0\ 0\ \ldots\ldots\ldots\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} J_1 \text{ linii} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} J_2 \text{ linii} \\ \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} J_I \text{ linii} \end{matrix} \quad , \qquad n = \sum_{i=1}^{I} J_i$$

Tot în [2] s-a demonstrat că :

Estimația liniară nedeplasată $\hat{\Psi}$ a lui Ψ are forma

$$\hat{\Psi} = u' X X' \hat{\beta} = u' X y,$$

unde $\hat{\beta}$ este soluția ecuațiilor normale $XX' \hat{\beta} = Xy$.

Teorema rămîne adevărată și cînd $\sum_{i=1}^{I} c_i = 0$.

Următoarea lemă stabilește forma estimației liniare nedeplasate a contrastului Ψ utilizînd aceste rezultate. Se regăsește expresia estimației nedeplasate $\hat{\Psi}$ fără a folosi ecuațiile normale și teorema Gauss-Markov sub forma explicită ([3], § 1.4).

LEMA 1. *Estimația liniară nedeplasată a contrastului* $\Psi = \sum_{i=1}^{I} c_i \beta_i$, *cu* $\sum_{i=1}^{I} c_i = 0$ *se poate pune sub forma* :

$$\hat{\Psi} = y_*^1 - y_*^2. \tag{5}$$

Demonstrație. Folosim scrierea matricială pentru funcția parametrică : $\Psi = c'\beta$, pentru a pune în evidență mai ușor calculele. Conform lemei 1 :

$$\Psi = c'\beta = u' X X' \beta$$

dacă și numai dacă $c' = u'XX'$, sau :

$$(c_1, c_2, \ldots, c_I) = (u_1\, u_2 \ldots u_I) \begin{pmatrix} J_1\ 0\ \ldots\ldots\ 0 \\ 0\ J_2\ \ldots\ldots\ 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ 0\ \ldots\ldots\ J_I \end{pmatrix} = (u_1 J_1, \ldots, u_I J_I).$$

Deci

$$c_i = u_i J_i\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, I)$$

sau

$$u_i = \frac{c_i}{J_i}\,.$$

Atunci

$$\hat{\Psi} = u'Xy = \left(\frac{c_1}{J_1}, \dots, \frac{c_I}{J_I}\right) \begin{pmatrix} \overbrace{1\;1\;.\;.\;.\;1}^{J_1 \text{ coloane}} & .\;.\;. & \overbrace{0\;0\;.\;.\;.\;0}^{J_I \text{ coloane}} \\ 0\;0\;.\;.\;.\;0 & .\;.\;. & 0\;0\;.\;.\;.\;0 \\ .\;.\;.\;.\;.\;. & .\;.\;. & .\;.\;.\;.\;.\;. \\ 0\;0\;.\;.\;.\;0 & .\;.\;. & 1\;1\;.\;.\;.\;1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} \\ . \\ . \\ . \\ y_{1J_1} \\ . \\ . \\ . \\ y_{I1} \\ . \\ . \\ . \\ y_{1J_1} \end{pmatrix} =$$

$$= \Big(\overbrace{\frac{c_1}{J_1}, \dots, \frac{c_1}{J_1}}^{J_1}, \dots, \overbrace{\frac{c_I}{J_I}, \dots, \frac{c_I}{J_I}}^{J_I}\Big) \begin{pmatrix} y_{11} \\ . \\ . \\ . \\ y_{1J_1} \\ . \\ . \\ . \\ y_{I1} \\ . \\ . \\ . \\ y_{1J_1} \end{pmatrix} = \frac{c_1}{J_1} \sum_{j=1}^{J_1} y_{1j} + \dots + \frac{c_I}{J_I} \sum_{j=1}^{J_I} y_{Ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J_i} \frac{c_i}{J_i} y_{ij} = \sum_{i=1}^{I} c_i \sum_{j=1}^{J_i} \frac{y_{ij}}{J_i} = \sum_{i=1}^{I} c_i y_{i*}.$$

Dacă se introduc notațiile:

$$\sum_{j=1}^{J_i} y_{ij} = J_i \, y_{i*} = Y_i$$

sau

$$y_{i*} = \frac{Y_i}{J_i},$$

atunci estimația liniară nedeplasată $\hat{\Psi}$ se scrie:

$$\hat{\Psi} = \sum_{i=1}^{i} c_i \hat{\beta}_i = \sum_{i=1}^{i} c_i y_{i*} = \sum_{i=1}^{i} \frac{c_i}{J_i} Y_i = \sum_{i=1}^{i} \lambda_i Y_i, \tag{6}$$

unde

$$\lambda_i = \frac{c_i}{J_i}, \qquad i = 1, 2, \dots, I. \tag{7}$$

Deci $c_i = \lambda_i J_i$. Cum $\sum_{i=1}^{I} c_i = 0$, rezultă și $\sum_{i=1}^{I} \lambda_i J_i = 0$. Dacă notăm :

$$c_i = \begin{cases} c'_i, & i = 1,2,\ldots, b,\ b \geqslant 1 \quad \text{astfel ca } c'_i \geqslant 0 \\ -c''_i & i = b+1,\ b+2, \ldots, I \quad \text{astfel ca } c''_i \leqslant 0 \end{cases}$$

atunci estimația liniară nedeplasată $\hat{\Psi}$ se mai poate scrie :

$$\hat{\Psi} = \sum_{i=1}^{b} c'_i y_{i*} - \sum_{i=b+1}^{I} c''_i y_{i*} = y^1_* - y^*_2,$$

unde

$$y^1_* = \sum_{i=1}^{b} c'_i y_{i*} \quad \text{și} \quad y^*_2 = \sum_{i=b+1}^{I} c''_i y_{i*}.$$

Se observă imediat că :

$$D(y^1_*) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{b} \frac{c'^2_i}{J_i}$$

$$D(y^2_*) = \sigma^2 \sum_{i=b+1}^{I} \frac{c''^2_i}{J_i},$$

deci

$$D(\hat{\Psi}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{I} \frac{c_i^2}{J_i} = \sigma^2 \sum_{i=1}^{I} \frac{J_i^2 \lambda_i^2}{J_i} = \sigma^2 \sum_{i=1}^{I} \lambda_i^2 J_i. \tag{8}$$

Se regăsește astfel expresia dispersiei estimației nedeplasate $\hat{\Psi}$ dată în [3], § 3.5.

3. Verificarea ipotezei :

$$H : \text{toți } \beta_i = \text{const.}$$

este echivalentă cu verificarea ipotezei :

$$H' : \Psi = 0\,,$$

adică toate contrastele în medii sînt nule.

Ideea care stă la baza testului de verificare a ipotezei $H' : \Psi = 0$ constă în a construi statistica F astfel încît unul din cei doi termeni ai raportului să depindă de estimația $\hat{\Psi}$ a contrastului Ψ. Vom căuta acum o sumă de pătrate care să ne conducă la un astfel de termen al statisticii $\mathcal{F}$.

Dacă lui y^1_* și y^2_* determinați anterior li se atribuie, respectiv, ponderile [1]:

$$w_1 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{b} \frac{c'^2_i}{J_i}}, \qquad w_2 = \frac{1}{\sum_{i=b+1}^{I} \frac{c''^2_i}{J_i}}$$

---

[1] Se constată ușor că $w_1, w_2 > 0$ și $w_1 + w_2 = 1$.

atunci se observă că $D\left(\frac{y_*^1}{w_1}\right)$ și $D\left(\frac{y_*^2}{w_2}\right)$ sînt egale cu 1, deci iau valoare minimă.

Suma pătratelor ponderată cu aceste ponderi folosită pentru verificarea ipotezei H' este

$$\mathcal{S} = \sum_{k=1}^{2} w_k (y_*^k - y_*^*)^2 = w_1 (y_*^1 - y_*^*)^2 + w_2 (y_*^2 - y_*^*)^2,$$

unde y_*^* este media ponderată a lui y_*^1 și y_*^2, adică

$$y_*^* = \frac{w_1 y_*^1 + w_2 y_*^2}{w_1 + w_2}.$$

În cele ce urmează, ținînd seamă de definițiile lui w_1, w_2, y_*^*, c_i se dă o altă formă pentru $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} = w_1 \left(y_*^1 - \frac{w_1 y_*^1 + w_2 y_*^2}{w_1 + w_2}\right)^2 + w_2 \left(y_*^2 - \frac{w_1 y_*^1 + w_2 y_*^2}{w_1 + w_2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(y_*^1 - y_*^2)^2 (w_1 w_2^2 + w_1^2 w_2)}{(w_1 + w_2)^2} = \frac{w_1 w_2 (y_*^1 - y_*^2)^2}{w_1 + w_2}$$

sau:

$$\mathcal{S} = \frac{(y_*^1 - y_*^2)^2}{\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}}.$$

Dar

$$\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} = \sum_{i=1}^{b} \frac{c_i'^2}{J_i} + \sum_{i=b+1}^{I} \frac{c_i''^2}{J_i}$$

și

$$c_i^2 = \begin{cases} c_i'^2 & , \ i = 1, 2, \ldots, b \\ c_i''^2 & , \ i = b+1, b+2, \ldots, \dot{I} \end{cases}$$

deci

$$\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} = \sum_{i=1}^{b} \frac{c_i^2}{J_i} + \sum_{i=b+1}^{\dot{I}} \frac{c_i^2}{J_i} = \sum_{i=1}^{\dot{I}} \frac{c_i^2}{J_i}.$$

Înlocuind în expresia lui $\mathcal{S}$ și folosind lema 1 și notațiile (6), deducem pentru expresia lui $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{\dot{I}} c_i y_{i*}\right)^2}{\sum_{i=1}^{\dot{I}} \frac{c_i^2}{J_i}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{\dot{I}} \lambda_i Y_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{\dot{I}} \frac{J_i^2 \lambda_i}{J_i}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{\dot{I}} \lambda_i Y_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{\dot{I}} \lambda_i^2 J_i}. \tag{9}$$

Cu ajutorul formulelor (6) și (8) conchidem :

$$\mathcal{S} = \frac{\hat{\Psi}^2}{\dfrac{D(\hat{\Psi})}{\sigma^2}} = \frac{\sigma^2 \hat{\Psi}^2}{D(\hat{\Psi})}. \tag{10}$$

LEMA 2. *În ipoteza* $\omega = \Omega \cap H'$, *unde* $H' : \Psi = 0$, $\mathcal{S}$ *este o estimație nedeplasată a lui* σ^2.

Demonstrație. Se calculează valoarea medie a lui $\mathcal{S}$ folosind forma (9) a lui $\mathcal{S}$ și obținem :

$$M(\mathcal{S}) = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{I} \lambda_i^2 J_i} M\left(\left(\sum_{i=1}^{I} \lambda_i Y_i\right)^2\right) = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{I} \lambda_i^2 J_i} M\left(\sum_{i=1}^{I} \lambda_i^2 Y_i^2 + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{i \neq k} \lambda_i \lambda_k Y_i Y_k\right) = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{I} \lambda_i^2 J_i} \left[\sum_{i=1}^{I} \lambda_i^2 M(Y_i^2) + 2 \sum_{i \neq k} \lambda_i \lambda_k M(Y_i Y_k)\right].$$

Dar se observă că :

$$M(Y_i) = M(J_i y_{i*}) = J_i M\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{J_i} y_{ij}}{J_i}\right) = J_i \beta_i$$

$$D(Y_i) = D(J_i y_{i*}) = J_i^2 D\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{J_i} y_{ij}}{J_i}\right) = J_i \sigma^2$$

$$M(Y_i^2) = J_i \sigma^2 + J_i^2 \beta_i^2$$

de unde se deduce pentru expresia lui $M(\mathcal{S})$:

$$M(\mathcal{S}) = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{I} \lambda_i^2 J_i} \left[\sum_{i=1}^{I} \lambda_i^2 (J_i \sigma^2 + J_i^2 \beta_i^2) + 2 \sum_{i \neq k} \lambda_i \lambda_k \beta_i \beta_k J_i J_k\right] =$$

$$= \sigma^2 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{I} \lambda_i^2 J_i^2 \beta_i^2 + 2 \sum\limits_{i \neq k} \lambda_i \lambda_k J_i J_k \beta_i \beta_k}{\sum\limits_{i=1}^{I} \lambda_i^2 J_i}.$$

Ținînd seamă de forma lui $\Psi = \sum\limits_{i=1}^{I} c_i \beta_i$ și ridicînd la pătrat obținem :

$$\Psi^2 = \sum_{i=1}^{I} c_i^2 \beta_i^2 + 2 \sum_{i \neq k} c_i c_k \beta_i \beta_k = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i^2 J_i^2 \beta_i^2 + 2 \sum_{i \neq k} \lambda_i \lambda_k J_i J_k \beta_i \beta_k.$$

Înlocuind în ultima formă a lui $M(\mathcal{S})$ obținem expresia finală :

$$M(\mathcal{S}) = \sigma^2 + \frac{\Psi^2}{\sum\limits_{i=1}^{I} \lambda_i^2 J_i}$$

Dacă ipoteza $H' : \Psi = 0$ este adevărată, rezultă că $M(\mathcal{S}) = \sigma^2$, deci $\mathcal{S}$ este o estimație nedeplasată a lui σ^2.

Observație. Se știe că în ipoteza ω, estimația nedeplasată a contrastului $\hat{\Psi}$ este o variabilă aleatoare $N\left(0, \sqrt{D(\hat{\Psi})}\right)$, adică $N\left(0, \sqrt{\sigma^2 \sum\limits_{i=1}^{I} \frac{c_i^2}{J_i}}\right)$.

Deci $\frac{\hat{\Psi}}{\sqrt{D(\hat{\Psi})}}$ este o variabilă aleatoare $N(0, 1)$ și deci $\frac{\hat{\Psi}^2}{D(\hat{\Psi})}$ este o variabilă aleatoare χ_1^2.

Pe de altă parte, se știe ([3], § 2.2) că

$$\frac{w_1(y_*^1 - y_*^*)^2 + w_2(y_*^2 - y_*^*)^2}{\sigma^2} = \frac{\mathcal{S}}{\sigma^2}$$

este o variabilă aleatoare χ_1^2.

Pentru a obține direct suma ponderată pentru contrastul Ψ dată de relația (10), se egalează cele două variabile aleatoare χ_1^2 :

$$\frac{\mathcal{S}}{\sigma^2} = \frac{\hat{\Psi}^2}{D(\hat{\Psi})},$$

și se regăsește forma (10) a lui $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} = \sigma^2 \frac{\hat{\Psi}^2}{D(\hat{\Psi})} \cdot$$

Pentru calculul practic a lui $\mathcal{S}$ se ține seamă de (6) și (8) și se obține

$$\mathcal{S} = \sigma^2 \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{I} c_i y_{i*}\right)^2}{\sigma^2 \sum\limits_{i=1}^{I} \frac{c_i^2}{J_i}} = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{I} c_i y_{i*}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{I} \frac{c_i^2}{J_i}} = SS_H \tag{11}$$

4. Ipoteza $H' : \Psi = 0$ se poate verifica cu ajutorul testului F. Statistica cu care se construiește testul F este

$$\mathcal{F} = \frac{\overline{SS}_H}{\overline{SS}_e}, \tag{12}$$

unde

$$\overline{SS}_H = \frac{SS_H}{1} = \frac{\mathcal{S}}{1} = \frac{\sigma^2 \hat{\Psi}^2}{D(\hat{\Psi})}$$

iar $\overline{SS}_e$ este media pătratelor erorilor definită de relația:

$$s^2 = \overline{SS}_e = \frac{SS_e}{f_e} = \frac{\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J_i} (y_{ij} - y_{i*})^2}{\sum_{i=1}^{I} (J_i - 1)} = \frac{\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J_i} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{I} J_i y_{i*}}{\sum_{i=1}^{I} J_i - I}$$

Se observă că relația (12) devine:

$$\mathcal{F} = \frac{\sigma^2 \hat{\Psi}^2}{s^2 D(\hat{\Psi})}. \tag{12'}$$

După testul F, ipoteza H' se respinge cu pragul de semnificație α dacă și numai dacă $\mathcal{F} > F_{\alpha;1,fe}$.

În ipoteza Ω, statistica $\mathcal{F}$ are repartiția F și anume $\mathcal{F}$ este o variabilă aleatoare $F'_{1,f_e;\delta}$, unde parametrul de necentricitate δ se calculează după următoarea regulă ([3], § 2.6):

Regulă. În ipoteza Ω valoarea parametrului de necentricitate δ al statisticii $\mathcal{F}$ se calculează înlocuind în suma pătratelor de la numărătorul statisticii $\mathcal{F}$ fiecare observație prin valoarea ei medie.

În cazul de față considerînd forma (11) a numărătorului statisticii $\mathcal{F}$, obținem:

$$\delta^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{I} c_i \beta_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{I} \frac{c_i^2}{J_i}} = \frac{\Psi^2}{\sum_{i=1}^{I} \lambda_i^2 J_i}.$$

Puterea testului este egală cu probabilitatea de-a respinge ipoteza H, adică:

$$\pi = P\{\mathcal{F} > F_{\alpha;1,fe}\} = P\{F'_{1,fe;\delta} > F_{\alpha;1,fe}\} \tag{13}$$

Se știe (vezi [3], aplicația IV sau [4]) că variabilele aleatoare necentrate χ^2 și F se pot aproxima prin variabile centrate în felul următor:

$$\chi'^2_{1,\delta} = c\, \chi^2_{\tilde{f}_e}$$

unde c și $\tilde{f}_e = [f_e^*]$ sînt determinate din relațiile:

$$c f_e^* = 1 + \delta^2$$

$$c^2 f_e^* = 1 + 2\delta^2.$$

Aproximația variabilei aleatoare $\chi'^2_{1,\delta}$ prin variabila aleatoare centrată $c\chi^2_{\tilde{f}_e}$ dă imediat și aproximația variabilei aleatoare F necentrată:

$$F'_{1,f_e;\delta} = \frac{\chi'^2_{1,\delta}}{\dfrac{\chi^2_{f_e}}{f_e}} := \frac{f_e c\,\dfrac{\chi^2_{\tilde{f}_e}}{\tilde{f}_e}}{\dfrac{\chi^2_{f_e}}{f_e}} = f_e\, c\, F_{\tilde{f}_e, f_e}. \tag{14}$$

Ținînd seama de aproximația (14) a variabilei F necentrată, expresia (13) a puterii testului devine:

$$\pi = P\,\{f_e\, c\, F_{\tilde{f}_e, f_e} > F_{\alpha;\,1,f_e}\}$$

sau altfel scris:

$$\pi = P\,\{F_{\tilde{f}_e, f_e} > \frac{1}{\tilde{f}_e\, c}\, F_{\alpha;\,1\,f_e}\}.$$

5. Se poate face legătura între testul F folosit pentru verificarea ipotezei $H' : \Psi = 0$ și testul t al lui Student.

Introducem variabila aleatoare:

$$\Psi^* = \frac{\Psi}{C}$$

și considerăm estimația liniară nedeplasată $\hat{\Psi}^*$ a lui Ψ^* dată de relația:

$$\hat{\Psi}^* = \frac{\hat{\Psi}}{C},$$

unde $C = \left(\sum_{i=1}^{I} \frac{c_i^2}{J_i}\right)^{1/2}$ este ales astfel ca $D(\hat{\Psi}^*) = I$.

Ipoteza $H' : \Psi = 0$ este echivalentă cu ipoteza:

$$H'' : \Psi^* = 0.$$

Variabila aleatoare:

$$t = \frac{\hat{\Psi}^* - \Psi^*}{\hat{\sigma}_{\hat{\Psi}^*}} \tag{15}$$

este o variabilă aleatoare care urmează repartiția t cu f_e grade de libertate ([3], § 2.3).

Se observă că:

$$\sigma^2_{\hat{\Psi}^*} = D(\hat{\Psi}^*) = \frac{D(\hat{\Psi})}{C^2} = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^{I} \frac{c_i^2}{J_i}}{C^2} = \sigma^2.$$

Atunci estimația dispersiei este :

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\Psi}^*} = s^2$$

deci $\hat{\sigma}_{\hat{\Psi}^*} = s$ și formula (15) devine :

$$t = \frac{\hat{\Psi}^* - \Psi^*}{s}. \tag{15'}$$

Dacă ipoteza $H'' : \Psi^* = 0$ este adevărată, atunci relația (15)$'$ devine :

$$t = \frac{\hat{\Psi}^*}{s} = \frac{\hat{\Psi}}{Cs} = \frac{\hat{\Psi}}{\frac{(D(\hat{\Psi}))^{1/2}}{\sigma}\, s} = \frac{\sigma \hat{\Psi}}{s\,(D(\hat{\Psi}))^{1/2}} \tag{16}$$

Dar se știe că $t^2_{fe} = F_{1,\,fe}$.

Se observă că ridicînd la pătrat în (16) se obține formula (12)$'$ găsită la punctul precedent pentru verificarea ipotezei H'.

Astfel se pune în evidență faptul interesant că testul t se poate folosi la verificarea unei ipoteze mai complexe decît problema Behrence-Fisher.

Primită la redacție la 12 februarie 1968

Centrul de statistică matematică al
Academiei Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, București

VERIFICATION OF THE HYPOTHESIS CONCERNING THE EQUALITY OF MEANS USING CONTRASTS

ABSTRACT

In the present paper we are constructing the F test in order to verify the hypothesis of the analyses of variance concerning the equality of means by using a contrast among these. This test relies on a $F_{1,fe}$ random variable.

In chapter I a general form of a model of analyses of variance and the linear unbiased estimations of the parameters resulting from the solving of the normal equations are presented.

In chapter 2 we have a lemma that establishes the expression of the linear unbiased estimation of a contrast among means.

In chapter 3 we give the expression of the weighted sum of squares used for constructing the F test relying on a contrast among means.

In chapter 4 we construct the F test and we calculate the power of this test.

In chapter 5 we point out the bond of the F test with the t test underlying the possibility to use the t test for a more complex problem than the Behrence-Fisher one.

BIBLIOGRAFIE

1. KENDALL, M. G. și STUART, A., *The advanced theory of statistics* vol. 3, 1966.
2. MĂRGĂRITESCU, E., *Asupra unui test pentru verificarea ipotezei nule din analiza dispersională*. St. cerc. mat., **20**, *4* (1968).
3. SCHEFFÉ, H., *The analysis of variance*. 1959.
4. VĂDUVA, I., *Asupra aproximării repartițiilor χ^2 și F necentrale*. Rev. de statistică.

DEZVOLTARE OPTIMALĂ CU CAPACITĂȚI DE PRODUCȚIE MINIMALE PRESTABILITE

DE

CORNELIU ZIDĂROIU

În această lucrare se consideră problema dezvoltării capacității unei întreprinderi cu scopul de a maximiza beneficiul total obținut într-o perioadă de timp formată din mai multe etape, presupunîndu-se că sînt date *a priori* anumite capacități minimale stabilite de un organ superior. Această lucrare completează studiul efectuat în [6] în legătură cu o problemă pusă în [2].

Se arată că metoda de rezolvare propusă în [6] este aplicabilă, cu puține modificări, și acestei noi probleme. Se obține politica optimală (în sensul beneficiului maxim) formată din N funcții de capacitatea inițială c, N fiind numărul etapelor luate în considerare.

1. În [6] s-a formulat și rezolvat o variantă discretă a unei probleme pusă în [2]. În această lucrare se consideră o problemă, analoagă cu cea prezentată în [6], în care sînt stabilite sarcini minimale pentru perioadele considerate; aceasta corespunde situației cînd un organ superior stabilește pentru întreprinderea în subordine sarcini de plan, inferioare, în general, cererii estimate.

Mai precis, fie 1, 2,..., N perioadele luate în considerare pentru extinderea capacității întreprinderii. Se presupune că sarcinile de plan ξ_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, sînt date, iar cererile estimate ξ_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, sînt cunoscute. Creșterea capacității de la o perioadă la alta nu poate fi superioară unei creșteri maxime β. Dacă notăm prin y_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, capacitățile de producție pe care le va avea întreprinderea în perioadele i, $1 \leqslant i \leqslant N$, această condiție se scrie :

$$0 \leqslant y_i - y_{i-1} \leqslant \beta,\ 1 \leqslant i \leqslant N \tag{1}$$

unde $y_0 = c$ este capacitatea inițială (cunoscută). În plus avem condiția evidentă :

$$y_i \geqslant \bar{\xi}_i,\ 1 \leqslant i \leqslant N. \tag{2}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 9, P. 1429–1435 BUCUREȘTI, 1968

Beneficiul obţinut în perioada i, $1 \leqslant i \leqslant N$, va fi :

$$\alpha_i \left[\min\left(\xi_i,\ y_i\right) - \gamma\left(y_i - y_{i-1}\right)\right], \tag{3}$$

unde γ est costul marginal al creşterii capacităţii cu o unitate, iar α_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, sînt factori de actualizare a veniturilor ($0 < \alpha_N < \alpha_{N-1} < \ldots$ $\ldots < \alpha_1 < 1$). Problema care se pune este determinarea capacităţilor y_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, astfel încît să fie respectate condiţiile (1) şi (2) şi să obţinem un beneficiu total maxim :

$$\max \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left[\min\left(\xi_i,\ y_i\right) - \gamma\left(y_i - y_{i-1}\right)\right] \tag{4}$$

Avem mai întîi următoarea

LEMA 1. *Condiţia necesară şi suficientă ca sistemul de inecuaţii* (*1*), (*2*) *să fie compatibil este ca*

$$c \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \left(\bar{\xi}_i - i\beta\right). \tag{5}$$

Demonstraţie. Condiţia este necesară. Într-adevăr, dacă $\bar{y}_i$, $1 \leqslant i \leqslant N$, este o soluţie a sistemului (1), (2), atunci :

$$\bar{\xi}_i \leqslant \bar{y}_i \leqslant \bar{y}_{i-1} + \beta, \quad 1 \leqslant i \leqslant N$$

şi adunînd primele n dintre aceste inegalităţi obţinem :

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{\xi}_i \leqslant \bar{y}_n \leqslant c + n\beta, \quad 1 \leqslant n \leqslant N$$

de unde

$$c \geqslant \sum_{i=1}^{n} \bar{\xi}_i - n\beta, \quad 1 \leqslant n \leqslant N$$

sau

$$c \geqslant \max_{1 \leqslant n \leqslant N} \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{\xi}_i - n\beta\right)$$

şi se obţine evident (5).

Condiţia este suficientă. Valorile

$$\bar{y}_i = \bar{y}_{i-1} + \beta, \quad 1 \leqslant i \leqslant N \tag{6}$$

unde $\bar{y}_0 = c$ constituie o soluţie a sistemului (1), (2). Într-adevăr, adunînd primele n relaţii din (6) avem :

$$\bar{y}_n = c + n\beta, \quad 1 \leqslant n \leqslant N$$

şi ţinînd seama de (5) :

$$\bar{\xi}_i \leqslant \bar{y}_i = c + i\beta, \quad 1 \leqslant i \leqslant N. \tag{7}$$

Cum din (6) se vede că

$$0 \leqslant \bar{y}_i - \bar{y}_{i-1} = \beta, \quad 1 \leqslant i \leqslant N \tag{8}$$

afirmaţia rezultă imediat din (7) şi (8).

Să observăm că maximul din (4) în condițiile (1), (2) este o funcție de c și de N:

$$g_N(c) = \max \sum_{i=1}^{N} \alpha_i [\min(\xi_i, y_i) - \gamma(y_i - y_{i-1})];$$

pentru fiecare N fixat, conform lemei 1, această funcție este definită pe intervalul $[\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} (\bar{\xi}_i - i\beta), \infty)$.

Vom da acum

Lema 2. *Dacă* $\beta \geqslant 0$, $\xi \geqslant \bar{\xi} \geqslant 0$, *funcția*

$$\varphi(c) = \max_{\substack{c \leqslant x \leqslant c+\beta \\ x \geqslant \bar{\xi}}} [\min(\xi, x) - \gamma x]$$

definită pe intervalul $[\bar{\xi} - \beta, \infty)$ *este poligonală. Punctul de optim*[1] *este*:

$$x(c) = \begin{cases} \bar{\xi} & \textit{pentru } c \in [\delta, \bar{\xi}] \\ c & \textit{pentru } c \in [\bar{\xi}, \infty) \end{cases}$$

cînd $\gamma \geqslant 1$;

$$x(c) = \begin{cases} c + \beta & \textit{pentru } c \in [\delta, \eta] \\ \xi & \textit{pentru } c \in [\eta, \xi] \\ c & \textit{pentru } c \in [\xi, \infty) \end{cases}$$

cînd $0 < \gamma < 1$;

$$x(c) = c + \beta \quad \textit{pentru } c \in [\delta, \infty) \textit{ cînd } \gamma \leqslant 0,$$

unde $\delta = \max(0, \bar{\xi} - \beta)$; $\eta = \max(\delta, \xi - \beta)$.

Demonstrația nu comportă dificultăți și nu o vom da aici; în [6] se poate găsi justificarea unei leme analoage (lema 1).

2. Vom aborda acum problema formulată mai sus prin metoda programării dinamice. Pentru aceasta vom considera familia de probleme

$$\max \sum_{i=R}^{N} \alpha_i [\min(\xi_i, y_i) - \gamma(y_i - y_{i-1})] \tag{1}$$

$$0 \leqslant y_i - y_{i-1} \leqslant \beta, \quad R \leqslant i \leqslant N, \quad \text{unde} \quad y_{R-1} = c \tag{2}$$

$$y_i \geqslant \bar{\xi}_i, \quad R \leqslant i \leqslant N. \tag{3}$$

pentru fiecare $R = 1, 2, \ldots, N$.

Dacă notăm prin $f_R(c)$ valoarea maximului din (1) în condițiile (2), (3), atunci, conform principiului de optimalitate al lui Bellman [3], [4], obținem relația de recurență:

$$f_R(c) = \max_{0 \leqslant y_R - c \leqslant \beta} \{\alpha_R[\min(\xi_R, y_R) - \gamma(y_R - \\ - c)] + f_{R+1}(y_R)\}, \quad 1 \leqslant R \leqslant N, \tag{4}$$

---

[1] Mai departe $x(c)$ va fi numită decizie optimă pentru $c \geqslant 0$.

unde

$$f_{N+1}(c) \equiv 0.$$

Putem formula acum

TEOREMA 1. *Funcțiile* $f_R(c)$, $1 \leqslant R \leqslant N$, *sînt poligonale.*

Demonstrație. Pentru $R = N$ afirmația urmează din (4) și din lema 2. Presupunem că $f_{R+1}(c)$ este funcție poligonală, adică are forma :

$$f_{R+1}(c) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n_{R+1}} (a_i^{R+1} c + b_i^{R+1}) \tag{5}$$

și arătăm că $f_R(c)$ are aceeași formă. Într-adevăr,

$$f_R(c) = \max_{\substack{c \leqslant y_R \leqslant c+\beta \\ y_R \geqslant \xi_R}} \{\alpha_R [\min(\xi_R, y_R) - \gamma(y_R - c)] + \min_{1 \leqslant i \leqslant n_{R+1}} (a_i^{R+1} y_R + b_i^{R+1})\}$$

sau

$$f_R(c) = \alpha_R \max_{\substack{c \leqslant y_R \leqslant c+\beta \\ y_R \geqslant \xi_R}} \left\{ \min_{1 \leqslant i \leqslant n_{R+1}} \left[\min(\xi_R, y_R) - \left(\gamma - \frac{a_i^{R+1}}{\alpha_R}\right) y_R + \frac{b_i^{R+1}}{\alpha_R} \right] \right\} + \alpha_R \gamma c. \tag{6}$$

Expresia din (6) sugerează un joc ; în condițiile prezentei teoreme există o soluție a acestui joc[2]. Vom avea deci :

$$f_R(c) = \alpha_R \min_{1 \leqslant i \leqslant n_{R+1}} \left\{ \max_{\substack{c \leqslant y_R \leqslant c+\beta \\ y_R \geqslant \xi_R}} \left[\min(\xi_R, y_R) - \left(\gamma - \frac{a_i^{R+1}}{\alpha_R}\right) y_R \frac{b_i^{R+1}}{\alpha_R} \right] \right\} + \alpha_R \gamma c. \tag{7}$$

Relația (7) și lema 2 arată că $f_R(c)$ este o funcție poligonală.

Să observăm că, pentru fiecare i, $1 \leqslant i \leqslant n_{R+1}$, decizia optimă pentru expresia din acolade se determină conform lemei 2. Dacă notăm

$$A_1^R = \left\{ i \,\middle|\, \gamma - \frac{a_i^{R+1}}{\alpha_R} \geqslant 1,\ 1 \leqslant i \leqslant n_{R+1} \right\} \tag{8}$$

$$A_2^R = \left\{ i \,\middle|\, 0 < \gamma - \frac{a_i^{R+1}}{\alpha_R} < 1,\ 1 \leqslant i \leqslant n_{R+1} \right\} \tag{9}$$

$$A_3^R = \left\{ i \,\middle|\, \gamma - \frac{a_i^{R+1}}{\alpha_R} \leqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n_{R+1} \right\}, \tag{10}$$

---

[2] Se poate vedea, de exemplu, [5].

atunci decizia optimă $y_R^i(c)$ este :

$$y_R^i(c) = \begin{cases} \overline{\xi}_R & \text{pentru } c \in [\delta_R, \overline{\xi}_R] \\ c & \text{pentru } c \in [\overline{\xi}_R, \infty) \end{cases} \tag{11}$$

cînd $i \in A_1^R$;

$$y_R^i(c) = \begin{cases} c + \beta & \text{pentru } c \in [\delta_R, \eta_R] \\ \xi_R & \text{pentru } c \in [\eta_R, \xi_R] \\ c & \text{pentru } c \in [\xi_R, \infty) \end{cases} \tag{12}$$

cînd $i \in A_2^R$;

$$y_R^i(c) = c + \beta \quad \text{pentru } c \in [\delta_R, \infty) \tag{13}$$

cînd $i \in A_3^R$; am notat $\delta_R = \max(0, \overline{\xi}_R - \beta)$ și $\eta_R = \max(\delta_R, \xi_R - \beta)$.

Pentru determinarea deciziei $y_R(c)$ (punctul de maxim pentru $f_R(c)$) este necesar să facem apel la cîteva proprietăți ale funcțiilor poligonale, care vor fi date mai jos sub forma lemelor următoare :

LEMA 3. *Orice funcție poligonală*

$$f(x) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} (a_i x + b_i), \quad x \in [\delta, \infty), \ \delta \geqslant 0$$

poate fi adusă la forma

$$f(x) = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} (a'_i x + b'_i)$$

unde $a'_1 > a'_2 > \ldots > a'_m$; $b'_1 < b'_2 < \ldots < b'_m$.

LEMA 4. *Condiția necesară și suficientă ca funcția poligonală*

$$f(x) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} (a_i x + b_i), \ x \in [\delta, \infty), \ \delta \geqslant 0$$

să fie crescătoare este ca $a_i \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

LEMA 5. *Fiind dată funcția poligonală*

$$f(x) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} (a_i x + b_i), \ x \in [\delta, \infty), \ \delta \geqslant 0$$

există o mulțime de indici $A = \{i_0, i_1, \ldots, i_m\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ *și numerele* $\delta = \rho_0 < \rho_1 < \ldots < \rho_m < \infty$, $m \leqslant n$, *astfel încît*

$$f(x) = \begin{cases} a_{i_0} x + b_{i_0} & \textit{pentru } x \in [\rho_0, \rho_1] \\ a_{i_1} x + b_{i_1} & \textit{pentru } x \in [\rho_1, \rho_2] \\ \cdots\cdots\cdots & \\ a_{i_m} x + b_{i_m} & \textit{pentru } x \in [\rho_m, \infty) \end{cases} \tag{14}$$

LEMA 6. *Dacă* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$ *și* $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$, *funcția continuă*

$$f(x) = \begin{cases} a_1 x + b_1, & x \in [\rho_0, \rho_1] \\ a_2 x + b_2, & x \in [\rho_1, \rho_2] \\ \cdots\cdots\cdots & \\ a_n x + b_n, & x \in [\rho_{n-1}, \infty) \end{cases} \tag{15}$$

se poate scrie sub forma

$$f(x) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} (a_i x + b_i)$$

Demonstrațiile acestor leme nu le dăm aici; în [6] se justifică leme asemănătoare.

Se poate arăta de asemenea că este adevărată

TEOREMA 2. *Funcțiile* $f_R(c)$, $1 \leqslant R \leqslant N$, *sînt continue și crescătoare.*

Demonstrație. Se observă că pentru $R = N$, conform lemei 2, afirmația este evidentă. Demonstrația se continuă prin inducție fără dificultăți.

Dacă funcția $f_R(c)$, $1 \leqslant R \leqslant N$, are forma

$$f_R(c) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n_R} (a_i^R c + b_i^R)$$

atunci, conform lemei 4, $a_i^R \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant n_R$, presupunînd că am aplicat în prealabil lema 3, adică avem

$$a_1^R > a_2^R > \ldots > a_{n_R}^R \text{ și } b_1^R < b_2^R \ldots < b_{n_R}^R.$$

Asociind apoi teorema 2 cu lema 5 se poate pune funcția $f_R(c)$ sub forma (14). Această ultimă formă oferă posibilitatea construirii deciziei optime $y_R(c)$ sub forma:

$$y_R(c) = \begin{cases} y_R^{i_0}(c) & \text{pentru } c \in [\rho_0, \rho_1] \\ y_R^{i_1}(c) & \text{pentru } c \in [\rho_1, \rho_2] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ y_R^{i_m}(c) & \text{pentru } c \in [\rho_m, \infty) \end{cases}$$

unde $y_R^{i_k}$, $0 \leqslant k \leqslant m$, sînt dați de (11), (12), (13), iar $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_m$ de lema 5. Deciziile $\{y_R(c)\}_{1 \leqslant R \leqslant N}$ formează politica optimală.

Primită la redacție la 15 februarie 1968

Centrul de statistică matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
str. M. Eminescu nr. 47, București

DÉVELOPPEMENT OPTIMAL AVEC DES CAPACITÉS DE PRODUCTION MINIMALES DONNÉS À PRIORI

RÉSUMÉ

Cet ouvrage est une extension de [6] à un problème de développement optimal d'une entreprise, le but étant de maximer le bénéfice total. La condition supplémentaire qu'on y impose est l'existence des limites inférieures pour les capacités de production, des limites qui sont fixées à priori par un organe économique central.

On montre que la méthode permettant de résoudre le problème posé dans [6] est encore valable, avec des changements inessentiels, pour le nouveau problème.

On obtient la politique optimale qui est formée avec N fonctions de capacité initiale c, N étant le nombre des étapes qui y sont considérées.

BIBLIOGRAFIE

1. ARROW K., KARLIN S., SCARF H., *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production*. Stanford Univ. Press, California, 1958.
2. ARROW K., BECKMANN M., KARLIN S., *The Optimal Expansion of the Capacity of a Firm*. cap. 7 în [1].
3. BELLMAN R., *Dynamic Programming*. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1957.
4. BELLMAN R., DREYFUS S., *Applied Dynamic Programming*. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1962.
5. KARLIN C., *The Theory of Infinite Games*. Annals of Mathematics, **LXI** 371—401 (1952).
6. ZIDĂROIU C., *Asupra expansiunii optimale a unei întreprinderi*. St. cerc. mat., **20**, *5*, (1968).

CRONICĂ ȘTIINȚIFICĂ

A III-a SESIUNE ŞTIINŢIFICĂ A TINERETULUI
Bucureşti 24–26 mai 1968

Cea de-a treia Sesiune științifică a tineretului, organizată de Institutul de matematică și Centrul de statistică matematică ale Academiei Republicii Socialiste România, a reunit tineretul ale cărui preocupări de investigare și aprofundare a vastelor domenii ale matematicii îi sînt comune.

Sesiunile de acest fel au devenit o tradiție în lumea științifică a tinerilor matematicieni, deoarece principiile care au stat la baza inițierii lor nu și-au pierdut valabilitatea nici azi.

Această reunire a tineretului studios care a îmbrățișat multiplele ramuri ale matematicii înlesnește cunoașterea nobilelor preocupări care azi se înscriu în contextul general al avîntului de ridicare a nivelului activității științifice și economice în care întreaga țară se găsește angajată.

Pentru organizarea acestei Sesiuni a fost ales un colectiv din care au făcut parte :

a) Președinți de onoare :

Acad. prof. Miron Nicolescu și acad. prof. Gheorghe Mihoc,

b) Colectivul de conducere a lucrărilor :

I. Bucur — șef sector la Institutul de matematică-președinte ;

M. Coroi — cercetător principal la Institutul de matematică ;

I. Cuculescu — ,, ,, ,, ,, ,, ,,

A. Deleanu — șef sector la Institutul de matematică ;

Șt. I. Gheorghiță — șef sector la Institutul de matematică ;

S. Marcus — șef sector la Institutul de matematică ;

G. Sâmboan — ,, ,, Centrul de statistică matematică ;

I. Singer — șef secție la Institutul de matematică ;

c) Secretariatul Sesiunii :

G. Bergthaller

M. Mihăilescu

T. Morozan

Ș. Strătilă

I. Suciu

Atît ședința de deschidere a Sesiunii, cît și ședințele de comunicări s-au ținut în cadrul Institutului de matematică și al Centrului de statistică matematică ale Academiei Republicii Socialiste România.

ST. CERC. MAT., TOM. 20 NR. 9, P. 1437–1443 BUCUREȘTI, 1968

Cuvîntul de deschidere a fost rostit de acad. prof. Gheorghe Mihoc, după care participanţii au trecut în sălile de prezentare a comunicărilor care s-au ţinut în opt secţii şi anume :

I. Secţia de analiză şi teoria funcţiilor.
II. Secţia de algebră şi geometrie algebrică.
III. Secţia de geometrie şi topologie.
IV. Secţia de ecuaţii.
V. Secţia de statistică şi teoria probabilităţilor.
VI. Secţia de analiză numerică.
VII. Secţia de mecanică
VIII. Secţia de lingvistică matematică.

Începută în urarea de : „*Succes deplin Sesiunii*”, urare rostită de acad. Prof. Gheorghe Mihoc în încheierea cuvîntului său din şedinţa de deschidere, Sesiunea a avut o desfăşurare rodnică, constituind încă odată un bun prilej de manifestare a capacităţii creatoare a tinerilor matematicieni care, mereu alături de cei mai în vîrstă, participă neobosit la împlinirea idealurilor poporului nostru.

În răstimpul de doi ani de la Sesiunea precedentă, după cum se poate vedea din temele abordate de tinerii cercetători, au crescut preocupările în rîndul acestora de a ridica nivelul cercetărilor lor, de a diversifica şi de a pătrunde tot mai adînc în multiplele ramuri ale matematicii, aducînd în zorii cunoaşterii rezultate învăluite în necunoscut sau aflate încă în amurgul cunoaşterii.

Bătălia dusă pas cu pas în scopul dezvăluirii tainelor ştiinţei nu cunoaşte răgaz în rîndul tinerilor cercetători pentru că, conştienţi fiind, alături de generaţiile consacrate, numai astfel vor reuşi să contribuie din plin la îmbogăţirea patrimoniului ştiinţelor matematice, să ridice necontenit nivelul cercetării ştiinţifice şi să asigure un neîntrerupt progres, ridicînd astfel constant şi sigur prestigiul ştiinţei româneşti în lume.

Cu tenacitatea lor bine cunoscută, tinerii cercetători sfredelesc necontenit în frontul larg al ştiinţei, escavînd subtile rezultate necunoscute încă, reuşind astfel să facă posibilă exploararea lor „la zi”, de unde vor putea fi preluate de către alţi cercetători, care le vor înobila sau le vor desăvîrşi în teorii bine închegate.

Se poate spune, pe drept cuvînt, că acest tineret este mereu în mijlocul necunoscutului, luptînd neobosit pentru dezlegarea cît mai completă a tainelor lui sau apropierea acestuia din ce în ce mai mult de cunoscut.

La această Sesiune au fost prezentate peste 100 de comunicări, ţinute în opt secţii.

În afara lucrărilor cu caracter de cercetare pur teoretică, în care au fost atacate teme din domeniile fundamentale ale matematicii, au fost expuse şi lucrări cu caracter aplicativ.

Lucrările teoretice de cercetare fundamentală, din multiplele ramuri ale matematicii, au scos la iveală rezultate interesante, care atestă maturitatea ştiinţifică a tinerilor cercetători.

Ele demonstrează că cercetarea matematică la noi în ţară cunoaşte o dezvoltare din ce în ce mai mare, arătînd o dată în plus că matematica este în plină dezvoltare şi în necontenită înoire.

Rezultatele frumoase obţinute de tinerii matematicieni pe lîngă faptul că pun în evidenţă actualitatea lor, vin să îmbogăţească patrimoniul ştiinţei româneşti, al ştiinţei universale.

Lucrările cu caracter aplicativ evidenţiază ajutorul de care este capabilă matematica să-l dea ştiinţelor aplicative în scopul asigurării dezvoltării tehnicii de producţie, dînd astfel posibilitate ştiinţei de a deveni factor activ de producţie în scopul creşterii bazei materiale a orînduirii noastre socialiste.

La această Sesiune au fost prezenţi cercetători din : institutele şi centrele de cercetări matematice ale Academiei Republicii Socialiste România, institutele politehnice, institutele pedagogice şi universităţi precum şi studenţi ai facultăţii de matematică-mecanică a Universităţii din Bucureşti. Au fost reprezentate principalele centre universitare : Bucureşti, Cluj, Craiova, Iaşi, Timişoara precum şi Petroşeni. Aceasta demonstrează că în universităţi există nuclee puternice de cercetare, rolul cadrelor didactice nerezumîndu-se numai la pregătirea studenţilor.

Conjugarea eforturilor cercetătorilor din universităţi cu ale celor din institutele de cercetare ale Academiei Republicii Socialiste România va duce la accelerarea ritmului de dezvoltare al matematicii la noi în ţară, la ţinerea pasului cu evoluţia modernă pe plan mondial a matematicii.

După încheierea şedinţelor de comunicări a avut loc o seară cultural-distractivă la care a luat parte şi acad. prof. Miron Nicolescu, care a purtat discuţii rodnice cu participanţii la Sesiune.

Le-a mai fost rezervată participanţilor la Sesiune o excursie de documentare cu vizitarea la Cîmpulung-Muscel a fabricii de autoturisme de tip I.M.S., unde au luat cunoştinţă de unele probleme practice în a căror rezolvare ar putea să contribuie cu succes deplin şi matematicienii.

Rezolvarea unor astfel de probleme cu ajutorul ştiinţei constituie o preocupare din ce în ce mai mare şi în rîndul cercetătorilor matematicieni, deoarece ei sînt conştienţi de faptul că numai astfel vor putea contribui din plin la fundamentarea ştiinţifică a producţiei în scopul asigurării dezvoltării şi progresului de care are atîta nevoie ţara noastră pentru situarea ei pe mai departe, din punct de vedere al dezvoltării industriale, economice şi ştiinţifice, printre ţările dezvoltate din lume.

Pentru o mai bună cunoaştere a problemelor dezbătute în cadrul Sesiunii, se vor da în cele ce urmează titlurile lucrărilor prezentate în şedinţele de comunicări :

I. *În secţia de analiză şi teoria funcţiilor s-au prezentat* :

1. Despre scufundarea transformărilor cu măsură invariantă de L. Zsidó (student Universitatea din Bucureşti).
2. Asupra reprezentării unor algebre Dirichlet de D. Gaşpar (Universitatea din Timişoara).
3. Măsuri cvasianalitice pentru algebre de funcţii de I. Suciu (Institutul de matematică Bucureşti).
4. Acoperiri parţiale regulate neorientabile de I. Bîrza (student Universitatea din Bucureşti).
5. O caracterizare a anvelopei logaritmic convexe de A. Duma şi Ş. Strătilă (Institutul de matematică Bucureşti).
6. Cîteva proprietăţi ale fasciculelor coerente de spaţii Stein de C. Bănică, A. Duma şi O. Stănăşilă (Institutul de matematică Bucureşti).
7. Consideraţii directe asupra unei clase din funcţii univalente de D. Ghişa (Universitatea din Timişoara).
8. Asupra singularităţilor funcţiilor continue de I. Ţevy (student la Universitatea din Bucureşti).
9. O nouă generalizare a ecuaţiei lui D. Pompeiu de G. Opriş (Institudul politehnic Cluj).
10. Despre o structură algebrică a spaţiilor metrice de B. Rendi (Institutul politehnic Timişoara).
11. Un criteriu de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi de I. Chiţescu (student la Universitatea din Bucureşti).
12. Asupra spaţiilor paracompacte de C. Niculescu (student la Universitatea din Bucureşti).
13. Puncte speciale ataşate unui operator de I. Istrăţescu (Institutul politehnic Timişoara).

14. Observații asupra unor proprietăți ale operatorilor Riesz de G. Constantin (Universitatea din Timișoara)..

15. Operatori reziduali decompozabili de F. H. Vasilescu (Institutul de matematică București).

16 Asupra distribuțiilor pozitiv-definite de I. Ciorănescu (Institutul de matematică București).

17. Transformarea Laplace a funcțiilor distribuționale de M. Cîrnu (Institutul de matematică București).

18. Asupra teoremei graficului închis de M. Șabac (Universitatea din București).

19. Duala de latici local convexe complete de N. Popa (Institutul de matematică București).

II. *În secția de geometrie și topologie au fost prezentate următoarele lucrări* :

1. Despre două clase de curbe dintr-un spațiu neeuclidian cu trei dimensiuni de N. Boja (Institutul politehnic Timișoara).

2. Interpretarea geometrică a reprezentărilor algebrelor Jordan speciale de R. Iordănescu și I. Popovici (Institutul de matematică București).

3. Grupuri de mișcări în direcțiile liniilor de curbură de C. Udriște (Institutul politehnic București).

4. Grupuri de mișcări ale spațiilor conform euclidiene de N. N. Teodorescu (Societatea de științe matematice București).

5. Asupra grupurilor de olonomie în spațiile cu conexiune afină A_5 de C. Radu (Institutul politehnic București).

6. Conexiuni generalizate de A. Verona (Institutul de matematică București).

7. Conexiuni meromorfe de A. Mihai (Universitatea din București).

8. Asupra reprezentărilor induse de grupuri Lie de H. Moscovici (Institutul politehnic București).

9. Un șir spectral pentru complexe eliptice fibrate de G. Lusztig (student la Universitatea din București).

10. Conexiuni invariante pe spații riemanniene V_3 cu metrica nedefinită de E. Oprescu (Institutul pedagogic București).

11. Un spațiu al punctelor cu familii de coordonate de T. Noagy (Institutul de mine Petroșeni).

12. Asupra tensorilor normali de G. Mocică (Institutul politehnic Timișoara).

13. Asupra perechilor de conexiuni compatibile cu o structură metrică aproape simplectică, sau aproape complexă pe spațiul fibrat al vectorilor tangenți la o varietate diferențiabilă de D. Opriș (Universitatea din Timișoara).

III. *În cadrul secției de algebră și geometrie algebrică au fost prezentate* :

1. Asupra unor scheme de N. Popescu (Institutul de matematică București) și F. Spircu (student la Universitatea din București).

2. Categoria algebrelor Lukasiewicz de G. Georgescu și C. Vracin (studenți la Universitatea din București).

3. Despre unele scheme asociate unei scheme de T. Spircu (student la Universitatea din București).

4. Generalizarea unei teoreme a lui Feller — Gwocowski de D.S. Spulber (Universitatea din Iași).

5. Rezolvarea conjucturii lui Mac — Lane — Isbel — Lambek de D. Popescu (student la Universitatea din Bucureşti).

6. Asupra categoriei mulţimilor ordonate de G. Georgescu şi B. Lungulescu (studenţi la Universitatea din Bucureşti).

7. Asupra unei clase de inele de C. Niţă (Universitatea din Bucureşti).

8. Cîteva exemple de spaţii analitice rigide de A. Duma (Institutul de matematică Bucureşti).

9. Lema de normalizare analitică de C. Bănică şi O. Stănăşilă (Institutul de matematică Bucureşti).

10. Caracterizarea toposurilor abeliene locale de tip special de A. Radu (Institutul de matematică Bucureşti).

11. Despre inelele semiartiniene de C. Năstăsescu (Universitatea din Bucureşti).

12. Construcţii de algebră comutativă în algebra logicii de A. Brezuleanu, R. Diaconescu (Universitatea din Bucureşti).

13. Asupra seriilor de transformări paralele ale circuitelor neliniare secvenţiale de V. Felea (Universitatea din Iaşi).

IV. *În secţia de statistică şi teoria probabilităţii au fost prezentate* :

1. Asupra verificării ipotezei nule în analiza dispersională de E. Ursianu (Centrul de statistică matematică Bucureşti).

2. Asupra repartiţiei coeficientului de variabilitate de C. Ivan şi I. Văduva (Centrul de statistică matematică Bucureşti).

3. Asupra caracteristicii operative şi numărul mediu de probe în cazul unor texte secvenţiale de G. Obreja (Centrul de statistică matematică Bucureşti).

4. Asupra proceselor de decizie cu legături complete de C. Zidăroiu (Centrul de statistică matematică Bucureşti).

5. Asupra unei probleme de programare stohastică de A. Berechet (Centrul de statistică matematică Bucureşti).

6. Soluţii de risc minim în programarea stohastică de M. Dragomirescu (Centrul de statistică matematică Bucureşti).

7. O problemă de programare neliniară de C. Bergthaller (Centrul de statistică matematică Bucureşti).

8. Programarea pseudopătratică de M. Dragomirescu (Centrul de statistică matematică Bucureşti).

V. *În secţia de lingvistică matematică au fost prezentate* :

1. Asupra limbajelor independente de context de A. Dincă (Universitatea din Craiova).

2. Unele proprietăţi algebrice ale configuraţiilor sintactice de C. Cişlaru (Institutul politehnic Bucureşti).

3. Structurile algebrice ale modelelor analitice în lingvistică de S.—V. Solomon (student la Universitatea din Bucureşti).

4. Asupra noţiunii de clan din lingvistica algebrică de V. Raischi (student la Universitatea din Bucureşti).

5. Unele proprietăţi ale operatorilor contextuali din lingvistica algebrică de C. Crăciun (Universitatea din Bucureşti).

6. Metode cantitative în studiul individual de A. Boldovenescu, E. Pușcălău și D. Stan (Universitatea din Iași).

7. Asupra modelării matematice a genului gramatical de E. Vîlceanu (student la Universitatea din București).

VI. *În secția de ecuații au fost prezentate* :

1. Operator Volterra general de S. Sender (Institutul de matematică Iași)

2. Teoremele de regularitate parțială a operatorilor pseudodiferențiali de V. Barbu (Universitatea din Iași).

3. Operatori pseudodiferențiali parțiali pseudolocali și parțial hipoeliptici de T. Jurcan (Universitatea din Iași).

4. Proprietăți globale ale ecuațiilor diferențiale cu funcții de mulțime de St. Viorel (Institutul de matematică Iași).

5. Probleme de existență, unicitate, mărginire și comportare asimptotică a soluției ecuației integrale vectoriale $x(t) = F(t; X) + \int_0^i K(t; s) f(s; x) ds$ de N. Pavel (Institutul de matematică Iași).

6. Inegalități diferențiale pentru o anumită ecuație funcțională de tip Volterra de P. Talpalaru (Universitatea din Iași).

7. O inegalitate apriorică pentru problema la limită pentru ecuații de tip eliptic în spații Sobolev de I. Toma (Institutul de matematică București).

8. Sisteme optimale de C. Vîrsan (Institutul de matematică București).

VII. *În secția de analiză numerică au fost prezentate* :

1. Asupra polinoamelor generalizate de A. Bărbulescu și S. Laslău (Institutul politehnic Timișoara).

2. Asupra metodei aproximațiilor succesive pentru rezolvarea ecuațiilor funcționale în spații pseudometrice de C. Ilioi (Universitatea din Iași).

3. Asupra metodei coardei în spații Banach de G. Goldner (Universitatea Cluj).

4. Aproximarea funcțiilor de mai multe variabile de M. Neagu (Institutul politehnic Timișoara).

5. Aproximarea polinomială a funcțiilor de A. Bărbulescu și S. Laslău (Institutul politehnic Timișoara).

6. Determinarea nomogramei optime dintr-o clasă de nomograme folosind expresia erorii globale de A. Vasiu (Universitatea din Cluj).

7. Observații asupra funcțiilor „spline" generalizate de M. Munteanu-Covaci (Institutul politehnic Cluj).

8. Funcții „spline" bazate pe combinații de funcționale de derivare de I. Indoleanu (Institutul politehnic Cluj).

9. Asupra stabilității sistemelor de ecuații cu diferențe de A. Hadnagy (Institutul politehnic Timișoara).

10. Asupra operatorilor p-compacți de St. Cruceanu (Institutul politehnic București).

11. Aplicații ale operatorilor montoni de A. Șchiop (Institutul de matematică București).

VIII. *În secţia de mecanică au fost prezentate* :

1. Studiul mişcărilor periodice ale unui vibropercutor electromagnetic de A. Hegedüs (Institutul politehnic Bucureşti).

2. Asupra unei probleme de stabilitate hidrodinamică de A. Georgescu (Institutul de matematică Bucureşti).

3. Asupra mişcării generale a unui profil în prezenţa a doi pereţi de formă oarecare. Ecuaţiile integrale ale mişcării de T. Petrilă (Universitatea din Cluj).

4. Asupra unor probleme de limită de tip Riemann de C. Cosma (Institutul de mecanica fluidelor Bucureşti).

5. Asupra mişcărilor în medii poroase în prezenţa cavităţilor de S. Gogonea (Institutul de matematică Bucureşti).

6. Unele probleme la limită în mişcarea fluidelor în medii poroase neomogene de E. Ungureanu (Institutul de matematică Bucureşti).

7. O nouă metodă de determinare a tensorului turbulenţei de I. Setanu (Institutul de mecanica fluidelor Bucureşti).

8. Asupra mişcării fluidelor compresibile în prezenţa unui corp poros de H̦. Ene (Institutul de matematică Bucureşti).

9. Asupra mişcării apelor arteziene într-un domeniu limitat cu condiţii mixte pe contur de I. David (Institutul politehnic Timişoara).

10. Torsiunea barelor ortotrope compuse cu axa uşor curbată de V. Gheorghiţă (Institutul de matematică Iaşi).

P. Mocanu

SZÁGOS MUSZAKI KÖNYVTÁR DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date din text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale. Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

1968

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, A. DELEANU, M. JURCHESCU, **Topologie, Categorii, Suprafeţe riemanniene**, 1967, 394 p., 21,50 lei.

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1967, 311 p., 15 lei.

I. COLOJOARĂ, **Elemente de teorie spectrală**, 1968, 311 p., 19,50 lei.

ROMULUS CRISTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.

I. CUCULESCU, **Procese Markov şi funcţii excesive**, 1968, 356 p., 19 lei.

N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.

ST. I. GHEORGHIŢĂ, **Metode matematice în hidrogazodinamica subterană**, 1966, 582 p., 31 lei.

AL. GHIKA, **Analiza funcţională**, 1967, 594 p., 31 lei.

ALEXANDRU GHIKA, **Opera matematică**, 1968, 955 p., 50 lei.

S. GUIAŞU şi R. THEODORESCU, **Teoria matematică a informaţiei**, 1966, 227 p., 8,25 lei.

SILVIU GUIAŞU, **Aplicaţii ale teoriei informaţiei. Sisteme dinamice. Sisteme cibernetice**, 1968 350 p., 17 lei.

A. HALANAY, D. WEXLER, **Teoria calitativă a sistemelor cu impulsuri**, 1968, 313 p., 13 lei.

M. IOSIFESCU şi P. TĂUTU, **Procese stohastice şi aplicaţii în biologie şi medicină**, 1968, 345 p., 22 lei.

ŞOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, vol. II, 1966, 669 p., 38 lei.

S. STOILOV, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

IVAN SINGER, **Cea mai bună aproximare în spaţii vectoriale normate prin elemente din subspaţii vectoriale**, 1967, 386 p., 23 lei.

MARIUS I. STOKA, **Geometrie integrală**, 1967, 240 p., 9,75 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 9, P. 1285–1444, BUCUREŞTI, 1968

I. P. „Informaţia" – c. 5602

43831 **Lei 12.—**

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

10

TOMUL 20

1968

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACŢIE

ACAD. MIRON NICOLESCU – redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL – redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAŞ – secretar de redacţie.

La revue „STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE" paraît 10 fois par an. Le prix d'un abonnement annuel est de $ 10 –; £ 4.3.0; F. F. 49. —; D. M. 40—.
Toute commande de l'étranger sera adressée a CARTIMEX, Boite postale 134–135, Roumanie, on à ses représentants à l'étranger. En Roumanie, vous pourrez vous abonner par les bureaux de poste ou chez votre facteur.
În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondenţă, se trimit la Comitetul de redacţie al revistei pe adresa: Str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

F 762

TOM. 20, Nr. 10
1968

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

S U M A R

Pag.

CS. FABIAN, S. RUDEANU şi GH. WEISZ, Rezolvarea problemelor de programare pseudobooleană liniară cu ajutorul unui calculator electronic 1447

D. FIRESCU şi P. TĂUTU, Modele stohastice de cinetica populaţiilor 1463

B. JANKÓ şi I. COROIAN, Metoda Newton-Kantorovici pentru ecuaţii operaţionale neliniare depinzînd de un parametru 1489

I. MATEI, Asupra subgrupurilor grupului centro-afin în trei variabile 1497

ELENA MURGULESCU, Asupra unei probleme a lui H. Villat 1501

LIVIU SOFONEA, Reprezentări corespondente în mecanica cuantică şi în fizica clasică 1513

INDEX ALFABETIC 1595

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 10, P. 1445–1600, BUCUREŞTI, 1968

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
1863

REZOLVAREA PROBLEMELOR DE PROGRAMARE PSEUDOBOOLEANĂ LINIARĂ CU AJUTORUL UNUI CALCULATOR ELECTRONIC

DE

CS. FABIAN, S. RUDEANU, GH. WEISZ

Se numeşte problemă de programare pseudobooleană, orice problemă în care se cere minimizarea (maximizarea) unei funcţii cu valori reale, ale cărei variabile sînt bivalente (0, 1) şi supuse unor inegalităţi şi/sau ecuaţii restrictive. Metode pentru rezolvarea problemelor de acest tip, precum şi numeroase aplicaţii în probleme de cercetări operaţionale, teoria grafurilor, probleme combinatorii etc. au fost date în monografia [1]. În această lucrare se descrie un program pentru rezolvarea problemelor de programare pseudobooleană în cazul cînd atît funcţia obiectiv, cît şi condiţiile restrictive sînt liniare. Programul a fost întocmit şi experimentat la calculatorul ELLIOTT 803—B al Combinatului Siderurgic Hunedoara.

În ultima vreme au fost mult studiate o serie de probleme care apar în diverse domenii, cum ar fi cercetările operaţionale, teoria grafurilor, teoria algebrică a mecanismelor automate etc., şi care din punct de vedere matematic se exprimă ca probleme de programare matematică (în special liniară) cu variabilele bivalente (0, 1).

Mai precis, o asemenea problemă este de tipul următor:

$$\text{Min}\, f(x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$

sub condiţiile restrictive

$$g_j(x_1, \ldots, x_n)\, R_j 0 \quad (j = 1, \ldots, m), \tag{2}$$

în care fiecare R_j este sau $\geqslant$, sau $=$; funcţiile f şi g_j $(j = 1, \ldots, m)$ sînt cu valori reale, iar variabilele $x_1, \ldots, x_n$ sînt bivalente:

$$x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1\}. \tag{3}$$

O funcţie de variabile bivalente (0, 1) şi cu valori reale se numeşte *funcţie pseudobooleană*, iar problema enunţată mai sus o vom numi problemă de *programare pseudobooleană*. În monografia [1] au fost propuse metode de rezolvare a problemelor de acest tip și au fost studiate numeroase aplicații.

În lucrarea de față este descris un algoritm pentru rezolvarea problemelor de programare pseudobooleană liniară (în care atît funcția f, cît și funcțiile g_j $(j = 1, \ldots, m)$ sînt liniare) cu ajutorul unui calculator electronic.

Problemele liniare sînt importante din două puncte de vedere. Pe de o parte, multe aplicații practice conduc la modele liniare : probleme de acoperire (cum ar fi determinarea descompunerilor cromatice ale unui graf, determinarea formelor disjunctive minimale ale unei funcții booleene, determinarea acoperirilor minimale ale unor matrici care intervin în rezolvarea problemei transporturilor prin metoda lui Egerváry etc.), probleme de cuplaj maxim (incluzînd, în particular, problemele de atribuire), determinarea numerelor de stabilitate internă și externă ale unui graf, descompunerea mulțimilor parțial ordonate în lanțuri (cu aplicații economice, de exemplu la planificarea optimă a zborului avioanelor), problema încărcării unui vas etc. [1]. Pe de altă parte, rezolvarea problemelor de programare pseudobooleană neliniară necesită rezolvarea unor probleme auxiliare liniare [1].

În țara noastră a mai fost programată, la calculatorul MECIPT—1, minimizarea unei funcții pseudobooleene neliniare cu variabile independente [2] (metoda de rezolvare programată în aceste lucrări este o variantă mai veche, neperfecționată, a metodei din [1]). Nu cunoaștem detalii despre modul cum au fost programate în alte țări metodele din [1].

Lucrarea de față constă din două paragrafe. În §1 se descrie pe scurt metoda de rezolvare a problemelor de programare pseudobooleană liniară. În §2 se expune un program întocmit pentru calculatorul ELLIOTT 803—B. Programul a fost întocmit inițial pentru varianta mai veche a metodei și a fost modificat odată cu metoda, îmbunătățirile fiind experimentate pe rînd pentru studierea influenței lor asupra performanțelor ce se pot atinge prin calculul pe calculator.

§ 1

În acest paragraf vom descrie pe scurt :

a) rezolvarea unei ecuații pseudobooleene liniare ;

b) rezolvarea unei inecuații pseudobooleene liniare ;

c) rezolvarea unui sistem de ecuații și/sau inecuații pseudobooleene liniare ;

d) rezolvarea unei probleme de programare pseudobooleană liniară.

Punctele a), b) și c), necesare pentru tratarea punctului d), se bazează pe ideea următoare. În principiu, am putea rezolva o ecuație (o inecuație, un sistem) în necunoscutele bivalente $x_1, \ldots, x_n$, verificînd toate cele 2^n valori posibile ale vectorului $(x_1, \ldots, x_n)$ și reținîndu-le numai pe acelea care satisfac ecuația (inecuația, sistemul) ; pentru a construi cele 2^n valori ale vectorului $(x_1, \ldots, x_n)$, putem aplica 2^n bifurcări, adică : dăm lui x_1 valorile 1 și 0 (prima bifurcare) ; pentru $x_1 = 1$, dăm lui x_2 valorile 1 şi 0 (a doua bifurcare); de asemenea, pentru $x_1 = 0$ dăm lui x_2 valorile 1 şi 0 (a treia bifurcare); etc. Practic însă, volumul de calcule este prohibitiv pentru valori prea mari ale lui n; de aceea vom introduce anumite criterii care să ne permită să renunţăm la cele mai multe bifurcări, în aşa fel încît să obţinem toate soluţiile printr-un număr de încercări mult mai mic decît 2^n.

a) *Rezolvarea unei ecuaţii pseudobooleene liniare.* Fie ecuaţia

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b, \tag{4}$$

în care $a_1, \ldots, a_n, b$ sînt numere reale, iar variabilele $x_1, \ldots, x_n$ iau valorile 0 şi 1. Pentru fiecare indice i pentru care $a_i < 0$, vom face transformarea următoare: adăugăm în ambii membri numărul $-a_i > 0$, iar în membrul stîng facem transformarea $-a_i + a_ix_i = -a_i(1 - x_i) = -a_i\bar{x}_i$, unde bara indică negaţia booleană: $\bar{0} = 1$, $\bar{1} = 0$. În felul acesta, în membrul stîng vom obţine numai termeni în variabile cu sau fără bară, avînd coeficienţi nenegativi. Aranjînd termenii în ordine descrescătoare, am adus ecuaţia (4) la forma *canonică*

$$c_{i_1}\widetilde{x}_{i_1} + c_{i_2}\widetilde{x}_{i_2} + \ldots + c_{i_n}\widetilde{x}_{i_n} = d, \tag{5}$$

unde

$$c_{i_1} \geqslant c_{i_2} \geqslant \ldots \geqslant c_{i_n} \geqslant 0, \tag{6}$$

iar fiecare $\widetilde{x}_{i_k}$ este sau x_{i_k} sau $\bar{x}_{i_k}$.

Acum începem rezolvarea propriu-zisă a ecuaţiei (5). Vom numi *bifurcare* în raport cu o variabilă $\widetilde{x}_{i_h}$, studierea separată a cazurilor $\widetilde{x}_{i_h} = 1$ şi $\widetilde{x}_{i_h} = 0$. Bifurcarea se zice completată în momentul în care a fost terminată studierea ambelor alternative. Regulile de eliminare a unor bifurcări sînt următoarele (presupunem că $n \geqslant 1$):

1) dacă $d < 0$, ecuaţia (5) nu are soluţii;

2) dacă $d = 0$, ecuaţia (5) are unica soluţie $\widetilde{x}_{i_1} = \ldots = \widetilde{x}_{i_n} = 0$;

3) dacă $d > 0$ şi $c_{i_1} > d$, atunci luăm $\widetilde{x}_{i_1} = 0$ (şi nu mai trebuie să considerăm cazul $\widetilde{x}_{i_1} = 1$);

4) dacă $d > 0$ şi $c_{i_1} = d$, atunci ecuaţia (5) are soluţia $\widetilde{x}_{i_1} = 1$, $\widetilde{x}_{i_2} = \ldots = \widetilde{x}_{i_n} = 0$ şi rămîne de studiat cazul $\widetilde{x}_{i_1} = 0$;

5) dacă $d > 0$, $c_{i_1} < d$ şi $\sum\limits_{h=1}^{n} c_{i_h} < d$, atunci ecuaţia (5) nu are soluţii;

6) dacă $d > 0$, $c_{i_1} < d$, $\sum\limits_{h=1}^{n} c_{i_h} \geqslant d$ şi $\sum\limits_{k=2}^{n} c_{i_k} < d$, atunci luăm $\widetilde{x}_{i_1} = 1$ (şi nu mai trebuie să studiem cazul $\widetilde{x}_{i_1} = 0$);

7) dacă $d > 0$, $c_{i_1} < d$, $\sum\limits_{h=1}^{n} c_{i_h} \geqslant d$ şi $\sum\limits_{k=2}^{n} c_{i_k} \geqslant d$, atunci bifurcăm în raport cu variabila $\widetilde{x}_{i_1}$.

Prin aplicarea repetată a acestor reguli, ecuaţia (5) se reduce la ecuaţii de acelaşi tip, însă cu mai puţine variabile. Studierea unei alternative a unei bifurcări se încheie în momentul în care am ajuns într-unul din următoarele cazuri: 1), 2), 5), 3) şi $n = 1$, 4) şi $n = 1$, 6) şi $n = 1$. Cînd am terminat studierea primei alternative a ultimei bifurcări necompletate, începem studiul celei de-a doua alternative a acelei bifurcări. Cînd am completat o bifurcare, trecem la studierea celei de-a doua alternative a ultimei bifurcări rămase necompletate. Cînd toate bifurcările au fost completate, rezolvarea ecuaţiei este încheiată.

Exemplu. Să rezolvăm ecuaţia

$$6x_1 + 4x_2 - 9x_3 + x_4 - 7x_5 - 3x_6 = -12. \tag{7}$$

Adăugînd în ambii membri $9 + 7 + 3 = 19$, punînd $9 - 9x_3 = 9\bar{x}_3$, $7 - 7x_5 = 7\bar{x}_5$, $3 - 3x_6 = 3\bar{x}_6$ şi aranjînd termenii în ordinea descrescătoare a coeficienţilor, obţinem ecuaţia echivalentă

$$9\bar{x}_3 + 7\bar{x}_5 + 6x_1 + 4x_2 + 3\bar{x}_6 + x_4 = 7, \tag{8}$$

pe care o vom rezolva aplicînd numai metoda generală descrisă mai înainte şi nici o observaţie suplimentară care să utilizeze structura particulară a ecuaţiei (8).

Sîntem în cazul 3), deci $\bar{x}_3 = 0$ şi rămîne ecuaţia $7\bar{x}_5 + 6x_1 + 4x_2 + 3\bar{x}_6 + x_4 = 7$, care se află în cazul 4). Prin urmare, ultima ecuaţie are soluţia $\bar{x}_5 = 1$, $x_1 = x_2 = \bar{x}_6 = x_4 = 0$, care ne arată că ecuaţia iniţială (7) are soluţia

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0,\ x_6 = 1, \tag{9.1}$$

şi rămîne să studiem cazul $\bar{x}_5 = 0$, adică ecuaţia $6x_1 + 4x_2 + 3\bar{x}_6 + x_4 = 7$. Această ecuaţie se află în cazul 7), deci trebuie să bifurcăm după variabila x_1.

Pentru $x_1 = 1$, obţinem ecuaţia $4x_2 + 3\bar{x}_6 + x_4 = 1$, care se află în cazul 3), deci $x_2 = 0$ şi rămîne ecuaţia $3\bar{x}_6 + x_4 = 1$, care este tot în cazul 3). Urmează că $x_6 = 0$ şi rămîne ecuaţia $x_4 = 1$, care se află în cazul 4), deci are soluţia $x_4 = 1$. Am găsit astfel soluţia

$$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1,\ x_5 = 1,\ x_6 = 1 \tag{9.2}$$

a ecuaţiei iniţiale (8). Toate variabilele fiind fixate, studierea alternativei $x_1 = 1$ este încheiată.

Trecem acum la studierea alternativei $x_1 = 0$. Ecuaţia devine $4x_2 + 3\bar{x}_6 + x_4 = 7$ şi se află în cazul 5). Prin urmare, luăm $x_2 = 1$ şi rămîne ecuaţia $3\bar{x}_6 + x_4 = 3$, care se află în cazul 4), deci luăm $\bar{x}_6 = 1$ şi rămîne $x_4 = 0$. Am obţinut astfel soluţia

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 0,\ x_5 = 1,\ x_6 = 0. \tag{9.3}$$

Toate variabilele fiind fixate, bifurcarea a fost completată; cum nu există alte bifurcări, rezolvarea este încheiată.

b) *Rezolvarea unei inecuaţii pseudobooleene liniare.* Înmulţind eventual cu -1, putem presupune că inecuaţia este de forma

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \geqslant b. \tag{10}$$

(O inecuaţie de forma $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i > b$, unde a_i $(i = 1, \ldots, n)$ şi b sînt numere întregi — ceea ce în aplicaţiile practice se poate presupune întotdeauna fără a micşora generalitatea — se poate scrie şi sub forma

$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geqslant b + 1$, deci se reduce tot la tipul (10)). Aplicînd transformările indicate pentru o ecuaţie, putem aduce inecuaţia (10) la forma *canonică*

$$c_{i_1}\tilde{x}_{i_1} + c_{i_2}\tilde{x}_{i_2} + \ldots + c_{i_n}\tilde{x}_{i_n} \geqslant d, \tag{11}$$

unde

$$c_{i_1} \geqslant c_{i_2} \geqslant \ldots \geqslant c_{i_n} \geqslant 0. \tag{6}$$

Inecuaţia (11) se rezolvă după acelaşi principiu folosit în cazul unei ecuaţii, însă aplicînd alte reguli, şi anume :

I) dacă $d \leqslant 0$, atunci inecuaţia (11) este identic satisfăcută ;

II) dacă $d > 0$ şi $c_{i_1} \geqslant d$, atunci inecuaţia (11) are o ,,familie de soluţii'', constînd din 2^{n-1} vectori care se obţin luînd $\tilde{x}_{i_1} = 1$, iar $\tilde{x}_{i_2}, \ldots, \tilde{x}_{i_n}$ arbitrari ; dacă $n > 1$, atunci trebuie să studiem şi cazul $\tilde{x}_{i_1} = 0$, iar dacă $n = 1$, atunci inecuţia (11) nu are alte soluţii ;

III) dacă $d > 0$, $c_{i_1} < d$ şi $\sum_{h=1}^{n} c_{i_h} < d$, atunci inecuaţia (11) nu are soluţii ;

IV) dacă $d > 0$, $c_{i_1} < d$, $\sum_{h=1}^{n} c_{i_h} \geqslant d$ şi $\sum_{k=2}^{n} c_{i_k} < d$, atunci luăm $\tilde{x}_{i_1} = 1$ (şi nu mai trebuie să considerăm cazul $\tilde{x}_{i_1} = 0$) ;

V) dacă $d > 0$, $c_{i_1} < d$, $\sum_{h=1}^{n} c_{i_h} \geqslant d$ şi $\sum_{k=2}^{n} c_{i_k} < d$, atunci bifurcăm după variabila $\tilde{x}_{i_1}$, considerînd separat cazurile $\tilde{x}_{i_1} = 1$ şi $\tilde{x}_{i_1} = 0$.

Folosirea acestor reguli în procesul de bifurcare se face ca în cazul unei ecuaţii. Soluţiile se obţin grupate în ,,familii de soluţii'', două cîte două disjuncte.

Exemplu. Să rezolvăm inecuaţia

$$9\bar{x}_3 + 7\bar{x}_5 + 6x_1 + 4x_2 + 3\bar{x}_6 + x_4 \geqslant 7. \tag{12}$$

Inecuaţia se află în cazul II), deci avem familia de soluţii $\bar{x}_3 = 1$, x_5, x_1, x_2, x_6, x_4 arbitrari, adică

$$x_3 = 0,\ x_1,\ x_2,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \text{ arbitrari}, \tag{13.1}$$

şi rămîne cazul $\bar{x}_3 = 0$, deci $7\bar{x}_5 + 6x_1 + 4x_2 + 3\bar{x}_6 + x_4 \geqslant 7$. Această inecuaţie fiind tot în cazul II), avem familia de soluţii $\bar{x}_5 = 1$, x_1, x_2, $\bar{x}_6$, x_4 arbitrari, adică inecuaţia (11) are familia de soluţii

$$x_3 = 1,\ x_5 = 0,\ x_1,\ x_2,\ x_4,\ x_6 \text{ arbitrari} \tag{13.2}$$

şi rămîne cazul $\bar{x}_5 = 0$, adică $6x_1 + 4x_2 + 3\bar{x}_6 + x_4 \geqslant 7$. Fiind în cazul V), facem o bifurcare.

Pentru $x_1 = 1$, avem $4x_2 + 3\bar{x}_6 + x_4 \geqslant 1$. Prin aplicarea repetată a concluziei cazului II), obţinem succesiv : $x_2 = 1$, $\bar{x}_6, x_4$ arbitrari, adică familia de soluţii

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1,\ x_5 = 1,\ x_4,\ x_6 \text{ arbitrari}, \tag{13.3}$$

și rămîne cazul $x_2 = 0$, adică $3\bar{x}_6 + x_4 \geqslant 1$; avem $\bar{x}_6 = 1$, x_4 arbitrar, adică

(13.4) $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_5 = 1,\ x_6 = 0,\ x_4$ arbitrar,

și rămîne cazul $\bar{x}_6 = 0$, adică $x_4 \geqslant 1$. Conform cazului II), avem $x_4 = 1$, adică

(13.5) $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1,\ x_5 = 1,\ x_6 = 1$;

toate variabilele fiind fixate, discutarea alternativei $x_1 = 1$ s-a încheiat.

Pentru $x_1 = 0$, obținem inecuația $4x_2 + 3\bar{x}_6 + x_4 \geqslant 7$. Aceasta se află în cazul IV), deci $x_2 = 1$ și rămîne $3\bar{x}_6 + x_4 \geqslant 3$. Fiind în cazul II), avem $\bar{x}_5 = 1$, x_4 arbitrar, adică

(13.6) $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1,\ x_5 = 1,\ x_6 = 0,\ x_4$ arbitrar

și rămîne cazul $\bar{x}_6 = 0$, adică inecuația $x_4 \geqslant 3$, care, fiind în cazul III), nu are soluții.

c) *Rezolvarea unui sistem de ecuații și/sau inecuații pseudobooleene liniare* începe prin aducerea fiecărei ecuații și inecuații la forma *canonică* (5), respectiv (11). Rezolvarea propriu-zisă constă dintr-o succesiune finită de etape 1, 2, 3, ... ; o etapă oarecare e poate fi descrisă după cum urmează :

Se cercetează în ce caz se află fiecare ecuație și inecuație a sistemului și se trage concluzia corespunzătoare. Aceste concluzii pot fi de următoarele tipuri : α) ecuația (inecuația) respectivă nu are soluții ; β) una din variabile trebuie să ia o anumită valoare ; γ) nu putem trage nici concluzia α), nici β). În situația β) există două posibilități, după cum prin fixarea variabilei respective, ecuația (inecuația) respectivă este : β_1) rezolvată ; β_2) încă nerezolvată.

Dacă cel puțin una din ecuații sau inecuații este în situația α), sistemul corespunzător etapei e nu are soluții.

Dacă nici o ecuație sau inecuație nu se află în situația α), dar există ecuații și/sau inecuații în situația β), atunci pentru fiecare din ele se trage concluzia corespunzătoare, adică se fixează o anumită variabilă. Se confruntă apoi variabilele fixate. Dacă dintr-o ecuație (inecuație) a rezultat o variabilă $x_i = 1$, iar din alta s-a dedus $x_i = 0$, atunci sistemul corespunzător etapei e nu are soluții. În cazul contrar se elimină acele ecuații (inecuații) care se găsesc în cazul β_1) și se introduce fiecare variabilă fixată în ecuațiile și inecuațiile rămase. Dacă toate variabilele sînt fixate, atunci se constată dacă ele satisfac sau nu sistemul ; în caz afirmativ se înregistrează soluția corespunzătoare a sistemului inițial. Dacă au mai rămas variabile nefixate, atunci sistemul obținut prin operațiile de mai sus va fi examinat în etapa e + 1.

Dacă nici o ecuație și nici o inecuație nu se află în cazul α) sau β), se trece la o nouă bifurcare, a cărei primă alternativă începe să fie studiată în etapa e + 1.

În cazurile în care am constatat că sistemul examinat în etapa e este rezolvat sau, dimpotrivă, nu are soluții, se procedează în modul următor. Dacă există bifurcări necompletate, atunci a doua alternativă a ultimei bifurcări necompletate începe să fie studiată în etapa e + 1.

Dacă toate bifurcările sînt completate, atunci procesul de rezolvare este încheiat.

Exemplu. Să se rezolve sistemul

$$9\bar{x}_3 + 7\bar{x}_5 + 6x_1 + 3x_2 + 2\bar{x}_6 + x_4 \geqslant 7, \tag{14.1}$$

$$6x_5 + 5\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2 + 2\bar{x}_3 + \bar{x}_6 + x_4 \geqslant 13. \tag{14.2}$$

Inecuaţia (14.1) este în cazul V), iar (14.2) în cazul IV), implicînd $x_5 = 1$. Introducem această valoare şi în (14.1), obţinînd

$$9\bar{x}_3 + 6x_1 + 3x_2 + 2\bar{x}_6 + x_4 \geqslant 7, \tag{14'.1}$$

$$5\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2 + 2\bar{x}_3 + \bar{x}_6 + x_4 \geqslant 7. \tag{14'.2}$$

Acum ambele inecuaţii se află în cazul V) ; vom bifurca în raport cu prima variabilă din (14′.1).

Prima alternativă este $x_3 = 1$. Această valoare rezolvă inecuaţia (14′.1) şi reduce astfel sistemul la inecuaţia

$$5\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2 + \bar{x}_6 + x_4 \geqslant 5, \tag{14''.2}$$

ale cărei familii de soluţii (găsite ca la punctul b) sînt ($\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2, \bar{x}_6$, x_4 arbitrari) şi ($\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = \bar{x}_6 = x_4 = 1$). Am găsit astfel următoarele familii de soluţii ale sistemului iniţial (14) :

$$x_1 = 0,\ x_3 = 0,\ x_5 = 1,\ x_2,\ x_4,\ x_6 \text{ arbitrari}; \tag{15.1}$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1,\ x_5 = 1,\ x_6 = 0. \tag{15.2}$$

Urmează acum alternativa $\bar{x}_3 = 0$, pentru care sistemul (14′) devine

$$6x_1 + 3x_2 + 2\bar{x}_6 + x_4 \geqslant 7, \tag{14'''.1}$$

$$5\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2 + \bar{x}_6 + x_4 \geqslant 7. \tag{14'''.2}$$

Ambele inecuaţii sînt în cazul IV) ; din (14‴.1) rezultă $x_1 = 1$, iar din (14‴.2) se deduce $\bar{x}_1 = 1$, ceea ce este contradictoriu.

Procesul de rezolvare s-a încheiat.

d) *Rezolvarea unei probleme de programare pseudobooleană liniară.* Vom observa mai întîi că punctele de minim ale unei funcţii pseudobooleene liniare

$$f = \sum a_i x_i \tag{16}$$

se obţin imediat din formula

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{ dacă } a_i < 0, \\ 0, \text{ dacă } a_i > 0, \\ \text{arbitrar (0 sau 1), dacă } a_i = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Pentru a minimiza funcţia (16) în cazul cînd variabilele sînt supuse unui sistem de restricţii liniare, putem proceda în modul următor : 1) determinăm familiile de soluţii ale sistemului de restricţii ; 2) pentru fiecare familie de soluţii, introducem variabilele ei fixate în funcţia (16), obținînd astfel o nouă funcție liniară (care depinde numai de variabilele arbitrare ale familiei respective) și minimizăm această funcție cu ajutorul formulei (17); 3) cel mai mic dintre minimele „parțiale" corespunzătoare familiilor de soluții, va fi minimul căutat al funcției (16) sub condițiile restrictive date; am obținut totodată și punctele în care acest minim este atins.

Procedeul descris mai sus poate fi accelerat pe trei căi.

Prima din ele constă în următoarele. Se adaugă la sistemul de restricții inegalitatea

$$\sum a_i x_i \leqslant m_0, \tag{18.0}$$

unde drept m_0 se ia valoarea funcției economice (16) într-un punct care satisface restricțiile, dacă o asemenea soluție este cunoscută *a priori*, sau $m_0 = \sum\limits_{a_i > 0} a_i$ în cazul contrar. După ce a fost obținută prima familie de soluții, se calculează minimul parțial m_1 al funcției economice (16) în cadrul acestei familii de soluții; dacă $m_1 < m_0$, se înlocuiește (18.0) prin

$$\sum a_i x_i \leqslant m_1, \tag{18.1}$$

și se continuă apoi procesul de bifurcare, care va fi în general scurtat datorită faptului că restricția suplimentară (18.1) va elimina explorarea unora dintre familiile de soluții ale sistemului inițial de restricții[1]). Dacă în cursul procesului de bifurcare se obține o familie de soluții pentru care minimul parțial corespunzător al funcției (16) este $m_2 < m_1$, atunci restricția suplimentară (18.1) se înlocuiește cu

$$\sum a_i x_i \leqslant m_2 \tag{18.2}$$

și se continuă bifurcarea etc.

Fie

$$c_{i_1}\widetilde{x}_{i_1} + c_{i_2}\widetilde{x}_{i_2} + \ldots + c_{i_n}\widetilde{x}_{i_n} \geqslant d, \tag{19}$$

unde $c_{i_1} \geqslant c_{i_2} \geqslant \ldots \geqslant c_{i_n} \geqslant 0$, forma canonică a restricției suplimentare (18.0); în cursul procesului de bifurcare inecuația (19) se schimbă datorită fixării unora dintre variabile și de asemenea din cauza modificării termenului liber.

Un al doilea procedeu care se recomandă în vederea accelerării rezolvării constă în faptul că în momentul cînd trebuie să se opereze o bifurcare, se alege prima variabilă $\widetilde{x}_{i_j}$ care apare efectiv în inecuația (19) în momentul respectiv (pe cînd variabilele $\widetilde{x}_{i_1}, \ldots, \widetilde{x}_{i_{j-1}}$ sînt fixate și termenii corespunzători trecuți în membrul al doilea).

În sfîrșit, a treia cale de accelerare este următoarea. Să presupunem că la un moment dat urmează să facem o bifurcare. Fie H mulțimea acelor indici h pentru care variabila $\widetilde{x}_{i_h}$ este deja fixată și fie $\widetilde{x}_{i_j}$ variabila în raport cu care urmează să efectuăm bifurcarea (notațiile se referă la inecuația (19)). Explorăm întîi alternativa $\widetilde{x}_{i_j} = 1$; să presupunem că am găsit familii de soluţii corespunzătoare acestei alternative şi să notăm cu litera K mulţinea acelor indici $k \in H$ pentru care $\tilde{x}_{i_k} = 0$ în ultima (şi deci, cea mai bună!) familie de soluţii corespunzătoare ramurii $\tilde{x}_{i_j} = 0$. Dacă

---

[1]) Dacă m_0 este valoarea funcției obiectiv (16) într-un punct care satisface restricțiile, atunci se poate întîmpla ca de la început restricția suplimentară (18.0) să elimine unele familii de soluții,

$$c_{i_j} > \sum_{k \in K} c_{i_k}, \tag{20}$$

atunci nu vom mai explora alternativa $\tilde{x}_{i_j} = 0$, deoarece ea nu poate îmbunătăţi funcţia (16)[2].

Exemplu. Vom considera o problemă mai complexă decît cele precedente: să se minimizeze funcţia pseudobooleană

$$f = 12x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 5x_4 + 4x_5 + 8x_6 - 12x_7 - 3x_8 - 10x_9 + \\ + x_{10} - 7x_{11} - 7x_{12} \tag{21}$$

cu condiţiile restrictive

$$(22.1)\quad 12x_3 + 7\bar{x}_6 + 5x_{11} + 3\bar{x}_2 + 3\bar{x}_{10} + x_1 + x_5 + x_7 + x_{12} \geqslant 19,$$

$$(22.2)\quad 7x_2 + 6\bar{x}_5 + 3\bar{x}_1 + x_4 \geqslant 9,$$

$$(22.3)\quad 11\bar{x}_1 + 9\bar{x}_{11} + 7x_4 + 5x_9 + 2\bar{x}_7 + \bar{x}_3 + x_6 + \bar{x}_8 \geqslant 28,$$

$$(22.4)\quad 12x_5 + 8x_{10} + 7\bar{x}_6 + 6\bar{x}_3 + 5\bar{x}_2 + 5\bar{x}_{12} + 3\bar{x}_8 + \bar{x}_9 \geqslant 19,$$

$$(22.5)\quad 8x_6 + 7x_1 + 7\bar{x}_9 + 7x_{12} + 5x_3 + 3\bar{x}_4 + 2x_8 + x_2 + \bar{x}_5 + \bar{x}_{10} \geqslant 19,$$

$$(22.6)\quad 5x_8 + 4x_4 + 3x_7 + 2x_1 + x_9 + \bar{x}_{11} + \bar{x}_{12} \geqslant 6.$$

Adăugăm mai întîi inegalitatea suplimentară $f \leqslant 30$ $(12 + 5 + 4 + 8 + 1 = 30)$ şi o aducem la forma canonică:

$$(23.0)\quad 12\bar{x}_1 + 12x_7 + 10x_9 + 9x_3 + 8\bar{x}_6 + 7x_{11} + 7x_{12} + \\ + 5\bar{x}_2 + 5x_4 + 4\bar{x}_5 + 3x_8 + \bar{x}_{10} \geqslant 0.$$

Începem acum rezolvarea sistemului de restricţii. Din (22.3) deducem $\bar{x}_1 = 1$. După introducerea acestei valori în întregul sistem, sîntem obligaţi să introducem prima bifurcare. Ordinea preferenţială a variabilelor în raport cu care se vor face bifurcările este cea dată de inecuaţia (23.0), adică x_7, x_9 etc.

Pentru $x_7 = 1$ se deduce succesiv, din ecuaţiile (22.3), (22.1) şi din nou (22.3), că $\bar{x}_{11} = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$; inegalitatea (22.6) este acum rezolvată. În continuare sîntem obligaţi să facem o nouă bifurcare.

Pentru $x_7 = 1$, $x_9 = 1$ deducem succesiv, din (22.5), (22.3), (22.1), (22.2) şi (22.4), că $x_6 = 1$, $\bar{x}_2 = 1$, $\bar{x}_{10} = 1$, $\bar{x}_5 = 1$ şi $x_5 = 1$, ceea ce este contradictoriu.

Pentru $x_7 = 1$, $x_9 = 0$, trebuie introdusă o nouă bifurcare: vom lua $\bar{x}_6 = 1$. Inegalitatea (22.1) este rezolvată; din (22.3) şi (22.5) se deduce $\bar{x}_8 = 1$ şi $x_{12} = 1$, după care inecuaţiile respective sînt rezolvate.

---

[2] Într-adevăr, inecuaţia (19) este de forma $g(x_1, \ldots, x_n) \geqslant d$, unde $g(x_1, \ldots, x_n) = -f(x_1, \ldots, x_n) + m + d$; deoarece minimizăm funcţia f, trebuie să maximizăm funcţia g,

Urmează o nouă bifurcare : $x_7 = 1$, $x_9 = 0$, $\bar{x}_6 = 1$, $\bar{x}_2 = 1$. Din (22.2) și (22.4) urmează $\bar{x}_5 = 1$ și $x_{10} = 1$. Întregul sistem e acum rezolvat și am obținut soluția

$$(24.1) \quad x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0,\ x_7 = 1,$$
$$x_8 = 0,\ x_9 = 0,\ x_{10} = 1,\ x_{11} = 0,\ x_{12} = 1.$$

Valoarea funcției (21) în punctul (24.1) este $f(0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1) = -32$; inegalitatea $f \leqslant 30$ va fi deci înlocuită cu $f \leqslant -32$, a cărei formă canonică este

$$(23.1) \quad 12\bar{x}_1 + 12x_7 + 10x_9 + 9x_3 + 8\bar{x}_6 + 7x_{11} + 7x_{12} +$$
$$+ 5\bar{x}_2 + 5x_4 + 4\bar{x}_5 + 3x_8 + x_{10} \geqslant 62.$$

Continuăm procesul de bifurcare. Înainte de a examina alternativa $x_7 = 1$, $x_9 = 0$, $\bar{x}_6 = 1$, $\bar{x}_2 = 0$, vom aplica testul indicat mai sus. Variabilele fixate (cu indicii în H) sînt $\bar{x}_1$, x_7, x_{11}, x_3, x_4, x_9, $\bar{x}_6$, x_8 și x_{12}, iar singura variabilă corespunzătoare mulțimii K este $\bar{x}_{10}$. Coeficienții lui $\bar{x}_2$ și $\bar{x}_{10}$ sînt 5 și 1 ; cum $5 > 1$, alternativa considerată nu va mai fi examinată.

Ne întoarcem acum la bifurcarea în raport cu $\bar{x}_6$; ar trebui examinată alternativa $x_7 = 1$, $x_9 = 0$, $\bar{x}_6 = 0$. Aici variabilele corespunzînd lui H sînt $\bar{x}_1$, x_7, x_{11}, x_3, x_4 și x_9, iar cele corespunzînd lui K sînt x_8 și $\bar{x}_{10}$. Coeficientul lui $\bar{x}_6$ este 8, iar cei ai lui x_8 și $\bar{x}_{10}$ sînt 3 și 1 ; cum $8 > 3 + 1$, și această alternativă se elimină.

Ne întoarcem acum la prima bifurcare : urmează alternativa $x_7 = 0$. Aici singura variabilă corespunzînd lui H este $\bar{x}_1$, iar cele corespunzînd lui K sînt x_{11}, x_9, x_8 și $\bar{x}_{10}$, avînd coeficienții respectiv 7, 10, 3 și 1. Coeficientul lui x_7 fiind $12 < 7 + 10 + 3 + 1$, alternativa $x_7 = 0$ trebuie examinată.

Luăm $x_7 = 0$; din (23.1) se deduce $x_9 = 1$. Urmează acum o bifurcare față de x_3.

Pentru $x_7 = 0$, $x_3 = 1$, deducem din (22.3) și (23.1) respectiv că $\bar{x}_{11} = 1$ și că $\bar{x}_6 = 1$, $x_{12} = 1$, $\bar{x}_2 = 1$, $x_4 = 1$, $\bar{x}_5 = 1$ și $x_8 = 1$, după care se constată că (22.5) se reduce la inecuația $\bar{x}_{10} \geqslant 4$, care nu are soluții.

A rămas alternativa $x_7 = 0$, $x_3 = 0$, pentru care singura soluție a inecuației (23.1) este $\bar{x}_6 = 1$, $x_{11} = 1$, $x_{12} = 1$, $\bar{x}_2 = 1$, $x_4 = 1$, $\bar{x}_5 = 1$, $x_8 = 1$, $\bar{x}_{10} = 1$; aceste valori nu satisfac inecuația (22.3).

Procesul de bifurcare s-a terminat ; singurul punct de minim al funcției (21) cu condițiile (23) este (24.1), iar valoarea minimă este -32.

§ 2

Pentru rezolvarea problemelor de programare pseudobooleană liniară pe calculatorul ELLIOT 803—B, programul s-a întocmit în limbajul Autocod-Mark III combinat cu cod mașină, scopul fiind realizarea celui mai comod mod de programare utilizînd la maxim caracteristicile calculatorului[3]). În cazul de față, aceste caracteristici permit artificii care reduc timpul de lucru și măresc dimensiunile posibile ale problemei rezolvabile.

Limbajul folosit permite adresarea simbolică a celulelor din memorie afectate datelor inițiale (matricea restricțiilor, funcția de eficiență), celulelor de lucru și etichetelor.

Simbolizarea adreselor s-a făcut după cum urmează :

XI (celule afectate pentru valorile variabilelor),

UI (celule afectate pentru etichetarea restricțiilor),

FI (celule afectate pentru valorile coeficienților funcției de eficiență),

GI (celule afectate pentru valorile coeficienților restricțiilor),

CI (celule afectate pentru valorile coeficienților restricțiilor pentru operare),

DI (celule afectate pentru termenii liberi),

BI (celule afectate pentru marcarea bifurcațiilor).

Pentru realizarea maximului de informații pe cuvînt s-au ales ca forme deosebite de reprezentare în celule calculatori, unele configurații cum ar fi

Celule CI

$$00 \; J \; B00 \; C$$

unde adresa celulei conține informația privind poziția coeficientului în matricea instrucțiilor după ordonare ;

J este indicele variabilei asociate ;

B este 1 sau 0 după cum coeficientul, înainte de aducerea la forma canonică, a fost negativ sau pozitiv ;

C este valoarea absolută a coeficientului.

Celule UI

$$000 \; B \; 00 \; 1$$

B este 1 sau 0, după cum restricția a fost rezolvată sau nu ;

N_2 este 1 sau 0, după cum restricția este ecuație sau inecuație.

---

[3]) Calculatorul ELLIOTT 803-B este un calculator digital universal tip serie. Lungimea unui cuvînt este de 39 biți. Cuvîntul este operabil aritmetic, logic și prin deplasări la stînga și la dreapta prin biți. Acumulatorul este ,,prelungit'' la dreapta cu o lungime de cuvînt prin registrul auxiliar AR

Cuvîntul este de forma una adresă pe instrucțiune și două instrucțiuni pe cuvînt, cu posibilitatea de a folosi partea de adresă a primei instrucțiuni ca indice pentru cea de a doua,

Prezentarea cuvîntului este de forma

$$F_1 N_1 BF_2 N_2.$$

F_1 și F_2 avînd lungimea de 6 biți,

N_1 și N_2 avînd lungimea de 13 biți,

B avînd lungimea de 1 bit,

Scrierea F_1 și F_2 este octală,

Scrierea N_1 și N_2 este zecimală,

scrierea B este binară,

Această scriere facilitează programarea în cod mașină folosind pseudoinstrucțiunile pentru compactarea și decuparea informațiilor într-un cuvînt, cînd lungimea acestor informații nu necesită folosirea întregii celule.

Decuparea unei părți din informația depusă într-o celulă se poate face prin operații aritmetice, deplasări sau înmulțire logică ,, $\wedge$ '', vitezele acestor operații fiind mult diferite,

Intrarea în calculator se face cu informațiile pe bandă perforată cu 5 canale, citirea făcîndu-se cu stop pe caracter.

Celule XI

37 8191/778191

adresa celulei conţine informaţia care constă în indicarea indicelui variabilei ;

F_1 este 37 sau 00, după cum variabila este nefixată sau fixată ;

N_1 este 8191 sau BI, după cum variabila este nefixată sau fixată după bifurcaţia BI ;

B este 1 sau 0 după cum variabila a fost fixată la o bifurcare sau a fost fixată între două bifurcări ;

F_2N_2 este 77 8191 sau 000 după cum variabila este fixată cu valoarea 1 sau cu valoarea 0.

Această reprezentare a informaţiilor are avantaje evidente, în primul rînd în ceea ce priveşte compactarea, folosind pentru trei sau patru informaţii acelaşi cuvînt.

La fixarea variabilelor prin folosirea lui 000, respectiv 778191, acestea joacă în acelaşi timp şi rolul de constante de colaţionare. La calculatorul electronic ELLIOTT 803—B, înmulţirea aritmetică depăşeşte mult ca timp înmulţirea logică.

★

Valoarea coeficienţilor variabilelor din restricţii punîndu-se la poziţia cea mai puţin semnificativă a cuvîntului, ordonarea se va putea face prin metoda binară. Această metodă deosebit de avantajoasă pentru programare pe un calculator, permite realizarea ordonării cu minim de instrucţiuni, deci în timp minim, fără să fie nevoie ca valoarea să fie decupată din cuvîntul întreg.

Ţinînd seamă că pentru rezolvarea unei probleme de programare pseudobooleană liniară, matricea iniţială trebuie păstrată permanent în memorie, celulele GI servesc la aceasta, iar compactarea în forma de mai sus permite o utilizare judicioasă a memoriei.

Programul se compune din 9 părţi, asigurîndu-se prin parcurgerea lui, în limita posibilităţilor, drumul cel mai scurt ; altfel spus, cazurile cele mai frecvent posibile să fie parcurse înaintea celor cu o apariţie rară, eliminîndu-se pe cît posibil verificările inutile.

Partea 1-a : citirea, etichetarea şi compactarea informaţiilor.
Partea a 2-a : Blocul pentru ordonare binară.
Partea a 3-a : Verificarea condiţiei $DI < 0$.
Partea a 4-a : Verificarea condiţiei $DI = 0$.
Partea a 5-a : Verificarea condiţiei $CIJ > DI$.
Partea a 6-a : Verificarea condiţiei $\sum\limits_{2} CIJ < DI$.
Partea a 7-a : Blocul IVS (înlocuirea valorilor în sistem).
Partea a 8-a : Blocul SB (stabilirea de bifurcări).
Partea a 9-a : Blocul RB (refacerea bifurcărilor).

Partea I-a. Se memorează informaţiile de ordin general : numărul variabilelor, numărul restricţiilor, natura restricţiilor (egalităţi sau inegalităţi).

Citirea coeficienţilor se face termen cu termen şi se compactează în celula B după care se depun în celulele FI, indexat şi marcat pentru ordonare.

Linia ordonată se depune în celulele CI și GI, restricția se etichetează și se trece din nou la partea 1-a pentru citirea unei noi linii.

La citirea funcției de eficiență se realizează și condiția pentru prima accelerare, adică funcția de eficiență se depune ca primă restricție, termenul liber al acesteia calculîndu-se conform metodei.

Partea a 2-a. Ordonarea binară se face pentru fiecare linie în parte.

Metoda ordonării binare constă din următoarele :

a) Se determină ordinul de mărime binară a elementului maxim pentru ordonat.

b) Se inițializează un contor pentru marcarea pozițiilor binare după care se face ordonarea.

c) Se marchează poziția primului element care pe poziția binară corespunzătoare este 0.

d) Se marchează ultimul element cu valoarea 1 înaintea apariției unui nou element 0.

e) Se schimbă cele două elemente și se marchează.

Operația se repetă pentru fiecare coloană de poziții binare [4]).

Partea de calcul propriu-zisă se efectuează după citirea și compactarea întregii informații.

Partea a 3-a. Se verifică etichetele restricțiilor, adică se verifică dacă mai există restricții nerezolvate. Dacă răspunsul este negativ, se fixează variabilele rămase nefixate, astfel încît să se obțină soluția optimă. La primul pas această verificare este inutilă, dar durata de operare fiind redusă și cum se întîmplă o singură dată, am considerat că nu este necesară introducerea unei condiții suplimentare pentru evitarea ei.

Am considerat că este avantajos ca verificarea condiției $DI < 0$ să se facă înaintea celorlalte verificări, cu toate că apariția ei este puțin probabilă (deoarece această verificare este foarte scurtă, iar operațiile care se pot elimina prin obținerea unui răspuns pozitiv sînt de lungă durată).

Partea a 4-a. Apariția situației $DI = 0$ este de probabilitate redusă, dar deosebit de avantajoasă din punctul de vedere al numărului de operații care devin inutile. Într-adevăr, în cazul unei inecuații, aceasta este rezolvată, iar în cazul unei ecuații, se fixează toate variabilele ei : $\widetilde{x}_i = 0$.

Partea a 5-a. În cazul unei ecuații, dacă $C_{ij} > DI$, atunci se stabilește $\widetilde{x}_i$ corespunzător egal cu 0 și se trece la partea a 7-a.

Partea a 6-a. Dacă $\sum\limits_{2} CIJ < DI$, se face $\widetilde{x}_i = 1$ și se trece la partea a 7-a.

Partea a 7-a. În această parte se fac următoarele operații.

Se introduc în sistem valorile fixate ale variabilelor, făcîndu-se în același timp suma coeficienților variabilelor nefixate. În cazul în care suma este mai mică decît noul termen liber, soluţia curentă este imposibilă, fiind necesară întoarcerea la o bifurcaţie.

---

[4]) De menționat că pentru o optimizare a ordonării este de recomandat ca această metodă să se combine cu altele. de exemplu cu înjumătățirea intervalelor.

Autorii au considerat că pentru capacitatea memoriei utilizate, adică pentru dimensiunile posibile, și pentru viteza calculatorului ELLIOTT 803-B. metoda folosită este suficient de rapidă.

Apare în mod natural întrebarea de ce nu s-a făcut această verificare înaintea părţilor 2—6. ? Raţionamentul a fost următorul :

Verificarea separată a sumei coeficienţilor variabilelor nefixate este o operaţie de lungă durată, făcînd necesară parcurgerea întregii matrici. Revenirea la părţile 3—6 se face după parcurgerea blocului *IVS* în care, concomitent cu înlocuirea (în acelaşi ciclu), se poate face şi verificarea sumei. Astfel numai prima dată, adică atunci cînd sistemul este iniţial incompatibil, am putea avea un avantaj oarecare de timp, dar am considerat acesta neinteresant deoarece în această situaţie tot calculul nu va mai avea loc.

Partea a 8-a. Contorul B se măreşte cu o unitate. Noua valoare a contorului B se introduce în poziţia corespunzătoare a celulei afectate componentei I a vectorului B. În continuare se stabileşte valoarea variabilei X şi se marchează numărul de ordine al bifurcaţiei.

Partea a 9-a. Conform algoritmului, dacă nu mai există bifurcaţii, s-a obţinut o soluţie, deci primul test este

$$B = 0?$$

Dacă răspunsul este afirmativ, se imprimă soluţia.

La răspuns negativ se efectuează testul de bifurcare conform algoritmului.

Componenta I a vectorului B se face 0, iar contorul B se reduce cu o unitate.

Deoarece numărul de ordine al bifurcării după care s-a fixat o variabilă este depus în celulele X_i' în partea mai semnificativă, pentru identificarea acestui număr de ordine nu este necesară decuparea informaţiei, ci o verificare de forma ,,mai mare'', ceea ce reduce evident timpul de lucru.

★

În general, la întocmirea programului s-a căutat satisfacerea a două cerinţe : pe de o parte posibilitatea rezolvării unui sistem cît mai mare la o memorie dată, iar pe de altă parte o viteză de lucru cît mai mare.

Pentru realizarea primului deziderat s-a mers pe ideea compactării informaţiei. Dacă acest lucru nu influenţează prea mult timpul de introducere a datelor, în schimb el poate afecta timpul de rezolvare. De aceea s-a încercat plasarea în interiorul celulei a informaţiilor în aşa fel (după cum se poate observa din descrierea blocurilor) încît dacă este posibil, decuparea lor să nu fie necesară. În program sînt cuprinse şi constantele de colaţionare astfel ca verificarea unei anumite condiţii să poată fi realizată printr-o operaţie simplă, poziţia informaţiei fiind şi ea o informaţie. Această metodă a permis reducerea considerabilă a timpului real de calcul, obţinîndu-se viteze considerabil îmbunătăţite.

În general, deşi algoritmul la o primă vedere are aspectul unei rezolvări prin încercări succesive, în realitate nu se execută decît o infimă parte din totalul verificărilor posibile. În realizarea programului, ordinea testelor a fost astfel stabilită încît un anumit răspuns să facă inutilă efectuarea ulterioară a unui număr de teste, economisindu-se o serie întreagă de operaţii.

La întocmirea programului în prima sa formă, nu se ţinuse seama de aceste considerente, intenţia fiind verificarea aplicabilităţii algoritmului pentru programare pe un calculator. Cu toate că programul realizat rezolva problema, timpul de calcul efectiv era foarte mare în comparaţie cu timpul de lucru pentru rezolvarea problemelor uzuale de programare liniară continuă, iar pe de altă parte apărea o instabilitate foarte mare a numărului de operaţii necesare în diverse probleme de dimensiuni asemănătoare.

Stabilindu-se o ordine a operaţiilor după criteriile expuse mai sus şi introducîndu-se în algoritm metodele de accelerare, timpul de calcul a devenit rezonabil. Astfel, pentru sisteme de dimensiuni 20×20 sau 40×20, timpul de calcul a variat între 2—5 minute, ceea ce la performanţele calculatorului ELLIOTT 803—B este mai mult decît mulţumitor (fiind comparabil cu timpul necesar pentru rezolvarea la acest calculator a problemelor de programare liniară continuă de dimensiuni asemănătoare). În prima formă a programului, timpul de calcul varia între 13—125 minute pentru un sistem de dimensiunea 20×20, iar un sistem de 40×20 ceruse peste 29 ore.

Deşi programul a fost întocmit pentru un calculator cu anumite caracteristici şi cu o anumită lungime de cuvînt, folosind avantajele programării în limbajul cod-maşină în toate cazurile posibile, programul poate sta la baza întocmirii oricărui alt program pe o altă maşină electronică de calcul, instrucţiunile care realizează programul de mai sus existînd la orice calculator digital universal. Întocmirea programului într-un limbaj de programare automată (ALGOL, FORTRAN etc.) ar fi facilitat programarea şi ar fi dat posibilitatea utilizării acestuia pe orice calculator, dar nu s-ar fi putut realiza performanţele de mai sus.

Credem că de o deosebită importanţă pentru crearea unor algoritme noi este ca la întocmirea acestora să se ţină seama de mijloacele existente de calcul, întrucît unele metode foarte elegante şi aparent simple pot crea dificultăţi foarte mari la programare, necesitînd echipamente electronice cu performanţe deosebite.

Primită la redacţie la 28 martie 1968

— Centrul de calcul economic şi cibernetică economică
— Institutul de matematică al Academiei Republicii Socialiste România
— Centrul de calcul economic şi cibernetică economică

SOLVING PROBLEMS OF LINEAR PSEUDO-BOOLEAN PROGRAMMING WITH A DIGITAL COMPUTER

(ABSTRACT)

By a problem of pseudo-Boolean programming, we mean any problem requiring the minimization (maximization) of a real-valued function with bivalent (0,1) variables subject to certain restrictive equations and/or inequalities. Methods for solving problems of this type,

as well as various applications to problems of operations research, graph theory, combinatorics, etc., were described in the monograph [1].

In this paper a computer code is described for solving problems of pseudo-Boolean programming in which both the objective function and the restrictions are linear.

The programme was achieved and experimented on an ELLIOTT—803 B computer.

BIBLIOGRAFIE

1. S. Rudeanu şi colab. *Boolean Methods in Operations Research and Related Areas*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1968.
2. T. Gaşpar, *Programarea la calculatorul MECIPT-1 a algoritmului de minimizare a funcţiilor pseudobooleene*. Stud. cerc. mat., **19**, 1135—1148 (1967).

MODELE STOHASTICE DE CINETICA POPULAȚIILOR

DE

D. FIRESCU și P. TĂUTU

Lucrarea se ocupă cu analiza structurii modelelor stohastice pentru populații cu obiecte discernabile, cu scopul de a pune în evidență unele probleme specifice ale cineticii populațiilor biologice. Se propune astfel o echivalență, în anumite condiții, între termenii *demos* și *compartiment* și, consecutiv, se prezintă elementele unei teorii a sistemelor multicompartimentate. Sînt luate în considerație populațiile biologice cu precursori de natură diferită și se discută problema stabilității unor populații prin existența unui proces de imigrare. Sînt analizate apoi procesele stohastice dependente de vîrstă, de stadiu sau de poziție, considerate drept modelele fundamentale ale populațiilor cu elemente discernabile.

1. CONSIDERAȚII PRELIMINARE

1.1. Modelele stohastice privind creșterea numerică a populațiilor au constituit de multă vreme o serioasă preocupare pentru biomatematicieni. Acest interes a fost stimulat în mare măsură de primele rezultate obținute în problema stingerii numelui de familie, — problemă ridicată în 1873 de către A. de Candolle și de F. Galton. Concluzia celor dintîi încercări era că stingerea este inevitabilă pentru populațiile subcritice și critice, unde numărul mediu, m, de descendenți ai unui părinte este mai mic sau egal cu unitatea, și că există întotdeauna o șansă pozitivă de supraviețuire pentru populațiile supracritice, cu $1 < m \leqslant \infty$. O dată cu formularea problemei în termeni matematici de către F. Galton și cu rezolvarea ei de către H. W. Watson, cu ajutorul funcțiilor generatoare, se consideră elaborat primul model probabilist, adică ceea ce numim astăzi un *lanț ramificat Galton—Watson*, din categoria proceselor markoviene cu parametru discret.

Considerarea timpului ca parametru continuu a condus la construirea acelor procese stohastice sugestiv numite „de naștere", „de moarte", ori „de naștere și moarte", procese fundamentate în lucrările de pionierat ale lui A. G. Mc Kendrick (1914), G. U. Yule (1924), W. H. Furry (1937), W. Feller (1939) și N. Arley (1943). Ca un omagiu adus acestor matematicieni, procesul liniar de naștere poartă numele de *proces Yule—Furry*, iar cel corespunzător de naștere și moarte, *proces Feller—Arley*.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, Nr. 10, p. 1463–1488, BUCUREȘTI, 1968

Aceste modele descriu și prezic însă creșterea numerică a unui anumit tip de populații, alcătuite din indivizi nediferențiabili, care se comportă independent unii față de alții. Întemeiate pe asemenea ipoteze extrem de generale, modelele amintite au un domeniu larg de aplicabilitate.

Tipul cel mai simplu de proces stohastic de formare a populației (*stochastic population process*) este procesul generat de o populație cu obiecte indiscernabile, a cărei dimensiune totală este întotdeauna finită, cu probabilitatea 1 (proces finit unidimensional). În cazul cînd obiectele se deosebesc unele de altele, atunci o anumită stare a întregii populații alcătuite din n obiecte, în care obiectul i se găsește în starea individuală x_i $(i = 1, \ldots, n)$ va fi definită ca o mulțime ordonată $x^n = (x_1, \ldots, x_n)$ de stări individuale.

S-a arătat (Moyal, 1962) că prin „populație" trebuie să înțelegem un ansamblu de indivizi care se găsesc fiecare într-una din stările x ale unei mulțimi finite de stări, X. O astfel de populație este „stohastică" dacă s-a definit o probabilitate P pe o σ-algebră $\mathcal{X}$ de submulțimi ale lui $\mathfrak{X} = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$, x^0 fiind populația vidă. J. E. Moyal denumește perechea $(\mathfrak{X}, \mathcal{X})$ drept „spațiul măsurabil al populației". În consecință tripletul $(\mathfrak{X}, \mathcal{X}, \mathrm{P})$ reprezintă modelul unei populații stohastice, unde $\mathfrak{X}$ este spațiul tuturor stărilor populației, $\mathcal{X}$ este un cîmp borelian de submulțimi din $\mathfrak{X}$, iar P, repartiția de probabilitate pe $\mathcal{X}$.

Studiul populațiilor biologice trebuie să aibă în vedere faptul că aceste populații sînt neomogene, cu indivizi diferențiabili, în relație unii cu ceilalți. Condiția diferențierii în tipuri poate fi neglijată în cadrul modelelor de dezvoltare a populațiilor de dimensiuni foarte mici.

În urma cercetărilor experimentale efectuate pe populații bacteriene sau pe populații de celule cultivate *in vitro*, ceea ce caracterizează aceste populații este, poate în primul rînd, neomogeneitatea de „vîrstă" datorată lungimilor diferite de cicluri și de faze de diviziune, multiplicării și maturizării asincrone. Toate aceste modificări succesive de natură morfologică și fiziologică sînt exprimate prin termenul de „vîrstă", întrucît s-a considerat că vîrsta poate fi un indicator primitiv al acestor stări individuale.

Corespunzător acestei situații, se poate emite ipoteza că o populație se împarte în mai multe *demosuri* sau *compartimente*, fiecare dintre ele grupînd indivizii cu anumite proprietăți comune.

Noțiunea de compartiment este folosită în special de biochimiști în probleme de cinetică chimică și presupune omogeneitate spațială și temporală. Noțiunea de demos aparține biologilor care nu au precizat însă gradul de omogeneitate al indivizilor. Dacă se consideră că vîrsta se poate defini ca intervalul de timp în care un individ posedă atributele unui demos oarecare, chestiunea omogeneității temporale, cronologice dispare, iar termenii demos și compartiment devin echivalenți. Evoluția în timp a unui individ, maturizarea poate fi reprezentată ca un șir de treceri de la un demos la altul. Ideea de cinetică celulară se impune astfel prin însăși natura procesului.

Noi am propus în 1966 echivalența celor doi termeni, arătînd că o teorie stohastică a sistemelor multicompartimentale este satisfăcătoare și pentru demosurile celulare,. cu condiția pusă în alineatul anterior.

În același sens, E. Trucco (1965) a analizat coincidența dintre demos și compartiment, condiționînd-o de neglijarea procesului de maturizare (proprietățile unui individ dintr-un demos nu se schimbă în timp) și de ipoteza că părăsirea demosului ascultă de cinetica reacțiilor de ordinul întîi.

1.2. Existența unei populații compuse dintr-un număr finit de demosuri (sau compartimente) în care se găsesc indivizi diferențiabili reprezintă un element de mobilitate internă ce modifică și comportamentul asimptotic al procesului stohastic generat. În importanta sa lucrare din 1952, D. G. Kendall a arătat că procesul Feller—Arley este instabil, populația fiind condamnată la stingere inevitabilă, dacă ratele de naștere și de moarte sînt egale.

Pentru a face cît mai clară această afirmație, vom prezenta pe scurt deducțiile esențiale ale procesului liniar de naștere și moarte. El este caracterizat de următorul sistem :

$$P'_n(t) = -n(\lambda+\mu)P_n(t) + \lambda(n-1)P_{n-1}(t) + \mu(n+ \\ +1)P_{n+1}(t),\ n \geqslant 0 \tag{1.1}$$

unde $P_n(t) = \mathcal{P}\{X(t) = n\}$. După cum se știe, rata de naștere este $\lambda_i = \lambda i$ iar rata de moarte este $\mu_i = \mu i$, considerînd că dimensiunea inițială a populației a fost $X(0) = i$, $(i \geqslant 1)$. Pentru a rezolva (1.1) se introduce mai întîi funcția generatoare

$$G(r, t) = \sum_0^\infty P_n(t) r^n, \tag{1.2}$$

unde

$$G(r, 0) = r^i. \tag{1.3}$$

Se obține astfel cunoscuta ecuație cu derivate parțiale

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -(\lambda+\mu) r \frac{\partial G}{\partial r} + \lambda r^2 \frac{\partial G}{\partial r} + \mu \frac{\partial G}{\partial r}, \tag{1.4}$$

care se mai poate scrie sub forma

$$\frac{\partial G}{\partial t} + (r-1)(\lambda r - \mu)\frac{\partial G}{\partial r} = 0.$$

Sistemul caracteristic este

$$\frac{\mathrm{d}t}{1} = \frac{\mathrm{d}r}{-(r-1)(\lambda r-\mu)} = \frac{\mathrm{d}G}{0}, \tag{1.5}$$

din care, punînd $\mathrm{d}G = 0$, se obține

$$G = c_1.$$

Integrînd prima ecuație din (1.5) vom avea

$$(\mu - \lambda) t = \log \frac{r-1}{\lambda r - \mu} + c_2,$$

sau

$$\frac{\lambda r - \mu}{r - 1} e^{(\mu-\lambda)t} = c_2, \tag{1.6}$$

unde c_1 și c_2 sînt constante. Eliminînd una dintre ele,

$$G = \Phi\left(\frac{\lambda r - \mu}{r - 1} e^{(\mu-\lambda)t}\right), \tag{1.7}$$

unde funcția Φ se poate determina cu condiția inițială, relativă la (1.3) și, deci, la $X(0) = i$,

$$\Phi\left(\frac{\lambda r - \mu}{r - 1}\right) = G(r, 0),$$

deducînd astfel

$$\Phi(u) = \left(\frac{\mu - u}{\lambda - u}\right)^i. \tag{1.8}$$

Din (1.7) și (1.8) se obține funcția generatoare a repartiției lui Palm,

$$G(r, t) = \left\{\frac{\mu(e^{(\lambda-\mu)t} - 1) + r(\lambda - \mu e^{(\lambda-\mu)t})}{(\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu) - \lambda r(e^{(\lambda-\mu)t} - 1)}\right\}^i. \tag{1.9}$$

Dacă vom defini funcțiile $\xi(t)$ și $\eta(t)$ prin relația

$$\frac{\xi}{\mu} = \frac{\eta}{\lambda} = \frac{e^{(\lambda-\mu)t} - 1}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu},$$

vom rescrie atunci (1.9) sub forma

$$G(r, t) = \left(\frac{\xi + r(1 - \xi - \eta)}{1 - \eta r}\right)^i. \tag{1.10}$$

Admițînd ipoteza că populația a luat naștere dintr-un singur strămoș ($i = 1$), ecuația (1.10) ne conduce la următoarele rezultate :

$$\begin{aligned} &P_0(t) = \xi, \\ &P_n(t) = (1 - \xi)(1 - \eta)\eta^{n-1}, \quad n \geqslant 1 \end{aligned} \tag{1.11}$$

din care se deduce că dimensiunea populației are o repartiție geometrică avînd primul termen modificat. Din (1.11) se obțin media și dispersia populației :

$$\mathcal{M}\{X(t)\} = e^{(\lambda-\mu)t}, \tag{1.12}$$

$$\mathcal{D}^2\{X(t)\} = \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} e^{(\lambda-\mu)t}(e^{(\lambda-\mu)t} - 1). \tag{1.13}$$

Ca și în cazul procesului simplu de naștere, media „stohastică” este identică cu valoarea obținută prin tratarea deterministă a procesului, dar forma dispersiei indică existența unei variații destul de importante în dimensiunile populației.

Rezultatele din (1.11) — (1.13) se întemeiază pe ipoteza că rata de naștere este diferită de rata de moarte ($\lambda \neq \mu$). În ipoteza pusă de Kendall, $\lambda = \mu$, probabilitățile (1.11) devin

$$P_0(t) = \frac{\lambda t}{1 + \lambda t}, \qquad P_n(t) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(1 + \lambda t)^{n+1}}, \tag{1.14}$$

și, prin urmare,

$$\mathcal{M}\{X(t)\} = 1, \tag{1.15}$$

$$\mathcal{D}^2\{X(t)\} = 2\lambda t. \tag{1.16}$$

Dimensiunea medie a populației se menține, în aceste condiții, la valoarea inițială ($i = 1$), însă dispersia crește direct proporțional cu durata procesului.

Probabilitatea stingerii populației va fi

$$\lim_{t \to \infty} P_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } \lambda \leqslant \mu \\ (\mu/\lambda)^i, & \text{dacă } \lambda > \mu. \end{cases} \tag{1.17}$$

Stingerea va fi, deci, aproape sigură în primul caz, iar în cel de al doilea va exista întotdeauna o probabilitate pozitivă pentru aceasta. Repartiția duratei T a procesului este, în cazul stingerii inevitabile,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\,[P_0(T)]\,\mathrm{d}T, \qquad (0 < T < \infty).$$

Pentru a construi un proces stabil, în aceste condiții — comentează Kendall — trebuie să adăugăm un mecanism de recuperare : imigrarea. Din punctul de vedere al existenței populațiilor, acest mecanism devine însă un factor de mobilitate, de variabilitate. Se va vedea mai departe că efectele migrării sînt similare, genetic vorbind, cu cele ale mutațiilor.

1.3. Procesul Kendall este tratat de N. U. Prabhu (1965) ca un proces Feller—Arley cu ipoteza suplimentară a introducerii unui individ nou în populație, în urma imigrării sale dintr-o altă colectivitate (demos). Inițial, nu se fac presupuneri asupra diferenței tipologice dintre imigranți și aborigeni. Vom nota cu ν rata imigrării și vom scrie sistemul corespunzător, similar lui (1.1),

$$P_n'(t) = -(n\lambda + \nu)P_n(t) + [\lambda(n-1) + \nu]P_{n-1}(t) + \\ + \mu(n+1)P_{n+1}(t), \qquad n \geqslant 0 \tag{1.18}$$

unde, de asemenea, $P_n(t) = \mathcal{P}\{X(t) = n\}$. Folosind aceeași metodă ca mai sus, vom avea, în locul lui (1.4),

$$\frac{\partial G}{\partial t} - (\lambda r - \mu)(r - 1)\frac{\partial G}{\partial r} = \nu(r - 1)G, \tag{1.19}$$

funcţia generatoare $G(r, t)$ fiind definită de (1.2), cu menţiunea că (1.3) a devenit acum

$$G(r, 0) = 1,$$

prin condiţia $X(0) = 0$. Scriind în mod corespunzător relaţiile (1.5), avem pe de o parte ecuaţia (1.6) nemodificată, iar, pe de altă parte, din

$$\frac{\mathrm{d}r}{-(\lambda r - \mu)(r - 1)} = \frac{\mathrm{d}G}{\nu (r - 1) G},$$

obţinem

$$G(r, t)(\lambda r - \mu)^{\nu/\lambda} = c_1. \tag{1.20}$$

Cu ajutorul lui (1.20) şi (1.6) se află soluţia ecuaţiei (1.19):

$$G(r, t) = \left(\frac{p}{1 - qr}\right)^{\nu/\lambda}, \tag{1.21}$$

unde

$$p = \begin{cases} (\lambda - \mu) / (\lambda e^{(\lambda - \mu)t} - \mu), & \text{dacă } \lambda \neq \mu \\ (1 + \lambda t)^{-1} & , \text{dacă } \lambda = \mu \end{cases} \tag{1.22}$$

iar $q = 1 - p$.

Se poate observa din (1.21) că $X(t)$ are o repartiţie binomială negativă — rezultat obţinut şi de Mc Kendrick, în 1914, pentru un proces simplu de naştere. Valoarea medie a variabilei este diferită de rezultatul din (1.15):

$$\mathcal{M}\{X(t)\} = \begin{cases} \dfrac{\nu}{\lambda - \mu}(e^{(\lambda - \mu)t} - 1), & \text{dacă } \lambda > \mu \\ \nu t & , \text{dacă } \lambda = \mu \\ \dfrac{\nu}{\mu - \lambda} & , \text{dacă } \lambda < \mu. \end{cases} \tag{1.23}$$

Similar cu (1.17), pentru condiţia specială $\lambda < \mu$, vom avea

$$\lim_{t \to \infty} P_0(t) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{\nu/\lambda} < 1, \tag{1.24}$$

ceea ce demonstrează efectul stabilizator al imigrării.

Să considerăm acum cazul deosebit al procesului de moarte şi imigrare ($\lambda = 0$). Modelul se aplică populaţiilor existente într-un mediu de dimensiuni mici (de exemplu, spermatozoizi într-un cîmp microscopic). Vom admite că imigrarea din mediul înconjurător este un proces Poisson cu parametrul ν şi că emigrarea (sau moartea) dincolo de zona sub observaţie este proporţională cu numărul obiectelor prezente. Vom avea astfel

$$\lim G(r, t) = \exp\{(\nu/\mu)(1 - e^{-\mu t})(r - 1)\},$$

respectiv funcţia generatoare a unei repartiţii Poisson cu parametrul $(\nu/\mu)(1 - e^{-\mu t})$. Pentru valori mari ale lui t, această limită tinde către

(ν/μ). Variabila aleatoare $X(t)$, reprezentînd numărul de obiecte prezente în zona observată la momentul t are o repartiție limită în condiții de echilibru, independentă de condițiile inițiale (Cox și Miller, 1965).

Dacă vom presupune că $\nu \to 0$ și că parametrii λ și μ rămîn constanți, se va obține o repartiție logaritmică a variabilei aleatoare considerate. Efectul imigrării va fi neglijabil, dar totuși suficient pentru a restaura procesul pe cale de extincție. Dacă în (1.21) vom pune $\nu/\lambda = \gamma$ și $\gamma \to 0$ vom avea o repartiție degenerată cu toată masa de probabilitate concentrată la valoarea zero. Este lesne de înțeles că în multe procese biologice această clasă zero este nepotrivită, ea nefiind discernabilă de alte date neesențiale. Exemplul dat de N. T. J. Bailey (1967) în acest sens este foarte sugestiv : numărul de fluturi de noapte dintr-o specie dată prinși la o capcană luminoasă poate avea un sens, numai dacă a fost capturat cel puțin un fluture ; dacă nici unul nu se află în capcană, faptul poate să exprime situația că nici un fluture de noapte nu a zburat prin împrejurimi, din anumite motive deosebite. În asemenea împrejurări sîntem mai interesați de repartiția care se va obține în absența clasei zero.

Suprimînd termenul $p^{\nu/\lambda}$ din (1.21) și scoțînd un factor γp^{γ} vom obține seria

$$qr + \frac{\gamma+1}{2!}(qr)^2 + \frac{(\gamma+1)(\gamma+2)}{3!}(qr)^3 + \ldots$$

care este egală cu $-\lg(1-qr)$. Prin normalizare vom avea o repartiție logaritmică pentru care

$$G(r, t) = \frac{\lg(1-qr)}{\lg(1-q)}.$$

Comentînd aceste rezultate, N. T. J. Bailey atrage atenția asupra faptului că existența unei repartiții oarecare nu ne dă informații suficiente asupra procesului care i-a dat naștere, întrucît ea poate rezulta din ipoteze foarte diferite. Matematica și statistica nu pot fi, prin urmare, succedaneele cercetării științifice specifice, autentice, ci numai niște instrumente în elucidarea comportării fenomenelor studiate.

1.4. În încheiere, vom menționa, în aceeași ordine de idei, procesele de naștere și de moarte *cu stări absorbante* (starea 0, de exemplu), prezentînd următoarea teoremă dată de S. Karlin (1966) :

TEOREMĂ. *Să considerăm un proces de naștere și moarte, cu parametrii de naștere și de moarte* λ_n *și, respectiv,* μ_n, $(n \geqslant 1)$, *unde* $\lambda_0 = 0$, *astfel încît* 0 *este o stare absorbantă. Probabilitatea absorbției în starea* 0 *din starea inițială* m *este*

$$\begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{i=m}^{\infty}\left(\prod\limits_{j=1}^{i}\dfrac{\mu_j}{\lambda_j}\right)}{1+\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\prod\limits_{j=1}^{i}\dfrac{\mu_j}{\lambda_j}\right)}, & \text{dacă } \sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\prod\limits_{j=1}^{i}\dfrac{\mu_j}{\lambda_j}\right) < \infty \\ 1, & \text{dacă } \sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\prod\limits_{j=1}^{i}\dfrac{\mu_j}{\lambda_j}\right) = \infty \end{cases}$$

Timpul mediu pînă la absorbție este

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i + \sum_{r=1}^{m-1} \left(\prod_{k=1}^{r} \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right) \sum_{j=r+1}^{\infty} \rho_j, & \text{dacă } \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i < \infty \\ \infty & , \text{dacă } \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i = \infty \end{cases}$$

unde

$$\rho_i = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}.$$

2. POPULAȚII STABILE CU PRECURSORI

2.1. Clasificînd populațiile celulare după capacitatea și modalitățile lor de autoreproducere, Lajtha și Oliver (1962) au stabilit trei tipuri de populații, după cum urmează :

— tipul I : celule cu capacitate potențială integrală (100%) de diviziune și cu ciclu uniform de viață ;

— tipul II : celule cu capacitate potențială integrală (100%) de diviziune, dar cu ciclu neuniform de viață ;

— tipul III : populații celulare care nu se pot automenține.

Celulele care alcătuiesc populațiile de tip III se împart în două subtipuri : unele care sînt practic incapabile de reînnoire (de exemplu, celulele adulte din sistemul nervos central sau din ovar) și altele care se pot reînnoi grație unui compartiment generator ce le furnizează precursori. Existența subtipului III *b* implică existența unui proces de imigrare celulară de la compartimentul generator către populația de bază.

Împrumutînd termenul de precursor din biochimie, putem considera că precursorul are inițial alte proprietăți decît cele caracteristice demosului în care emigrează. Celulele imigrante capătă, deci, proprietățile demosului în care pătrund și le pierd o dată cu părăsirea acestuia (emigrare).

În clasificarea lor, Lajtha și Oliver nu au luat în discuție populațiile de celule embrionare, datorită complexității procesului de embriogeneză. Să observăm încă că în cursul formării foițelor embrionare, o parte din celulele foiței gata formate se comportă ca precursoarele foiței următoare. La unele animale inferioare fenomenul are loc prin imigrare. El a fost descris cu exactitate, încă din 1886, în lucrarea lui I. I. Mecinikov, *Cercetări asupra embriologiei meduzelor*, referitor la procesul de formare a endodermului, cea de a doua foiță embrionară.

Vom reprezenta acest proces biologic printr-un proces stohastic de imigrare (pentru celulele ectodermului), asociat unui proces de naștere, moarte și transformare (pentru celulele endodermului). Se construiește astfel un proces Markov bidimensional, $\{X(t), Y(t), t \geqslant 0\}$, unde variabila aleatoare $X(t)$ reprezintă numărul de celule ectodermice migratoare la momentul t, iar variabila aleatoare $Y(t)$ reprezintă numărul de celule endodermice la același moment t.

Presupunînd că $X(t) = x$, $(0 \leqslant x \leqslant a)$ și că $Y(t) = y$, $(0 \leqslant y \leqslant b)$, în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$ pot avea loc următoarele evenimente:

1°. migrarea unei celule ectodermice (precursoare), cu probabilitatea $\nu (a - x)(b - y)\Delta t + o(\Delta t)$;

2°. nașterea unei celule endodermice, prin diviziune, cu probabilitatea $\nu n y \Delta t + o(\Delta t)$;

3°. moartea unei celule endodermice, cu probabilitatea $\nu p y \Delta t + o(\Delta t)$;

4°. transformarea (emigrarea) unei celule endodermice, cu probabilitatea $\nu q y \Delta t + o(\Delta t)$, $(n + p + q = 1)$;

5°. un eveniment multiplu, cu probabilitatea $o(\Delta t)$;

6°. nici unul din evenimente, cu probabilitatea $1 - \nu\,[(a - x)(b - y) + y]\,\Delta t + o(\Delta t)$.

Procesul nostru este definit de sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{aligned}
P'(x, y; t) = &- \nu\,[(a - x)(b - y) + y]\,P(x, y; t) + \\
&+ \nu\,[a - (x - 1)]\,[b - (y - 1)]\,P(x - 1, y - 1; t) + \\
&+ \nu n (y - 1)\,P(x, y - 1; t) + \nu (p + q)(y + 1)\,P(x, y + 1; t), \\
&x = 1, \ldots, a - 1; \quad y = 1, \ldots, b - 1
\end{aligned}$$

$$P'(0, 0; t) = - \nu ab P(0, 0; t) + \nu (p + q)\,P(0, 1; t),$$

$$\begin{aligned}
P'(a, y; t) = &- \nu y P(a, y; t) + \nu\,[b - (y - 1)]\,P(a - 1, y - 1; t) + \\
&+ \nu n (y - 1)\,P(a, y - 1; t) + \nu (p + q)(y + 1)\,P(a, y + 1; t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P'(x, b; t) = &- \nu y P(x, b; t) + \nu\,[a - (x - 1)]\,P(x - 1, b - 1; t) + \\
&+ \nu n (b - 1)\,P(x, b - 1; t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P'(a, b; t) = &- \nu b P(a, b; t) + \nu P(a - 1, b - 1; t) + \\
&+ \nu n (b - 1)\,P(a, b - 1; t),
\end{aligned} \tag{2.1}$$

unde $P(x, y; t) = \mathcal{P}\{X(t) = x,\ Y(t) = y\}$, $(0 \leqslant x \leqslant a;\ 0 \leqslant y \leqslant b)$.

Introducînd funcția generatoare

$$F(r, s; t) = \sum_{x=0} \sum_{y=0} P(x, y; t)\, r^x s^y, \qquad |r| \leqslant 1,\ |s| \leqslant 1,$$

din (2.1) se obține

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial t} - \nu rs(rs - 1)\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial s} + \nu br(rs - 1)\frac{\partial F}{\partial r} - \\
&- \nu\,[(n - ar)s^2 + (a - 1)s - (n - 1)]\frac{\partial F}{\partial s} = \nu ab(rs - 1)F.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Folosind acum o altă metodă pentru obținerea momentelor variabilelor, se introduce funcția generatoare a cumulanților

$$K(u, v; t) = \lg F(r, s; t), \quad (r = e^u,\ s = e^v)$$

astfel încît ecuaţia (2.2) devine

$$(2.3)\quad \frac{\partial K}{\partial t} - \nu\,(e^{u+v}-1)\frac{\partial^2 K}{\partial u\,\partial v} - \nu\,(e^{u+v}-1)\frac{\partial K}{\partial u}\cdot\frac{\partial K}{\partial v} + \nu b\,(e^{u+v}-1)\frac{\partial K}{\partial u} - \nu\,[a\,(e^{u+v}-1) - n\,(e^{v}-1) + (1-e^{v})]\frac{\partial K}{\partial v} = \nu\, ab\,(e^{u+v}-1).$$

Aplicînd dezvoltarea în serie Maclaurin pentru $K\,(u,\ v\,;\ t)$ şi ţinînd seama de relaţiile dintre această funcţie şi momentele variabilelor aleatoare, se pot deduce, de exemplu, ecuaţiile diferenţiale ale valorilor medii

$$(2.4)\quad \frac{\mathrm{d}\mathcal{M}\{X\,(t)\}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}M_{10}\,(t)}{\mathrm{d}t} = \nu\,\{[a - M_{10}\,(t)]\,[b - M_{01}\,(t)] + m_{11}\,(t)\},$$

$$(2.5)\quad \frac{\mathrm{d}\mathcal{M}\{Y\,(t)\}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}M_{01}\,(t)}{\mathrm{d}t} = \nu\,\{[a - M_{10}\,(t)]\,[b - M_{01}(t)] + [n - (p+q)]\,M_{01}\,(t) + m_{11}\,(t)\}.$$

Se observă uşor că

$$\frac{\mathrm{d}M_{01}\,(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}M_{10}\,(t)}{\mathrm{d}t} + \nu\,[n - (p+q)]\,M_{01}\,(t),$$

astfel încît, dacă punem $n \simeq p + q$, se poate deduce că dimensiunile celor două populaţii se vor deosebi între ele printr-o constantă, c, ale cărei valori depind de condiţiile particulare ale procesului de embriogeneză, astfel încît $M_{01}\,(t) \simeq M_{10}\,(t) + c$.

2.2. Cazul tipic al întreţinerii populaţiilor prin existenţa unui compartiment generator îl constituie măduva osoasă hematogenă. Pr[illegible] de hematopoeză care are loc aici poate fi descris ca un lanţ de treceri de la un compartiment (demos) la altul, după schema

$$\begin{tikzcd}
 & S_{10} \arrow[r] & S_{11} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & S_{1k} \\
S_0 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[ddr] & S_{20} \arrow[r] & S_{21} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & S_{2k} \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & S_{N0} \arrow[r] & S_{N1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & S_{NK}
\end{tikzcd}$$

Compartimentul generator a fost notat prin S_0. Celulele omnipotente din acest compartiment pot da naştere, prin diferenţiere, la N serii celulare, $S_1, S_2, \ldots, S_N$ (seria eritroblastică, mieloblastică, reticulohistiocitară, tromboplastică). Fiecare din aceste linii are o evoluţie proprie, o celulă trecînd prin mai multe compartimente pînă să ajungă la stadiul funcţional matur, k.

Prin urmare, procesul de diviziune şi maturizare ce are loc în măduva osoasă hematogenă poate fi reprezentat ca un proces de imigrare, naştere şi moarte neomogen N-dimensional, completat cu un proces N-dimensional de emigrare. El se defineşte cu ajutorul probabilităţilor următoare:

1°. $\nu(t)\,\Delta t + o(\Delta t)$, $(\nu > 0)$, probabilitatea imigrării unei singure celule din S_0 în oricare din compartimentele $S_{10}, S_{20}, \ldots, S_{N0}$ în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$;

2°. $\lambda_i(t)\,x_i\,\Delta t + o(\Delta t)$, $(\lambda_i > 0)$, probabilitatea naşterii unei singure celule în subpopulaţia corespunzătoare variabilei $X_i(t)$, în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$, ştiind că la momentul t erau x_i celule în subpopulaţia respectivă $(x_i = 0, 1, 2, \ldots; i = 1, \ldots, N)$;

3°. $\mu_i(t)\,x_i\,\Delta t + o(\Delta t)$, $(\mu_i > 0)$, probabilitatea morţii unei singure celule în subpopulaţia corespunzătoare variabilei $X_i(t)$, în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$, ştiind că la momentul t erau x_i celule în subpopulaţia respectivă $(x_i = 0, 1, 2, \ldots; i = 1, \ldots, N)$;

4°. $\xi_i(t)\,x_i\,\Delta t + o(\Delta t)$, $(\xi_i > 0)$, probabilitatea emigrării unei singure celule din subpopulaţia corespunzătoare variabilei $X_i(t)$ în compartimentul S_{i1}, în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$, ştiind că la momentul t erau x_i celule în subpopulaţia respectivă $(x_i = 0, 1, 2, \ldots; i = 1, \ldots, N)$.

5°. $o(\Delta t)$, probabilitatea de a avea modificări mai mari decît o unitate în oricare din subpopulaţii în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$;

6°. $1 - \Delta t \sum_{i=1}^{N} [\nu(t) + (\lambda_i(t) + \mu_i(t) + \xi_i(t))\,x_i] + o(\Delta t)$,

probabilitatea de a nu avea nici o schimbare în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$ în subpopulaţiile corespunzătoare variabilei $X_1(t)$, sau variabilei $X_2(t)$, ş.a.m.d.

Astfel construit, modelul nu oglindeşte în mod real decît prima etapă a procesului de hematopoeză şi anume trecerea din compartimentul generator în primele demosuri de diferenţiere:

$$\begin{tikzcd}
 & S_{10} \arrow[r] & S_{11} \\
S_0 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[ddr] & S_{20} \arrow[r] & S_{21} \\
 & \vdots & \vdots \\
 & S_{N0} \arrow[r] & S_{N1}
\end{tikzcd}$$

Această etapă este caracterizată de următorul sistem:

$$\begin{aligned}
P'(\mathbf{x}; t) = &- \sum_{i=1}^{N} \{[\lambda_i(t) + \mu_i(t) + \xi_i(t)]\,x_i + \nu(t)\}\,P(\mathbf{x}; t) + \\
&+ \sum_{i=1}^{N} \{[\lambda_i(t)](x_i - 1) + \nu(t)\}\,P(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i; t) + \\
&+ \sum_{i=1}^{N} \{[\mu_i(t) + \xi_i(t)](x_i + 1)\}\,P(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i; t), \\
&\qquad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\
P'(\mathbf{0}; t) = &- N\,\nu(t)\,P(\mathbf{0}; t) + \sum_{i=1}^{N} [\mu_i(t) + \xi_i(t)]\,P(\mathbf{e}_i; t), \\
&\qquad \mathbf{x} = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

unde

$$P(\mathbf{x};t) = \mathcal{P}\{X_1(t) = x_1, \ldots, X_N(t) = x_N\},$$

iar $\mathbf{e}_i$ este un vector cu N componente, avînd toate componentele egale cu zero, în afară de componenta de ordinul i, care este egală cu 1. Comparînd (2.6) cu (1.18), se observă cu ușurință generalizarea procesului Kendall. Folosind metode similare celor prezentate în *2.1*, se poate deduce, în final, pentru procesul omogen, o expresie asemănătoare cu (1.23):

$$\mathcal{M}\{X_i\} = \begin{cases} \dfrac{\nu}{\lambda_i - (\mu_i + \xi_i)}\left(e^{(\lambda_i - (\mu_i + \xi_i))t} - 1\right), & \text{dacă } \lambda_i \neq \mu_i + \xi_i \\ \nu t & \text{, dacă } \lambda_i = \mu_i + \xi_i \end{cases} \tag{2.7}$$

și care suportă aceeași interpretare relativă la stabilitatea procesului.

Rezultatele noastre aduc însă unele informații suplimentare. Imigrarea influențează, așa cum era de așteptat, dimensiunea unei linii celulare, S_i, precum și momentele centrate de ordinul doi (sau mai mari) ale variabilelor $X_i(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}M_{0\ldots1\ldots0}(t)}{\mathrm{d}t} = B_i(t)\,M_{0\ldots1\ldots0}(t) + \nu(t), \tag{2.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}m_{0\ldots2\ldots0}(t)}{\mathrm{d}t} = 2\,B_i(t)\,m_{0\ldots2\ldots0}(t) + A_i(t)\,M_{0\ldots1\ldots0}(t) + \nu(t), \tag{2.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}m_{0\ldots3\ldots0}(t)}{\mathrm{d}t} = B_i(t)\,[M_{0\ldots1\ldots0}(t) + 3\,m_{0\ldots3\ldots0}(t)] + \tag{2.10}$$
$$+ 3\,A_i(t)\,m_{0\ldots2\ldots0}(t) + \nu(t),$$

unde, pentru comoditate, am notat

$$A_i(t) = \lambda_i(t) + \mu_i(t) + \xi_i(t),$$
$$B_i(t) = \lambda_i(t) - [\mu_i(t) + \xi_i(t)], \qquad (i = 1, \ldots, N).$$

În schimb însă, corelațiile dintre două sau mai multe demosuri sînt independente de $\nu(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}m_{0\ldots1\ldots1\ldots0}(t)}{\mathrm{d}t} = B_i(t)\,m_{0\ldots1\ldots1\ldots0}(t), \tag{2.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}m_{0\ldots1\ldots1\ldots1\ldots0}(t)}{\mathrm{d}t} = B_i(t)\,m_{0\ldots1\ldots1\ldots1\ldots0}(t) \tag{2.12}$$

$$(i \neq j \neq k = 1, \ldots, N)$$

2.3. Pe baza celor arătate chiar în introducere, măduva osoasă hematogenă poate fi reprezentată ca un sistem multicompartimentat, iar procesul de hematopoeză ca o succesiune a trecerilor dintr-un compartiment într-altul. Un model stohastic general, elaborat în 1966, consideră compartimentul ca un ansamblu finit de structuri, unde acestea sînt mărimi fizice, respectiv parametrii compartimentului,

$$\{\langle \omega, \gamma, \dots, \theta \rangle \mid \omega \in \Omega, \gamma \in \Gamma, \dots, \theta \in \Theta\}.$$

În cazul compartimentelor de natură hematologică, asemenea parametri pot fi : numărul celulelor care se divid, numărul celulelor pe cale să părăsească acest compartiment, ratele de diviziune şi de emigrare (de „ieşire"), conţinutul în acid deoxiribonucleic (ADN), activitatea specifică a ADN etc. Menţionăm că într-o lucrare din 1963, S. A. Killmann ş. a. au împărţit măduva hematogenă într-un şir de compartimente : compartimentul generator, compartimentele multiplicative, compartimentele de maturaţie şi compartimentele funcţionale.

Considerînd că un compartiment are numai o dublă structură, reprezentată de mulţimea perechilor ordonate de numere nenegative, $\{<\omega, \gamma> \mid \omega \in \Omega, \gamma \in \Gamma\}$ sistemul multicompartimentat devine produsul cartezian $\Pi = \Omega \times \Gamma$. Se asociază sistemului un proces Markov numărabil, $\{X(t)\ t \in T\}$ cu spaţiul stărilor Π şi cu probabilităţile de trecere neomogene,

$$P(\tau, <\omega_j, \gamma_m>;\ t, <\omega_k, \gamma_n>) = \tag{2.13}$$

$$= \mathcal{P}\{X(t) = x(\omega_k, \gamma_n) \mid X(\tau) = x(\omega_j, \gamma_m)\}, \qquad \tau \leqslant t$$

care caracterizează trecerea de la perechea $<\omega_j, \gamma_m>$ la perechea $<\omega_k, \gamma_n>$, ambele aparţinînd produsului cartezian Π. Numărul real $x(\omega, \gamma)$ reprezintă valoarea numerică ataşată perechii $<\omega, \gamma>$ şi luată de variabila aleatoare respectivă.

Procesul de trecere dintr-un compartiment într-altul se defineşte cu ajutorul probabilităţilor :

1°. de pregătire şi impulsionare a trecerii în intervalul de timp de lungime Δt, $Q(t; <\omega_j, \gamma_m>)\,\Delta t + o(\Delta t)$;

2°. de trecere efectivă, în acelaşi interval de timp, $Q(t; <\omega_j, \gamma_m>, <\omega_k, \gamma_n>)\,\Delta t + o(\Delta t)$, la care se adaugă ipotezele complementare ale modificărilor multiple şi ale absenţei modificărilor în intervalul de timp considerat, $(t, t + \Delta t)$. De altfel, funcţiile Q se mai numesc şi *intensităţi*, fiind definite cu ajutorul limitelor

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - P(t, <\omega_j, \gamma_m>;\ t + \Delta t, <\omega_j, \gamma_m>)}{\Delta t} = Q(t; <\omega_j, \gamma_m>), \tag{2.14}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t, <\omega_j, \gamma_m>;\ t + \Delta t, <\omega_k, \gamma_n>)}{\Delta t} = Q(t; <\omega_j, \gamma_m>, <\omega_k, \gamma_n>). \tag{2.15}$$

Cinetica elementelor unei populaţii, descrisă în cadrul teoriei sistemelor multicompartimentate va fi caracterizată astfel de cele două sisteme de ecuaţii Kolmogorov extinse :

1) ecuaţiile retrospective :

$$(2.16)\qquad \frac{\partial}{\partial \tau} P(\tau, <\omega_j, \gamma_m>; t, <\omega_k, \gamma_n>) =$$

$$= Q(\tau; <\omega_j, \gamma_m>) P(\tau, <\omega_j, \gamma_m>; t, <\omega_k, \gamma_n>) -$$

$$- \sum_{<\omega_g, \gamma_h> \in \Pi} Q(\tau; <\omega_j, \gamma_m>, <\omega_g, \gamma_n>) P(\tau, <\omega_g, \gamma_h>; t, <\omega_k, \gamma_n>),$$

2) ecuaţiile prospective :

$$(2.17)\qquad \frac{\partial}{\partial t} P(\tau, <\omega_j, \gamma_m>; t, >\omega_k, \gamma_n>) =$$

$$= - Q(t; <\omega_k, \gamma_n>) P(\tau, <\omega_j, \gamma_m>; t, <\omega_k, \gamma_n>) +$$

$$+ \sum_{<\omega_g, \gamma_h> \in \Pi} P(\tau, <\omega_j, \gamma_m>; t, <\omega_g, \gamma_h>) Q(t; <\omega_g, \gamma_h>, <\omega_k, \gamma_n>).$$

3. CICLUL DE VIAŢĂ ŞI PROCESE DE NAŞTERE ŞI MOARTE DEPENDENTE DE STADIUL DE VIAŢĂ SAU DE VÎRSTĂ

3.1. Să considerăm că durata de viaţă normală a unui organism (constituind un ciclu) se împarte în k stadii succesive : S_1, S_2, ..., S_k. Naşterea organismului este echivalentă cu stadiul S_1, un stadiu iniţial S_0 fiind de asemenea posibil (de ex. ecloziunea). Stadiul terminal S_k este urmat de stadiul fictiv S_{k+1}, trecerea de la S_k la S_{k+1} exprimînd fenomenul de moarte prin cauze ,,naturale''.

În dinamica procesului desfăşurat într-un ciclu de viaţă, vom distinge trei intervale de timp :

X_i, intervalul de timp petrecut în stadiul S_i, $(1 \leqslant i \leqslant k)$;

Y_i, intervalul de timp scurs pînă la trecerea în stadiul S_{i+1}, cu ipoteza că moartea organismului nu a survenit în acest interval ;

Z_i, intervalul de timp pînă la stingerea în stadiul S_i.

Potrivit acestor caracterizări, vom avea

$$X_i = \min(Y_i, Z_i),$$

cele trei intervale menţionate fiind variabile aleatoare pozitive. Ipotezele fundamentale privind cele trei variabile se pot formula în modul următor :

(a). Moartea într-un stadiu nonterminal, S_i, survine datorită unor cauze accidentale, activităţii unui organism prădător etc. Parametrul μ va varia astfel de la un stadiu la altul, riscul mortalităţii fiind diferit în fiecare din cele k stadii. Vom admite că Z_i are o repartiţie exponenţială negativă, cu densitatea de probabilitate $\mu_i e^{-\mu_i z}$ $(z > 0)$.

(b). Repartiţia lui Y_i poate varia, de asemenea, de la un stadiu la altul. Densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare Y_i va fi $g_i(y)$, $(y \geqslant 0)$ şi vom nota cu $\mathcal{G}_i(y)$ funcţia de supravieţuire asociată lui Y_i.

(c). Cu ipoteza că variabilele aleatoare Y_i și Z_i sînt statistic independente, densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare X_i va avea forma

$$f_i(x), \quad \mu_i \, e^{-\mu_i x} \mathcal{G}_i(x) + g_i(x) \, e^{-\mu_i x}, \qquad (x \geqslant 0).$$

Vom nota, de asemenea, cu $\mathcal{F}_i(x_i)$ funcția de supraviețuire asociată lui X_i.

Structura unei populații biologice poate fi evaluată cu ajutorul probabilității $p_i(t)$, probabilitatea ca un obiect biologic ales la întîmplare din această populație să fie în viață și în starea S_i la momentul t (Read și Ashford, 1968). În acest scop se vor defini

$$\Psi_i(u_i) = \lim_{\Delta u_i \to 0} \frac{1}{\Delta u_i} \mathcal{P}\{\text{trecere de la } S_i \text{ la } S_{i+1} \text{ în intervalul } (u_i, u_i + \Delta u_i) \mid \text{organismul în viață la intrarea în } S_i\},$$

$$h_i(x_i) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{1}{\Delta x_i} \mathcal{P}\{X_i \text{ se află în intervalul } (x_i, x_i + \Delta x_i), \text{ după care are loc trecerea în } S_{i+1} \mid \text{organismul în viață la intrarea în } S_i\}.$$

Cu condițiile inițiale

$$\Psi_0(u_0) = h_0(u_0),$$

$$p_0(t) = \mathcal{F}_0(t),$$

vom avea

$$\Psi_i(u_i) = \int_0^{u_i} \Psi_{i-1}(u_{i-1}) \, h(u_i - u_{i-1}) \, du_{i-1}, \tag{3.1}$$

și

$$p_i(t) = \int_0^t \Psi_{i-1}(u_{i-1}) \, \mathcal{F}_i(t - u_{i-1}) \, du_{i-1}, \qquad (1 \leqslant i \leqslant k). \tag{3.2}$$

Proporția obiectelor biologice care trec în S_{i+1}, după ce au stat în S_i o perioadă de timp de lungime x_i, este

$$\frac{g_i(x_i)}{\mu_i \mathcal{G}_i(x_i) + g_i(x_i)}. \tag{3.3}$$

Calculînd expresia lui $\Psi_i(u_i)$, autorii citați consideră că funcția $g_i(y_i)$ este de tip Erlang și aplică modelul astfel construit la studiul populațiilor de lăcuste *Corthippus parallelus*.

3.2. Procesele de naștere și moarte dependente de stadiul de viață, ca și cele dependente de vîrstă, se ocupă de evoluția populațiilor cu obiecte discernabile după vîrsta sau stadiul de viață în care se găsesc. Aceste procese pot fi încadrate astfel în clasa proceselor cu tipuri multiple (vezi Kendall, 1948; Harris, 1963; Karlin, 1965). O generalizare a procesului descris de D. G. Kendall a fost prezentată recent de L. A. Goodman (1967).

Pentru un obiect în stadiul i de viață ($0 \leqslant i \leqslant k$) la momentul t există următoarele probabilități :

(a). $\lambda_{\nu 1}(i)\ \alpha(i)\ \Delta t$, probabilitatea de a trece în stadiul ($i+1$) de viață și de a da naștere la ν descendenți ($\nu = 0, 1, \ldots$) care se vor afla în stadiul 0, în intervalul de timp (t, $t+\Delta t$), cu $\lambda_{\nu 1}(k) = 0$;

(b). $\lambda_{\nu 2}(i)\ \alpha(i)\ \Delta t$, probabilitatea morții în intervalul de timp (t, $t+\Delta t$), cu nașterea a ν descendenți ($\nu = 0, 1, \ldots$) în stadiul 0 în acest interval ;

(c). $\lambda_{\nu 3}(i)\ \alpha(i)\ \Delta t$, probabilitatea de a rămîne în stadiul de viață i în același interval (t, $t+\Delta t$), dînd naștere la ν descendenți ($\nu = 1, 2, \ldots$) care vor fi în stadiul 0 în tot acest interval.

Vom nota acum

$$\lambda_\nu(i) = \sum_{r=1}^{3} \lambda_{\nu r}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

$$\lambda(i) = \sum \nu \lambda_\nu(i),$$

$$\lambda_{0r}(i) + \lambda_{1r} + \ldots = \gamma_r(i), \quad (r = 1, 2)$$

$$\lambda_{13}(i) + \lambda_{23}(i) + \ldots = \gamma_3(i),$$

$$\sum_{r=1}^{3} \gamma_r(i) = 1.$$

Pentru un obiect în stadiul de viață i, la momentul t, probabilitatea producerii unuia din evenimentele (a) — (c) este $\alpha(i)\ \Delta t$, ($\alpha(i) \neq 0$), iar $\lambda_{\nu r}(i)$, ($r = 1, 2, 3$), este probabilitatea condiționată a evenimentului corespunzător de descendență ($\gamma_3(i) \neq 1$, $0 \leqslant i \leqslant k$).

Dacă ne vom ocupa de populația generată după momentul $t = t_0$ de către un obiect în cel de-al i-lea stadiu de viață la momentul t_0, atunci, considerînd că unul din evenimentele menționate mai sus va avea loc pentru prima oară după t_0, „prima generație" produsă de obiectul considerat va consta din :

(a'). cele ν obiecte noi ($\nu = 0, 1, \ldots$) în stadiul 0, născute în intervalul (t_0, $t_0 + \Delta t_0$) și un obiect „nou" în stadiul ($i+1$), dacă a avut loc evenimentul (a) ;

(b'). cele ν obiecte noi ($\nu = 0, 1, \ldots$) în stadiul 0, născute în intervalul (t_0, $t_0 + \Delta t_0$), dacă a avut loc evenimentul (b) ;

(c'). cele ν obiecte noi ($\nu = 1, 2, \ldots$) în stadiul 0 și un obiect în stadiul i, dacă a avut loc evenimentul (c).

Cea de-a n -a generație a unui obiect în stadiul i la momentul t_0 va consta, deci, din „prima generație" produsă de obiectele noi din cea de-a (n - 1) -a generație a acestuia.

Fie $Z_0^{(i)}$ numărul obiectelor în stadiul i la momentul $t = 0$ și $Z_n^{(i)}$, numărul obiectelor constituind cea de-a n-a generație de obiecte în stadiul i. Fie, de asemenea

$$Z_n = Z_n^{(0)} + \ldots + Z_n^{(k)}$$

și

$$\mathbf{Z}_n = \{Z_n^{(0)},\ Z_n^{(1)},\ \ldots,\ Z_n^{(k)}\}.$$

Șirul $\mathbf{Z}_0$, $\mathbf{Z}_1$, …, formează un proces Galton-Watson cu tipuri multiple.

Funcția generatoare a procesului $\mathbf{Z}_n$ este

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \{f^{(0)}(s), f^{(1)}(s), \ldots, f^{(k)}(s)\},$$

unde

$$\mathbf{s} = \{s_0,\ s_1,\ \ldots,\ s_k\},\ |s_i| \leqslant 1,\ 0 \leqslant i \leqslant k.$$

Vom avea

$$f^{(i)}(\mathbf{s}) = \psi_2'(i) + \psi_1'(i)\, s_{i+1} + \psi_3'(i)\, s_i, \tag{3.4}$$

și

$$\psi_r'(i) = \sum \lambda_{\xi_r}(i)\, s_0^{\xi}, \qquad (r = 1,\ 2,\ 3).$$

Matricea M pentru momentele lui $\mathbf{Z}_1$, știind că $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_i$, $(0 \leqslant i \leqslant k)$, are componentele

$$m_{ij} = \begin{cases} \lambda(0) + \gamma_3(0), & \text{dacă } j = i = 0, \\ \lambda(i) & \text{, dacă } j = 0,\ i \neq 0, \\ \gamma_3(i) & \text{, dacă } j = i \neq 0, \\ \gamma_1(i) & \text{, dacă } j = i + 1, \\ 0 & \text{, altfel,} \end{cases}$$

considerînd i, $j = 0, 1, \ldots, k$.

3.3. Procesele stohastice dependente de vîrstă au fost elaborate conform următoarei situații : un obiect născut la momentul $t = 0$ are o durată aleatoare de viață, d, a cărei repartiție este $G(t) = P(d \leqslant t)$. La sfîrșitul vieții, acest obiect este înlocuit de un număr aleator de descendenți de vîrstă 0. Probabilitatea de a avea n descendenți este independentă de vîrsta părintelui și de numărul celorlalți indivizi prezenți la momentul t.

Această situație corespunzătoare unui lanț ramificat se modifică atunci cînd este vorba de un proces de naștere și moarte dependent de vîrstă : un obiect de vîrstă x are probabilitatea $\lambda(x)\,dx$ de a da naștere unui descendent (nașterile multiple sînt excluse). În acest caz, la momentul t există doi indivizi, unul de vîrstă x și altul de vîrstă zero.

Să introducem acum următoarele notații :

d, durata de viață a unui individ ;

$n(t)$, numărul de descendenți născuți dintr-un singur individ în intervalul $(0, t)$;

$Z(t)$, numărul de indivizi în viață la momentul t ;

$F(s, t)$, funcția generatoare a lui $n(t)$, definind $F(s, t) = 1$, pentru $t < 0$.

Dacă strămoșul a avut ν descendenți, născuți la momentele $t_1 < t_2 < \ldots < t_\nu$, atunci funcția generatoare la momentul t pentru familia celui de al i-lea descendent ($i \leqslant \nu$) este $F(s, t - t_i)$, iar funcția generatoare pentru strămoș, dacă d este fixat, este $J(t - d) + [1 - J(t - d)s]$.

Cu ajutorul acestor notații, putem defini $F(s, t)$ care joacă un rol important în procesele de naștere și moarte dependente de vîrstă :

$$F(s, t) = \mathcal{M}\{F(s, t - t_1) \ldots F(s, t - t_\nu)[J + (1 - J)s]\} =$$

$$= \mathcal{M}\left\{\exp\left\{\int_0^t \log F(s, t - \tau)\,\mathrm{d}n(\tau)\right\}[J + (1 - J)s]\right\}.$$

Din ecuația de mai sus, T. E. Harris deduce (1963) $M(t) = \mathcal{M}\{Z(t)\} = \partial F(1, t)/\partial_s$ obținînd

$$M(t) = \exp\left\{-\int_0^t \mu(x)\,\mathrm{d}x\right\} + \int M(t - \tau)\exp\left\{-\int_0^\tau \mu(x)\,\mathrm{d}x\right\}\lambda(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

unde $\mu(x)\mathrm{d}x$ este probabilitatea morții unui individ de vîrstă x înainte de a avea vîrsta $x + \mathrm{d}x$. S-a arătat că ecuațiile momentelor apar sub o formă asemănătoare și în teoria reînnoirii.

3.4. Să examinăm acum fenomenul creșterii unei colonii bacteriene, presupunînd că funcția $G(t)$ nu are o formă specială. Ipotezele fundamentale sînt următoarele :

1°. la momentul $t = 0$ există o singură bacterie care s-a născut exact în această clipă ; ea este ,,strămoșul'' coloniei ce se va dezvolta în intervalul $(0, t)$;

2°. în fiecare moment, organismele coloniei sînt independente unele de altele ;

3°. nu există nici o legătură stohastică între timpul de diviziune al unui organism și timpul de diviziune al părintelui său.

Pentru strămoșul coloniei există, în plus, două posibilități :

4°. aceea de a se divide la un moment u anterior lui t, unde probabilitatea diviziunii în intervalul $(u, u + \Delta u)$ este egală cu $\mathrm{d}G(u)$. La sfîrșitul perioadei de replicare, vor exista doi indivizi de vîrstă zero ;

5°. aceea de a nu se divide pînă la momentul t, cu probabilitatea egală cu $1 - G(t)$.

Dacă bacteriile se multiplică în condiții favorabile, procesul poate fi socotit de tip Yule-Furry. Vom defini, mai întîi, funcția generatoare care satisface ecuația integrală Stieltjes :

$$F(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}\{Z(t) = n\}\, s^n, \qquad t \geqslant 0, \qquad |s| \leqslant 1 \tag{3.5}$$

$$= \int_0^t [F(s, t - u)]^2\,\mathrm{d}G(u) + s[1 - G(t)].$$

Considerînd λ rata de naștere, ecuația (3.5) se poate rescrie, după transformări elementare,

$$F(s, t) = \int_0^t [F(s, u)]^2 \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda u}\,\mathrm{d}u + s\mathrm{e}^{-\lambda t}. \tag{3.6}$$

Introducînd acum trei noi variabile, definite după cum urmează

$$T = e^{-\lambda t},$$

$$\Phi(s, t) = e^{\lambda t} F(s, t),$$

$$U = e^{-\lambda u},$$

ecuația integrală (3.6) se va scrie :

$$\Phi(s, T) = \int_T^1 [\Phi(s, U)]^2 \, dU + s,$$

de unde se deduce

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{\Phi}\right) = 1,$$

$$\Phi(s, 1) = s,$$

cu soluția unică

$$\frac{1}{\Phi} = T + \frac{1-s}{s}.$$

În consecință, avem următoarea expresie a funcției generatoare

$$F(s, t) = \frac{s e^{-\lambda t}}{1 - s(1 - e^{-\lambda t})}, \tag{3.7}$$

care este funcția generatoare a repartiției geometrice Yule-Furry.

D. G. Kendall a arătat că dacă procesul este determinist, ecuația (3.5) a lui Bellman și Harris va conduce la o ecuație funcțională din care rezultă că populația bacteriană se va dubla la un interval de timp egal cu $1/\lambda$.

3.5. După cum se știe, mutația constituie modificarea ereditară a unei gene. Ea poate fi ,,spontană'', dacă este provocată de cauze omniprezente și necunoscute, sau ,,indusă'', dacă este produsă pe cale artificială de agenți mutageni cunoscuți (radiații *X*, substanțe chimice, medicamente). Prin modificarea astfel suferită, gena de pe un cromosom este alterată (gena sau alela ,,mutantă''), pe cînd gena corespunzătoare de pe cromosomul omolog va rămîne neschimbată (alela ,,standard'' sau ,,sălbatică'').

În consecință, datorită mutației unei gene, indivizii dintr-o populație se vor împărți în două subpopulații : *mutanții*, indivizii care au una (sau mai multe) caracteristici modificate prin mutația genei care controla aceste caracteristici și subpopulația *standard* care conține indivizii ce posedă ambele alele sălbatice. Iată de ce mutația este socotită o sursă de variabilitate, de instabilitate dar, în același timp, un factor de evoluție.

Dacă notăm cu *A* populația standard și cu *B* populația mutantă, să observăm că există atît un eveniment mutațional $A \to B$ (*mutația înainte*), cît și un eveniment mutațional $B \to A$ (*mutația inversă*), care este însă mai rar. Formal nu există deosebiri între procesul mutațional astfel schematizat şi procesul emigrării de la un tip A la un tip B. De altfel, din punctul de vedere al geneticii populaţiilor, mutaţia şi migraţia determină efecte comparabile, amîndouă avînd drept rezultat final introducerea unei gene noi în populaţie.

Modelarea stohastică trebuie să ţină seama în acest caz de existenţa procesului aleator al mutaţiilor, ca şi de existenţa paralelă a unui proces de creştere ce poate fi exprimat fie printr-o lege deterministă, fie printr-una markoviană, fie printr-o lege cu totul generală (aşa cum se observă în dezvoltarea în mai multe faze). Particularitatea modelului o va da, prin urmare, modalitatea de creştere corespunzătoare situaţiei empirice, simbolizată prin literele D (deterministă), M (markoviană), G (generală). În cazul cînd creşterea populaţiei A este markoviană iar creşterea populaţiei B are loc după o lege generală, procesul stohastic respectiv se va nota prin simbolul M/G (Kendall, 1952).

Considerînd acum procesul mutaţional în cadrul teoriei proceselor stohastice dependente de vîrstă, vom porni de la următoarele ipoteze, valabile pentru un model de tip $D/G/O$ (Harris, 1951) :

1°. Dimensiunea populaţiei de tip A la momentul t este dată de $X(t) = x_0 e^{\lambda t}$, cu condiţia iniţială $X(0) = x_0$;

2°. Probabilitatea unei mutaţii în intervalul $(t, t + \Delta t)$ este $\mu x_0 \lambda e^{\lambda t} \Delta t + o(\Delta t)$;

3°. Absenţa unei mutaţii în intervalul $(0, t)$ are probabilitatea $\exp\{-\mu x_0 (e^{\lambda t} - 1)\}$.

Funcţia generatoare a numărului de mutaţii la momentul t este notată cu $H(s, t; x_0)$, cu condiţia cunoscută $X(0) = x_0$ şi cu cea suplimentară $Y(0) = 0$, respectiv absenţa mutanţilor la momentul $t = 0$. Această funcţie generatoare satisface ecuaţia funcţională

$$(3.8) \qquad H(s, t; x_0) = \int_0^t H(s, t-u; x_0 e^{\lambda t}) F(s, t-u) \cdot$$

$$\cdot \mu x_0 \lambda e^{\lambda u} e^{-\mu x_0} (e^{\lambda u} - 1)\, du + e^{\mu x_0} (e^{\lambda t} - 1).$$

Ca mai sus, $F(s, t)$ este funcţia generatoare a numărului de descendenţi ai unui mutant, asociată unui proces Yule-Furry. Funcţia H nu depinde de cantităţile μ şi x_0 decît ca funcţie de produsul lor. Rata de naştere, λ, fiind fixată, putem scrie

$$H(s, t; s_0) = e^{\mu x_0} f(s; \mu x_0 e^{\lambda t}; \mu x_0)$$

$$F(s, t) = h(s, e^{\lambda t}).$$

Înlocuind variabilele

$$\mu x_0 = \alpha,$$

$$\mu x_0 e^{\lambda t} = x,$$

$$\mu x_0 e^{\lambda u} = y,$$

ecuaţia (3.8) se va rescrie atunci sub forma

$$(3.9) \qquad f(s, x, \alpha) = \int_\alpha^x f(s, x, y)\, h\left(s, \frac{x}{y}\right) dy + e^{-x},$$

de unde se deduce — ca şi în cazul lui (3.6) —

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = - h\left(s, \frac{x}{\alpha}\right) f(s, x, \alpha),$$

$$f(s, x, x) = \mathrm{e}^{-x},$$

cu soluţia unică

$$f(s, x, \alpha) = \exp\left\{\int_{\alpha}^{x} h\left(s, \frac{x}{y}\right) \mathrm{d}y - x\right\}.$$

De aici avem

$$H(s, t; x_0) = \exp\{- x_0 \lambda\mu [1 - F(s, t)] \ast \mathrm{e}^{\lambda t}\}, \tag{3.10}$$

prezentată de Kendall ca soluţia procesului mutaţional de tip $D/G/O$.

După Bharucha-Reid, pentru estimarea dimensiunii populaţiei de mutanţi, este necesar să se introducă, în condiţii bine precizate, funcţia generatoare cumulant $K(s, t)$, cu ajutorul căreia definim funcţia $H(s, t; x)$:

$$H(s, t; x_0) = \mathrm{e}^{x_0 K(s,t)}.$$

Aplicînd în (3.8) această relaţie şi făcînd unele consideraţii de limită, se obţine, în final

$$K(s, t) = - \mu(\mathrm{e}^{\lambda t} - 1) + x_0 \lambda \mu \int_0^t F(s, t - u) \mathrm{e}^{\lambda u} \, \mathrm{d}u, \tag{3.11}$$

şi, mai departe,

$$\mathcal{M}\{Y(t)\} = x_0 \lambda \mu \int_0^t M(t - u) \mathrm{e}^{\lambda u} \, \mathrm{d}u, \tag{3.12}$$

unde $M(t) = \partial F(s, t) / \partial s$, pentru $s = 1$. Punînd $g(u)$, densitatea de probabilitate pentru duratele de viaţă ale descendenţilor unui mutant, şi considerînd

$$G(t) = \int_0^t g(u) \, \mathrm{d}u,$$

$$\mathrm{d}G(u) \geqslant 0, \quad G(0) = 1, \quad G(\infty) = 1,$$

se defineşte mai întîi

$$2 \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta u} g(u) \, \mathrm{d}u = 1, \tag{3.13}$$

conform lemei (2.10) date de Bharucha-Reid (p. 116).

Se deduce apoi $M(t) \sim \gamma \, \mathrm{e}^{\lambda t}$, unde

$$\gamma = \frac{1}{4 \beta \int_0^{\infty} u \, \mathrm{e}^{-\beta u} g(u) \, \mathrm{d}u},$$

β fiind rădăcina pozitivă a lui (3.13). Urmează, deci, din (3.11),

$$\mathcal{M}\{Y(t)\} \simeq x_0 \lambda \mu \gamma t \mathrm{e}^{\lambda t}. \tag{3.14}$$

4. CREŞTEREA POPULAŢIILOR CU OBIECTE SPAŢIAL DISCERNABILE

4.1. Vom considera acum probabilitatea de a distinge membrii unei populaţii (sau o subpopulaţie, o colonie, o clonă) prin indicarea poziţiei pe care o are în biotop (habitat). Acest biotop poate fi reprezentat printr-o dreaptă, printr-un plan sau printr-un spaţiu tridimensional, în care obiectele se mişcă fără restricţii (Adke şi Moyal, 1963) sau pînă la întîlnirea unei frontiere absorbante (Sevastianov, 1958). Creşterea numerică a populaţiei are loc potrivit unui proces ramificat multiplu (Sevastianov, 1958), unui proces dependent de vîrstă (Neyman şi Scott, 1957) sau unui proces de naştere şi moarte (Adke şi Moyal, 1963; Bailey, 1968).

Să presupunem că o clonă de celule canceroase se dezvoltă într-un spaţiu tridimensional, avînd coordonatele (i, j, k). La acest punct şi la momentul t, dimensiunea clonei este reprezentată de variabila aleatoare $X_{ijk}(t)$, cu condiţia iniţială

$$X_{ijk}(0) = m_{ijk}(0) = a_{ijk}, \quad (-\infty < i, j, k < \infty),$$

unde $m_{ijk}(t)$ este valoarea medie a lui $X_{ijk}(t)$, cu funcţia generatoare

$$G(x, y, z; t) = \sum_{i,j,k} m_{ijk}\, x^j y^j z^k .$$

Ratele de naştere şi de moarte sînt λ şi, respectiv, μ, iar rata de emigrare către cele şase noduri învecinate ale laticei cubice este $1/6\ \nu$.

Mulţimea ecuaţiilor diferenţiale care caracterizează procesul descris recent de N. T. J. Bailey (1968) este dată de

$$\frac{\mathrm{d}m_{ijk}}{\mathrm{d}t} = (\lambda-\mu-\nu)\, m_{i,j,k+1} + m_{i,j,k-1} + m_{i,j+1,k} + m_{i,j-1,k} + \tag{4.1}$$
$$+ m_{i+1,j,k} + m_{i-1,j,k}).$$

Introducînd acum transformata Laplace a funcţiei generatoare şi utilizînd funcţiile Bessel de diferite ordine (l, m, n), se deduce expresia

$$G(x, y, z; t) = \mathrm{e}^{(\lambda-\mu-\nu)t} \sum_{,j,k} a_{ijk}\, x^i y^j z^k \sum_{l} x^l I_l(1/3\ \nu t) \cdot$$
$$\cdot \sum_{m} y^m I_m(1/3\ \nu t) \sum_{n} z^n I_n(1/3\ \nu t),$$

cu ajutorul căreia se va obţine relaţia

$$m_{ijk}(t) = \mathrm{e}^{(\lambda-\mu-\nu)t} \sum_{l,m,n} a_{lmn}\, I_{i-l}(1/3\ \nu t) \cdot \tag{4.2}$$
$$\cdot I_{j-m}(1/3\ \nu t)\, I_{k-n}(1/3\ \nu t),$$

adică valoarea medie a numărului de celule din clona de la punctul (i, j, k), la momentul t.

Ca şi în exemplele anterioare, se va considera cazul critic $\lambda = \mu$ şi existenţa unei singure clone la origină avînd dimesiunea a, adică $a_{000} = a$ şi alţi $a_{ijk} \equiv 0$. Răspîndirea celulelor canceroase şi multiplicarea lor dintr-o singură clonă la momentul $t = 0$ şi la punctul $(0, 0, 0)$ va determina, la momentul t şi în punctul $(i,\ j,\ k)$, existenţa unei colonii celulare cu dimensiunea medie

$$m_{ijk}(t) = a\mathrm{e}^{-\nu t}\, I_i(1/3\ \nu t)\, I_j\,(1/3\ \nu t)\, I_k\,(1/3\ \nu t). \tag{4.3}$$

4.2. Să considerăm acum modelul prezentat de S. Karlin (1966) pe baza următoarelor ipoteze :

(a) Obiectele unei populaţii sînt repartizate într-un biotop plan, A, potrivit unui proces Poisson bidimensional cu parametrul λ ;

(b) Un obiect situat în punctul cu coordonatele date de vectorul bidimensional $\mathbf{v}_0$ dă naştere unui număr aleator de descendenţi (să zicem k), independent de activitatea celorlalte obiecte. Probabilitatea de a avea k descendenţi este g_k, iar funcţia generatoare a acestui număr de descendenţi este, evident,

$$G\,(r) = \sum g_k\, r^k.$$

(c) Un descendent al obiectului din $\mathbf{v}_0$ va fi repartizat independent în spaţiu în vecinătatea lui $\mathbf{v}_0$, în concordanţă cu densitatea de probabilitate $f\,(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)$ care depinde numai de vectorul $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$.

Prin urmare, probabilitatea ca un descendent anumit al obiectului din $\mathbf{v}_0$ să se găsească în regiunea B este

$$p = \int_B f\,(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)\ \mathrm{d}v,$$

şi, în consecinţă, potrivit ipotezelor, numărul n al descendenţilor acestuia aflaţi în B va urma o repartiţie binomială cu parametrii n şi p şi va avea funcţia generatoare

$$G\,[1 + p\,(r - 1)],$$

funcţie compusă prin utilizarea legii probabilităţii totale.

Să presupunem că în biotopul A au existat iniţial $X\,(A)$ obiecte generate de un proces Poisson bidimensional şi că numărul descendenţilor în B, produşi de un singur obiect în $\mathbf{v}_0$, este $Y\,(\mathbf{v}_0,\ B)$. Numărul tuturor descendenţilor aflaţi în B şi generaţi de cei $X\,(A)$ părinţi va fi, deci,

$$Y\,(A,\ B) = \sum_{\mathbf{v}_0 \in A} Y\,(\mathbf{v}_0,\ B). \tag{4.4}$$

Dacă A este o regiune mărginită cu suprafaţa $S\,[A]$, suma (4.4) este finită, cu probabilitatea 1, întrucît numărul părinţilor din A urmează o repartiţie Poisson cu parametrul $\lambda S\,[A]$. Funcţia generatoare a lui $Y\,(A,\ B)$ va fi

$$H\,(r) = \mathcal{M}\,\{r^{Y(A,B)}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}\,\{r^{Y(A,B)} \mid X\,(A) = k\}\ \mathcal{P}\,\{X\,(A) = k\}. \tag{4.5}$$

Datorită ipotezei (b) privind apariţia independentă a descendenţilor, valoarea medie din (4.5) se scrie

$$\mathcal{M}\,\{r^{Y(A,B)} \mid X\,(A) = k\} = [\mathcal{M}\,\{r^{Y(A,B)} \mid X\,(A) = 1\}]^k, \tag{4.6}$$

astfel încît, în cazul proceselor Poisson desfășurate în spațiu, cu condiția $X(A) = 1$, vom avea

$$Y(A, B) = Y(\mathbf{v}_0, B),$$

unde $\mathbf{v}_0$ este uniform repartizat în A. Vom scrie aceasta sub forma

$$M = \mathscr{M}\{r^{Y(A,B)} \mid X(A) = 1\} = \mathscr{M}\{r^{Y(\mathbf{v}_0,B)} \mid \mathbf{v}_0 \text{ uniform repartizat în } A\}, \tag{4.7}$$

și, mai departe,

$$M = 1/S[A] \int_A G[1 + p(r-1)]\, d\mathbf{v}_0. \tag{4.8}$$

Cu ajutorul lui (4.6), (4.7) și (4.8), vom rescrie (4.5)

$$H(r) = \sum_{k=0}^{\infty} M^k \exp\left\{- \lambda S[A] \frac{[\lambda S[A]^k}{k!}\right\}, \tag{4.9}$$

sau, sub o formă simplificată,

$$H(r) = \exp\left\{\lambda \int_A (G\,1 + p(r-1) - 1)\, d\mathbf{v}_0\right\},$$

unde

$$p = \int_B f(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)\, d\mathbf{v}_0$$

Exemplul dat de S. Karlin se referă la răspîndirea plantelor pe un areal oarecare, însă modelul poate fi folosit, de asemenea, pentru reprezentarea procesului de cancerogeneză cu focare multiple sau pentru reprezentarea procesului de metastazare într-o regiune B.

Primită la redacție la 3 decembrie 1967

Centrul de statistică
matematică al Academiei
Republicii Socialiste România
str. M. Eminescu 47,
București 9

STOCHASTIC MODELS OF THE POPULATION KINETICS

ABSTRACT

The paper deals with an analysis of stochastic models of growth of populations with discernable particles aiming at emphasizing some specific problems of biological population kinetics . An equivalence, under certain circumstances between the terms "demos" and "compartment" is suggested and, consequently, the elements of a theory of multicompartmented systems are presented. Biological populations with precursors of different nature are considered

and the problem of the stability of some populations is discussed by the existence of an imigration process. Then stochastic processes depending on age, stage, and position are analysed when considered as fundamental models of populations with discernable particles.

The paper comprises the following sections : 1. Preliminary considerations. 2. Stable populations with precursors 3. Life -cycle and birth-and-death processes stage/age dependent. 4. The growth of the populations with spatially distinguishable objects.

BIBLIOGRAFIE

S. R. ADKE (1964), *The generalized birth and death processes and Gaussian diffusion.* J. Math. Anal. Appl., **9**, 336—340.

S. R. ADKE, J. E. MOYAL (1963), *A birth, death and diffusion process.* J. Math. Anal. Appl., **7**, 209—224.

N. T. J. BAILEY (1967), *The Mathematical Approach to Biology and Medicine.* J. Wiley, New York.

N. T. J. BAILEY (1968), *Stochastic birth, death and migration processes for spatially distributed populations.* Biometrika, **55**, 189—198.

M. S. BARTLETT (1966), *An Introduction to Stochastic Processes, with Special Reference to Methods and Applications.* Cambridge Univ. Press, London.

M. S. BARTLETT, D. G. KENDALL (1951), *On the use of the characteristic functional in the analysis of some stochastic processes occurring in physics and biology.* Proc. Camb. Phil. Soc., **47**, 65—76.

A. T BHARUCHA — REID (1960), *Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications.* Mc Graw-Hill, New York.

H. E. CONNER (1964), *Extinction probabilities for age- and position — dependent branching processes.* J. Soc. Indust. Appl. Math., **12**, 899—909.

D. R. COX, H. D. MILLER (1965), *The Theory of Stochastic Processes.* Methuen, London.

D. A. EDWARDS, J. E. MOYAL (1955), *Stochastic differential equations.* Proc. Camb. Phil. Soc. **51**, 663—677.

D. FIRESCU, P. TĂUTU (1965), *Asupra unui model stohastic al hematopoezei.* Studii şi cercet. matem., **17**, 1345—1359.

D. FIRESCU, P. TĂUTU (1966 a), *A stochastic model of the embryonic endoderm formation at inferior metazoans.* Rev. rom. math. pures et appl., **11**, 753—761.

D. FIRESCU, P. TĂUTU (1966b), *O teorie stohastică a sistemelor multicompartimentale.* Anal.Univ. Buc., ser. St. nat. (Matem.-Mecan.), **15**, 75—87.

D. FIRESCU, P. TĂUTU (1966 c), *Modele stohastice de cinetică celulară.* Comunicare la Sesiunea generală ştiinţifică a Academiei, Bucureşti, 21—24 sept.

L. A. GOODMAN (1967), *The probabilities of extinction for birth — and — death processes that are age — dependent or phase — dependent.* Biometrika, **54**, 579—596.

T. E. HARRIS (1963), *The Theory of Branching Processes.* Springer, Berlin.

S. KARLIN (1966), *A First Course in Stochastic Processes.* Academic Press, New York.

D. G. KENDALL (1952), *Les processus stochastiques de croissance en biologie.* Ann. Inst. H. Poincaré, **13**, 43—108.

D. G. KENDALL (1966), *Branching processes since 1873.* J. London Math. Soc., **41**, 385—406.

S. A. KILLMANN, E. P. CRONKITE, T. M. FLIEDNER, V. P. BOND, G. BRECHER (1963), *Mitotic indices of human bone marrow cells* (II). Blood, **21**, 141—162.

J. F. C. KINGMAN (1966), *An approach to the study of Markov processes.* J. Roy. Statist . Soc., ser. B, **28**, 417—447.

L. G. LAJTHA, R. OLIVER (1962), *Cell population kinetics following different regimes of irradiation.* Brit. J. Radiol. **35**, 131—140.

G. MIHOC, D. FIRESCU (1960), *Asupra unor procese stohastice întîlnite în demografie.* Anal. Univ. Buc., ser. St. nat. (Matem.—Fiz.), *25*, 141—148.

J. E. MOYAL (1962 a), *Multiplicative population chains.* Proc. Roy. Soc., ser. A, **266**, 518—256.

J. E. MOYAL (1962 b), *The general theory of stochastic population processes.* Acta Math., **108**, 1—31.

J. NEYMAN, E. L. SCOTT (1957), *On a mathematical theory of populations conceived as conglomeration of clusters.* Cold Spring Harbor Symp. Quant. Biol., **22**, 109—120.

O. ONICESCU (1964), *Nombres et systèmes aléatoires.* Ed. Acad. — Peyrolles, Bucarest — Paris.

N. U. Prabhu (1965), *Stochastic Processes. Basic Theory and Its Applications*. Macmillan, New York.

K. L. Q. Read, J. R. Ashford (1968), *A system of models for the life cycle of a biological organism*. Biometrika, **55**, 211–221.

E. Seneta (1967), *The random walk and bacterial growth*. Zastosow. Matem., **9**, 135–147.

B. A. Sevastianov (1958), *Branching random processes for particles diffusing in a bounded domain with absorbing boundary*. Teor. Veroiatn. Primen., **3**, 121–126.

E. Trucco (1965), *Mathematical models for cellular systems. The Von Foerster equation* (I). Bull. Math. Biophys., **27**, 285–304.

METODA NEWTON-KANTOROVICI PENTRU ECUAȚII OPERAȚIONALE NELINIARE DEPINZÎND DE UN PARAMETRU

DE

B. JANKÓ și I. COROIAN

(Cluj)

În lucrare se studiază rezolvarea ecuației operaționale (1), unde $P : X \times M \to Y$ este un operator neliniar, X, M, Y sînt spații liniare normate iar θ elementul nul al spațiului Y, cu ajutorul metodei iterative Newton-Kantorovici (3) folosind principiul majorantei.

Se consideră ecuația

$$P(x, \mu) = \theta \tag{1}$$

unde $y = P(x, \mu)$ este o operație neliniară definită în spațiul produs $X \times M$, $x \in X$, $\mu \in M$, X și M fiind spații liniare normate, cu valori în spațiul liniar normat Y, iar θ este elementul nul al spațiului Y.

Alături de ecuația (1) mai considerăm ecuația

$$Q(z, \nu) = 0 \tag{2}$$

pe care o vom numi majoranta ecuației (1), unde $Q(z, \nu)$ este o funcție reală, de variabile reale, definită în dreptunghiul

$$z \in [z_0, z'], \ \nu \in [\nu_0, \nu'].$$

Presupunem că există derivata $Q'(z, \nu) = \frac{\partial Q}{\partial z}$ iar $Q(z, \nu)$ și $Q'(z, \nu)$ sînt continue și admit derivate parțiale $\frac{\partial}{\partial \nu} Q(z, \nu)$, $\frac{\partial}{\partial \nu} Q'(z, \nu)$ în dreptunghiul considerat. În mod analog presupunem că operatorul $P(x, \mu)$ admite derivata în raport cu x în sens Fréchet $P'(x, \mu)$ iar $P(x, \mu)$

şi $P'(x, \mu)$ sînt continue şi admit derivatele parţiale $\frac{\partial}{\partial \mu} P(x, \mu)$, $\frac{\partial}{\partial \mu} P'(x, \mu)$ în sens Fréchet, într-un domeniu pe care-l vom specifica în cele ce urmează. Metoda lui Newton-Kantorovici pentru ecuaţia operaţională (1) are forma

$$x_{n+1} = x_n - [P'(x_n, \mu)]^{-1} P(x_n, \mu), \tag{3}$$

unde $\Gamma_\mu^n = -[P'(x_n, \mu)]^{-1}$ este inversa derivatei în sens Fréchet a operaţiei $P(x, \mu)$ pentru elementul x_n, iar metoda clasică a lui Newton pentru ecuaţia reală (2) are forma

$$z_{n+1} = z_n - \frac{1}{Q'(z_n, \nu)} Q(z_n, \nu). \tag{4}$$

Existenţa şi unicitatea soluţiei $\overset{*}{x}(\mu)$ a ecuaţiei (1), convergenţa şirului aproximaţiilor succesive $\{x_n\}$ dat de metoda Newton-Kantorovici (3), către soluţia ecuaţiei (1) a fost studiată, folosind principiul majorantei, de către L. V. Kantorovici [1] şi I. P. Mîsovschi [3]. În lucrarea de faţă ne propunem să slăbim condiţiile teoremelor de existenţă, unicitate şi de convergenţă a metodei Newton-Kantorovici impuse în lucrarea [1]. Menţionăm că derivata $P''(x, \mu)$ în raport cu x nu intervine în algoritmul (3) şi ipoteza referitoare la existenţa ei poate fi omisă în demonstraţiile teoremelor din [1]. Acelaşi lucru putem spune şi despre $Q''(z, \nu)$.

TEOREMA 1. *Pe lîngă ipotezele făcute despre ecuaţiile* (*1*) *şi* (*2*) *mai presupunem satisfăcute condiţiile* :

1°. *Pentru aproximaţia iniţială* x_0 *a soluţiei ecuaţiei* (*1*), *respectiv* z_0 *a soluţiei ecuaţiei* (*2*) *şi valorile iniţiale* $\mu_0 \in M$ *şi* ν_0 *a parametrilor* μ *şi* ν, *există operatorul invers*

$$\Gamma^0 = -[P'(x_0, \mu_0)]^{-1} \text{ şi } \|\Gamma^0\| \leqslant -\frac{1}{Q'(z_0, \nu_0)};$$

2°. $\|P(x_0, \mu_0)\| \leqslant Q(z_0, \nu_0)$;

3°. $\|P'(x, \mu_0) - P'(x_0, \mu_0)\| \leqslant Q'(z, \nu_0) - Q'(z_0, \nu_0)$,

pentru orice element x *din sfera* $S(x_0, r)$ *completă a spaţiului* X *dată de inegalităţile*

$$\|x - x_0\| \leqslant z - z_0 \leqslant z' - z_0 = r;$$

4°. $\left\| \frac{\partial}{\partial \mu} P(x_0, \mu) \right\| \leqslant \frac{\partial}{\partial \nu} Q(z_0, \nu)$,

pentru orice μ *din sfera* σ (μ_0, r') *dată de inegalităţile*

$$\|\mu - \mu_0\| \leqslant \nu - \nu_0 \leqslant \nu' - \nu_0 = r';$$

5°. $\left\| \frac{\partial}{\partial \mu} P'(x_0, \mu) \right\| \leqslant \frac{\partial}{\partial \nu} Q'(z_0, \nu)$

pentru orice $\mu \in \sigma$ şi $\nu \in [\nu_0, \nu']$;

$$6^\circ.\quad \left\| \frac{\partial}{\partial \mu} P'(x, \mu) - \frac{\partial}{\partial \mu} P'(x_0, \mu) \right\| \leqslant \frac{\partial}{\partial \nu} Q'(z, \nu) - \frac{\partial}{\partial \mu} Q'(z_0, \nu)$$

pentru orice $x \in S$ *şi* $\mu \in \sigma$.

În aceste condiţii dacă ecuaţia (2) are o rădăcină $z^*(\nu) \in [z_0, z']$ *pentru orice* $\nu \in [v_0, \nu']$, *către care converge procedeul (4), atunci ecuaţia operaţională neliniară (1) are pentru orice* $\mu \in \sigma$, *cel puţin o soluţie* $x^*(\mu)$, *către care converge procedeul (3) şi în plus are loc delimitarea*

$$\| x^*(\mu) - x_0 \| \leqslant z^*(\nu) - z_0. \tag{5}$$

Demonstraţie. Vom arăta întîi că condiţiile 1°, 2°, 3° ale teoremei rămîn satisfăcute în ipotezele teoremei pentru orice valori fixate a parametrilor $\mu \in \sigma$, $\nu \in [\nu_0, \nu']$.

a) Să arătăm îndeplinirea condiţiei 1°, adică existenţa operatorului

$$\Gamma^0_\mu = -[P'(x_0, \mu)]^{-1} \text{ şi } \| \Gamma^0_\mu \| \leqslant -\frac{1}{Q'(z_0, \nu)}.$$

Folosindu-ne de integrala Stiltjes-Gavurin [4], avem

$$\| \Gamma^0 [P'(x_0, \mu) - P'(x_0, \mu_0)] \| \leqslant \left\| \Gamma^0 \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} P'(x_0, \mu) \, d\mu \right\| \leqslant \tag{6}$$

$$\leqslant -\frac{1}{Q'(z_0, \nu_0)} \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{\partial}{\partial \nu} Q'(z_0, \nu) \, d\nu = 1 - \frac{Q'(z_0, \nu)}{Q'(z_0, \nu_0)} = q < 1$$

Într-adevăr, inegalitatea $q < 1$ se reduce la $\dfrac{Q'(z_0, \nu)}{Q'(z_0, \nu_0)} > 0$. Avînd prin ipoteză $Q'(z_0, \nu_0) < 0$, dacă am avea $Q'(z_0, \nu) > 0$ am deduce din 6°, 4°, 2° că $Q'(z, \nu) > 0$ şi $Q(z, \nu) \geqslant Q(z_0, \nu) \geqslant Q(z_0, \nu_0) > 0$, adică ecuaţia (2) n-ar avea soluţie în $[z_0, z']$. Inegalitatea (6) ne asigură existenţa operatorului invers

$$\{I - \Gamma^0 [P'(x_0, \mu) - P'(x_0, \mu_0)]\}^{-1} = [-\Gamma^0 P'(x_0, \mu)]^{-1},$$

unde I este operaţia identică. De aici urmează că există operatorul

$$[-\Gamma^0 P'(x_0, \mu)]^{-1} \cdot \Gamma^0 = -[P'(x_0, \mu)]^{-1} = \Gamma^0_\mu$$

şi folosindu-ne de (6) şi 1° obţinem

$$\| \Gamma^0_\mu \| \leqslant \| [-\Gamma^0 P'(x_0, \mu)]^{-1} \| \cdot \| \Gamma^0 \| \leqslant -\frac{1}{Q'(z_0, \nu_0)} \cdot \frac{1}{1 - q} = \tag{7}$$

$$= -\frac{1}{Q'(z_0, \nu)}$$

b) Verificăm îndeplinirea condiției 2° pentru $\mu \in \sigma$, $\nu \in [\nu_0, \nu']$

$$\|P(x_0, \mu)\| = \|P(x_0, \mu_0) + \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} P(x_0, \mu)\, d\mu\| \leqslant Q(z_0, \nu_0) + \tag{8}$$

$$+ \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{\partial}{\partial \nu} Q(z_0, \nu)\, d\nu = Q(z_0, \nu).$$

c) În fine, se verifică condiția 3° pentru $\mu \in \sigma$ și $\nu \in [\nu_0, \nu']$, ținînd seama de 3°, 6°

$$\|P'(x, \mu) - P'(x_0, \mu)\| \leqslant \|P'(x, \mu_0) - P'(x_0, \mu_0)\| + \tag{9}$$

$$+ \left\| \int_{\mu_0}^{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial \mu} P'(x, \mu) - \frac{\partial}{\partial \mu} P'(x_0, \mu)\right] d\mu \right\| \leqslant Q'(z, \nu_0) - Q'(z_0, \nu_0) +$$

$$+ \int_{\nu_0}^{\nu} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} Q'(z, \nu) - \frac{\partial}{\partial \nu} Q'(z_0, \nu)\right] d\nu = Q'(z, \nu) - Q'(z_0, \nu).$$

Pentru a demonstra convergența procedeului (3) să arătăm că pentru prima aproximație x_1 obținută din (3), condițiile 1°, 2°, 3° ale teoremei se mențin pentru orice $\mu \in \sigma$ și $\nu \in [\nu_0, \nu']$.

Se arată mai întîi îndeplinirea condiției 2°, adică inegalitatea

$$\|P(x_1, \mu)\| \leqslant Q(z_1, \nu) \tag{10}$$

Avem $x_1 - x_0 = - [P'(x_0, \mu)]^{-1} P(x_0, \mu)$ și ținînd seama de (9) rezultă

$$\|P(x_1, \mu)\| = \left\| \int_{x_0}^{x_1} [P'(x_0, \mu) - P'(x_0, \mu)]dx \right\| \leqslant \int_{z_0}^{z_1} [Q'(z, \nu) - Q'(z_0, \nu)]\, dz =$$

$$= Q(z_1, \nu).$$

Arătăm în continuare că 1° este îndeplinită. Din relația

$$\|x_1 - x_0\| = \|\Gamma_\mu^0 P(x_0, \mu)\| \leqslant - \frac{1}{Q'(z_0, \nu)} \cdot Q(z_0, \nu) = z_1 - z_0 \leqslant$$

$$\leqslant z' - z_0 = r,$$

rezultă că $x_1 \in S(x_0, r)$ și deci se poate scrie conform cu (7) și (9)

$$\|\Gamma_\mu^0 [P'(x_1, \mu) - P'(x_0, \mu)]\| \leqslant - \frac{1}{Q'(z_0, \nu)} [Q'(z_1, \nu) - Q'(z_0, \nu)] =$$

$$= 1 - \frac{Q'(z_1, \nu)}{Q'(z_0, \nu)} = q' < 1.$$

Într-adevăr, inegalitatea $q' < 1$ se reduce la $\frac{Q'(z_1, \nu)}{Q'(z_0, \nu)} > 0$, apoi după (7) $Q'(z_0, \nu) < 0$ și dacă am avea $Q'(z_1, \nu) > 0$ am obține $Q'(z, \nu) \geqslant$

$\geqslant Q'(z_1, \nu) > 0$ deci $Q(z, \nu)$ este crescătoare în raport cu z iar condiția 4° arată că $Q(z_0, \nu)$ este crescătoare în raport cu ν. Așadar

$$Q(z, \nu) \geqslant Q(z_1, \nu) \geqslant Q(z_0, \nu) \geqslant Q(z_0, \nu_0) > 0$$

ceea ce contrazice ipoteza că ecuația (2) are soluție în $[z_0, z']$. Din inegalitatea $q' < 1$ rezultă existența operatorului invers

$$\{I - \Gamma^0_\mu [P'(x_1, \mu) - P'(x_0, \mu)]\}^{-1} = [-\Gamma^0_\mu P'(x_1, \mu)]^{-1}$$

și deci există și operatorul

$$[-\Gamma^0_\mu P'(x_1, \mu)]^{-1} \Gamma^0_\mu = -[P'(x_1, \mu)]^{-1} = \Gamma^1_\mu,$$

a cărui delimitare în normă este

$$\|\Gamma^0_\mu\| \leqslant -\frac{1}{Q'(z_0, \nu)} \cdot \frac{1}{1-q'} = -\frac{1}{Q'(z_1, \nu)}. \tag{11}$$

Verificarea îndeplinirii condiției 3° pentru x_1 și μ_0 se face astfel

$$\begin{aligned} &\|P'(x, \mu_0) - P'(x_1, \mu_0)\| \leqslant \|P'(x, \mu_0) - P'(x_0, \mu_0)\| + \\ &+ \|P'(x_0, \mu_0) - P'(x_1, \mu_0)\| \leqslant Q'(z, \nu_0) - Q'(z_0, \nu_0) + \\ &+ Q'(z_0, \nu_0) - Q'(z_1, \nu_0) = Q'(z, \nu_0) - Q'(z_1, \nu_0). \end{aligned}$$

Pentru x_1 și μ oarecare din sfera σ, verificarea condiției 3° se face ca și demonstrarea inegalității (9). Din inegalitățile (10) și (11) obținem

$$\|\Gamma^1_\mu P(x_1, \mu)\| \leqslant -\frac{1}{Q'(z_1, \nu)} Q(z_1, \nu).$$

iar din (3) și (4) rezultă $\|x_2 - x_1\| \leqslant z_2 - z_1 \leqslant z_1 - z_0 \leqslant z' - z_0 = r$.

Prin inducție completă se arată că condițiile 1°, 2°, 3° ale teoremei 1 rămîn satisfăcute pentru orice x_n dat de (3) și orice $\mu \in \sigma$ și că

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant z_{n+1} - z_n.$$

De aici rezultă pentru orice $p = 1, 2, 3, \ldots$

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant z_{n+p} - z_n. \tag{12}$$

Din convergența șirului $\{z_n\}$ către soluția $z^*(\nu)$ a ecuației (2) și din completitudinea sferei $S(x_0, r)$ în care se găsesc aproximațiile x_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, urmează că există

$$x^*(\mu) = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Pe baza continuității lui $P(x, \mu)$ și $Q(z, \nu)$ și a inegalității

$$\|P(x_n, \mu)\| \leqslant Q(z_n, \nu), \text{ rezultă că } P(x^*(\mu), \mu) = \theta.$$

Făcînd în (12) $n = 0$ și apoi $p \to \infty$ obținem delimitarea (5).

TEOREMA 2. *În condiţiile teoremei 1, dacă ecuaţia (2) are soluţie unică în* $[z_0, z']$, *atunci ecuaţia operaţională (1) are soluţie unică în sfera* $S(x_0, r)$ *dată de inegalitatea* $\|x - x_0\| \leqslant z - z_0 \leqslant z' - z_0 = r$.

Pentru demonstraţie vom arăta că în ipotezele noastre, pentru ecuaţiile

$$x = x + \Gamma_\mu^0 P(x, \mu) \equiv U(x, \mu),$$

$$z = z - \frac{1}{Q'(z_0, \nu)} Q(z, \nu) \equiv V(z, \nu),$$

echivalente respectiv cu ecuaţiile (1) şi (2), sînt îndeplinite condiţiile teoremei 4 de unicitate din lucrarea [1], condiţii date pentru ecuaţii care nu depind de un parametru, adică avem

a) $\|U'(x, \mu)\| \leqslant V'(z, \nu)$ pentru orice $x \in S$ şi orice $\mu \in \sigma$

b) $V(z_0, \nu) \geqslant z_0$, $V(z', \nu) \leqslant z'$ pentru orice $\nu \in [\nu_0, \nu']$.

Avem, după (9) şi (7),

$$\|U'(x, \mu)\| = \|I + \Gamma_\mu^0 P'(x, \mu)\| = \|\Gamma_\mu^0 [P'(x, \mu) - P'(x_0, \mu)]\| \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{1}{Q'(z_0, \nu)} [Q'(z, \nu) - Q'(z_0, \nu)] = 1 - \frac{Q'(z, \nu)}{Q'(z_0, \nu)} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left[z - \frac{1}{Q'(z_0, \nu)} Q(z, \nu)\right] = V'(z, \nu).$$

Din (7) şi (8) avem

$$V(z_0, \nu) = z_0 - \frac{1}{Q'(z_0, \nu)} Q(z_0, \nu) \geqslant z_0$$

$$V(z', \nu) = z' - \frac{1}{Q'(z_0, \nu)} Q(z', \nu) \leqslant z'$$

deoarece $Q'(z_0, \nu) < 0$, avînd îndeplinită condiţia *1°* pentru $\mu \in \sigma$ şi $\nu \in [\nu_0, \nu']$ iar $Q(z', \nu) > 0$ căci în caz contrar avînd în vedere (8), ecuaţia (2) nu ar avea soluţie în $[z_0, z']$.

Aşadar condiţiile a) şi b) sînt satisfăcute şi pe baza teoremei 4 din [1] afirmăm că ecuaţia (1) are soluţie unică în sfera $S(x_0, r)$, în ipoteza că ecuaţia (2) are soluţie unică în $[z_0, z']$.

Observaţie. În condiţiile teoremei 1 are loc de asemenea convergenţa procedeului modificat al lui Newton-Kantorovici

$$x_{n+1} = x_n - [P'(x_0, \mu_0)]^{-1} P(x_n, \mu) \tag{13}$$

în care, la fiecare iteraţie, se consideră inversa derivatei Fréchet în punctul iniţial. Într-adevăr, algoritmul (13) este metoda aproximaţiilor succesive pentru ecuaţia $x = x + \Gamma^0 P(x, \mu)$ echivalentă cu (1). Dacă se consideră ca ecuaţie reală majorantă, ecuaţia

$$z = z - \frac{1}{Q'(z_0, \nu_0)} Q(z, \nu),$$

echivalentă cu (2) şi se aplică rezultatele teoremelor 1 şi 7 din [1], rezultă convergenţa procedeului iterativ (13) către soluţia ecuaţiei (1).

Primită la redacţie la 15 aprilie 1968

Institutul pedagogic Baia Mare

NEWTON – KANTOROVIČ'S METHOD FOR NON-LINEAR OPERATIONAL EQUATIONS DEPENDENT ON PARAMETER

ABSTRACT

The paper investigates the solving of operational equations (1), where $P : X \times M \to Y$ is a non-linear operator and X, M, Y are normed linear spaces and θ is the zero element from Y, with Newton – Kantorovič's iterative method (3), using the majorant principle.

BIBLIOGRAFIE

1. Л. В. КАНТОРОВИЧ, *Некоторые дальнейшие применения методы Ньютона*. Вестник Ленингр. Унив. сер. мат., *2*, 68–103 (1957).
2. Л. В. КАНТОРОВИЧ, Труды Матем. Инст. им. Стеклова, **28**, 104–144 (1949).
3. И. П. МЫСОВСКИ, Вестник Ленингр., *11*, 25–48 (1953).
4. М. К. ГАВУРИН, Ученые записки Ленингр. сер. мат. наук. **19**, 59–154 (1950).

ASUPRA SUBGRUPURILOR GRUPULUI CENTRO-AFIN ÎN TREI VARIABILE

DE

I. MATEI

Considerînd clasificarea în real a subgrupurilor grupului centro-afin în trei variabile se determină subgrupurile $G_r(r \leqslant 4)$ care nu intră în clasificarea dată de S. Lie şi care nu conţin transformarea distinsă $U = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3}$. Se arată că există şapte tipuri de astfel de subgrupuri.

Clasificarea subgrupurilor grupului centro-afin în trei variabile a fost făcută de S. Lie plecînd de la subgrupul invariant special cu 8 parametri şi de la izomorfismul acestuia cu grupul proiectiv al planului; această clasificare nu face distincţie între real şi imaginar [1].

În cele ce urmează considerînd clasificarea în real se determină pe o cale directă, anume prin schimbări de variabile şi de operatori, subgrupurile $G_r(r \leqslant 4)$ care nu intră în clasificarea lui S. Lie şi care nu conţin transformarea distinsă, limitarea la cazurile $r \leqslant 4$ fiind în legătură cu considerarea acestor grupuri ca grupuri de stabilitate ale unui spaţiu A_3 omogen.

Se ştie că grupul centro-afin în trei variabile are operatorii transformărilor infinitezimale

$$x^i \frac{\partial f}{\partial x^k}, \tag{1}$$

iar un subgrup al acestuia are operatorii de forma

$$X = a^i_k x^k \frac{\partial f}{\partial x^i}, \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3)\,; \tag{2}$$

$\left(\text{în continuare se va adopta notaţia uzuală } \frac{\partial f}{\partial x^i} = p_i\right)$.

În clasificarea lui S. Lie, toţi operatorii (2) au ecuaţia caracteristică

$$|a^i_k - \rho\delta^i_k| = 0 \tag{3}$$

cu rădăcini reale. Cazurile care scapă acestei clasificări se caracterizează prin aceea că unul cel puţin dintre operatorii grupului are ecuaţia caracteristică avînd şi rădăcini complexe. Vom nota rădăcinile complexe pentru acest operator cu $\rho_{1.3} = a \pm ib$.

Subgrupurile cu un parametru. Avem un singur operator de forma (2). Ţinînd seama de natura rădăcinilor ecuaţiei caracteristice, putem reduce matricea (a^i_k) prin schimbări de variabile liniare şi omogene la forma canonică [2], $\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ -b & 0 & a \end{pmatrix}$ cu $b \neq 0$, deci putem reduce operatorul grupului la forma

$$X_1 = \beta U + x^1 p_3 - x^3 p_1 + \alpha x^2 p_2, \qquad (\alpha, \beta = \text{constante}). \tag{I}$$

Subgrupurile cu doi parametri. Unul dintre operatorii grupului poate fi considerat de forma (1), al doilea fiind de forma (2) adică

$$X_2 = a^i_k x^k p_i \tag{4}$$

Ecuaţia de structură

$$(X_1 X_2) = \lambda X_1 + \mu X_2 \tag{5}$$

impune condiţii constantelor β, α, a^i_k. Evitînd cazul în care grupul conţine transformarea distinsă U, se obţine grupul cu doi parametri

$$X_1 = \beta U + x^1 p_3 - x^3 p_1, \quad X_2 = aU + x^2 p_2. \tag{II}$$

Subgrupurile cu trei parametri. Ne putem reduce la a avea operatorul X_1 de forma (I), iar ceilalţi doi operatori de forma

$$X_2 = a^i_k x^k p_i, \quad X_3 = b^i_k x^k p_i. \tag{6}$$

Ecuaţiile de structură formate cu ajutorul operatorului X_1 sînt de forma

$$(X_1 X_2) = \lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3, \; (X_1 X_3) = \lambda' X_1 + \mu' X_2 + \nu' X_3. \tag{7}$$

Cu ajutorul transformărilor de operatori de forma

$$\overline{X}_1 = X_1, \quad \overline{X}_h = c^k_h X_k \qquad (h, k = 2, 3) \tag{8}$$

putem reduce matricea $\begin{pmatrix} \mu & \nu \\ \mu' & \nu' \end{pmatrix}$ la una din formele canonice Jordan,

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu' \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix} \text{ cu } \nu \neq 0, \tag{9}$$

corespunzător cărora ecuațiile (7) sînt de forma

(A) $(X_1X_2) = \lambda X_1 + \mu X_2,\ (X_1X_3) = \lambda' X_1 + \mu' X_3$

(B) $(X_1X_2) = \lambda X_1 + \mu X_2 + X_3,\ (X_1X_3) = \lambda' X_1 + \mu X_3$

(C) $(X_1X_2) = \lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3,\ (X_1X_3) = \lambda' X_1 - \nu X_2 + \mu X_3.$

În cazul (C) ne putem aranja să avem $\nu = 1$.

Scriind dezvoltat aceste ecuații, se arată că se obțin următoarele trei tipuri de grup G_3, provenite din cazul (C),

(III) $X_1 = \beta U + x^1p_3 - x^3p_1 + \alpha x^2p_2,\ X_2 = x^1p_2,\ X_3 = x^3p_2$

(IV) $X_1 = \beta U + x^1p_3 - x^3p_1 + \alpha x^2p_2,\ X_2 = x^2p_1,\ X_3 = x^2p_3$

(V) $X_1 = x^2p_3 - x^3p_2,\ X_2 = x^3p_1 - x^1p_3,\ X_3 = x^1p_2 - x^2p_1.$

Subgrupurile cu patru parametri. Ne putem reduce la a avea operatorul X_1 de forma (I), iar ceilalți trei operatori de forma

(10) $$X_2 = a^i_k x^k p_i,\ X_3 = b^i_k x^k p_i,\ X_4 = c^i_k x^k p_i.$$

Considerînd ecuațiile de structură

(11) $$\begin{aligned}(X_1X_2) &= \lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3 + \tau X_4\\ (X_1X_3) &= \lambda' X_1 + \mu' X_2 + \nu' X_3 + \tau' X_4\\ (X_1X_4) &= \lambda'' X_1 + \mu'' X_2 + \nu'' X_3 + \tau'' X_4\end{aligned}$$

cu ajutorul schimbării operatorilor X_2, X_3, X_4 putem reduce matricea $\begin{pmatrix}\mu & \nu & \tau\\ \mu' & \nu' & \tau'\\ \mu'' & \nu'' & \tau''\end{pmatrix}$ la una din formele canonice Jordan

(12) $$\begin{pmatrix}\mu & 0 & 0\\ 0 & \nu' & 0\\ 0 & 0 & \tau''\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}\mu & 1 & 0\\ 0 & \mu & 0\\ 0 & 0 & \tau''\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}\mu & 1 & 0\\ 0 & \mu & 1\\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}\mu & \nu & 0\\ -\nu & \mu & 0\\ 0 & 0 & \tau''\end{pmatrix} \text{ cu } \nu \neq 0,$$

corespunzător cărora ecuațiile (11) sînt de forma

(D) $(X_1X_2) = \lambda X_1 + \mu X_2,\ (X_1X_3) = \lambda' X_1 + \nu' X_3,\ (X_1X_4) =$
$= \lambda'' X_1 + \tau'' X_4$

(E) $(X_1X_2) = \lambda X_1 + \mu X_2 + X_3,\ (X_1X_3) = \lambda' X_1 + \mu X_3$
$(X_1X_4) = \lambda'' X_1 + \tau'' X_4$

(F) $(X_1X_2) = \lambda X_1 + \mu X_2 + X_3,\ (X_1X_3) = \lambda' X_1 + \mu X_3 + X_4$
$(X_1X_4) = \lambda'' X_1 + \mu X_4$

(G) $(X_1X_2) = \lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3,\ (X_1X_3) = \lambda' X_1 - \nu X_2 + \mu X_3$
$(X_1X_4) = \lambda'' X_1 + \tau'' X_4$

(în cazul (G) ne putem aranja să avem $\nu = 1$).

Explicitînd aceste ecuaţii, se obţin următoarele două tipuri de grup G_4, provenite din cazul (G)

(VI) $X_1 = \beta U + x^1p_3 - x^3p_1,\ X_2 = x^1p_2,\ X_3 = x^3p_2,\ X_4 = aU + x^2p_2$

(VII) $X_1 = \beta U + x^1p_3 - x^3p_1,\ X_2 = x^2p_1,\ X_3 = x^2p_3,\ X_4 = aU + x^2p_2.$

Avem deci următoarea :

Teoremă. *Considerînd clasificarea în real a subgrupurilor grupului centro-afin în trei variabile, se obţin pentru subgrupurile* $G_r(r \leqslant 4)$ *care nu conţin transformarea distinsă, tipurile* (*I*) — (*VII*) *în plus faţă de clasificarea lui S. Lie care nu face distincţie între real şi imaginar.*

Primită la redacţie la 4 decembrie 1967

Institutul de construcţii Bucureşti

SUR DES SOUS-GROUPES DU GROUPE CENTRO-AFFINE EN TROIS VARIABLES

RÉSUMÉ

On considère la classification en réel des sous-groupes du groupe centro-affine en trois variables et on démontre que pour $G_r(r \leqslant 4)$, en dehors de types obtenus par S. Lie qui ne distingue pas entre réel et imaginaire, on obtient encore sept types (I) — (VII) de groupes centro-affines qui ne contiennent pas la transformation distinguée.

BIBLIOGRAFIE

1. S. Lie, F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen.* Leipzig, t. III, 1893, p. 117.
2. G. Vrănceanu, *Leçons de Géométrie différentielle.* Vol III, Bucureşti, 1964, p. 179.

ASUPRA UNEI PROBLEME A LUI H. VILLAT

DE

ELENA MURGULESCU

Introducere. În teza sa de doctorat [1] H. Villat a pus problema studiului mişcării unui fluid incompresibil în prezenţa unui obstacol, ţinîndu-se seamă de influenţa solului şi admiţînd că în spatele obstacolului se formează o regiune de fluid în repaus, mărginită de linii libere, conform schemei lui Helmholtz. Printr-o virtuozitate de calcul puţin comună, H. Villat a dus soluţia acestei probleme pînă la capăt în cazul cînd obstacolul este o placă normală solului. În cele ce urmează ne propunem să reluăm aceeaşi problemă şi să dăm soluţia ei pe o altă cale care utilizează reprezentarea prin integrale eliptice. Printr-o schimbare de variabilă, rezultatele ajung să fie exprimate sub formă explicită.

1. *Problema la limită.* Să considerăm mişcarea plană, permanentă şi irotaţională a unui fluid perfect animat la infinit amonte de o viteză $\vec{V}_\infty$ paralelă cu solul. Alegem sistemul de axe rectangulare Oxy astfel încît solul să fie reprezentat prin ecuaţia $y = 0$. Mişcarea fluidă este perturbată de prezenţa unui obstacol format dintr-o placă CD normală solului (fig. 1).

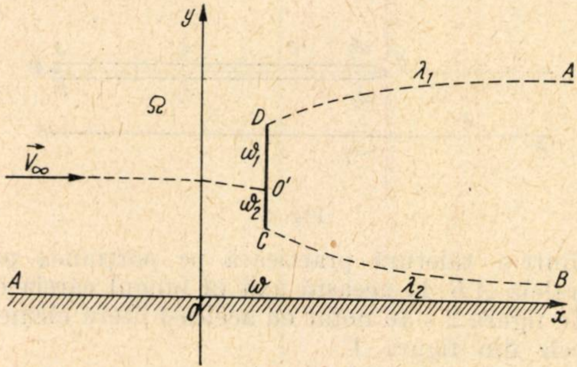


Fig. 1

În spatele obstacolului se formează o zonă de fluid în repaus mărginită de liniile libere DA şi CB, notate respectiv prin λ_1 şi λ_2. Peretele solid reprezentînd solul este notat prin ϖ. Pe obstacolul CD va exista un punct de bifurcare O', *a priori* necunoscut, care va separa porţiunile de obstacol ϖ_1 şi ϖ_2 în lungul cărora alunecă particule de fluid.

Să punem $z = x + iy$ şi să considerăm potenţialul complex

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y). \tag{1}$$

Potenţialul $f(z)$ trebuie să fie o funcţie olomorfă în orice punct la distanţă finită din domeniul Ω ocupat de fluidul în mişcare. Viteza la infinit fiind dată, va trebui ca

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = V_\infty. \tag{2}$$

Pe de altă parte, observînd că ϖ este o linie de curent, va trebui să avem

$$\psi = -h_1 \text{ pe } \varpi, \tag{3}$$

unde h_1 este o constantă pozitivă necunoscută. Deoarece $\lambda_1 + \varpi_1 + \varpi_2 + \lambda_2$ este de asemenea o linie de curent, putem lua

$$\psi = 0 \text{ pe } \lambda_1 + \varpi_1 + \varpi_2 + \lambda_2 \tag{4}$$

fixînd astfel constanta aditivă care putea să intre în expresia lui $\psi(x, y)$.

În lungul fiecărei linii de curent potenţialul vitezelor $\varphi(x, y)$ va varia între $-\infty$ şi $+\infty$. Putem fixa constanta aditivă care poate să apară în expresia lui $\varphi(x, y)$, astfel ca $\varphi(x, y) = 0$ în punctul de bifurcare O'.

În aceste condiţii, imaginea mişcării în planul variabilei complexe $f = \varphi + i\psi$ este reprezentată în figura 2. Frontiera acestui domeniu

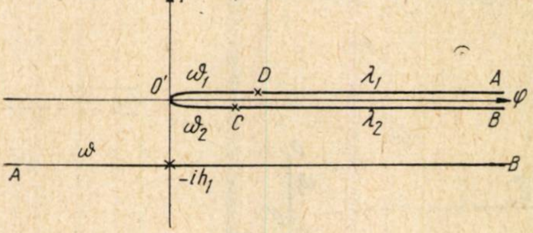


Fig. 2

este formată dintr-o tăietură practicată pe porţiunea pozitivă a axei reale şi din paralela AB la această axă în lungul căreia ordonatele sînt egale cu $-h_1$. În figura 2 s-au notat cu aceleaşi litere elementele în corespondenţă cu cele din figura 1

Să considerăm viteza complexă

$$w = u - iv = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = V_\infty \mathrm{e}^{-i\omega(z)}, \tag{5}$$

unde u şi v reprezintă proiecţiile vitezei, în punctul de afix z, pe axele de coordonate. Să punem

$$w(z) = \theta(x, y) + i\tau(x, y). \tag{6}$$

Funcţia $\theta(x, y)$ reprezintă unghiul vectorului viteză cu axa Ox; mărimea V a vitezei este dată de

$$V = \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right| = V_\infty \mathrm{e}^{\tau(x,y)}. \tag{7}$$

Dacă am cunoaşte pe $f(z)$, adică corespondenţa dintre domeniile din planele variabilelor f şi z, atunci $\omega(z)$ ar deveni o funcţie analitică de f definită în domeniul considerat în figura 2.

Condiţiile la limită pe care le verifică $\omega = \theta + i\tau$ sînt următoarele:

$$\begin{cases} \theta = \dfrac{\pi}{2} & \text{pe } \varpi_1 \\ \theta = -\dfrac{\pi}{2} & \text{pe } \varpi_2 \\ \theta = 0 & \text{pe } \varpi \\ \tau = 0 & \text{pe } \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \tag{8}$$

Semnificaţia acestor condiţii este clară; primele trei condiţii exprimă faptul că viteza este tangentă la porţiunile de obstacol ϖ_1, ϖ_2 şi la peretele ϖ. Ultima condiţie exprimă faptul, binecunoscut, că viteza este constantă în mărime şi egală cu V_∞ pe liniile libere λ_1 şi λ_2.

Funcţia $\omega(f)$ este olomorfă în domeniul considerat în figura 2 dat fiind că viteza nu se anulează decît pe frontieră în punctul O'. Determinarea ei revine deci la rezolvarea unei probleme la limită mixte caracterizată prin condiţiile (8).

Pentru rezolvarea acestei probleme la limită, procedăm în mod analog ca H. Villat [2].

Înlocuim domeniul considerat cu semiplanul $t'' > 0$ din planul variabilei $t = t' + it''$, corespondenţa frontierelor fiind indicată în figura 3 unde elementele omoloage sînt reprezentate prin aceleaşi litere. Abscisa imaginii lui B este $t' = -b$ $(b > 0)$, iar a lui O' este notată prin $t' = a$. Aceste abscise sînt necunoscute, căci în corespondenţă s-au impus abscisele funcţiilor în origine ale lui C şi D egale respectiv cu -1 şi $+1$; în acelaşi timp imaginea lui A este la infinit.

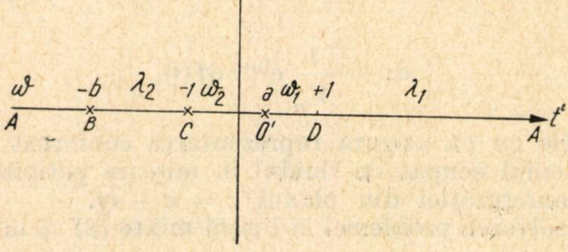


Fig. 3

Reprezentarea conformă a domeniului din planul f pe semiplanul $t'' > 0$ este dată de o formulă de forma

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = k\frac{t-a}{t+b} \tag{9}$$

k fiind o constantă reală. De aici deducem

$$f(t) = kt - k\ (b+a)\ \lg\ (t+b) + C, \tag{10}$$

C fiind o constantă.

Să alegem determinația lui $\lg\,(t'+b)$ care este reală pe axa reală pentru $t' > -b$. Atunci vom avea

$$\lg(t+b) = \lg|(t+b)| + i\pi \quad \text{pe } AB$$

Conform alegerii făcute, f se anulează în punctul O', deci în (10) constanta C se va determina anulînd membrul doi pentru $t=a$. Avem deci

$$C = -ka + k\,(b+a)\lg\,(a+b).$$

Legătura dintre constantele k și h_1 se obține scriind că

$$\mathrm{Im}\,\{f\,(t)\} = -h_1 \text{ pe } AB.$$

De aici rezultă

$$k = \frac{h_1}{\pi(a+b)}. \tag{11}$$

În definitiv reprezentarea conformă este dată de

$$f = kt - k\,(b+a)\lg\,(t+b) - ka + k\,(b+a)\lg\,(a+b), \tag{12}$$

unde k se exprimă cu ajutorul lui h_1 din relația (11).

2. *Viteza complexă.* Prin trecerea la semiplanul $t'' > 0$, funcția $\omega\,(z)$ devine o funcție olomorfă de t verificînd condițiile la limită (8).

Dacă determinăm pe ω ca funcție de t, atunci din relația (5) se va deduce

$$\mathrm{d}z = \frac{1}{V_\infty}\,\mathrm{e}^{i\omega(t)}\,\mathrm{d}f\,(t), \tag{13}$$

și această relație ne va asigura reprezentarea conformă a semiplanului $t'' > 0$ pe domeniul ocupat de fluidul în mișcare permițînd construirea *aposteriori* a configurației din planul $z = x + iy$.

Pentru rezolvarea problemei la limită mixte (8) să introducem funcția auxiliară

$$g\,(t) = \sqrt{(t+b)\,(t^2-1)} \tag{14}$$

pe care o considerăm în semiplanul superior și pe frontiera sa, alegînd determinația radicalului care este reală și pozitivă pe axa Ot' la dreapta punctului D.

Urmărind prin continuitate această determinaţie, valorile funcţiei $g(t)$ pe axa reală sînt date de

$$(15)\quad g(t)=\begin{cases}\sqrt{(t+b)(t^2-1)} & \text{pe } DA \quad 1<t'<+\infty\\ i\sqrt{|(t+b)(t^2-1)|} & \text{pe } CD \quad -1<t'<1\\ -\sqrt{(t+b)(t^2-1)} & \text{pe } BC \quad -b<t'<-1\\ -i\sqrt{|(t+b)(t^2-1)|} & \text{pe } AB \quad -\infty<t'<-b.\end{cases}$$

Funcţia auxiliară

$$-i\,\frac{\omega(t)}{g(t)}$$

este olomorfă în semiplanul $t''>0$ şi partea sa reală ia valori cunoscute pe frontieră. Avem

$$\operatorname{Re}\left\{-i\,\frac{\omega(t)}{g(t)}\right\}=\begin{cases}0 & \text{pe } DA \quad 1<t'<+\infty\\ -\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{|g(t')|} & \text{pe } O'D \quad a<t'<1\\ \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{|g(t')|} & \text{pe } CO' \quad -1<t'<a\\ 0 & \text{pe } BC \quad -b<t'<-1\\ 0 & \text{pe } AB \quad -\infty<t'<-b\end{cases}$$

Se va observa că funcţia considerată trebuie să tindă către 0 pentru $|t|\to\infty$.

Ţinînd seama de formula care rezolvă problema lui Dirichlet pentru semiplanul superior, se deduce din (16) expresia funcţiei auxiliare considerate. În definitiv se obţine

$$(17)\qquad \omega(t)=-\frac{1}{2}\,g(t)\left\{\int_{-1}^{a}\frac{dt'}{(t-t')\,|g(t')|}-\int_{a}^{1}\frac{dt'}{(t-t')\,|g(t')|}\right\}.$$

Se verifică uşor că funcţia definită de (17) satisface condiţiile la limită (8). Pe de altă parte, un calcul simplu ne arată că la mari distanţe avem

$$\omega(t)=-\frac{1}{2}\sqrt{t}\left\{\int_{-1}^{a}\frac{dt'}{|g(t')|}-\int_{a}^{1}\frac{dt'}{|g(t')|}+0\left(\frac{1}{t}\right)\right\}.$$

Dar $\omega(t)$ trebuie să fie mărginită în modul. Rezultă deci condiţia

$$(18)\qquad \int_{-1}^{a}\frac{dt'}{|g(t')|}-\int_{a}^{1}\frac{dt'}{|g(t')|}=0 \qquad \text{cu } -1<a<1.$$

Această condiţie care stabileşte o legătură între parametrii a şi b reprezintă în fond condiţia de compatibilitate pentru existenţa soluţiei olomorfe a problemei mixte de tip Volterra (8).

Forma funcţiei $\omega(t)$ fiind stabilită, cu ajutorul relaţiei (13) se face trecerea la planul fizic al mişcării. Configuraţia care se construieşte astfel depinde de parametrii h_1, a şi b. Între aceşti parametri avem relaţiile următoare : relaţia (18), relaţia care va exprima condiţia ca lungimea segmentului — obstacol CD să fie dată şi condiţia ca distanţa de la punctul C la peretele AB să fie de asemenea dată.

Se va observa că relaţia (18) defineşte pe a ca o funcţie bine determinată de b, astfel ca $-1 < a < 1$.

Într-adevăr, pentru b fix, funcţia de a

$$F(a) = \int_{-1}^{a} \frac{\mathrm{d}t'}{|g(t')|} - \int_{a}^{1} \frac{\mathrm{d}t'}{|g(t')|}$$

este continuă în $[-1, +1]$ şi derivabilă în $(-1, +1)$. Avem

$$F'(a) = \frac{2}{|g(a)|} = \frac{2}{\sqrt{(a+b)(1-a^2)}} > 0.$$

Avem evident

$$F(-1) = -\int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{d}t'}{|g(t')|} < 0$$

$$F(1) = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t'}{|g(t')|} > 0.$$

Prin urmare ecuaţia (18), adică

$$F(a) = 0,$$

admite o singură rădăcină în intervalul $(-1, +1)$, care depinde evident de b.

3. *Explicitarea soluţiei.* După construirea funcţiei $\omega(t)$ cu ajutorul lui (17) prin formulele (12) şi (13) se va obţine trecerea la planul fizic al mişcării. Formulele de trecere vor conţine evident integrale eliptice. Este remarcabil faptul că printr-o schimbare adecvată de variabilă se ajunge la integrale calculabile explicit. Vom face pentru aceasta o transformare de forma

$$t = k_1 + \frac{k_2}{u-1} \qquad (u = u' + iu'') \tag{19}$$

prin care $t = \infty$ corespunde lui $u = u_A = 1$. Constantele k_1 şi k_2 vor fi determinate prin condiţiile

$$\begin{cases} t = -\infty \rightarrow u = u_B = -1 \\ t = a \rightarrow u = u_0 = 0 \\ u_C = -u_D \end{cases} \tag{20}$$

unde u_A, u_B, u_0, u_C şi u_D sînt abscisele punctelor de pe axa reală Ou' care corespund punctelor A, B, O', C, D (fig. 4).

Explicitînd condițiile (20) se găsește

$$\begin{cases} k_1 = -a - 2b \\ k_2 = -2(a+b). \end{cases} \tag{21}$$

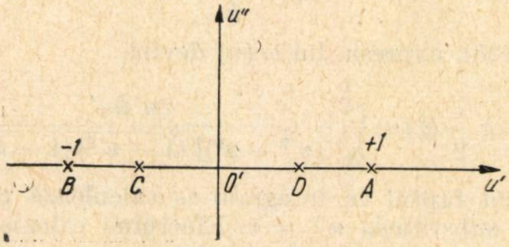


Fig. 4

Prin urmare transformarea considerată este

$$t = -a - 2b - \frac{2(a+b)}{u-1}. \tag{19'}$$

Prin această transformare, semiplanul $t'' > 0$ corespunde semiplanului $u'' > 0$, cu corespondența axelor reale și în particular al punctelor de pe aceste axe notate cu aceleași litere în figurile 3 și 4.

În virtutea relațiilor (19′) și (12), f devine o funcție de variabila u și printr-un calcul simplu se găsește

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} = \frac{4h_1}{\pi} \frac{u}{(u+1)(u-1)^2}. \tag{22}$$

În ceea ce privește funcția $\omega(t) = \theta + i\tau$, ea se obține aplicînd aceeași transformare în relația (17). Este însă mai simplu de a proceda direct plecînd de la condițiile la limită pe care le satisface ca funcție de variabila u.

Un procedeu analog cu cel dezvoltat la punctul 2 ne conduce la considerarea funcției auxiliare

$$\mathcal{G}(u) = \sqrt{(u^2-1)(u-u_C)(u-u_D)} \tag{23}$$

în care se adoptă determinația radicalului care este reală în pozitivă pe axa reală pentru $u = u' > 1$.

Se găsește ca expresie a lui $\omega(u)$

$$\omega(u) = \frac{i}{2}\mathcal{G}(u)\left[\int_{u_C}^{0} \frac{\mathrm{d}u'}{(u-u')\,|\mathcal{G}(u')|} - \int_{0}^{u_D} \frac{\mathrm{d}u'}{(u-u')\,|\mathcal{G}(u')|}\right]. \tag{24}$$

Funcția $\omega(u)$ definită de (24) satisface condițiile la limită (8) și este olomorfă în semiplanul superior. Mai rămîne să verificăm condiția de regularitate la infinit.

Din (24) se vede că $\omega(u)$ se comportă la mari distanțe ca

$$\frac{i}{2}u\left[\int_{u_C}^{0} \frac{\mathrm{d}u'}{|\mathcal{G}(u')|} - \int_{0}^{u_D} \frac{\mathrm{d}u'}{|\mathcal{G}(u')|}\right].$$

În virtutea condiției $u_C = -u_D$ impusă la (20), coeficientul lui u este egal cu zero.

În cele ce urmează vom utiliza notația

$$u_D = -u_C = \frac{1}{k} \quad (k > 1). \tag{25}$$

Ținînd seama de (25), expresia lui $\omega(u)$ devine

$$\omega(u) = k\frac{i}{2}\mathcal{G}(u)\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{2u'\,\mathrm{d}u'}{(u'^2 - u^2)\sqrt{(1-u'^2)(1-k^2u'^2)}}, \tag{26}$$

unde apare evident faptul că integrala se calculează prin mijloace elementare utilizînd substituția $u'^2 = v$. Efectuînd calculele se găsește

$$\omega(u) = -i\ln\left(\frac{-i\sqrt{k^2-1}\cdot u}{\sqrt{1-u^2} - \sqrt{1-k^2u^2}}\right). \tag{27}$$

În această expresie se aleg determinațiile radicalilor care sînt egale cu 1 pentru $u = 0$ pe marginea superioară a tăieturilor rectilinii luînd punctele critice corespunzătoare.

Din formula (5) avem

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = V_\infty \mathrm{e}^{-i\omega(u)} \tag{5'}$$

și prin urmare

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = -i\,V_\infty\sqrt{k^2-1}\,\frac{u}{\sqrt{1-u^2}+\sqrt{1-k^2u^2}}. \tag{28}$$

Trecerea la planul fizic se va obține din formulele (22) și (28). Se găsește

$$\mathrm{d}z = \frac{4h_1 i}{\pi V_\infty\sqrt{k^2-1}}\,\frac{\sqrt{1-u^2}+\sqrt{1-k^2u^2}}{(u+1)(u-1)^2}\,\mathrm{d}u. \tag{29}$$

Rezultă din cele de mai sus că rezolvarea problemei se poate face prin mijloace elementare care nu necesită utilizarea funcțiilor eliptice.

Lungimea l a obstacolului se deduce din relația (29) prin integrare în lungul segmentului CD. Notînd afixele punctelor C și D din planul fizic prin z_C și z_D, avem

$$z_D - z_C = il = \frac{4h_1 i}{\pi V_\infty\sqrt{k^2-1}}\int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} \frac{\sqrt{1-u^2}+\sqrt{1-k^2u^2}}{(u+1)(u-1)^2}\,\mathrm{d}u. \tag{30}$$

Pentru calculul acestor integrale să notăm

$$\begin{cases} I_1 = \displaystyle\int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} \frac{\sqrt{1-u^2}}{(u+1)(u-1)^2}\,\mathrm{d}u, \\[2ex] I_2 = \displaystyle\int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} \frac{\sqrt{1-k^2u^2}}{(u+1)(u-1)^2}\,\mathrm{d}u. \end{cases} \tag{31}$$

Pentru calculul primei integrale vom pune $\sqrt{1-u^2} = w\,(1-u)$ de unde

$$w = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}$$

alegînd determinaţia radicalului care este egală cu $+1$ pentru $u = 0$.

Se găseşte

$$I_1 = \int_{u=-\frac{1}{k}}^{u=\frac{1}{k}} \mathrm{d}w = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\,\Bigg|_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} = \frac{2}{\sqrt{k^2-1}}.$$

Pentru I_2 se aplică metoda reziduurilor ; integrăm funcţia

$$\frac{\sqrt{1-k^2u^2}}{(u+1)\,(u-1)^2}$$

pe un cerc de rază foarte mare care conţine în interior tăietura CD şi polurile $u = -1$ şi $u = 1$.

Se găseşte astfel

$$I_2 = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{k^2-1}}.$$

Prin urmare

$$l = \frac{4h_1}{\pi V_\infty}\,(I_1 + I_2) \tag{32}$$

adică

$$l = \frac{2h_1}{\pi V_\infty (k^2-1)}\,(\pi + 4). \tag{33}$$

4. *Presiunea pe obstacol.* Să notăm prin R_x şi R_y proiecţiile rezultantei presiunilor elementare exercitate de fluid asupra plăcii. Se ştie că avem

$$R_x - iR_y = -i \oint p\,\mathrm{d}\bar{z} \tag{34}$$

integrala fiind luată în sensul direct pe ambele laturi ale obstacolului. Aici p înseamnă presiunea care în fluidul de mişcare este dată de formula lui Bernoulli

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\,\rho\,(V_\infty^2 - V^2),$$

unde ρ este densitatea iar p_∞ valoarea presiunii la infinit.

În spatele obstacolului, unde fluidul este în repaus, avem $p = p_\infty$. Rezultă atunci din (34)

$$R_x - iR_y = -\frac{i\rho}{2}\int_{DO'C} (V_\infty^2 - V^2)\,\mathrm{d}\bar{z}. \tag{35}$$

Dar pe obstacol

$$V^2\,\mathrm{d}\bar{z} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}\bar{f}}{\mathrm{d}\bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}\bar{z} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}f.$$

Conform lui (5′) avem deci

$$V^2\,\mathrm{d}\bar{z} = V_\infty\,\mathrm{e}^{-i\omega(u)}\,\mathrm{d}f(u).$$

Pe de altă parte

$$\int_{DO'C}\mathrm{d}\bar{z} = \bar{z}_C - \bar{z}_D = il.$$

Dacă ţinem seama de (22) şi (28) se găseşte

$$\int_{DO'C} V^2\,\mathrm{d}\bar{z} = \frac{4h_1}{\pi}\,\frac{iV_\infty}{\sqrt{k^2-1}}\int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}}\frac{\sqrt{1-u^2}-\sqrt{1-k^2u^2}}{(u+1)(u-1)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{4h_1}{\pi}\,\frac{iV_\infty}{\sqrt{k^2-1}}\,(I_1-I_2).$$

În definitiv

$$R_x - iR_y = \frac{4\rho h_1 V_\infty}{\pi\sqrt{k^2-1}}\,I_2 = \frac{2h_1 V_\infty\rho}{k^2-1}$$

de unde

$$R_x = \frac{2h_1 V_\infty \rho}{k^2-1} = \rho V_\infty l\,\frac{\pi}{\pi+4},\quad R_y = 0$$

Se regăseşte astfel rezultatul lui H. Villat după care coeficientul de rezistenţă este acelaşi în cazul plăcii în fluid nelimitat sau în fluid limitat. Acest rezultat fusese obţinut de H. Villat [3] prin calcule destul de lungi şi care necesitau funcţii eliptice.

Primită la redacţie la 28 martie 1968

Institutul politehnic „Gheorghe
Gheorghiu-Dej“ Bucureşti
Str. Polizu nr. 1

SUR UN PROBLÈME DE H. VILLAT

RÉSUMÉ

On reprend le problème considéré par H. Villat dans sa Thèse [1] afin d'étudier l'influence du sol sur l'écoulement à la Helmholtz en présence d'une plaque normale au courant (fig. 1).

Ce problème est ramené à la résolution d'un problème mixte de Volterra dans le demi-plan $\mathrm{Im}\{t\}>0$, concernant la détermination de la fonction $\omega(t)$ de Levi-Cività. La solution,

donnée par (17), fait intervenir des intégrales elliptiques mais en utilisant la transformation (19), on aboutit à des intégrales calculables explicitement.

Ceci permet de retrouver d'une façon élémentaire le résultat fondamental de H. Villat [3], concernant l'expression du coefficient de résistance à l'avancement.

BIBLIOGRAFIE

1. Henri Villat, *Sur le mouvement d'un solide dans un fluide limité par une paroi fixe.* Journal de Mathématiques pures et appliquées, 6e série, **7**, 353—408 (1911).
2. Henri Villat, *Aperçus théoriques sur la résistance des fluides.* Scientia Phys. Math. Nr.38, Gauthier-Villars, 1920, p. 79—92.
3. Henri Villat, *Sur un calcul de résistance dans un courant fluide limité par un mur.* Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 3e série, **35**, 251—312 (1918).

REPREZENTĂRI CORESPONDENTE ÎN MECANICA CUANTICĂ ŞI ÎN FIZICA CLASICĂ

DE

LIVIU SOFONEA
(Braşov)

În lucrare sînt analizate aspectele matematice şi fizice ale reprezentărilor esenţiale ale mişcării în mecanica cuantică, puse în corespondenţă cu fizica clasică. Se studiază corespondenţele privind formalismul general şi legile de mişcare, atît faţă de mecanica newtoniană, cît şi faţă de cea analitică.
Sînt studiate de asemenea corespondenţele între mecanica cuantică şi optica geometrică, optica ondulatorie şi teoria clasică a radiaţiei electromagnetice. De asemenea sînt analizate corespondenţele cu teoria semiclasică — semicuantică a materiei şi se înfăţişează legăturile cu mecanica cuantică relativistă a cîmpurilor.

I. VARIAŢIA ÎN TIMP A MĂRIMILOR DE MIŞCARE

Întreaga dezvoltare a fizicii punctează mersul ascendent al gîndirii, *teoriile cele mai noi, arătîndu-şi forţa prin cuprinderea celor mai vechi ca nişte cazuri particulare, sau la limită.* S-a stabilit o corespondenţă între mecanica relativistă şi cea newtoniană, o corespondenţă între mecanica cuantică şi cea clasică ; aşadar un principiu care nu este numai o simplă constatare de evoluţie gnoseologică, dar continuă să alimenteze dezvoltarea teoriei, oferind puncte de sprijin. În cele ce urmează nu ne vom referi numai la acel ,,*principiu de corespondenţă*'' din teoria radiaţiei, ci, mai general, la corespondenţa între mecanica clasică şi cea cuantică, corespondenţă cu implicaţii practice, teoretice şi fără îndoială şi filozofice [1].

Corespondenţa cu mecanica clasică poate fi realizată în privinţa unor valori medii caracteristice mişcării. Aceste valori medii se definesc cuantic cu ajutorul funcţiei de undă, asupra căreia acţionează operatorul mărimii L

$$\overline{L}(t) = \int \Psi^*(x,\, t)\cdot \hat{L}\,\Psi(x,\, t)\,(\mathrm{d}x) \tag{1.1}$$

(x) = ansamblul coordonatelor ; $(\mathrm{d}x)$ = elementul de volum.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, Nr. 10, P. 1513–1593, BUCUREŞTI, 1968

Cu ajutorul legii cuantice de mişcare, (ecuaţia lui Schrödinger), mecanica cuantică permite calculul variaţiei valorii medii a unei mărimi oarecare, într-un interval de timp foarte mic din cursul mişcării. Mărimea L este descrisă de operatorul $\hat{L}$, iar schimbarea valorii medii de derivata $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{L}$. Derivînd (1.1) în raport cu t se obţine :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overline{L}) = \int \Psi^* \frac{\partial \hat{L}}{\partial t} \Psi \,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}\Psi^*}{\mathrm{d}t} \hat{L} \Psi \,\mathrm{d}x + \int \Psi^* \hat{L} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \,\mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

Primul termen este valoarea medie a lui $\frac{\partial L}{\partial t}$, nenulă în general ($L$ depinde explicit de timp). Celelalte două derivări se efectuează în lungul mişcării, prin urmare derivata funcţiei de undă ascultă de ecuaţia lui Schrödinger :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} \hat{H} \Psi \,; \quad \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = \frac{-1}{i\hbar} \hat{H}^* \Psi^*. \tag{1.3}$$

Înlocuindu-le în (1.2), obţinem :

$$\frac{\mathrm{d}\overline{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \overline{L}}{\partial t} - \frac{1}{i\hbar} \int (\hat{H}^* \Psi^*)(\hat{L}\Psi) \,\mathrm{d}x + \frac{1}{i\hbar} \int \Psi^* (\hat{L}\hat{H}\Psi) \,\mathrm{d}x. \tag{1.4}$$

Operatorii cuantici $\hat{H}$ şi $\hat{L}$ trebuie să fie hermitici, adică să aibă valori proprii reale, ceea ce înseamnă :

$$\int u_1^*(x) \hat{L} u_2(x) \,\mathrm{d}x = \int u_2(x) \hat{L}^* u_1^*(x) \,\mathrm{d}x, \tag{1.5}$$

condiţie care se aplică aici lui $\Psi^* = u_1^*$; $\hat{L}\Psi = u_2$

$$\int (\hat{H}^* \Psi^*)(\hat{L}\Psi)(\mathrm{d}x) = \int u_2 \hat{H}^* u_1^* \,\mathrm{d}x = \int u_1^* \hat{H} u_2 \,\mathrm{d}x = \int \Psi^* (\hat{H}\hat{L}) \Psi \,\mathrm{d}x \tag{1.6}$$

Derivata mediei în lungul mişcării este atunci

$$\frac{\mathrm{d}\overline{L}}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial \overline{L}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} \int \Psi^* (\hat{L}\hat{H} - \hat{H}\hat{L}) \Psi \,\mathrm{d}x \tag{1.7}$$

Folosind o denumirea de origine clasică, s-a introdus aşa-numita *paranteză a lui Poisson*, (cuantică, operaţională)

$$[\hat{H}, \hat{L}] = \frac{1}{i\hbar} (\hat{L}\hat{H} - \hat{H}\hat{L}). \tag{1.8}$$

Se vede bine că în (1.7) apar mărimi medii, şi atunci derivarea faţă de timp a valorilor medii se prezintă concentrat astfel :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overline{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \overline{L}}{\partial t} + \overline{[\hat{H}, \hat{L}]}} \tag{1.9}$$

Valoarea proprie a derivatei faţă de timp, este descrisă de expresia din dreapta egalităţii, asupra căreia s-a efectuat media. Operatorul derivatei mărimii L, adică $\frac{\mathrm{d}\hat{L}}{\mathrm{d}t}$, este în consecinţă :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\hat{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \hat{L}}{\partial t} + [\hat{H}, \hat{L}]} \tag{1.10}$$

Se vede imediat analogia cu cazul clasic : trecerea de la mărimi la operatori. Clasic, variaţia unei mărimi $\mathfrak{K}$ în lungul mişcării este dată de derivata substanţială (hidrodinamică) [2]

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{K}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial q_k} \cdot \frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t} + \sum_k \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial p_k} \cdot \frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}. \tag{1.11}$$

Scriind mai departe că totul se petrece în lungul mişcării (deci sînt satisfăcute ecuaţiile canonice : H = hamiltoniana)

$$\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}; \quad \frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t} = +\frac{\partial H}{\partial p_k}; \tag{1.12}$$

se obţine :

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{K}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial t} + [H, \mathfrak{K}]. \tag{1.13}$$

Din (1.9) şi din definiţia operatorului derivat în raport cu timpul (1.10) (mediind această expresie) se ajunge la regula : *derivata în raport cu timpul a unei valori medii este egală cu valoarea medie a derivatei în raport cu timpul*, ceea ce permite stabilirea de analogii cu domeniul clasic.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overline{L}) = \frac{\overline{\mathrm{d}L}}{\mathrm{d}t} = \int \Psi^* \frac{\mathrm{d}\hat{L}}{\mathrm{d}t} \Psi \, \mathrm{d}x}. \tag{1.14}$$

Corespondenţa clasic-cuantic se manifestă foarte pregnant scriind ecuaţia de mişcare în mecanica clasică şi în cea cuantică, adică legile de variaţie în timp ale impulsului şi coordonatelor, mărimi care nu depind explicit de timp (ele fiind coordonate ale mişcării).

Mişcarea este descrisă de hamiltonianul

$$\hat{H} = \hat{H}(\hat{P}_x, \hat{P}_y, \hat{P}_z, \hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}, t) \tag{1.15}$$

iar derivatele în timp sînt $\frac{\mathrm{d}\hat{X}}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}\hat{Y}}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}\hat{Z}}{\mathrm{d}t}$ (operatorii vitezelor) şi $\frac{\mathrm{d}\hat{P}_x}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}\hat{P}_y}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}\hat{P}_z}{\mathrm{d}t}$ (care sînt proporţionali cu acceleraţiile). Ecuaţia operatorială de mişcare arată derivarea în timp a acestor mărimi. Conform cu (1.10), în care $\hat{L}$ este acum $\hat{X}$ şi $\hat{P}$, se obţin ecuaţiile cuantice de mişcare

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d\hat{X}}{dt} = [\hat{H}, \hat{X}]\,; \quad \frac{d\hat{Y}}{dt} = [\hat{H}, \hat{Y}]\,; \quad \frac{d\hat{Z}}{dt} = [\hat{H}, \hat{Z}] && (1.16)\\ &\frac{d\hat{P}_x}{dt} = [\hat{H}, \hat{P}_x]\,; \quad \frac{d\hat{P}_y}{dt} = [\hat{H}, \hat{P}_y]\,; \quad \frac{d\hat{P}_z}{dt} = [\hat{H}, \hat{P}_z] && (1.17) \end{aligned}}$$

Aceste ecuaţii sînt perfect analoage ecuaţiilor clasice, numai că ele sînt prezentate operatorial (principiul de corespondenţă). Ecuaţiile clasice sînt precum se ştie :

$$\frac{dq_k}{dt} = [H, q_k]\,; \quad k = 1, 2, 3, \ldots f \text{ (nr. gradelor de libertate).} \tag{1.18}$$

$$\frac{dp_k}{dt} = [H, p_k]\,; \tag{1.19}$$

Scriind hamiltoniana unui punct material cu energia potenţială U

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U\,(x, y\ z), \tag{1.20}$$

avem

$$\frac{dp_x}{dt} = [H, p_x] = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}\,; \quad \frac{dx}{dt} = [H, x] = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \tag{1.21}$$

adică de fapt ecuaţia lui Newton.

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{m d^2 x}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x\,; \text{ etc.} && (1.22)\\ &m\,V_x = p_x \qquad\qquad ; \text{ etc.} && (1.23) \end{aligned}}$$

În felul acesta am găsit o anumită corespondenţă în privinţa ecuaţiilor care descriu evoluţia mobilului cuantic (ecuaţia lui Schrödinger) şi clasic (ecuaţia lui Newton, sau cele ale lui Hamilton).

În mecanica clasică, ecuaţiile cu derivate ale coordonatelor dădeau legătura dintre viteze şi impuls, iar al doilea grup de ecuaţii (derivarea impulsului) conduceau la forţe. Aceeaşi semnificaţie o au şi ecuaţiile cuantice ale lui Hamilton. Operatorii de coordonată şi de impuls sînt :

$$\hat{X} = x\cdot \quad ; \quad \hat{Y} = y\cdot \quad ; \quad \hat{Z} - z\cdot\,; \tag{1.24}$$

$$\hat{P}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\,; \quad \hat{P}_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\,; \quad \hat{P}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}. \tag{1.25}$$

Ei satisfac relaţia de comutare =

$$(1.26)\qquad x\hat{P}_x - \hat{P}_x\hat{x} = i\hbar \quad ; \quad \text{etc.} \quad ; \quad x\hat{P}_y - \hat{P}_y X = 0$$

ceea ce arată că nu se poate măsura simultan x şi p_x; în schimb caracterul dual al mişcării permite măsurarea lui x şi a lui p_y în acelaşi timp.

Operatorul vitezei trebuie calculat în lungul mişcării descrise de hamiltonianul similar funcţiei clasice:

$$(1.27)\qquad \hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2 + \hat{P}_z^2) + \hat{U}(X, Y, Z, t).$$

Rămîne de efectuat mai departe paranteza Poisson, ţinînd seama de comutările dintre coordonate şi impulsuri

$$(1.28)\qquad \frac{\mathrm{d}\hat{X}}{\mathrm{d}t} = [\hat{H}, \hat{X}] = \frac{1}{i\hbar}[\hat{X}\hat{H} - \hat{H}\hat{X}] = \frac{1}{2mi\hbar}[\hat{X}\hat{P}_x^2 - \hat{P}_x^2\hat{X}] = \frac{1}{m}\hat{P}_x.$$

Aşadar legătura cuantică între operatorii vitezei şi ai impulsurilor este aceeaşi ca şi în mecanica clasică, numai că mărimile intervin prin operatori acţionînd asupra funcţiei de undă:

$$(1.29)\qquad \boxed{\hat{V}_x \equiv \frac{\mathrm{d}\hat{X}}{\mathrm{d}t} = \frac{\hat{P}_x}{m}} \quad \text{etc.}$$

Derivata în timp a impulsului redă clasic forţa; cuantic trebuie să se obţină un rezultat analog. Trebuie deci calculat $\mathrm{d}\hat{P}_x/\mathrm{d}t$ în lungul mişcării, adică paranteza cuantică Poisson. $\hat{H}$ este (1.27) iar $U(x)$ din structura lui $\hat{H}$ este o funcţie de coordonate (energia potenţială) şi ca atare comută cu $\hat{P}_x$ după regula:

$$(1.30)\qquad U\hat{P}_x - \hat{P}_x U = i\hbar\frac{\partial U}{\partial x}\cdot$$

Paranteza cuantică Poisson este

$$(1.31)\qquad [\hat{H}, \hat{P}_x] = \frac{1}{i\hbar}(\hat{P}_x U - \hat{U}\hat{P}_x) = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x$$

adică

$$(1.32)\qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}\hat{P}_x}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial\hat{U}}{\partial x}; \quad \frac{\mathrm{d}\hat{P}_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\hat{U}}{\partial y}; \quad \frac{\mathrm{d}\hat{P}_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\hat{U}}{\partial z}}$$

gradientul potențialului fiind forța F. Astfel există *o ecuație a lui Newton cuantică, operațională* :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\hat{P}_x}{\mathrm{d}t} = \hat{F}_x \; ; \quad \frac{\mathrm{d}\hat{P}_y}{\mathrm{d}t} = \hat{F}_y \; ; \quad \frac{\mathrm{d}\hat{P}_z}{\mathrm{d}t} = \hat{F}_2} . \tag{1.33}$$

Corespondența clasic-cuantic poate fi evidențiată și în privința valorilor medii. Trebuie calculate valorile medii ale vitezelor și forțelor într-o stare oarecare, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t}$. (Media derivatei față de timp este derivata față de timp a mediei

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\overline{\mathrm{d}X}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{x}) = \frac{1}{m}\bar{p}_x \text{ etc.} && (1.34)\\ &\frac{\overline{\mathrm{d}p_x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{p}_x) = -\frac{\overline{\partial U}}{\partial x} = \bar{F}_x \text{etc.}). && (1.35)\end{aligned}}$$

Fizic acest lucru se traduce astfel : *derivata în raport cu timpul a coordonatei medii* $\bar{x}$ *(adică viteza medie) este egală cu impulsul mediu (împărțit cu masa). Iar derivata impulsului mediu* $\bar{p}_x$ *este egală cu forța medie* $\bar{F}_x$. *Atunci din aceste* rezultate (1.34—35), eliminînd impulsul mediu $\bar{p}_x$ prin derivarea primei ecuații, care-l conține, se obține legătura dintre variația coordonatei medii în timp și forța medie :

$$\boxed{m\frac{\overline{\mathrm{d}^2x}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\overline{\partial U}}{\partial x} = \bar{F}_x .} \tag{1.36}$$

Aceasta este ecuația lui Newton, exprimată ca în mecanica clasică : ea, afirmă că *produsul dintre masa și accelerația medie* $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\bar{X}) = \frac{\overline{\mathrm{d}^2x}}{\mathrm{d}t^2}$ *este forța medie.*

Aceste rezultate care reflectă corespondența clasic-cuantic în privința valorii medii, alcătuiesc conținutul *teoremelor lui Ehrenfest.* Trebuie subliniat că aceste medii se calculează după principiile mecanicii cuantice și depind ca atare de starea cuantică Ψ. Mediile din (1.34) și (1.35), adică derivata coordonatei medii și a impulsului mediu înseamnă în detaliu :

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \Psi^{*} x \, \Psi \, (\mathrm{d}x) = \frac{1}{m}\int \Psi^{*}.\hat{P}_x \, \Psi \, (\mathrm{d}x) && (1.37)\\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \Psi^{*}\cdot \hat{P}_x \Psi \, (\mathrm{d}x) = -\int \Psi^{*} \frac{\partial U}{\partial x} \, \Psi \, (\mathrm{d}x) && (1.38)\end{aligned}}$$

II. CONSERVAREA MĂRIMILOR DE MIŞCARE

Deosebit de importante atît în mecanica clasică cît şi în cea cuantică *sînt mărimile care se conservă în lungul mişcării* : integralele prime ale mişcării. (În mecanica clasică, teorema energiei, a impulsului, a momentului cinetic se deduceau din legea de mişcare; din ecuaţia newtoniană). În mecanica cuantică, atîta vreme cît este vorba de mişcarea centrului de greutate al microparticulei (nu şi de spin), *analogia clasic-cuantic, se manifestă prin aceea că există aceleaşi integrale prime ale mişcării : aceleaşi legi de conservare, pentru aceleaşi mărimi (date operaţional).*

Condiţia de conservare presupune de la început că mărimile nu depind explicit de timp (nu sînt disipative) :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0. \tag{2.1}$$

Conservarea ın lungul mişcării se exprimă atunci prin anularea parantezei Poisson (cuantice)

$$\frac{\mathrm{d}\hat{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \hat{L}}{\partial t} + [\hat{H}, \hat{L}] = 0 \rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\hat{L}}{\mathrm{d}t} = [\hat{H}, \hat{L}] = 0} \tag{2.2}$$

Adică în esenţă $\hat{L}$ şi $\hat{H}$ sînt mărimi comutative, prin urmare simultan măsurabile, ceea ce constituie o caracteristică proprie numai „lumii cuantice"

$$[\hat{H}, \hat{L}] = \frac{1}{i\hbar}[\hat{L}\hat{H} - \hat{H}\hat{L}] = 0. \tag{2.3}$$

Stările Ψ care descriu mărimile $\hat{L}$ şi $\hat{H}$ sînt funcţiile proprii ale ecuaţiilor caracteristice, care dau şi valorile proprii ale mărimilor respective :

$$\hat{L}\,\Psi_n = L_n\,\Psi_n \tag{2.4}$$

$$\hat{H}\,\Psi_n = E_n\,\Psi_n \tag{2.5}$$

Întrucît $\hat{L}$ şi $\hat{H}$ comută, aceşti doi operatori au aceleaşi funcţii proprii şi de aceea le-am notat similar cu Ψ_n. Aceste funcţii arbitrare descriu stări staţionare, cu energie determinată (neschimbată în cursul mişcării). Este valabil principiul cuantic de suprapunere :

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \sum_n C_n(t)\,\Psi_n(x) = \sum_n C_n \cdot \Psi_n(x)\,\mathrm{e}^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} = \\ &= \sum_n \left(C_n(0)\,\mathrm{e}^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}\right)\Psi_n(x) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dezvoltarea (2.6) este dezvoltarea lui Ψ (x, t) după funcţiile proprii ale operatorului $\hat{L}$, deci coeficienţii C_n (t) reprezintă probabilitatea ca la o măsurare să se obţină tocmai valorile L_n

$$\boxed{W\,(L_n\, t) = |\,C_n\,(t)\,|^2 = |\,C_n\,(0)\,|^2 = \text{const.}} \tag{2.7}$$

Probabilitatea de a găsi la momentul t o valoare oarecare a integralei este deci staţionară. Nici valoarea mediei nu depinde de timp, căci din (1.7) pe care-l transcriem încă odată în (2.8)

$$\frac{\mathrm{d}\overline{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \overline{L}}{\partial t} + \frac{1}{ih}\int \Psi^*\,(\hat{L}\hat{H} - \hat{H}\hat{L})\,\Psi\,\mathrm{d}x \tag{2.8}$$

rezultă că

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overline{L}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad ; \quad \overline{L} = \text{const.}} \tag{2.9}$$

întrucît ambii termeni sînt nuli (mărimea nu depinde explicit de timp; în plus ea este staţionară : comutatorul nul).

Pentru mişcarea liberă, ca şi în cazul clasic, impulsul este o integrală primă :

$$\hat{H} = \hat{T} = \frac{1}{2m}\,(\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2 + \hat{P}_z^2)\,; \quad P_x = -\,i\hbar\,\frac{\partial}{\partial x}\ \text{etc.} \tag{2.10}$$

$$H = T = \frac{1}{2m}\,(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \tag{2.11}$$

$$[\hat{H}, \hat{P}_x] = 0\ \text{etc.} \tag{2.12}$$

$$[H, p_x] = 0\ \text{etc.} \tag{2.13}$$

În cîmpul forţelor centrale (coulombian, de exemplu) *se conservă momentul impulsului* : are loc legea ariilor tipică cîmpurilor centrale.

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{U}\,(r) = \frac{1}{2m}\,(\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2 + \hat{P}_z^2) + U\,(r) = -\,\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla + U. \tag{2.14}$$

Operatorul laplacean ca şi funcţia de undă sînt date în coordonate sferice Ψ $(r,\ \theta,\ \varphi)$ proprii cîmpului central :

$$\nabla = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\,\nabla_{\theta\varphi} \tag{2.15}$$

$$\Delta_{\theta\varphi} = \frac{1}{\sin\,\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\ \theta\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\,\theta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\,. \tag{2.16}$$

Operatorul momentului cinetic este

$$\hat{\vec{\mathscr{M}}}^2 = \hbar^2\nabla_{\theta\varphi}. \tag{2.17}$$

Atunci operatorul energiei cinetice este alcătuit dintr-un termen unghiular (cuprinzînd pe $\hat{\mathscr{M}}^2$) şi din termenul radial :

$$\hat{T}_r = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]. \tag{2.18}$$

$\hat{T}_r$ = operatorul energiei cinetice a mişcării radiale.

Operatorul $\hat{T}'$ care intervine în (2.14) este energia cinetică a mişcării transversale :

$$\hat{T} = \hat{T}_r + \frac{\hat{\mathscr{M}}^2}{2mr^2} \tag{2.19}$$

$$T = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\mathscr{M}^2}{2mr^2}. \tag{2.20}$$

Clasic, reprezentarea energiei este identică : p_r este impulsul pe raza vectoare (2.20). Operatorul $\hat{H}$ al mişcării centrale este prin urmare similar

$$\hat{H} = \hat{T}_r + \frac{\hat{\mathscr{M}}^2}{2mr^2} + \hat{U}(r) \tag{2.21}$$

$$H = T_r + \frac{\mathscr{M}^2}{2mr^2} + U(r) \tag{2.22}$$

Operatorul $\vec{M}^2$, ca şi proiecţiile lui $\hat{\mathscr{M}}_x$, $\hat{\mathscr{M}}_y$, $\hat{\mathscr{M}}_z$ depind numai de unghiuri, de aceea nu acţionează cu operatorul radial (în plus $\hat{\vec{\mathscr{M}}}^2$ comută cu componentele sale ; ele sînt în consecinţă simultan măsurabile). De aceea are loc comutarea (*adică conservarea*) : $\hat{H}$ cu $\hat{M}^2$ şi $\hat{M}_x$ (ca şi cu $\hat{M}_y$, $\hat{M}_z$) :

$$[\hat{H}, \hat{M}^2] = 0 ; \frac{d\hat{M}^2}{dt} = 0 \tag{2.23}$$

$$[\hat{H}, \hat{M}_x] = [\hat{H}, \hat{M}_y] = [\hat{H}\ \hat{M}_z] = 0 \tag{2.24}$$

$$\frac{d\hat{M}_x}{dt} = 0 \quad ; \text{ etc.} \tag{2.25}$$

Clasic rezultatul este bine cunoscut, anume : calculînd paranteza Poisson $[\hat{H}, M]$ în coordonate sferice se obţine [2]

$$[H, M_x] = \frac{-\partial U}{\partial\varphi}. \tag{2.26}$$

În cîmpul central are loc anularea membrului drept (U, nu depinde de φ) :

$$[H, M_x] = [H, M_y] = [H, M_z] = 0. \tag{2.27}$$

Legea de conservare a energiei de mișcare se traduce prin păstrarea hamiltonianului în cîmpul unor forțe independente de timp (un cîmp conservativ, care nu radiază, nu disipează, nu produce tranziții cu stări virtuale)

$$\frac{\mathrm{d}\hat{H}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} + [\hat{H}, \hat{H}] = \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} \tag{2.28}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{H}}{\mathrm{d}t} = 0\,; \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{2.29}$$

Clasic acest lucru se vede dintr-odată din chiar forma parantezelor Poisson (1.13). Astfel este formulată în limbaj analitic *legea de conservare a energiei și în mecanica cuantică : atît valoarea medie a energiei $\overline{E}$, cît și valorile individuale posibile E_n nu depind de timp*. Este locul aici a reaminti că însăși construcția operatorilor mecanicii cuantice, s-a făcut pornind de la mărimile clasice și operaționalizîndu-le corespunzător (hamiltonian, impuls, moment cinetic ; nu însă și spinul, operator nou sui generis ; de asemenea nici paritatea funcției de undă). *Sensul legii de conservare a energiei în procesele cuantice de interacție este însă mai complicat ca în mecanica clasică, întrucît trebuie făcută analiza interacției între microobiect și aparat și atunci t și E nu sînt simultan măsurabile, ci supuse unei relații de nedeterminare (procese virtuale legate de durata interacției)*. Corespondența dintre mărimile clasice și operatorii cuantici s-a dovedit a fi deopotrivă utilă și profundă. De aceea în orice teorie cuantică se construiesc mărimile dinamice (urmînd, în măsura în care natura procesului permite, o analogie cu cazul clasic), *pornind de la o mărime clasică și apoi operaționalizînd-o*. (De pildă energie de interacție sau relația energie-impuls din mecanica cîmpurilor relativiste). Așa operaționalizate, *mărimile de origine clasică* (a căror legătură înterparametrică este păstrată în forma ei clasică) devin cuantice : *sînt operatori acționînd asupra funcției de undă*, funcție care rămîne caracteristica tipic cuantică a oricărui microobiect sau sistem de microparticule.

III. CORESPONDENȚA DINTRE MECANICA CUANTICĂ ȘI MECANICA NEWTONIANĂ

Corespondența dintre mecanica clasică și cea cuantică a îndreptățit afirmația potrivit căreia *valoarea medie a coordonatei unei microparticule aflate în starea cuantică Ψ (x, t), se supune unei ecuații care prezintă anumite asemănări cu ecuația lui Newton și poate fi numită ecuația cuantică a lui Newton (1.36)*

$$\boxed{m\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\overline{x}) = -\,\frac{\overline{\partial U}}{\mathrm{d}x}(x)} \tag{3.1}$$

Intrucît urmărim aici a vedea în *ce cazuri mişcarea clasică duce la o comportare care nu contrazice teoria cuantică, trebuie să admitem* (*aşa cum s-a făcut mereu la începuturile mecanicii ondulatorii*), *că microparticula reprezintă cuantic un „pachet de unde”. Mai riguros vorbind, funcţia de undă, ca s-o putem compara cu mişcarea particulei care este un concentrat de materie, se consideră diferită de zero numai într-o regiune foarte mică a spaţiului* Δx, *fiind în rest infimă. Mişcarea clasică s-ar referi oarecum la deplasarea acestui „vîrf” al pachetului de unde* (*aproape „delta-form”*) *şi corespondenţa cu regimul newtonian s-ar putea realiza eventual dacă pachetul şi-ar păstra mereu forma* (*nu s-ar destrăma cu timpul*) *ceea ce după cum se ştie se întîmplă de regulă.*

Mişcarea centrului de greutate $\bar{x}$ al pachetului se calculează cuantic, aşa că reducînd mişcarea la o singură dimensiune avem

$$\bar{x} = \int \Psi^* x \Psi \mathrm{d}x. \tag{3.2}$$

Abaterea coordonatei de la valoarea medie $(x - \bar{x})$ şi mai ales abaterea medie pătratică $(x - \bar{x})^2$, indică *forma extensivă a pachetului.* Media abaterilor simple (care este evident zero) şi abaterea medie pătratică se calculează conform cu semnificaţiile funcţiei de undă (pachetul).

$$\int \Psi^* \Psi \,\mathrm{d}x = 1 \tag{3.3}$$

$$\int \Psi^* (x - \bar{x}) \Psi \,\mathrm{d}x = 0 \tag{3.4}$$

$$\int \Psi^* (x - \bar{x})^2 \Psi \,\mathrm{d}x \equiv \overline{\Delta x^2}. \tag{3.5}$$

Evoluţia în timp a centrului pachetului $\bar{x}\,(t)$ se supune ecuaţiei cuantice a lui Newton (3.1).

Mişcarea unui punct material în cîmpul U ascultă de legea lui Newton scrisă pentru o dimensiune

$$m \frac{\mathrm{d}^2 \bar{\bar{x}}}{\mathrm{d}t^2} = - \frac{\partial U(\bar{\bar{x}})}{\partial \bar{\bar{x}}}. \tag{3.6}$$

Dacă urmărim o corespondenţă clasic-cuantic, atunci centrul de greutate al pachetului de unde $\bar{x}$ trebuie să coincidă cu centrul de greutate al particulei, adică $\bar{x}$ trebuie identificat cu $\bar{\bar{x}}$ şi mişcarea corpusculară este

$$\boxed{m \frac{\mathrm{d}^2 (\bar{x})}{\mathrm{d}t^2} = - \frac{\partial U(\bar{x})}{\partial \bar{x}}} \tag{3.7}$$

care este tocmai ecuaţia lui Newton.

Coincidenţa dintre ecuaţia lui Newton (propriu-zisă (3.7) *şi cea cuantică* (3.1) *nu are loc în general.* Mişcarea centrului de greutate al pachetului ar reproduce mişcarea unui punct material clasic în cîmpul $U(x)$ dacă

$$\frac{d\overline{U}}{dx} = \frac{\partial U(\overline{x})}{\partial x}. \tag{3.8}$$

Această egalitate nu are loc în general, ea este valabilă numai pentru anumite cîmpuri, dintre care unele au o structură simplă şi remarcabilă şi au fost folosite în montajele unor experienţe consacrate. Ne propunem a determina aceste cîmpuri. Pentru ele, forţa medie este forţa aplicată mediei coordonatei.

Pentru a găsi forma cîmpurilor al căror gradient mediu este gradientul valorii medii, trebuie să apelăm la sensul fizic al valorii medii a forţei (bineînţeles după mecanica cuantică):

$$F_x \equiv \frac{-\overline{\partial U}}{\partial x} = -\int \Psi^* \frac{\partial U}{\partial x} \Psi \, dx. \tag{3.9}$$

Vom dezvolta forţa F_x în serie, în jurul valorii medii $\overline{x}$ (adică o dezvoltare tayloriană după puterile lui $\xi = x - \overline{x}$; ξ fiind abaterea coordonatei de la valoarea medie; ea este o mărime mică). Coordonata curentă x este suma dintre coordonata centrului şi abaterea $x = \overline{x} + \xi$ (fig. 1)

$$\frac{-\overline{\partial U}}{\partial x} = -\int \Psi^*(\overline{x}+\xi) \cdot \frac{\partial U(\overline{x}+\xi)}{\partial \xi} \cdot \Psi(x+\xi) d\xi \cdot \tag{3.10}$$

Dezvoltarea lui Taylor

$$f(\overline{x}+\xi) = f(\overline{x}) + \frac{\xi}{1!}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right)_{x=\overline{x}} + \frac{\xi^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\right)_{x=\overline{x}} + \cdots \tag{3.11}$$

ne conduce aici la

$$\frac{\partial U}{\partial x} \equiv \frac{\partial U(\overline{x}+\xi)}{\partial x} = \left(\frac{\partial U(x)}{\partial x}\right)_{x=\overline{x}} + \frac{\xi}{1!}\left(\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2}\right)_{x=\overline{x}} + \\ + \frac{\xi^2}{2!}\left(\frac{\partial^3 U(x)}{\partial x^3}\right)_{x=\overline{x}} + \cdots. \tag{3.12}$$

Atunci (3.10) este, limitîndu-ne la termenii pătratici:

$$\frac{-\overline{\partial U}}{\partial x} = -\int \Psi^*(\overline{x}+\xi)\left[\left(\frac{\partial U(\overline{x})}{\partial \overline{x}}\right) + \frac{\xi}{1!}\left(\frac{\partial^2 U(\overline{x})}{\partial \overline{x}^2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{\xi^2}{2!}\left(\frac{\partial^3 U(\overline{x})}{\partial \overline{x}^3}\right)\right] \Psi(\overline{x}+\xi) d\xi = -\int \Psi^*(\overline{x}+\xi)\left[\frac{\partial U(\overline{x})}{\partial \overline{x}}\right]\Psi(\overline{x}+\xi)\, d\xi - \\ -\int \Psi^*(\overline{x}+\xi)\left[\frac{\partial^2 U(\overline{x})}{\partial \overline{x}^2}\right] \cdot \frac{\xi}{1!}\Psi(\overline{x}+\xi)\, d\xi - \int \Psi^*(\overline{x}+\xi)\left[\frac{\partial^3 U(\overline{x})}{\partial \overline{x}^3}\right]\frac{\xi^2}{2!}\Psi(\overline{x}+\xi). \tag{3.13}$$

Să evaluăm cele trei integrale. La un moment dat t, $\overline{x}$ are o poziţie bine determinată (o fotografie instantanee a pachetului) şi variabila care intervine în funcţia de undă $\Psi\ (t = 0;\ \xi)$ este abaterea ξ. Parantezele mari sînt constante şi indică forţa şi gradientul forţei, adică gradul de neomogeneitate al cîmpului în centrul pachetului:

$$I_1 = -\left[\frac{\partial U(\bar{x})}{\partial \bar{x}}\right]\cdot\int \Psi^*\Psi\,\mathrm{d}\xi = -\left[\frac{\partial U(\bar{x})}{\partial \bar{x}}\right] \tag{3.14}$$

$$I_2 = -\left[\frac{\partial^2 U(\bar{x})}{\partial^2 \bar{x}^2}\right]\cdot\int \Psi^*\,\xi\,\Psi\,\mathrm{d}\xi = \tag{3.15}$$

$$= -\left[\frac{\partial^2 U(\bar{x})}{\partial^2 \bar{x}^2}\right]\cdot\int \Psi^*(x)\,(x-\bar{x})\,\Psi(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$I_3 = -\left[\frac{\partial^3 U(\bar{x})}{\partial \bar{x}^3}\right]\cdot\int \Psi^*\,\xi^2\,\Psi\,\mathrm{d}\xi = \tag{3.16}$$

$$= -\left[\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right]\cdot\int \Psi^*\,(x-\bar{x})^2\,\Psi\,\mathrm{d}x \equiv -\left[\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right]\overline{\Delta x^2}.$$

Am folosit înţelesurile statistice ale funcţiei de undă, aşa încît oprim dezvoltarea la termenii pătratici ai abaterii medii

$$-\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} = -\left[\frac{\partial U(\bar{x})}{\partial \bar{x}}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^3 U(\bar{x})}{\partial \bar{x}^3}\right]\overline{\Delta x^2} + \cdots \tag{3.17}$$

Dacă cîmpul $U(x)$ variază lent în regiunea unde $\Psi^2 \neq 0$, deci în jurul lui $\bar{x}$, atunci $U(x) \simeq U(\xi)$ şi cu atît mai mult derivatele de ordinul întîi şi trei. Putem scrie pentru momentul $t = 0$, o dezvoltare referitoare

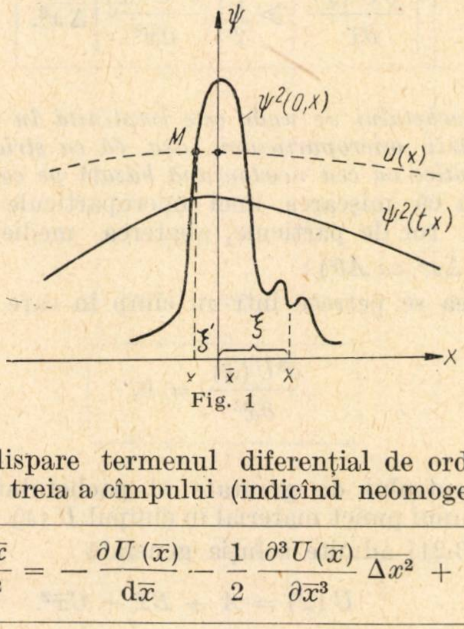


Fig. 1

la $U(\bar{x})$, în care dispare termenul diferenţial de ordinul doi şi apare forţa şi derivata a treia a cîmpului (indicînd neomogeneitatea acestuia).

$$\boxed{m\,\frac{\mathrm{d}^2\bar{x}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial U(\bar{x})}{\mathrm{d}\bar{x}} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^3 U(\bar{x})}{\partial \bar{x}^3}\,\overline{\Delta x^2} + \cdots} \tag{3.18}$$

Astfel se prezintă *legea de mişcare a centrului pachetului de undă.* Se vede bine că *ea nu coincide în general cu mişcarea newtoniană a punctului* $\overline{x}$. Ce factori o perturbă? Pe deoparte $\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}$ şi desigur derivatele superioare neglijate (cîmpuri rapid variabile în spaţiu; *intens neomogene*), pe de altă parte $\overline{\Delta x^2}$, abaterea pătratică medie, adică fizic *destrămarea pachetului* de unde. Să discutăm pe rînd aceşti doi factori.

La cîmpuri suficient de lent variabile în spaţiu, pentru un pachet care ar fi mereu suficient de strîns ($\overline{\Delta x^2} \simeq 0$), centrul de greutate s-ar mişca newtonian:

$$m\frac{\mathrm{d}^2\overline{x}}{\mathrm{d}t^2} \approx -\frac{\partial U(\overline{x})}{\partial \overline{x}}; \quad \overline{\Delta x^2} \simeq 0. \tag{3.19}$$

Condiţia se referă la situaţia în care putem neglija în (3.18) lărgirea $\overline{\Delta x^2}$ şi puterile superioare ale ei. În general acest lucru nu se îndeplineşte, căci $\overline{\Delta x^2}$ se schimbă o dată cu timpul; este binecunoscută *destrămarea pachetului.* De aceea chiar dacă cerinţa (3.19) este satisfăcută iniţial, ea poate fi încălcată de la un anumit moment t suficient de apropiat.

Cînd este valabilă identificarea făcută? Pe deoparte la cîmpuri foarte lente $\left|\frac{\partial^3 U}{\partial \overline{x}^3}\right| \simeq 0$, pe de altă parte pentru intervale mici de timp pentru care lăţimea dispersiei coordonatelor se neglijează $\Delta x^2 \simeq 0$. Condiţia se scrie:

$$\boxed{\left|\frac{\partial U(\overline{x})}{\partial \overline{x}}\right| \geqslant \frac{1}{2}\left|\frac{\partial^3 U(\overline{x})}{\partial \overline{x}^3}\right| \overline{\Delta x^2}.} \tag{3.20}$$

Dar destrămarea pachetului de unde este împlinită în mod principial prin însăşi actul mişcării microparticulei, aşa că ea strică în general coincidenţa mişcării cuantice cu cea newtoniană bazată pe conceptul de traiectorie (bunăoară se arată că mişcarea unei microparticule libere coincide cu împrăştierea unui roi de particule, abaterea medie pătratică crescînd proporţional cu t^2; $\overline{\Delta x^2}_t \simeq At^2$):

Dacă mişcarea se petrece într-un cîmp în care mereu

$$\boxed{\frac{\partial^3 U(\overline{x})}{\partial \overline{x}^3} = 0,} \tag{3.21}$$

atunci mişcarea centrului de greutate al pachetului coincide exact cu mişcarea clasică a unui punct material în cîmpul $U(x)$.

Or ecuaţia (3.21) admite soluţia generală

$$U(\overline{x}) = A + B\overline{x} + C\overline{x}^2. \tag{3.22}$$

Deci coinciderea are loc pentru un cîmp clasic de forţe de forma

$$\boxed{U(x) = A + Bx + Cx^2.} \tag{3.23}$$

Forţele acestui cîmp sînt

$$\boxed{\mathcal{F} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -B - CX.} \tag{3.24}$$

Din această clasă de forţe fac parte : *mişcarea liberă*, *mişcarea în cîmp omogen şi cea în cîmpul forţelor cvazielastice* (oscilatorul armonic) precum şi alte cazuri (mişcarea în cîmp magnetic omogen duce la aceleaşi rezultate ca pentru cazul oscilatorului)

$$\mathcal{F} = 0\,;\ U = -A\,;\ \mathcal{F} = -B\,;\ U = A + Bx\,;\ \mathcal{F} = -2Cx\,;\ U = Cx^2. \tag{3.25}$$

Ele corespund unor situaţii importante folosite în experienţele şi în modelele teoretice clasice (de exemplu oscilatorul care descrie mişcarea periodică a celui mai simplu radiator ; sau mişcarea electronului în cîmp constant care a permis determinarea sarcinei specifice e/m). Astfel dacă pachetul poate fi luat îngust, atunci în mecanica cuantică energia potenţială medie este practic egală cu energia punctului material din centrul pachetului

$$\overline{U} = \int \Psi^* U \Psi \, \mathrm{d}x \simeq U(\overline{x}). \tag{3.26}$$

O analiză a mişcării în asemenea cazuri permite să se înţeleagă unele trăsături ale mişcării care au putut primi o explicaţie satisfăcătoare şi în fizica precuantică.

Discuţia asupra condiţiilor de coincidenţă dintre mişcarea clasică şi cea newtoniană nu este închisă încă, căci nici îndeplinirea inegalităţii (3.20) nu înseamnă coincidenţa cu mişcarea clasică. Într-adevăr, *dacă energia potenţială medie coincide cu energia în punctul mediu* (3.26), *nu se poate spune acelaşi lucru pentru energia cinetică T care nu este simultan măsurabilă cu coordonata ca în mecanica clasică*

$$T = \frac{p^2}{2m}. \tag{3.27}$$

Cuantic trebuie evaluată media acesteia

$$\overline{T} = \frac{1}{2m} \cdot \overline{p^2} \tag{3.28}$$

or din definiţia abaterii medii pătratice

$$\overline{\Delta p^2} \equiv \overline{p^2} - \overline{p}^2 \tag{3.29}$$

avem

$$\overline{p^2} = \overline{\Delta p^2} + \overline{p}^2 \tag{3.30}$$

încît media căutată este

$$\overline{T}=\frac{\overline{\Delta p^2}}{2m}+\frac{\overline{p}^2}{2m}. \tag{3.31}$$

Al doilea termen se referă la media impulsului, deci la impulsul particulei clasice. Primul termen este eminamente cuantic și se referă la abaterea medie pătratică a impulsului de la valoarea medie (clasică). *Iar această abatere nu poate fi făcută oricît de mică.* Ea nu este simultan măsurabilă cu cea a poziției conform inegalității lui Heisenberg

$$\overline{\Delta p^2} \geqslant \frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{\overline{\Delta X^2}} : \tag{3.32}$$

De aceea primul termen cuantic (3.31) poate deveni mult mai mare decît energia clasică a particulei care se mișcă cu impulsul $\overline{p}$, tocmai la o limitare $\overline{\Delta X^2}$, strînsă. Termenul cuantic poate fi neglijat dacă

$$\frac{\overline{p}^2}{2m} \gg \frac{\overline{\Delta p^2}}{2m} \tag{3.33}$$

sau

$$\overline{p}^2 \gg \frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{\overline{\Delta x^2}} \tag{3.34}$$

($\hbar^2$ este foarte mic deși $\overline{\Delta x^2}$ de asemenea este mic). Dacă mișcarea clasică este rapidă, $\overline{p}$ este mare și cu atît mai mult este $\overline{p}^2$. Satisfacerea simultană a inegalităților (3.20 — 3.34) pe care le putem numi *condiții de clasicitate*, în intervalul t, permite o descriere clasică

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial U(\overline{x})}{\partial \overline{x}} \gg \frac{1}{2}\left|\frac{\partial^3 U(X)}{\Delta \overline{x}^3}\right| \overline{\Delta x^2}\\ \overline{p}^2 \gg \frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{\overline{\Delta x^2}}\end{gathered}}\;. \tag{3.35}$$

Ea este realizată în cîmpuri lente și la energii mari ale microparticulei, cînd aspectul ondulatoriu nu are „timp" suficient să-și manifeste existența.

Nu am putea afirma totuși că la orice microparticulă cu energie suficient de mare, și deci cu o lungime asociată $\lambda=\frac{h}{mv}$ mică, se poate aplica mecanica clasică, deoarece în analiza pe care am făcut-o nu am luat în nici-un fel în discuție mecanismul însuși al interacției microparticulei. Or acesta este cu precădere cuantic. *La creșterea energiei particulei apar procese de ciocnire neelastică (ionizări, excitări, fisiune, absorbție, frînare) care nu pot fi înțelese decît în lumina ideilor cuantice.*

Să ilustrăm pe cîteva exemple corespondența care se poate stabili între mecanica clasică și cea cuantică, în acele cazuri în care sînt îndeplinite „condițiile de clasicitate" (3.35).

1. Mişcarea liberă a microparticulei, căreia i-am asociat lungimea de undă de Broglie $\left(\lambda = \frac{h}{mv}\right.$, v fiind viteza iar h constanta lui Planck), nu se poate compara cu mişcarea unui corpuscul, decît cel mult la momentul iniţial, dacă atunci mişcarea microparticulei poate fi *bine reprezentată de un pachet de unde* (*un grup de unde cu un interval spectral limitat, în aşa fel încît practic intensitatea undelor asociate să fie diferită de zero într-un interval foarte restrîns din spaţiu*). *Se ştie că această interpretare intuitivă, mecanicistă, a particulei localizate în zona de intensitate mare a pachetului, a fost utilizată de fundatorii mecanicii ondulatorii tocmai pentru a putea concilia aspectul discontinuu* (*corpusculul localizat*) *cu cel continuu* (*undele extinse*). Asimilarea particulei în mişcare cu deplasarea centrului de greutate al pachetului era întărită şi de faptul binecunoscut că *viteza de grup a undelor din pachet* (*unde care ,,merg'' cu viteze diferite, unele rămînînd în urma celorlalte*) *coincidea în mod remarcabil cu viteza corpusculului* [3]

$$(3.36)\qquad \begin{gathered} V_{\text{grup}} \equiv \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}K}\right) = V_{\text{corpuscul}}\,;\quad U_{\text{fază}} = \frac{\omega}{K} \\ \left(\omega = \text{pulsaţia}\,;\ \lambda = \frac{2\pi}{|K|},\ \vec{K} = \text{vectorul de undă}\right). \end{gathered}$$

În realitate asimilarea nu poate avea loc pe tot întinsul mişcării, căci fasciculul se destramă, fotografia instantanee a fasciculului se schimbă, încît îşi pierde orice sens încercarea de a mai localiza ,,electronul'' în regiunea îngustă de maximă concentrare a pachetului de unde. Destrămarea pachetului în mişcarea liberă poate fi măsurată prin abaterea medie pătratică, adică prin media mărimii

$$(3.37)\qquad \Delta x^2 \equiv \overline{x^2} - \overline{x}^2,$$

$\overline{x}$ fiind coordonata centrului pachetului. Destrămarea Δx^2 a pachetului îşi face simţită prezenţa în (3.18); ultimul termen ne arată că mişcarea centrului de greutate $\overline{x}$ al pachetului nu se face după o lege clasică newtoniană (decît dacă în decursul timpului considerat $\overline{\Delta x^2} = 0$).

Pentru mişcarea liberă pe care o considerăm în acest exemplu, $U(\overline{x})$ fiind zero, ecuaţia (3.18) ne dă

$$(3.38)\qquad \frac{\mathrm{d}^2\overline{x}}{\mathrm{d}t^2} = 0 \rightarrow \frac{\mathrm{d}\overline{X}}{\mathrm{d}t} = \overline{V}\,;\quad \overline{x} = \overline{V}t + \overline{x}_0.$$

Prin urmare *centrul pachetului se mişcă inerţial, cu viteza* $\overline{v}$. Pachetul nu-şi păstrează însă forma şi această distorsionare este descrisă de derivata mărimii Δx^2 în raport cu timpul. Evaluarea acestei mărimi $\hat{L} = \Delta\hat{x}^2$ în lungul mişcării se face, după cele spuse mai înainte, prin intermediul formulei generale (2.2). În paranteza Poisson care intervine va trebui să folosim hamiltonianul microparticulei libere $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{P}^2$; $(\hat{P}^2$

fiind operatorul modulului impulsului), iar la efectuarea ei, condiția binecunoscută de comutare dintre operatorul impuls și cel al coordonatei

$$\hat{p}_x \hat{x} - \hat{x} \hat{p}_x = i\hbar \text{ etc.} \tag{3.39}$$

$$\hat{p}_y \hat{x} - \hat{x} \hat{p}_y = 0 \text{ etc.} \tag{3.40}$$

Atunci, din (3.37) :

$$\frac{\partial \Delta x^2}{\partial t^2} = \frac{\partial \overline{x}^2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}(\overline{x}^2) = -\frac{\mathrm{d}\overline{x}^2}{\mathrm{d}t}; \quad \frac{\partial^2 \Delta x^2}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\overline{x}^2). \tag{3.41}$$

„Viteza" destrămării va fi deci măsurată prin $\frac{\mathrm{d}\Delta x^2}{\mathrm{d}t}$, iar accelerația acestei dectrămări prin $\frac{\mathrm{d}^2\Delta x^2}{\mathrm{d}t^2}$ $\Big($vom considera $\frac{\partial}{\partial t}(\overline{x}^2) = 0$, întrucît pachetul nu-și schimbă simetria față de $\overline{X}\Big)$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\Delta} x^2}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \widehat{\Delta X}^2}{\partial t} + [\hat{H}, \widehat{\Delta x}^2] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overline{x}^2) + [\hat{H}, x^2] \tag{3.42}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\widehat{\Delta x}^2}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathrm{d}\widehat{\Delta x}^2}{\mathrm{d}t}\right) + \left[\hat{H}, \frac{\mathrm{d}\widehat{\Delta X}^2}{\mathrm{d}t}\right] = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\overline{x}^2) + \left[\hat{H}, \frac{\mathrm{d}\Delta \hat{x}^2}{\mathrm{d}t}\right]. \tag{3.43}$$

Calculul corespunzător al acestor paranteze Poisson (cuantice) [3] ne conduce la operatorii (înmulțitorii) $\frac{\mathrm{d}\Delta x^2}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}^2\Delta x^2}{\mathrm{d}t^2}$, care descriu viteza de destrămare și accelerația ei :

$$\frac{\mathrm{d}\Delta x^2}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overline{x}^2) + \frac{x\hat{p}_x + \hat{p}_x x}{m} \equiv \frac{x\hat{p}_x + \hat{p}_x x}{m} - 2\,\overline{v} \cdot \overline{x} \tag{3.44}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Delta x^2}{\mathrm{d}t^2} = \frac{-\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^2}(\overline{x}^2) + \left[\hat{H}, \frac{x\hat{p}_x + \hat{p}_x x}{m}\right] = \frac{-\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\overline{x}^2) + \frac{2\hat{p}^2}{m^2} \equiv \frac{2\hat{p}^2}{m^2} - 2\overline{v}^2 \tag{3.45}$$

$(-2\overline{v}\,\overline{x}$ este un număr așa că nu l-am introdus în ultima paranteză Poisson, unde ar fi dispărut). Să examinăm acum derivata de ordinul trei $\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}(\Delta x^2)$ și cele de ordin superior? Aceste derivate ale lui Δx^2, sînt toate egale cu zero, căci aplicînd ca mai înainte (2.2), adică aici $\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\Delta x^2}{\mathrm{d}t^2}\right), H\right]$, în calculul parantezelor Poisson avem de efectuat comutatorul lui $\frac{2\hat{p}^2}{m^2}$ (cel din (3.45)) și $\hat{H}$, operatori care fiind comutabili duc la un rezultat nul. Termenul $\frac{\partial^3\Delta x^2}{\partial t^3} = \frac{-\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2\overline{X}^2}{\mathrm{d}t^2}$ este de asemenea nul căci $\frac{d^2}{dt^2}(\overline{X^2}) = 2\,\overline{v}^2 = \text{const.}$ În felul acesta dezvoltarea operatorului $\widehat{\Delta x_t^2}$ în serie Taylor după puterile lui t se reduce la trei termeni (prima şi a doua derivată din dezvoltare vor fi (3.44) şi (3.45))

$$\widehat{\Delta x_t^2} = \widehat{\Delta x_0^2} + \left(\frac{d\Delta x^2}{dt}\right) t + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2\Delta x^2}{dt^2}\right) t^2 \equiv \widehat{\Delta x_0^2} + \tag{3.46}$$
$$+ \left(\frac{x\hat{p}_x + \hat{p}_x x}{m} - 2\,\overline{v}\,\overline{x}\right) t + \frac{1}{2!}\left(\frac{2\hat{p}^2}{m^2} - 2\overline{v}^2\right) t^2.$$

Astfel am obţinut operatorul abaterii pătratice, şi dependenţa acestuia cu timpul. Observăm că *el creşte cu timpul*. Trecînd de la operatori la valorile medii (adică pur şi simplu mediind toţi termenii) avem :

$$\overline{\Delta x_t^2} = \overline{\Delta x_0^2} + \left(\frac{\overline{xp_x + p_x x}}{m} - 2\overline{v}\,\overline{x}\right) t + \left(\frac{\overline{p^2}}{m^2} - \overline{V}^2\right) t^2. \tag{3.47}$$

Mărimea $\overline{\Delta x_t^2}$ este obligatoriu pozitivă, cum pozitivă este şi abaterea pătratică medie a vitezei $\overline{\Delta v^2}$, care, de asemenea apare în (3.47)

$$\overline{\Delta v^2} \equiv \overline{v^2} - \overline{v}^2 = \frac{\overline{p^2}}{m^2} - \overline{v}^2. \tag{3.48}$$

Fiind pozitivă, mărimea $\overline{\Delta x_t^2}$ creşte nemărginit o dată cu t, trecînd eventual printr-un minim, cauzat de termenul al doilea. Dacă acest factor proporţional cu t dispare (ceea ce depinde de forma funcţiei de undă iniţiale $\Psi(x, 0)$, cu care calculăm media, atunci destrămarea pachetului creşte pătratic cu timpul

$$\overline{\Delta x_t^2} \simeq \overline{\Delta x_0^2} + \overline{\Delta v^2} \cdot t^2. \tag{3.49}$$

Intuitiv acest rezultat se poate compara cu împrăştierea unui roi de particule clasice, dacă poziţiile şi vitezele lor iniţiale sînt distribuite în jurul valorilor medii cu abaterile pătratice $\overline{\Delta x^2}$ şi $\overline{\Delta v^2}$. *Destrămarea creşte progresiv* („accelerat''), fiind proporţională cu t^2. Analogia cu cazul clasic este însă redusă şi în acest caz la o consideraţie intuitivă, căci dacă în lumea clasică putem lua iniţial un roi în care poziţiile şi de asemenea vitezele să fie riguros determinate, în lumea cuantică nu mai putem lua simultan un roi în care abaterile medii pătratice ale vitezelor şi cele ale coordonatelor să fie egale cu zero. Această imposibilitate este de natură principială : ea rezultă din relaţia de nedeterminare scrisă în forma cea mai riguroasă,

$$\overline{\Delta p_x^2} \cdot \overline{\Delta x^2} \equiv m\,\overline{\Delta v_x^2} \cdot \overline{\Delta x^2} \geqslant \frac{\hbar^2}{4} \tag{3.50}$$

$$\sqrt{\overline{\Delta p_x^2}} \cdot \sqrt{\overline{\Delta x^2}} \geqslant \frac{\hbar}{2}. \tag{3.51}$$

În felul acesta, dacă inițial mișcarea microparticulei este descrisă de fasciculul $|\Psi_0|^2$ din figura a 2a), chiar și în absența unor cîmpuri exterioare *acest pachet se va destrăma și va avea forma mult extinsă* $|\Psi_t|^2$ redată în figura 2b). Orice interpretare mecanicistă a localizării este imposibilă și concluzia care se impune este aceea că informația pe care o avem asupra poziției microobiectului este furnizată de probabilitatea $|\Psi|^2$ care descrie roiul „electronic”.

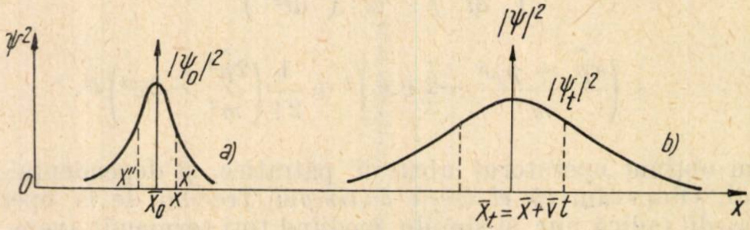


Fig. 2

2. Se știe că difuzia particulelor α pe nucleu a putut fi interpretată pe baze clasice, așa cum a arătat Rutherford în celebra sa teorie, premergătoare nu numai mecanicii ondulatorii, dar și teoriei semicuantice a lui Bohr-Wilson-Somerfeld. Să cercetăm tocmai acest caz în lumina condițiilor de clasicitate (3.35). Pentru a putea opera o descriere clasică a fenomenului difuziei (împrăștierii), deci pentru ca traiectoria proiectilului împrăștiat să existe cît de cît, este necesar ca dimensiunile (Δx) ale pachetului de unde să fie cu mult mai mici decît spațiul în care are loc ciocnirea (fig. 2a). În cazul difuziei acest spațiu este cel atomic (fig. 3)

$$\Delta x \ll a \tag{3.52}$$

Condiția (3.33) și (3.32) ne spune că

$$\overline{T} \equiv \frac{\overline{\Delta p^2}}{2m} + \frac{\overline{p}^2}{2m} \gg \frac{\hbar^2}{8m\,\overline{\Delta x^2}} \gg \frac{\hbar^2}{8m\,a^2}. \tag{3.53}$$

Timpul în care fasciculul nu trebuie să se destrame sensibil este egal cu durata de traversare a spațiului atomic

$$t = \frac{a}{\overline{v}} = \frac{a\,m}{\overline{p}}. \tag{3.54}$$

Lărgimea pachetului (după 3.49), va fi

$$\Delta x' \simeq \Delta v \cdot t = \frac{\Delta p}{m} \cdot \frac{a\,m}{p} = \frac{\Delta p}{p}\, a \tag{3.55}$$

și deoarece prin îndeplinirea relației de clasicitate (3.33), rezultă că

$$\overline{p}^2 \gg \overline{\Delta p^2}, \tag{3.56}$$

deci $\Delta p \ll \overline{p}$, așa că în (3.55) factorul lui a este subunitar

$$\Delta x' \ll a. \tag{3.57}$$

Pentru particulele α de energii tipice $T = 1$ MeV $= 1{,}6.10^{-8}$ erg, $m_\alpha = 6{,}7.10^{-24}$ g, $\bar{p}_\alpha = \sqrt{2m_\alpha T} = 4{,}6.10^{-15}$, iar $a \simeq 10^{-8}$ cm (raza atomului) și $\hbar/a \simeq 1.10^{-19}$. Astfel pentru aceste particule grele, condiția (3.34)

$$\bar{p}_\alpha^2 \gg \frac{\hbar^2}{4\overline{\Delta x^2}} \tag{3.58}$$

este satisfăcută, și deci *are sens să se vorbească de traiectoria particulei α împrăștiate*. Așa se explică (*à posteriori*) succesul principal al teoriei lui Rutherford.

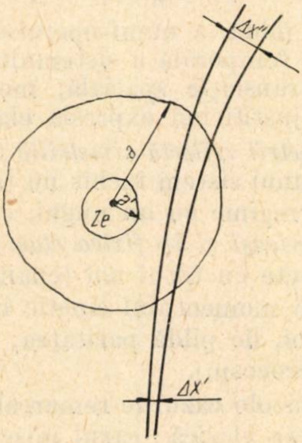


Fig. 3

3. Situația se schimbă însă radical dacă considerăm difuzia acelorași particule α dar pe un domeniu mult mai mic; dacă microparticulele trec prin apropierea nucleului, asupra lor acționează forțele nucleare avînd raza de acțiune de ordinul $a \simeq 10^{-13}$ cm. Condiția de „clasicitate" (3.58) nu mai este satisfăcută, $h/a = 10^{-15}$, de aceea teoria rutherfordiană nu putea fi completă; *difuzia pe nucleu* (*difuzia anomală*), *nu poate fi studiată cu metodele mecanicii clasice*. Același lucru privește și *difuzia electronilor pe atom*, căci în acest caz $m_e = 9.10^{-28}$ g și pentru o energie de ordinul lui $T = 100$ eV, impulsul fiind $\bar{p}_e = 5{,}4.10^{-19}$ astfel încît $\bar{p}_e$ este comparabil cu h/a și nu este posibilă aplicarea mecanicii clasice.

4. Modul în care s-a construit mecanica cuantică nu poate fi rupt de mecanica clasică, căci în esență operatorii observabilelor (matematic, mărimi operatoriale acționînd asupra funcției de undă și astfel deosebite, ca natură de cele clasice care sînt niște numere, q), se *construiesc prin corespondență cu situația clasică, pe care trebuie s-o regăsească. Desigur valabilitatea acestor operatori este justificată numai prin apelul la experiență așa că într-o tratare axiomatică nici nu interesează asemenea corespondențe, asemenea căutări de sprijin în domeniul clasic* (*deși construcția mecanicii cuantice nu s-a putut face, spre deosebire de alte teorii fizice, fără de permanentul apel la fizica clasică, unde de altfel avem reprezentări verificate*).

Mişcarea cuantică este desigur în însăşi esenţa ei ceva nou şi ca atare *reprezentarea ei adecvată va fi diferită de cea a mecanicii clasice.* Am surprins însă anumite comportări comparabile, care se reduc, într-o exprimare oarecum lapidară, la a spune că în mecanica cuantică operaţionalizăm mărimi clasice. Aşa bunăoară ecuaţiile mişcării au analogiile semnalate cu ecuaţiile Hamilton (de asemenea şi variaţia mărimilor în timp şi parantezele Poisson şi integralele mişcării). Pe lîngă apelul la fizica clasică, alegerea operatorilor (de pildă hamiltonianul, momentul cinetic $\hat{\vec{\mathcal{M}}} = [\hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}]$, operaţionalizarea expresiei $[\vec{r} \times \vec{p}]$ sau hamiltonianul în cîmp electromagnetic), se justifică şi din condiţii de *simetrie.* Acestea îndreptăţesc, de pildă, a numi operatorul energiei $\hat{H}$ mărimea invariantă la o translaţie temporală a sistemului, operatorul impuls mărimea invariantă la o translaţie spaţială, momentul cinetic mărimea invariantă la o rotaţie, justificînd expresia clasică utilizată.

În esenţă aceste simetrii reflectă simetriile fundamentale ale spaţiului (de pildă hamiltonianul unui sistem închis nu trebuie să se schimbe la o rotire a sistemului în întregime cu un unghi, condiţie care prescrie momentul cinetic) *şi sînt aceleaşi şi în fizica clasică.* Neîndoios, în tratarea cuantică apar unele aspecte cu totul noi (cuantificarea energiei în anumite cazuri, cuantificarea momentului cinetic în toate cazurile; precum şi proprietăţi cuantice noi, de pildă paritatea, echivalenţa între direcţia dreaptă şi stîngă în microcosm).

Am remarcat mai încolo cazurile remarcabile cînd mişcarea pachetului coincide exact cu cea clasică; cazul mişcării libere l-am examinat la punctul 1. Mişcarea într-un cîmp omogen (magnetic bunăoară) prezintă multe analogii cu cazul clasic, deşi apare o cuantificare specială.

În cazul mişcării armonice, se consideră hamiltonianul

$$(3.59)\qquad H_{\text{clasic}} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} x^2\,; \quad H_{\text{cuantic}} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} \hat{x}^2$$

şi într-adevăr ecuaţia lui Schrödinger prezintă anumite corespondenţe în privinţa nodurilor şi ventrelor cu oscilatorul clasic. Sistemul cuantic descris de hamiltonianul $\hat{H}_{\text{oscil}}$, are sens să fie numit în mod efectiv un oscilator cuantic şi din punct de vedere dinamic, adică din punctul de vedere al tranziţiilor pe care le poate executa, căci se arată la teoria radiaţiei [6], [3], că acest sistem emite şi absoarbe o singură frecvenţă ω_0, iar în cazul $\hbar \to 0$, trece în sistemul clasic (oscilatorul armonic clasic). Nu vom insista aici asupra unor aspecte comparabile care se pot surprinde în analiza diferitelor mişcări care permit corespondenţe (de pildă mişcarea în cîmp magnetic omogen). Desigur că într-o etapă superioară celeia a constituirii sale, mecanica cuantică îşi axiomatizează operatorii în acord cu experienţa, regăsind atunci din aceste postulări mecanica clasică, atît în forma ei newtoniană, cît şi în cea analitică cu care de asemenea se pot stabili legături interesante.

IV. CORESPONDENŢA DINTRE MECANICA CUANTICĂ ŞI MECANICA ANALITICĂ

Esenţa fizică a acestei legături a fost analizată de fapt în cele ce au precedat. Mecanica cuantică poate fi construită urmînd formalismul hamiltonian (de pildă ecuaţia lui Schrödinger $\hat{H}\Psi = E\,\Psi$ ne dă valorile proprii ale energiei E) ; *ecuaţiile* (1.16), (1.17), *descriu bine analogia cu formalismul hamiltonian. Mai adecvat în sensul dezvoltării ideilor generale despre cîmpurile cuantice este punctul de vedere langrangean şi mecanica cuantică poate fi construită derivînd ecuaţiile din principiul minimei acţiuni prin alegerea unui lagrangean adecvat, invariant la simetriile naturale.* Acest punct de vedere foarte general (variaţional) este util în cazul mecanicii cuantice relativiste ; aici ne vom mărgini a menţiona că şi ecuaţia nerelativistă a lui Schrödinger poate fi stabilită pe cale variaţională (la fel ca ecuaţiile lui Lagrange, la fel ca ecuaţiile lui Maxwell din optică), [7]. Anume, se arată imediat, [5], că ecuaţia de evoluţie, sub forma ei generală $\hat{H}\Psi = E\Psi$, poate fi obţinută din principiul variaţional

$$\boxed{\delta \int \mathcal{L}\, \mathrm{d}q \equiv \delta \int \psi^* (\hat{H} - E)\Psi\, \mathrm{d}q = 0} \,. \tag{4.1}$$

În virtutea caracterului complex al lui Ψ, variaţia în raport cu Ψ^* şi Ψ poate decurge independent. Variaţia în raport cu Ψ conduce la

$$\int \delta\Psi^* (\hat{H} - E)\, \Psi\, \mathrm{d}q = 0 \tag{4.2}$$

şi cum $\delta\Psi^*$ este arbitrar, obţinem ecuaţia căutată

$$\hat{H}\Psi = E\Psi. \tag{4.3}$$

Deci aceste stări de cîmp descrise de ecuaţia de evoluţie sînt singurele compatibile cu principiul variaţional (gradele de libertate ale cîmpului, adică „coordonatele'' acestuia, în raport cu care am făcut variaţiile, sînt descrise de mărimea continuă Ψ). Variaţia în raport cu Ψ nu dă nimic nou, căci efectuînd această variaţie obţinem

$$\int \Psi^* (\hat{H} - E)\, \delta\Psi\, \mathrm{d}q = \int \delta\Psi\, (\hat{H}^* - E)\, \Psi^*\, \mathrm{d}q = 0. \tag{4.4}$$

(după ce am folosit proprietăţile de hermiticitate $\int \Psi^* \hat{H}\, \Psi\, \mathrm{d}q = \int \Psi \hat{H}^* \Psi^* \mathrm{d}q$ la care este supus în mod natural operatorul fizic $\hat{H}$ (care are valori proprii reale). De aici rezultă ecuaţia complex conjugată $\hat{H}^*\, \Psi = E\Psi^*$. Această împrejurare se datoreşte faptului că Ψ nu reprezintă strict fizic mişcarea, ci numai în însoţire cu Ψ^* (în modul ; interpretarea probabilistă a funcţiei de undă). Sub forma (4.1) principiul variaţional cere un extremum necondiţionat ; dar (4.1) se poate scrie şi sub forma

$$\delta\left[\int \Psi^*\, \hat{H}\, \Psi\, \mathrm{d}q - E \int \Psi^*\, \Psi\, \mathrm{d}q\right] = 0\,; \quad \delta\,(\overline{E} - E) = 0 \tag{4.5}$$

scoțînd pe E în factor și observînd că fizic primul termen descrie o energie medie (media operatorului H, adică $\overline{E}$), iar condiția

$$\int \Psi^* \Psi \, \mathrm{d}q = 1 \tag{4.6}$$

este firească pentru Ψ (normarea). Putem deci formula problema variațională ca o problemă de minimum condiționat

$$\boxed{\delta \int \Psi^* \hat{H} \Psi \, \mathrm{d}q = 0 \quad \text{cu (4.8)} \int \Psi^* \Psi \, \mathrm{d}q = 1} \ , \tag{4.7}$$

E, factorul lui Lagrange. Sensul său fizic este acela de energie E, pentru care se realizează valoarea condițională, de minimum : deci *ea este energia primului nivel fundamental* E_0. Această stare nu se realizează pentru orice funcție Ψ, care împlinește acest extremum condiționat fiind prin urmare Ψ_0 : funcția stării normale. Funcțiile de undă Ψ_1, Ψ_2, ale următoarelor stări staționare corespund doar unui extremum, însă nu minimului integralei. Din condiția de minimum a integralei (4.7) se poate determina funcția Ψ_1 și energia E_1 a stării următoare celei normale (prima stare excitată ; și așa mai departe din aproape în aproape). Pentru aceasta trebuie să admitem că Ψ_1 satisface nu numai condiția de ortonormalitate, $\int \Psi_1^* \Psi_1 \mathrm{d}q = 1$, dar și ortogonalitatea față de Ψ_0

$$\int \Psi \Psi_0 \, \mathrm{d}V = 0 \tag{4.9}$$

Pe lîngă importanța principială a principiului variațional (*caracterul unic sub care este privită mișcarea ; și interacția*), din acesta se stabilesc teoreme generale importante (bunăoară faptul că Ψ_0 pentru starea fundamentală nu se poate anula pentru valori finite ale coordonatelor, ea avînd același semn în tot spațiul, ceea ce atrage după sine nedegenerarea stării E_0 [5]). *În mecanica nerelativistă cuantică, se folosesc ambele reprezentări hamiltoniană* (*reprezentarea Schrödinger și Heisenberg din mecanica cuantică a cîmpurilor*) *și lagrangeană, deși reprezentarea hamiltoniană se dovedește a fi aici cea mai utilă în majoritatea cazurilor.* (*În reprezentarea Schrödinger dependența de timp a valorilor mărimilor fizice apare numai prin dependența de timp a funcției de undă* ; *pe cînd în reprezentarea Heisenberg dependența de timp este transmisă de la funcțiile de undă la operatori* ; *ea este utilă în teoria relativistă*) [8].

Raporturile cu mecanica clasică analitică se pot stabili și *dintr-un alt punct de vedere decît cel al formalismului general și al ecuațiilor de mișcare. Anume, se poate arăta că ecuația clasică a lui Hamilton-Iacobi este un caz limită al ecuației temporale a lui Schrödinger.* Această comparație este bogată în sensuri fizice, căci *ecuația lui Hamilton-Iacobi folosește pentru mobil o descriere care poate fi numită de „cîmp”* (*deși clasică*), *căci asociază particulei o structură continuă* ; *o anumită undă* (*o suprafață care se propagă o dată cu mișcarea* ; *mișcarea însăși poate fi dedusă din deplasarea acestei suprafețe de „potențial dinamic”*).

Ecuația lui Hamilton-Iacobi (ne vom limita la o singură particulă, și la coordonate carteziene) descrie mișcarea global prin intermediul unei funcții $\mathcal{S}\,(x, y, z, t)$ numită de acțiune (*un cîmp de acțiune*). Această funcție își merită numele întrucît, prin definiție, ea are dimensiunile unei acțiuni = energie x timp. Funcția $\mathcal{S}$ se definește în așa fel încît să ne dea impulsurile $\vec{p}$ prin relații de derivare, deci în același mod în care funcția de forță (sau mai bine spus potențialul $\vec{F} = -\nabla U$) era legat de forță în cazul cîmpului conservativ. Astfel $\mathcal{S}$ are proprietățile unui *„potențial de impuls"*:

$$\boxed{\begin{aligned} &p_x = -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x};\ p_y = -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y};\ p_z = -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z};\ \vec{p} = m\vec{v} = -\nabla \mathcal{S} && (4.10)\\ &H = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial E} && (4.11)\end{aligned}}$$

(uneori se folosesc ecuațiile (4.10—4.11) cu semne schimbate) $\vec{p}$ fiind vectorul impuls, iar H hamiltonianul. Funcția lui Hamilton fiind

$$H\,(p_x, p_y p_z, x, y, z, t) = \frac{1}{2m}\,(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U\,(x, y, z, t), \tag{4.12}$$

ecuația lui Hamilton-Iacobi pentru o particulă este următoarea

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z}\right)^2\right\} + U\,(x y z, t)} \tag{4.13}$$

sau mai concentrat

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = H\left(-\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x}, -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y}, -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z}, x, y, z, t\right). \tag{4.14}$$

Dacă funcția lui Hamilton nu depinde de timp explicit, ci numai implicit prin intermediul coordonatelor și impulsurilor, ea este egală cu energia particulei

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = H\,(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = E;\ \mathcal{S} = Et + s_0\,(xyz)} \tag{4.15}$$

$s_0\,(x\,y\,z)$ este un factor spațial de fază.

Imaginea pe care ne-o oferă ecuația lui Hmilton-Iacobi despre mișcare este simplă și intuitivă. Relațiile (4.10), adică $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} = -\frac{1}{m}\nabla \mathcal{S}$, arată că viteza este normală la suprafețele de acțiune $\vec{v} \sim \nabla \mathcal{S}$, deci *traiectoriile sînt curbe ortogonale suprafețelor de acțiune constantă* (fig. 4).

Aceste suprafeţe pot fi staţionare $\mathcal{S}\,(x\,y\,z)$ sau, mai general, pot depinde de timp, funcţia S, care descrie o suprafaţă, putînd lua diferite valori (o familie de suprafeţe care se deformează şi se deplasează în timp). Cînd funcţia de acţiune nu depinde de timp, aceste suprafeţe nu se mai deformează, ele sînt pur şi simplu proporţionale cu timpul, iar $s_0\,(x\,y\,z)$ arată faza propagării suprafeţei $\mathcal{S}$. Direcţia de mişcare este ortogonală acestei suprafeţe de fază $s_0\ (x\,y\,z)$, întrucît din definiţia (4.10) apar numai derivate faţă de coordonate

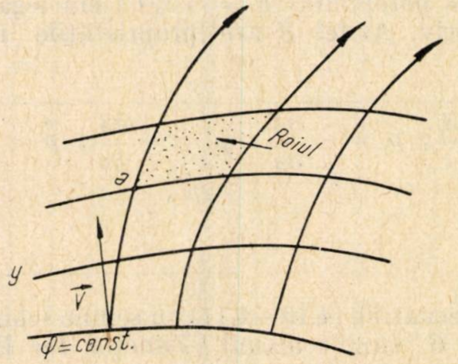


Fig. 4

$$p_x = -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} = -\frac{\partial s_0}{\partial x}\ \text{etc.} \tag{4.16}$$

Mărimea de fază $s_0\,(x\,y\,z)$ se numeşte eiconal. Ecuaţia pentru suprafaţă se obţine îndată din

$$\frac{1}{2m}\,(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = E - U \tag{4.17}$$

introducînd aici $\vec{p} = -\nabla s_0$; obţinem ecuaţia eiconalului

$$2m\,(E - U) = -\left[\left(\frac{\partial s_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_0}{\partial z}\right)^2\right]. \tag{4.18}$$

Deplasării i-am asociat astfel mişcarea unei suprafeţe (a unui cîmp); suprafaţa se mişcă cu o viteză de fază W (a undei, dată de

$$d\vec{r} = W\,\vec{n}\,dt, \tag{4.19}$$

$\vec{n}$ fiind normală la suprafaţa de acţiune

$$\vec{n} = \frac{\text{grad}\ s_0}{|\,\text{grad}\ s_0\,|}. \tag{4.20}$$

Pentru o suprafaţă dată, $\mathrm{d}\mathcal{S}$ fiind zero,

$$\mathrm{d}\mathcal{S} = \mathrm{d}\,(Et - s_0\,(xyz)) \equiv 0 \rightarrow E\,\mathrm{d}t - \tag{4.21}$$

$$-\left(\frac{\partial s_0}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial s_0}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial s_0}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) = 0$$

adică

$$E\,\mathrm{d}t - \operatorname{grad} s_0 .\ \mathrm{d}\vec{r} = 0 \tag{4.22}$$

sau împărţind cu $\mathrm{d}t$

$$E - \operatorname{grad} s_0 \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{sau} \quad -E + |\operatorname{grad} s_0|\,W = 0, \tag{4.23}$$

de unde putem calcula viteza de fază W

$$W = \frac{E}{|\operatorname{grad} s_0|} = \frac{E}{\sqrt{\left(\frac{\partial s_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_0}{\partial z}\right)^2}} = \tag{4.24}$$

$$= \frac{E}{\sqrt{2m\,(E - U)}}$$

a undei S. Pentru cazul cînd S este o perturbaţie fizică ondulatorie, am obţinut viteza de fază legată de energia oscilaţiei.

Să stabilim acum legătura cu mecanica cuantică în care efectiv, şi principial, se asociază oricărei microparticule o ondulaţie Ψ. În ce raporturi se află ea cu mişcarea pe traiectorie? *O asemenea comparaţie a două procese, corpuscular şi ondulatoriu a fost ridicată de dezvoltarea opticei, şi anume este vorba despre raportul dintre optica geometrică (aproximativă) şi cea ondulatorie. În optica ondulatorie undele (electromagnetice) erau descrise de vectori care se propagă (electric şi magnetic), propagarea în spaţiu şi în timp fiind descrisă de ecuaţii diferenţiale liniare (ecuaţiile lui Maxwell). În optica geometrică procesul ondulatoriu a fost redus la propagarea după traiectorii determinate (razele). Componentele ondulaţiei se pot descrie prin unda*

$$\Phi = a\,\mathrm{e}^{i\varphi}, \tag{4.25}$$

a fiind amplitudinea, iar φ faza undei. Mişcarea pe rază are loc atunci cînd lungimile de undă sînt mici, deci *faza* φ *trebuie să varieze puternic pe distanţe mici.* φ va avea deci valori mari pe intervale mici, aşa că în valoare absolută φ va fi mare. *În optica geometrică această fază* φ *este eiconalul. Proprietăţile fizice ale undelor asociate permit să se conchidă că trecerea la limită de la cuantic la clasic se face similar trecerii de la optica geometrică la cea ondulatorie* (vezi şi mai departe) aşa că în mecanica cuantică cazului clasic liminar îi vor corespunde funcţii de undă de forma

$$\Psi = a\,\mathrm{e}^{i\varphi}, \tag{4.26}$$

a fiind amplitudini lent variabile iar φ ia valori mari. Faza φ a funcției de undă Ψ, în acest caz clasic-comparabil, trebuie să fie proporțională cu cea clasică, adică cu acțiunea mecanică $\mathcal{S}$, a sistemului

$$\varphi = k \cdot \mathcal{S} \tag{4.27}$$

(constanta k este mare). Acțiunea mecanică $\mathcal{S}$ este proporțională fazei

$$\mathcal{S} = k^{-1} \cdot \varphi \tag{4.28}$$

coeficientul de proporționalitate fiind de valoare foarte mică. *El trebuie scos din experiență, și se vede că are dimensiunile* unei acțiuni, deoarece φ nu are dimensiuni. Această constantă nu poate fi alta decît constanta lui Plank

$$\hbar = 1{,}054 . 10^{-27} \text{ erg.s} \tag{4.29}$$

care comparată cu alte mărimi de aceleași dimensiuni determină gradul de cuantizare, după cum se vede din (4.30) ca și din formula lui de Broglie asupra legăturii dintre viteza particulei și unda asociată $\lambda = \frac{h}{mv}$ cum de altfel, din toate rezultatele teoriei cuantice, $\hbar$ *fixează formal domeniul clasic* (*cînd* $\hbar \to 0$, $\lambda \to 0$), *de cel cuantic* (*cînd* $\lambda \neq 0$).

Astfel funcția de undă cvasiclasică a unui sistem fizic trebuie să aibă forma

$$\boxed{\Psi = a\, e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}}}. \tag{4.30}$$

Într-adevăr, folosind această reprezentare, se arată imediat că ecuația temporală a lui Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\, \Psi\, ; \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\, m} \nabla^2 + U\,(xyzt) \tag{4.31}$$

conține ca o aproximare ecuația lui Hamilton-Iacobi pentru funcția $\mathcal{S}_{\text{clasic}} = \mathcal{S}_0$. Să formăm derivatele de ordinul doi necesare în (4.31) :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{i}{\hbar}\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x}\Psi\, ; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x}\right)^2 \Psi - \frac{1}{\hbar}\frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial x^2}\Psi \tag{4.32}$$

și să le substituim împreună cu definiția (4.30) în ecuația lui Schrödinger. Vom obține astfel ecuația pentru funcția $\mathcal{S}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} &= \frac{1}{2\, m}\left\{\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z}\right)^2\right\} + U\,(x,\, y,\, z,\, t) + \frac{i\,\hbar}{2m}\nabla^2 \mathcal{S}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Pentru a fixa ordinul aproximației, deci pentru a evidenția gradul de cuantificare, să dezvoltăm funcția $\mathcal{S}$ pe care trebuie s-o determinăm după puterile lui $i\hbar$ (omogenitatea dimensională este respectată)

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + (\, i\,\hbar)\, \mathcal{S}_1 + (i\, \hbar)^2\, \mathcal{S}_2 + \ldots \tag{4.34}$$

Substituind în (4.33) prin compararea coeficienţilor aceloraşi puteri căpătăm ecuaţiile pentru $\mathcal{S}_0$ şi $\mathcal{S}_1$, adică pentru prima şi a doua aproximare

$$\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z}\right)^2\right\} + U\,(x\,y\,z) \tag{4.35}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial t} = \frac{1}{2\,m}\left\{2\,\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial x}\,\frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial x} + 2\,\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial y}\,\frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial y} + \right. \\ \left. + 2\,\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial z}\,\frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial z} + \nabla^2 \mathcal{S}_0\right\} \equiv \frac{1}{2\,m}\, 2\,\nabla \mathcal{S}_0 \nabla \mathcal{S}_1 + \nabla^2 \mathcal{S}_0. \end{gathered} \tag{4.36}$$

Prima dintre aceste ecuaţii *coincide cu ecuaţia lui Hamilton-Iacobi (4.13)*. Vom vedea imediat că şi cea de a doua ecuaţie are un sens fizic direct, aşa că reprezentarea clasică este aplicabilă pînă la mărimi de gradul 1 în $\hbar$ iar nu de ordinul zero (vezi mai departe). La trecerea de la ecuaţia (4.13) la ecuaţia (4.35) s-a neglijat termenul $\frac{i\hbar}{2m}\,\nabla^2 \mathcal{S}$. Neglijarea este îndreptăţită dacă

$$\frac{1}{2m}\,(\nabla \mathcal{S}_0)^2 \gg \left|\frac{i\hbar}{2m}\,\nabla^2 \mathcal{S}_0\right|, \tag{4.37}$$

or S_0 fiind funcţia clasică de acţiune, această condiţie de aproximare se exprimă prin impulsuri (din 4.10) ($\vec{p} = -\nabla \mathcal{S}_0$)

$$\frac{p^2}{2m} \gg \frac{\hbar}{2m}\left|\operatorname{div}\,\vec{p}\right|. \tag{4.38}$$

Inegalitatea ne arată că energia cinetică trebuie să fie mare, iar variaţiile impulsului ($\operatorname{div}\,\vec{p}$), mici (adică o comportare cît mai uniformă). Pentru mişcarea pe o singură dimensiune

$$p^2 \gg \hbar\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \tag{4.39}$$

ceea ce atrage după sine caracterul lent variabil al lungimii de undă asociate $\lambda = \frac{2\pi\,\hbar}{p}$; ($\bar{\lambda} = \lambda/2\pi$)

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} \ll 2\pi} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}\bar{\lambda}}{\mathrm{d}x} \ll 1}\,. \tag{4.40}$$

Or *tocmai variaţia lentă a lungimii de undă în funcţie de coordonată presupune un cîmp potenţial lent variabil*

$$\lambda = \frac{\hbar}{mv} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\,(E-U)}}\,;\quad \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} \sim \frac{1}{\sqrt{2m\,(E-U)}}\,\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}. \tag{4.41}$$

Faptul că la $\hbar \to 0$ este aplicabilă mecanica clasică cu o precizie pînă la ordinul întîi, în h (inclusiv), iar nu zero, se vede bine dacă înlocuim funcţia de undă cvasiclasică $\Psi = a\,\mathrm{e}^{i\mathcal{S}/\hbar}$, în ecuația lui Schrödinger fără să mai dezvoltăm în serie pe $\mathcal{S}$. Efectuînd derivările necesare obținem

$$a\,\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial t} - i\hbar\,\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{a}{2m}(\nabla\mathcal{S})^2 - \frac{i\hbar}{2m}\,a\,\Delta\,\mathcal{S} - \\ -\frac{i\hbar}{m}\nabla\mathcal{S}\cdot\nabla a - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\,a + U\,a = 0. \tag{4.42}$$

Această ecuație reunește termeni reali și imaginari (S și a sînt reali); egalîndu-i separat cu zero obținem

$$\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla\,\mathcal{S})^2 + U - \frac{\hbar^2}{2ma}\Delta\,a = 0 \tag{4.43}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{a}{2m}\,\Delta\,\mathcal{S} + \frac{1}{m}\nabla\mathcal{S}\cdot\nabla a = 0. \tag{4.44}$$

Aceste ecuații sînt valabile în general pentru o funcție cvasiclasică, iar dacă ordinul aproximației este $\hbar^2=0$, *obținem tocmai ecuația lui Hamilton-Iacobi.*

Sensul fizic nemijlocit în mecanica cuantică este rezervat nu funcției de undă $\Psi\,(x, t)$, ci modulului acesteia, mărime care ne dă probabilitatea de localizare a microobiectului în vecinătatea punctului x, y, z. Și această interpretare statistică poate fi pusă în corespondență cu cazul clasic, în lumina aproximațiilor făcute și anume, este descrisă de ecuația (4.36) sau de (4.44) despre care nu am spus încă nimic. Judecînd clasic, să considerăm un roi de particule avînd diferite coordonate inițiale x_0, y_0, z_0. În elementul de volum $\mathrm{d}\mathcal{V}$ vor fi $\mathrm{d}\mathcal{N} = \rho\mathrm{d}V$ particule, ρ fiind densitatea acestora. La momentul t toate aceste particule vor migra într-o altă regiune a spațiului, și dacă „fluidul'' este indestructibil, numărul lor va rămîne neschimbat. Schimbarea în timp a numărului de particule este descrisă de derivata locală (hidrodinamică, substanțială) care cuprinde doi termeni — variația volumului în timp și schimbarea densității la volum constant. Pentru fluidul conservativ

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\,\delta\mathcal{N} = \delta\mathcal{V}\,\frac{\mathcal{D}\rho}{\mathcal{D}t} + \rho\,\frac{\mathcal{D}\rho\mathcal{V}}{\mathcal{D}t} = 0. \tag{4.45}$$

Derivatele locale ale lui ρ și $\delta\,\mathcal{V}$ vor fi

$$\frac{\mathcal{D}\rho}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\rho\,\vec{V}\,; \qquad \frac{\mathcal{D}\rho\mathcal{V}}{\mathcal{D}t} = \mathrm{div}\,\vec{V}\,\delta\,\mathcal{V} \tag{4.46}$$

$\vec{V}$ fiind viteza de mișcare a particulelor (roi, fluid) Atunci (4.45) va fi

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\vec{V}) = 0 \tag{4.47}$$

adică tocmai ecuaţia de continuitate, care în definitiv putea fi scrisă de la bun început. Exprimată în funcţie de acţiunea $\mathcal{S}_0$ a sistemului (roiului), ecuaţia de continuitate devine

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{m} \operatorname{div} (\rho \nabla \mathcal{S}_0) = 0 \tag{4.48}$$

căci viteza este proporţională cu gradientul acţiunii

$$\vec{V} = -\frac{1}{m} \nabla \mathcal{S}_0. \tag{4.49}$$

Ecuaţia de continuitate pentru un fluid, exprimată prin acţiunea sistemului, se poate scrie şi sub forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{m} \left\{ \nabla \rho \cdot \nabla \mathcal{S}_0 + \rho \nabla^2 \mathcal{S}_0 \right\}. \tag{4.50}$$

Pentru a putea face legătura cu mecanica cuantică, să folosim interpretarea hidrodinamică a cîmpului probabilist Ψ *asociat microparticulei* (*ca şi sistemului*), *care devine astfel ea însăşi un* ,,*roi*''. Probabilitatea de a găsi particula în volumul $d\mathcal{V}$ este proporţională cu acest volum şi cu densitatea de probabilitate ρ, cuantic determinată prin modulul $\Psi^*\Psi$. Această probabilitate, în imaginea corpusculară hidrodinamică, este indicată de raportul dintre numărul de particule $\delta \mathcal{N}$ din $\delta\mathcal{V}$, la numărul total de particule, şi acest flux de probabilitate se supune unei condiţii de conservare (unei ecuaţii de continuitate) care traduce indestructibilitatea microparticulei (sistemului). În general în mecanica cuantică ecuaţia de continuitate se scrie detaliat sub forma [3]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Psi^* \Psi) = \frac{i\hbar}{2m} \operatorname{div} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*)\,; \quad W = \Psi^*\Psi\,; \tag{4.51}$$

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi),$$

W fiind densitatea medie a numărului de particule, iar $\vec{j}$ densitatea medie a fluxului. Ecuaţia (4.51) se stabileşte pornind direct de la ecuaţia lui Schrödinger, pe care o exprimă de fapt, arătîndu-i înţelesul ,,hidrodinamic'' $\left(\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0\right)$.

În cazul cvasiclasic, deci cînd $\Psi = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}}$, ecuaţia de continuitate este tocmai (4.36), căci în acest caz probabilitatea de a găsi microparticula (sistemul) în vecinătatea lui x, y, z, este de forma

$$\rho = |\Psi|^2 = \left| e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}} \right|^2 = \left| e^{-i/\hbar\, [\mathcal{S}_0 + (i\hbar)\mathcal{S}_1 + (i\hbar)^2 \mathcal{S}_2 + \dots]} \right|^2 = 1 \cdot e^{+2S_1 + \dots} \tag{4.52}$$

încît

$$\nabla \rho = +2 \nabla \mathcal{S}_1 \cdot e^{+2\mathcal{S}_1 + \dots}\,; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = +2 \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial t} e^{+2S_1} \tag{4.53}$$

aşa că înmulţind ecuaţia (4.36) cu $2\,e^{2S_1}$, obţinem tocmai ecuaţia de continuitate (4.47), redată prin intermediul acţiunii, adică (4.50). Sau dacă ne referim la rezultatul (4.44), în care am lăsat să apară amplitudinea (rezultat valabil în aproximaţia $\hbar^2 = 0$), după înmulţirea cu $2a$, acesta capătă forma ecuaţiei de continuitate

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \operatorname{div}\left(a^2 \frac{\nabla \mathcal{S}}{m}\right) = 0 \tag{4.54}$$

a^2 înseamnă fizic densitatea de probabilitate

$$|\Psi|^2 = a^2 \tag{4.55}$$

iar celălalt termen conţine viteza clasică a particulei $\frac{\nabla S}{m} = \frac{\vec{p}}{m} = \vec{V}$;

deci în paranteză apare fluxul $\vec{j}$:

$$\vec{j} = \vec{V} a^2 = \vec{V} (\Psi^* \Psi). \tag{4.56}$$

Aşadar ecuaţia (4.54) ne arată că *în această aproximaţie mişcarea se poate reduce la o traiectorie clasică, iar densitatea de probabilitate se deplasează după legile mecanicei clasice cu viteza clasică în fiecare punct.* Importanţa acestor consideraţii privind corespondenţa reprezentărilor mişcării în mecanica clasică şi cea cuantică nu este numai de natură principială. Astfel în acele cazuri în care lungimea de undă asociată este lent variabilă, funcţia de undă poate fi luată în aproximaţia cvasiclasică, deci după (4.30), (34.35); ea este determinată aproximativ prin funcţia $\mathcal{S}_0$ din ecuaţia lui Hamilton-Iacobi, şi prin densitatea (de asemenea clasică) ρ din (4.52). Or rezolvarea ecuaţiei Hamilton-Iacobi poate fi mai uşoară decît cea a ecuaţiei consecvent cuantice. În definitiv la această aproximare operatorii cuantici capătă ei înşişi un caracter clasic, şi se reduc la înmulţirea cu mărimea fizică corespunzătoare. Pe această corespondenţă aproximativă se bazează metoda lui Wentzel-Kramers-Brillouin, de stabilire a funcţiilor de undă şi a ecuaţiilor cuantice, metodă folosită frecvent în aplicaţii [5], [9], [10]. Desigur, stabilind forma limită a funcţiei de undă, nu am arătat în ce mod este ea legată de traiectoria clasică. În general, aşa cum am cercetat această problemă în primele paragrafe, *mişcarea descrisă de o funcţie de undă nu trece de loc într-o mişcare pe o traiectorie precisă.* Ceea ce are ea clasic, este faptul că Ψ se poate calcula după o lege clasică; adică, mai precis, dacă la momentul iniţial funcţia de undă (şi o dată cu ea şi distribuţia probabilităţilor coordonatelor) sînt date, atunci în viitor (şi numai în această aproximare cvasiclasică) *această distribuţie se va deplasa după cum o determină legile clasice.* Numai dacă funcţia de undă se reduce la o formă cu totul deosebită (şi anume la pachetul de undă sensibil diferit de zero pe domenii care tind la zero o dată cu $\hbar$), atunci, în cazul cvasiclasic, *pachetul se va deplasa în spaţiu tocmai pe traiectoria clasică a particulei.* Corespondenţa stabilită îşi vădeşte astfel întreaga importanţă: ea servind drept reazim la construirea operatorilor mecanicii cuantice, servind drept metodă de aproximaţie şi evidenţiind îmbogăţirea dialectică a atributelor mişcării în modul în care aceasta este înţeleasă în mecanica cuantică.

V. CORESPONDENȚA DINTRE MECANICA CUANTICĂ ȘI OPTICĂ

Mecanica cuantică își trage izvorul atîtor succese din aceea că ea subliniază de la bun început *importanța dualității*, *caracterul universal și principial* al acestei uimitoare proprietăți a microobiectelor (L. de Broglie 1924) [11]. *Or acest dualism a fost surprins pentru prima oară tocmai în optică, cu toate că elaborarea unei mecanici consecvente cuantice a unui obiect care se mișcă cu viteza c a fost precedată de mecanica cuantică nerelativistă* [12]. *La fundamentarea mecanicii cuantice, sub forma ei inițială* (*mecanica ondulatorie*) *un rol de seamă l-au jucat analogiile care există între optica geometrică și mecanică.* Aceste analogii care au făcut obiectul unor asidue studii ale lui Hamilton au fost uitate la vremea lor, ele devenind din nou actuale o dată cu construirea unei mecanici analoage opticei ondulatorii.

Să reamintim termenii în care se formulează *analogia hamiltoniană dintre optica geometrică și mecanica. Esența analogiei se bazează pe faptul că legile fundamentale ale celor două domenii se pot formula în mod similar printr-un principiu variațional.* Atît mecanica, cît și optica au legi locale (diferențiale) care stabilesc relații valabile în fiecare punct și în vecinătatea acestuia. De asemenea, ca și în alte domenii ale fizicii, se pot afla și aici mărimi cu variație orientată, ea se comportă special în întregul domeniu al procesului fizic real, atingînd acolo un extremum, spre deosebire de alte stări virtuale, variate (fig. 5).

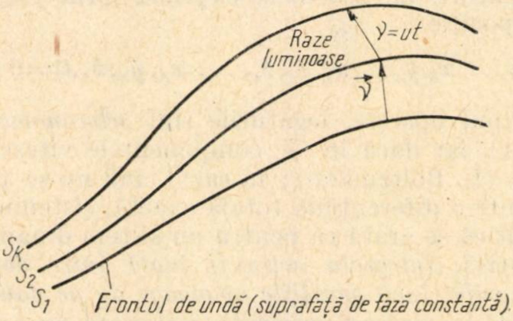


Fig. 5

Legile diferențiale ale opticei geometrice (*propagarea rectilinie în mediile omogene și izotrope, legea reflexiei și a refracției*), *se pot deduce dintr-un singur principiu variațional.* Acest principiu a fost stabilit încă de Fermat și afirmă că din *familia de traiectorii pe care raza luminoasă le poate parcurge între două puncte fixe A, B, lumina parcurge acea traiectorie, pentru care timpul t necesar este minimum* (*în general extremum* [13],

[14]. Sau sub o altă formă, echivalentă : *pe traiectoria efectivă drumul optic prezintă un extremum*

$$\int_A^B \mathrm{d}t = \int_A^B \frac{\mathrm{d}s}{u} = \int_A^B \frac{\mathrm{d}s}{\dfrac{c}{n}} = \frac{1}{c}\int_A^B m\,(xyz)\,\mathrm{d}s \equiv \tag{5.1}$$

$$\equiv \frac{1}{c}\int_A^B \mathrm{d}\Delta_{\text{optic}} = \text{extremum}$$

$$\boxed{\delta\int_A^B \mathrm{d}t = 0, \qquad \delta\int_A^B \frac{\mathrm{d}s}{u} = 0, \qquad \delta J = \delta\int_A^B n\,\mathrm{d}s = 0.} \tag{5.2}$$

Aşadar funcţionala care descrie optica geometrică este $\int_A^B n\,\mathrm{d}s$, n fiind indicele de refracţie în punctul curent al traiectoriei (o funcţie de punct în mediile neomogene, dar izotrope iar în mediile dispersive el este selectiv pentru fiecare frecvenţă) iar ds elementul de arc de-a lungul traiectoriei (razei) ; u este viteza de fază. Valorile funcţiei integrale I depind de funcţia de variabilă independentă $n\,(x,\ y,\ z)$ şi în particular, *în medii omogene raza se propagă pe geodezică* :

$$\delta\int_A^B \mathrm{d}s = 0.$$

Cum se pune problema în mecanică? Fenomenul mecanic poate fi studiat în toată generalitatea lui prin metodele variaţionale, aplicabile unui sistem cu legături. Legăturile se exprimă prin $f \leqslant 3\,N$ relaţii între coordonatele de poziţie

$$\mathcal{F}_l\,(x, y, z \ldots x_N\, y_N\, z_N, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N, t) = 0\,;\ l = 1,2 \ldots f \tag{5.3}$$

şi dacă în $\mathcal{F}_l$ timpul lipseşte, legăturile sînt *scleronome*, în caz contrar *reonome* (H. Hertz), iar dacă în $\mathcal{F}_l$ componentele vitezelor lipsesc, sistemul se zice *olonom* (L. Boltzmann) ; în cazul cînd nu se poate da legătura coordonatelor printr-o diferenţială totală exactă, sistemul este anolonom). În mecanica analitică se arată că pentru un sistem dinamic [15] (olonom, reonom conservativ), *integrala acţiunii luată între două momente fixe bine determinate, astfel încît poziţiile omoloage de pe două curbe vecine* Γ, Γ′ *să se corespundă în aceleaşi momente, realizează un extremum pe traiectorie reală.* (*Principiul lui Hamilton*). Funcţia de acţiune $\mathcal{S}$ se construieşte din lagrangeanul sistemului $L = T - U$. Aşadar pentru traiectoria reală, spre deosebire de o curbă virtuală, avem

$$\boxed{\delta\,\mathcal{S} = \delta\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}\,(q^1, q^2, \ldots q^h\,;\, \dot{q}^1, \dot{q}^2 \ldots \dot{q}^h\,;\, t)\,\mathrm{d}t = 0} \tag{5.4}$$

Traiectoria reală este o extremală a problemei variaţionale, iar condiţiile de variere cuprind pe de o parte fixarea extremităţilor $(\delta q^k)_{t_0} = (\delta q^k)_{t_1} = 0$

pe de altă parte faptul că punctele omoloage de pe curbele variate sînt atinse în aceleași momente $(\delta t)_0 = (\delta t)_1 = 0$. Condițiile inițiale și finale sînt $q^h(t_0) = q_0^k$; $q^k(t_1) = q_1^k$, t_0 și t_1 fiind valorile timpului în extremitățile fixe ale curbelor Γ și Γ'.

Traiectoria reală a sistemului fiind o extremală, ecuațiile ei se vor obține din ecuațiile variaționale Euler-Lagrange pentru funcția L

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} = 0}\,, \quad k = 1, 2, 3, \ldots f. \tag{5.5}$$

Am obținut astfel pe cale variațională ecuațiile de mișcare, care nu sînt altceva decît ecuațiile date de Lagrange în celebra sa mecanică analitică (și care pot fi deduse și diferențial pornind de la principiul lucrului mecanic virtual, sau de la ecuațiile lui Newton, prin transcrierea acestora în coordonate generalizate). Ceea ce este însă important de subliniat aici, este faptul că acest punct de vedere a fost generalizat și în teoria relativistă, precum și în electrodinamică și în mecanica cuantică, în care s-a stabilit de fapt ecuația Schrödinger, alegîndu-ne un langrangean adecvat [8], [16].

Pentru sistemele scleronome, energia totală a acestora fiind constantă, variația presupune că pe orice curbă variată energia este $H = E = \text{const.}$ (În general în enunțul principiului lui Hamilton energia nu rămînea constantă cînd se variază traiectoria). Dar problema variațională se poate formula pentru sistemele scleronome (t nu figurează), renunțînd la realizarea sincronă a punctelor omoloage de pe traiectoriile variate, specificînd însă că durata totală a parcursului să fie aceeași pentru curbe. Așadar extremități fixe $\delta q^k(t_0) = \delta q^k(t_1) = 0$, dar $(\delta t_0) = (\delta t_1) = \Delta t_0 \neq 0$. Principiul lui Hamilton cere ca pe traiectoria reală să se realizeze condiția de extremum

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q, \dot{q})\,\mathrm{d}t = 0 \tag{5.6}$$

cu condiția suplimentară ca energia totală să fie acum constantă

$$\delta \int_{t_0}^{t} E\,\mathrm{d}t = 0. \tag{5.7}$$

Așadar combinînd cele două relații

$$\int_{t_0}^{t_1} (\mathcal{L} + \Lambda E)\,\mathrm{d}t = 0. \tag{5.8}$$

Multiplicatorul Λ ia valoarea 1, așa cum se poate determina din condiția ca relația (5.8) să fie satisfăcută cînd se variază limitele integralei cu o aceeași durată τ și în acelaşi sens, astfel că durata totală a parcursului să rămînă constantă pe mai departe.

Se enunță astfel principiul lui Maupertuis

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathcal{L} + E)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{5.9}$$

sau, deoarece potenţialul cinetic este

$$\mathcal{L} = T - U \tag{5.10}$$

iar hamiltoniana coincide cu energia totală (adică cu suma dintre energia cinetică T şi potenţială U)

$$H = E \equiv T + U, \tag{5.11}$$

principiul lui Maupertuis se scrie sub forma

$$\boxed{\delta \mathcal{S} = \delta \int_{t_0}^{t_1} 2(E - U)\, \mathrm{d}t = \delta \int_{t_0}^{t_1} 2T\, \mathrm{d}t = 0}\,. \tag{5.12}$$

Funcţia S este funcţia caracteristică, sau funcţia de acţiune care în acest caz se exprimă numai prin energia cinetică. Cum după cum se ştie, energia cinetică este o formă pătratică omogenă de vitezele generalizate, aplicînd teorema lui Euler pentru funcţii omogene, se poate pune în evidenţă tocmai acţiunea maupertuisiană $2T$ din (5.12)

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} = 2T. \tag{5.13}$$

Şi cum în mecanica analitică se defineşte impulsul generalizat prin

$$p_k \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}(T - U) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}, \tag{5.14}$$

expresia funcţiei de acţiune din (5.13) poate fi scrisă în formele echivalente

$$\mathcal{S} \equiv \int_{t_0}^{t_1} 2T\, \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \sum \dot{q}_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k}\, \mathrm{d}t = \int_A^B \sum_k p_k\, \mathrm{d}q_k \tag{5.15}$$

în prima integrarea se face după timp, în a doua după poziţia punctului $P_1 = B$ mobil pe traiectorie, $P_0 = A$ fiind (fig. 6) fix.

Să-i dăm principiului lui Maupertuis şi o altă formă, anume să considerăm integrala în raport cu arcul ds al traiectoriei, variaţiile timpului fiind arbitrare. Principiul lui Maupertuis afirmă că mişcarea se realizează pe o anumită geodezică de element dσ legată de elementul ds din spaţiul configuraţiilor printr-o anumită relaţie condiţionată de (5.12).

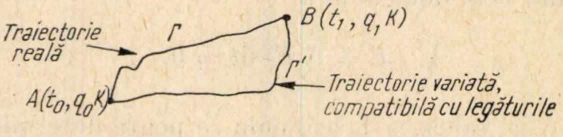


Fig. 6

Arcul elementar al unei curbe care uneşte două puncte fixe într-o varietate riemaniană este

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, \mathrm{d}\dot{x}^i\, \mathrm{d}x^k = \sum_{ik} g_{ik}\, \dot{x}^i \dot{x}^k\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}t \tag{5.16}$$

curba fiind dată parametric. Extrăgînd radicalul avem

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\sum g_{ij}\dot{x}^i \dot{x}^k}\,\mathrm{d}t \tag{5.17}$$

chiar distanţa dintre cele două puncte apropiate, iar distanţa de la punctele extremităţi A, B pe curbă va fi

$$\mathcal{J} = \int_A^B \mathrm{d}s = \int_A^B \sqrt{g_{ik}\dot{x}^i \dot{x}^k}\,\mathrm{d}t = \int_A^B \mathcal{S}(t, x, \dot{x})\,\mathrm{d}t. \tag{5.18}$$

În cazul nostru metrica este dictată de termenul $2T$ din (5.12)

$$\mathrm{d}s^2 = 2T\,\mathrm{d}t^2 \equiv \sum g_{ij}\,\mathrm{d}t^2. \tag{5.19}$$

Urmărind a trece de la dt la ds, avem

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2T} = \sqrt{2(E-U)}\,;\quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{2(E-U)}}\,;\quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2(E-U)}}\,. \tag{5.20}$$

Deci

$$\int_{t_0}^{t_1} 2T\mathrm{d}t = \int_A^B \frac{2T}{\sqrt{2(E-U)}}\,\mathrm{d}s = \int_A^B \sqrt{2(E-U)}\,\mathrm{d}s. \tag{5.21}$$

Şi prin urmare formula (5.12) devine

$$\boxed{\delta\mathcal{S} = \delta\int_A^B \mathrm{d}\sigma = \delta\int_A^B \sqrt{2(E-U)}\,\mathrm{d}s = 0}\,. \tag{5.22}$$

Astfel principiul lui Maupertuis afirmă că pentru un sistem scleronom, olonom, conservativ, problema determinării traiectoriei corespunzătoare unei anumite valori pentru energia sistemului E, este de fapt echivalentă cu problema determinării geodezicelor unui spaţiu riemannian a cărui metrică dσ *este legată de elementul de arc geometric* din spaţiul configuraţiilor (aşa cum arată (5.22)).

Să confruntăm acum cele două principii : ale mecanicii şi ale opticei geometrice. Fiecare afirmă că traiectoria este o anumită geodezică, în optică d$\sigma = n$ds fiind drumul optic, care numai pentru medii omogene $n =$ const., *se reduce la drumul geometric, deci la propagarea în linie dreaptă. Totuşi, corespondenţa celor două principii nu poate fi urmată pînă la o identificare, întrucît apar diferenţe pregnante asupra modului cum se comportă viteza în cele două cazuri*; este vorba de viteza de fază $u\,(x\,y\,z)$ în cazul principiului lui Fermat, şi de viteza corpusculară v în cazul principiului lui Maupertuis. Principiul lui Fermat afirmă

$$\delta\int_A^B \frac{\mathrm{d}s}{u(x)} = 0. \tag{5.23}$$

Or pentru mișcarea mecanică

$$(5.24)\quad L = T - U = 2T - E = 2T - \text{const.} = mv^2 - \text{const.} = mv\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} - \text{const.}$$

în particular pentru un singur corpuscul, v este chiar viteza acestuia

$$(5.25)\qquad \delta\int_A^B v(xyz)\,\mathrm{d}s = 0.$$

Desigur pentru *mișcarea liberă* $U = 0$, *și* v *este o constantă, așa că obținem mișcarea pe geodezică*

$$(5.26)\qquad \boxed{\delta\int_A^B \mathrm{d}s = 0}$$

adică *principiul mișcării rectilinii* (*inerțiale*). Comparînd cele două formulări ale principiilor se vede că *ele nu sînt identice*, ci oarecum inverse în privința legăturii dintre viteza de fază și cea a unui punct material. Tendința de a reduce optica la mecanică nu poate fi complet fundamentată (mecanicism).

Cum se pun problemele în mecanica ondulatorie? În esență se poate arăta că mecanica construită este analoagă opticei ondulatorii. Așa după cum optica geometrică este un caz limită al celei ondulatorii, tot astfel și mecanica clasică este un caz limită a celei ondulatorii. Să considerăm unda de Broglie asociată

$$(5.27)\qquad \boxed{\psi = A\mathrm{e}^{i2\pi(\vec{k}\vec{r} - \nu t)} = A\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{h}(\vec{p}\vec{r} - Et)}}$$

($\vec{k}$ vectorul de undă, $\vec{r}$ vectorul de poziție, ν frecvența, $\vec{p}$ impulsul, $E =$ energia). *Ea descrie o microparticulă liberă, deci reprezintă formularea primului principiu al mecanicii* (*principiul inerției*). Viteza de deplasare a fazei undei asociate este

$$(5.28)\qquad c' = \frac{\nu}{k} \equiv \frac{h\nu}{hk} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v}$$

ea nu coincide cu viteza corpusculului v, și descrie propagarea fazei (deci nu violează principiul relativității, deși $c' > c$, fiindcă $v < c$, căci nu este o viteză de semnal). După cum am mai menționat, viteza corpusculului $v = g$ este egală cu viteza de grup. Așadar mecanica ondulatorie stabilește un raport invers între cele două viteze (5.28).

Dacă punctele materiale se mișcă după legile mecanicii clasice și acestora li se asociază unde, atunci acestora trebuie să li se aplice principiul lui Fermat. Deci viteza de fază a undelor asociate $c' \equiv u$ trebuie să fie invers proporțională cu viteza corpusculară

$$(5.29)\qquad u = \frac{Q'}{v} = \frac{Q'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}} = \frac{Q}{\sqrt{E - U}}.$$

În particular, la mişcarea liberă

$$U = U_0 = 0. \tag{5.30}$$

La mişcarea într-un mediu $U \neq 0$, aşa că vom avea o viteză u. Raportul lor defineşte un indice de refracţie

$$n = \frac{u_0}{u} = \sqrt{\frac{E - U}{E}}. \tag{5.31}$$

Se vede *că sensul fizic al acestui indice de refracţie este legat de energia microparticulei* care trece („cu unda sa") prin două medii. Sensul constantei Q' este c^2, aşa cum arată rezultatul (5.28) Datorită relaţiei $u.v. =$ $=$ const, între unda pilot (de probabilitate) şi viteza de grup, principiul lui Fermat devine

$$\delta \int_A^B u \, \mathrm{d}s = 0 \tag{5.32}$$

şi se realizează identitatea formală cu principiul lui Maupertuis. *Se poate spune că la fel cum optica geometrică trebuie înlocuită în domenii mici prin optica ondulatorie mai adecvată naturii, la fel şi mecanica clasică trebuie înlocuită la fenomene atomice prin mecanica ondulatorie.*

Să examinăm acum corespondenţele care se pot stabili *între mecanica cuantică şi optica, de data asta ondulatorie.* În fizica clasică la dimensiuni mari ale obstacolelor, opera optica geometrică care era un caz limită al opticei ondulatorii ($\lambda \to 0$). Să prezentăm prin urmare mai întîi ecuaţiile opticei ondulatorii, şi ale cazului limită al acesteia: al propagării prin raze. Într-un mediu omogen oarecare, undele care se propagă cu viteza v au elongaţiile $\mathcal{D}(x, y, z)$ descrise prin funcţii spaţiale şi temporale, ale căror valori ascultă de ecuaţia undelor

$$\boxed{\frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial t^2} = 0.} \tag{5.33}$$

Pentru o undă armonică

$$\mathcal{D}(xyz, t) = \mathcal{D}_0(xyz) \cdot \mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{5.34}$$

ecuaţia undelor ne conduce (după simplificarea factorului temporal) la o ecuaţie numai pentru partea spaţială (unde staţionare)

$$\boxed{\Delta \mathcal{D}_0 + k^2 \mathcal{D}_0 = 0 \, ; \quad k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}} \tag{5.35}$$

$\left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right.$, numărul de undă, λ lungimea de undă$\left.\right)$. Această ecuaţie descrie difracţia şi interferenţa în medii neomogene, neomogenitatea mediilor fiind exprimată prin dependenţa vitezei de coordonate. Mediul este descris din punct de vedere optic prin indicele de refracţie

$$n(xyz) = \frac{v_0}{v(xyz)} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{k}{k_0} \tag{5.36}$$

λ_0 fiind lungimea de undă din vid. Ecuaţia propagării va fi

$$\boxed{\nabla^2 \mathcal{D}_0 + k_0^2 n^2 \mathcal{D}_0 = 0.} \tag{5.37}$$

Soluţiile acestei ecuaţii (ca şi (5.33)) sînt *unde fizice reale* (deci se ia numai partea reală a soluţiilor scrise în notaţia complexă).

Optica geometrică este un caz limită, şi ecuaţia opticei se va stabili din (5.37) presupunînd că mediul are un indice de refracţie n care variază foarte puţin pe o lungime egală cu cea a lungimii de undă λ, aşa că undele nu suferă difracţii pe aceste neomogenităţi foarte reduse. Unda s-o scriem sub forma

$$\mathcal{D}_0 = a e^{i\varphi} = a e^{ik_0 \Theta} \tag{5.38}$$

faza undei fiind $\varphi = K_0 \Theta$. Dacă lungimea de undă este mică, atunci K_0 este mare şi va servi ca parametru de comparaţie a celor două domenii. Să dezvoltăm amplitudinea şi factorul de fază după puterile lungimii de undă λ_0 (puterile inverse ale lui K_0)

$$a = a_0 + \frac{1}{K_0} a_1 + \frac{1}{K_0^2} a_2 + \dots \tag{5.39}$$

$$\Theta = \Theta_0 + \frac{1}{K_0} \Theta_1 + \frac{1}{K_0^2} \Theta_2 + \dots \tag{5.40}$$

Substituind aceste dezvoltări în (5.38), găsim forma undei

$$\mathcal{D}_0 = a e^{i\varphi} = \left(a_0 + \frac{1}{k_0} a_1 + \dots\right) e^{ik_0\left(\Theta_0 + \frac{1}{k_0}\Theta_1 + \cdots\right)} \tag{5.41}$$

iar aceasta s-o substituim în ecuaţia pentru $\mathcal{D}$, grupînd termenii de acelaşi ordin de mărime al lui K_0

$$-K_0^2 a_0 (\nabla \Theta_0)^2 + K_0^2 n^2 a_0 + O(K_0) = 0 \tag{5.42}$$

ceilalţi termeni cuprinzînd puterile superioare ale lui λ, sau de ordinul lui K_0 şi de ordin inferior nu i-am mai scris. Neglijînd puterile inferioare ale lui K_0, găsim ecuaţia care determină faza Θ în aproximaţia opticei geometrice $(\Theta \simeq \Theta_0)$:

$$\boxed{(\nabla \Theta_0)^2 \equiv \left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial z}\right)^2 = n^2(xyz)}. \tag{5.43}$$

Această ecuaţie este tocmai *ecuaţia eiconalului* care determină suprafeţele de fază constantă $\Theta_0(xyz) = \text{const.}$ în funcţie de indicele de refracţie. *Razele vor fi linii ortogonale acestor suprafeţe.*

Raporturile dintre optica geometrică şi cea ondulatorie fiind stabilite, vom mai face încă observaţia că între optica geometrică şi mecanica clasică, analogia semnalată variaţional poate fi exprimată şi dacă descriem mişcarea particulei prin ecuaţia Hamilton-Iacobi (4.13). Efectuînd acolo substituţia corespunzătoare unei mişcări cu energie constantă (4.15) :

$$\mathcal{S} = Et - s_0 (xyz) \tag{5.44}$$

ecuația mecanică capătă aspectul (4.18) pe care-l transcriem încă o dată (ecuația eiconalului)

$$\boxed{(\nabla s_0)^2 = 2m\,[E - U(xyz)]} \cdot \tag{5.45}$$

Aceasta era ecuația pentru faza s_0 asociată „undei explozive" de acțiune ; ori comparînd cu (5.44), se vede *că propagarea undelor de lungime de undă mică (K_0 mare) într-un mediu neomogen n ($x\,y\,z$), este analoagă cu mișcarea unui punct material în cîmpul de forțe U. Rolul fazei optice Θ_0 îl joacă s_0. Traiectoriile sînt ortogonale suprafeței s_0 ($x\,y\,z$)= const, așa cum razele sînt ortogonale suprafeței Θ_0 = const.* Se fixează și sensul analogic al indicelui de refracție, anume din confruntare rezultă că rolul indicelui de refracție îl are

$$n^2(xyz) = 2m[E - U(xyz)]\,; \; n = \sqrt{2m(E-U)} \tag{5.46}$$

(adică întocmai cum am stabilit și pe cale variațională (5.22))

$$\delta\int_A^B \sqrt{2(E-U)}\,\mathrm{d}s = \delta\int_A^B n\,\mathrm{d}s = 0 \tag{5.47}$$

Comparînd (5.43) cu (5.45), trebuie să semnalăm și o diferență dimensională: n este un număr pe cînd $2m\,(E-U)$ are dimensiuni! Pentru a putea identifica ecuația mișcării unui punct cu ecuația undelor, trebuie să mai apară încă un factor în plus. Din motive de ordin general el trebuie să fie legat de constanta h. Ecuația ondulatorie (5.37) cu n luat din (5.46) capătă o formă foarte asemănătoare cu ecuația Schrödinger

$$\nabla^2\mathcal{D}_0 + K_0^2 2m\,[E-U]\,\mathcal{D}_0 = 0\,; \quad \nabla^2\Psi + \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 2m[E-U]\Psi = 0. \tag{5.47'}$$

Să comparăm acum *optica ondulatorie cu mecanica cuantică,* a cărei ecuație de propagare (a undelor de materie) este

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + U(xyz)\Psi. \tag{5.48}$$

Pentru stările staționare

$$\Psi(xyz,t) = \Psi_0(xyz)\,\mathrm{e}^{-i\frac{E}{\hbar}t} \tag{5.49}$$

obținem

$$\boxed{\nabla^2\Psi_0 + \frac{2m}{\hbar^2}\,[(E-U)]\,\Psi_0 = 0} \tag{5.50}$$

această ecuație este analoagă lui (5.35), căci în definitiv *ecuația lui Schrödinger joacă același rol fizic ca ecuația lui D'Alembert* (descriind cîmpul probabilității; unda asociată). Dacă într-o anumită regiune a spațiului forţele lipsesc (vid) $U = U_0 = \text{const.}$, vom nota termenul din dreapta din (5.50) cu K_0^2 (numărul de „unde"):

$$K_0^2 = \frac{2m}{\hbar^2}[E - U_0] = \frac{2m}{\hbar^2} \cdot E \tag{5.51}$$

(U_0 a fost ales zero) şi vom introduce prin definiţie un *indice de refracţie cuantic*, în raport cu acea regiune, prin mărimea

$$n^2 = \frac{E-U}{E-U_0} = \frac{K^2}{K_0^2} = \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \tag{5.52}$$

care după cum se vede are un sens de raport energetic. Atunci ecuaţia lui Schrödinger (5.50) coincide cu ecuaţia opticei ondulatorii (5.37)

$$\boxed{\nabla^2 \Psi_0 + K_0^2 n^2 = 0} \cdot \tag{5.53}$$

Acesta este deci sensul fizic al indicelui de refracţie al „undelor de Broglie", denumire de fapt metaforică, păstrată încă din motive de intuitivizare (ca şi nodurile şi ventrele funcţiei Ψ). Se vede că această definiţie coincide cu (5.31) construită din analogia optică geometrică-mecanică clasică-mecanică cuantică. Trecerea microparticulelor prin diferite gropi de potenţial poate fi considerată ca o reflexie a undelor, pe pereţi, microparticulele avînd o comportare analoagă cu undele luminoase la suprafaţa de separare a două medii (se definesc coeficienţi de reflexie şi de transparenţă) [3], [17].

Apropierea pe care am înfăţişat-o între *optica ondulatorie şi mecanica cuantică este numai aproximativă*. În definitiv asimilarea propagării undei optice cu cea a unei raze, deducerea (5.43) din (5.42) a presupus o anumită aproximaţie. Anume am neglijat termenii $O(K_0)$ adică $K_0 \nabla^2 \Theta_0$ faţă de $K_0^2 (\nabla \Theta_0)^2$. De pildă pentru o singură dimensiune valabilitatea aproximaţiei este

$$K_0^2 \left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial x} \right) \gg K_0 \left| \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial x^2} \right| \tag{5.54}$$

Să o prezentăm prin lungimea de undă. Din (5.43) se poate obţine relaţia dintre indicele de refracţie n şi Θ, fază; pentru o singură dimensiune

$$n(x) = \frac{\partial \Theta_0}{\partial x} = \frac{K}{K_0}; \quad K_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial x} = K = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \frac{\partial K}{\partial x} = K_0 \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial x^2} \tag{5.55}$$

încît (5.54) devine: $K^2 \gg \frac{\partial k}{\partial x}$ şi trecînd la $\lambda = \frac{2\pi}{K}$

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}x} = \frac{2\pi}{\lambda^2} \left| \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} \right|; \quad K^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \gg \frac{2\pi}{\lambda^2} \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x}, \quad \text{adică} \quad \boxed{2\pi \gg \left| \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} \right|} \cdot \tag{5.56}$$

Aşadar *asimilarea opticei ondulatorii ca un proces geometric cere o variaţie lentă a lungimii de undă cu coordonata*. Remarcăm, aşa cum era de aşteptat, că această condiţie coincide cu (4.40) care redă trecerea de la ecuaţia lui Schrödinger la cea a lui Hamilton-Iacobi. Condiţia (5.56) este legată în esenţă de interacţia microparticulei, căci după cum se vede din (5.52), indicele de refracţie $\left(\text{şi o dată cu el şi } \lambda = 2\frac{\pi}{k}\right)$ variază sensibil numai în acea regiune din spaţiu în care se schimbă potenţialul U, (deci în domeniul a al forţelor). Dacă raza acestor forţe este mare în comparaţie cu $\lambda (a \gg \lambda)$, atunci pe distanţa λ atît U cît şi n vor varia puţin, aşa că condiţia devine de fapt mai simplă, mai fizică :

$$\boxed{\lambda \ll a}\,. \tag{5.57}$$

De pildă pentru particulele α difuzînd pe atom $\lambda = \frac{h}{m_\alpha v_\alpha}$, este mult mai mică decît $a \sim 10^{-8}$ cm ; nu însă şi pentru difuzia pe nucleu.

Desigur *aceste analogii şi posibilităţi de comparare aproximativă prezintă o importanţă practică şi principială, dar ele nu îngăduie a reduce esenţa mişcării cuantice la alte forme de mişcare clasică. Ecuaţia lui Schrödinger este principial nouă*, ea nu coincide cu nici una din ecuaţiile stabilite pentru propagarea undelor în fizica precuantică. În definitiv şi sub aspect formal aceste ecuaţii erau de ordinul doi în raport cu timpul, pe cînd ecuaţia lui Schrödinger fiind nerelativistă, *este de ordinul unu*. Apoi ea admite soluţii în general (şi în principiu) *complexe*, soluţiile reale fiind numai în condiţii cu totul particulare acceptabile. *Condiţiile la limită* (*condiţiile standard*) *sînt apoi cu totul specifice acestei ecuaţii, ele* reflectînd esenţa mişcării cuantice : propagarea unui roi, descrierea unei comportări probabiliste, atît pentru o microparticulă cît şi pentru un sistem (deci o ,,undă'' multidimensională). Analogiile semnalate permit să se contureze raporturile mecanicii cuantice cu celelalte domenii, insistînd în egală măsură asupra apropierilor ca şi asupra deosebirilor ireductibile, deosebiri cu caracter principial, de esenţă.

VI. CORESPONDENŢA DINTRE MECANICA CUANTICĂ ŞI TEORIA SEMICUANTICĂ

Dacă lungimea de undă asociată este mică în comparaţie cu dimensiunile care în concret înscriu proprietăţile sistemului, comportarea microparticulei păstrează numai o parte din atributele sale eminamente cuantice. Fără a avea o comportare clasică (reductibilă la traiectoria parcursă cu energie continuă, microobiectul are o comportare care poate fi numită *cvasiclasică* sau mai bine *cvasicuantică*, deoarece persistă unele proprietăţi complet de neînţeles clasic — nivele de energie. *Stările spectrului discret corespunzătoare unor valori n mari au un caracter cvasicuantic, căci numărul de ordine al stării n determină numărul de zerouri al funcţiei proprii* (aşa cum se arată cu toată rigoarea în mecanica cuantică [10], [19], iar *distanţa dintre nodurile vecine coincide ca ordin de mărime cu lungimea de undă asociată*). Aşa că la n mari, această distanţă este mică, şi deci lungimea de undă este mică în comparaţie cu dimensiunile domeniului mişcării. Fizic, aşa cum arată datele de spectroscopie, *nivelele sînt foarte apropiate, oferind o imagine aproape continuă.*

Sistemele „cvasiclasice'' vor fi descrise de o aproximare a ecuației lui Schrödinger

$$\sum_s \frac{\hbar^2}{2m_s} \Delta_s \Psi + (E - U)\Psi = 0. \tag{6.1}$$

Funcția de undă pentru aceste sisteme va fi de forma (4.30)

$$\boxed{\Psi \simeq \Psi_{\text{cvasicl.}} = e^{(1/\hbar)\cdot \mathcal{S}}} \tag{6.2}$$

așa că obținem pentru $\mathcal{S}$ o ecuație

$$\sum_s \frac{1}{2m_s} (\nabla_t \mathcal{S})^2 - \sum_s \frac{i\hbar}{2m_s} \Delta_s \mathcal{S} = E - U. \tag{6.3}$$

Soluționarea acesteia o vom căuta dezvoltînd pe $\mathcal{S}$ în serie după puterile lui $\hbar$, fiecare termen al seriei indicîndu-ne un anume grad de cvasiclasicitate (4.34)

$$\boxed{\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \frac{\hbar}{i}\mathcal{S}_1 + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \mathcal{S}_2 + \ldots} \tag{6.4}$$

Caracteristicile esențiale ale aproximației le vom urmări analizînd mișcarea pe o singură dimensiune a unei cvasimicroparticule și procedînd la o iterație.

Ecuația de mișcare unidimensională va fi

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{d\mathcal{S}}{dx}\right)^2 - \frac{i\hbar}{2m}\left(\frac{d^2\mathcal{S}}{dx^2}\right) = E - U(x) \tag{6.5}$$

În prima aproximație $\mathcal{S}$ se reduce la $\mathcal{S}_0$ iar în ecuație se neglijează termenul care conține pe $\hbar$. Ecuația mișcării devine

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{d\mathcal{S}_0}{dx}\right)^2 = E - U(x). \tag{6.6}$$

Soluționarea ei ne dă

$$\boxed{\mathcal{S}_0 = \pm \int \sqrt{2m[(E - U(x)]}\, dx}\,. \tag{6.7}$$

Acest rezultat era de așteptat, căci observăm că expresia de sub integrală este impulsul clasic. Acest rezultat clasic este în deplină concordanță cu expresia la limită pentru funcția de undă (4.30)

$$\boxed{p_{\text{clasic}} = \sqrt{2m(E - U)}\,; \quad \mathcal{S}_0 = \pm \int p\, dx\,; \quad p = \frac{d\mathcal{S}}{dx}}\,. \tag{6.8}$$

Neglijarea făcută este legitimă numai dacă cel de al doilea termen din membrul stîng al ecuaţiei noastre (6.5) este mic în comparaţie cu primul

$$\hbar\cdot\left|\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{S}}{\mathrm{d}x^2}\Big/\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{S}^2}{\mathrm{d}x}\right)\right|\ll 1 \tag{6.9}$$

ori cum $\frac{\mathrm{d}\mathcal{S}}{\mathrm{d}x}=p$, avem condiţia deja cunoscută:

$$\left|\frac{\mathrm{d}\lambdabar}{\mathrm{d}x}\right|\ll 1\,;\ \lambdabar\equiv\lambda/2\pi \tag{6.10}$$

pentru lungimea de undă asociată $\lambda(x)=2\pi\hbar/p(x)$. Această condiţie cantitativă poate fi numită de *cvasiclasicitate* (4.40). Ea prezintă şi un alt aspect în afară de condiţionarea ca lungimea de undă să varieze puţin pe distanţe de acelaşi ordin de mărime ca ea. Anume să punem în evidenţă forţa clasică care acţionează din partea cîmpului exterior $F=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{2m(E-U)}=\frac{-m}{\sqrt{2m(p-U)}}\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}= \tag{6.11}$$

$$=\frac{-m}{p}\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\equiv\frac{mF}{p}.$$

Cum $\lambda=\frac{2\pi\hbar}{p}$ condiţia (6.10) înseamnă de asemenea

$$\frac{m\hbar\,|\mathcal{F}|}{p^3}\ll 1 \tag{6.12}$$

Astfel aproximaţia cvasiclasică devine inaplicabilă la impulsuri prea mici, care scad mult numitorul inegalităţii indiferent de forţă. De pildă o asemenea situaţie se prezintă *în apropierea punctelor de întoarcere determinate de egalitatea $p(x)=0$, adică de $E=U(x)$ şi unde clasic particula s-ar opri pentru ca să-şi schimbe apoi sensul mişcării. În aceste poziţii aproximarea cvasiclasică este complet inadecvată* căci cu $p\to 0$, atunci şi lungimea de undă tinde spre infinit, $\lambda\to\infty$, aşa că nu poate fi în nici un caz mică. În afara acestor cazuri, mişcarea poate fi descrisă prin intermediul lui $S=\mathcal{S}_0(x)$, aceasta fiind partea de acţiune independentă de timp; acţiunea mecanică totală este $\mathcal{S}=-Et\pm\int p\mathrm{d}x$ şi termenul $\mathcal{S}_t=-Et$ lipseşte aici deoarece ecuaţia studiată se referă la stări staţionare (funcţia de undă Ψ nu depinde de timp; mişcarea este condiţionată doar de s_0 din (4.15)). Să examinăm mai departe aproximările. Termenii de ordinul întîi în $\hbar$ din (6.5) se menţin într-o ecuaţie diferenţială în care vor apare $\mathcal{S}_0$ şi $\mathcal{S}_1$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{S}_0}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathcal{S}_1}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{2}\ \frac{\mathrm{d}^2\mathcal{S}_0}{\mathrm{d}x^2}=0. \tag{6.13}$$

Integrînd se obţine

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{S}_1}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\mathcal{S}}{\mathrm{d}x^2}}{\dfrac{2\mathrm{d}\mathcal{S}_0}{\mathrm{d}x}} \equiv -\frac{\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}}{2p} \tag{6.14}$$

adică în definitiv

$$\mathcal{S}_1 = -\frac{1}{2}\ln p\,;\quad p \equiv \sqrt{2m(E-U)} \tag{6.15}$$

sau

$$\ln p = -2\mathcal{S}_1\,;\quad p = \mathrm{e}^{-2\mathcal{S}_1}\quad p^{-1/2} = \mathrm{e}^{\mathcal{S}_1}. \tag{6.16}$$

Funcţia de undă (6.2) va fi în acest caz

$$\Psi = \Psi_{\text{cvazicl}} = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}} \simeq \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\left(\mathcal{S}_0 + \frac{\hbar}{i}\mathcal{S}_1\right)} = \mathrm{e}^{\pm\frac{i}{\hbar}\int p\mathrm{d}x + \mathcal{S}_1} = \tag{6.17}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathcal{S}_1}\cdot \mathrm{e}^{\pm\frac{i}{\hbar}\int p\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{p}}\,\mathrm{e}^{\pm\frac{i}{\hbar}\int p\mathrm{d}x}.$$

De fapt, cu toată rigoarea, trebuie să scriem funcţia Ψ ca pe o combinaţie de termeni (6.17)

$$\boxed{\Psi = \mathcal{C}_1\frac{1}{\sqrt{p}}\,\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int p\mathrm{d}x} + \mathcal{C}_2\frac{1}{\sqrt{p}}\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\int p\mathrm{d}x}}\,. \tag{6.18}$$

Probabilitatea de a găsi cvasimicroparticula în punctele de coordonate cuprinse între x şi $x + \mathrm{d}x$ este dată de $|\Psi|^2$ şi ea trebuie să fie invers proporţională cu $p = mv$, deci proporţională cu $1/p$, căci în mişcarea clasică timpul necesar particulei ca să străbată segmentul $\mathrm{d}x$ este invers proporţional cu viteza. Factorul $1/\sqrt{p}$ din funcţia de undă îşi are deci un înţeles intuitiv. *Funcţia descrie însă mişcarea şi în punctele clasic innaccesibile*, unde $E < U(x)$ şi deci $p \equiv \sqrt{2m(E-U)}$ *este imaginar, şi nu mai poate avea înţelesul unui impuls clasic*, ci pur şi simplu este o mărime de fază. În acest caz $p(x)$ fiind pur imaginar, exponenţii sînt reali şi pentru aceste domenii funcţia se scrie

$$\Psi = \mathcal{C}_1'\frac{1}{\sqrt{|p|}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{\hbar}\int |p|\,\mathrm{d}x} + \mathcal{C}_2'\frac{1}{\sqrt{|p|}}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{\hbar}\int |p|\,\mathrm{d}x}\,. \tag{6.19}$$

Considerînd şi termenii de ordinul $\hbar^2 \neq 0$, vom primi din (6.5) o ecuaţie cuprinzînd pe $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1$ (deja calculate în (6.7) şi (6.15) şi pe $\mathcal{S}_2$ din integrarea căreia se poate obţine funcţia de undă. Nu vom mai da calculul acestei funcţii, ne mărginim a spune că în structura lor apar (în factorii dinaintea exponenţialelor) termeni de ordin superior în $\hbar$ [5]. Iată şi rezultatul în aproximaţia a treia

$$(6.19') \qquad \Psi = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}} \simeq \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_1} (1 - i\hbar\mathcal{S}_2) =$$

$$= \frac{\text{const.}}{\sqrt{p}} \left[1 - \frac{im\,\hbar}{4}\,\frac{\mathcal{F}}{p^3} - \frac{i\hbar m^2}{8}\int \frac{\mathcal{F}^2}{p^5}\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int p\mathrm{d}x}.$$

Să comparăm regimul de mişcare descris în aproximaţia cvasiclasică (cvasicuantică) cu cel pe care-l poate descrie mecanica clasică. În acele puncte, a, pentru care $U(a) = E$, o particulă clasică trebuie să se oprească, apoi să se întoarcă înapoi : *punctul a este un punct de întoarcere, iar clasic este de neconceput prezenţa particulei în spaţiul* $U > E$ domeniu pe care-l presupunem, pentru a fixa ideile, situat la dreapta lui a (deci pentru $x > a$)

$$(6.20) \qquad \boxed{U(a) = E\,;\; p = 0}$$

Funcţia de undă cuantică îngăduie o mişcare şi în acest domeniu, forma funcţiei de undă fiind de aşa natură încît indică o amortizare înspre interiorul acestui sector clasic „prohibit". La o distanţă suficient de mare de punctul de introducere, conform cu (6—19), funcţia trebuie să prezinte o atenuare redată de primul termen. Aşa că pentru $x > a$, trebuie pus

$$(6.21) \qquad \Psi = \Psi_{\mathrm{I}} = \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{p}}\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\left|\int_a^x p\mathrm{d}x\right|\right), \quad x > a.$$

Pentru domeniul $x < a$ (deci la stînga punctului de întoarcere) funcţia de undă trebuie determinată printr-o combinaţie a celor două soluţii cvasiclasice ale ecuaţiei de undă (principiul suprapunerilor). Precizarea funcţiei de undă se va face analizîndu-i comportarea la limita a, ceea ce va determina coeficienţii C_1, C_2, încît în final nu va mai apare decît unul singur (ca şi în (6.21), determinabil prin normare) :

$$(6.22) \quad \Psi = \Psi_{\mathrm{II}} = \frac{\mathcal{C}_1}{\sqrt{p}}\exp\left(\frac{1}{\hbar}\int_a^x p\mathrm{d}x\right) + \frac{\mathcal{C}_2}{\sqrt{p}}\exp\left(\frac{-i}{\hbar}\int_x^a p\mathrm{d}x\right) \quad x < a.$$

Pentru a determina coeficienţii, trebuie urmărită variaţia funcţiei de undă din domeniul valorilor $x - a$ pozitive (unde funcţia de undă am fundamentat-o fizic prin (6.21)), spre domeniul valorilor $x - a$ negative. Efectuînd această trecere, va trebui să trecem şi prin vecinătatea punctului de oprire, dar acolo aproximaţia cvasiclasică nu este valabilă, aşa că în mod strict ar trebui să considerăm soluţiile exacte ale ecuaţiei lui Schrödinger, şi acestora să le facem aproximaţiile în vecinătatea punctului a.

Dar obţinerea acestor soluţii exacte poate fi eventual, dificilă. Stabilirea condiţiilor la limită (şi deci construirea unei funcţii cvasiclasice adecvate în domeniul $x < a$), poate fi făcută rămînînd la raţionamente cvasiclasice. Să considerăm formal funcţia $\Psi(x)$ ca o funcţie de variabila complexă x, deci $x \rightarrow \mathcal{E} = X + iY$ şi să efectuăm trecerea de la $x-a$ la $x-a$ negativ pe un traseu situat la suficientă depărtare de punctul critic a, într-un domeniu care să îndeplinească formal condiţia de cvasiclasicitate (deci unde (6.12) este mereu valabilă). Vom avea de urmărit variaţia funcţiei de undă $\Psi(\mathcal{E})$, ocolind punctul a de la dreapta la stînga de-a lungul unei circumferinţe de rază mare în semiplanul superior al lui $x \rightarrow \mathcal{E}$, complex (fig. 7); am presupus, spre a fixa ideile, că domeniul $U < E$ este situat la stînga punctului de întoarcere.

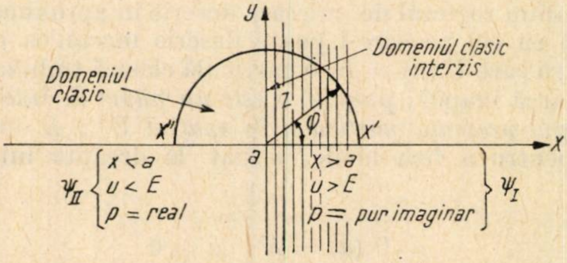


Fig. 7.

Funcţia care trebuie urmărită este (6.21), pe care o scriem în detaliu

$$\Psi(x) = \frac{c}{2}\left[2m(U-E)^{-1/4} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_a^x \sqrt{2m(U-E)}\,\mathrm{d}x\right)\right. \tag{6.23}$$

şi se poate intrevede de la început că după parcurgerea drumului indicat, ea trebuie să treacă în funcţia (6.22) şi anume în membrul al doilea, întrucît de-a lungul drumului, acest termen este mai mare în comparaţie cu primul (care se amortizează exponenţial pe măsură ce pătrundem în primul pătrar din semiplanul complex). Or (6.23) cuprinde la diferite puteri mărimea

$$\xi \equiv p^2 = 2m(E-U) = 2m(E-U)\,\mathrm{e}^{i\Psi} = \eta\,\mathrm{e}^{i\Psi}\,;\ \xi_{\mathrm{I}} = p^2 < 0\,;\ \xi_{\mathrm{II}} = p^2 > 0 \tag{6.24}$$

care este un număr real, aşa că în domeniul I faza acestuia va fi $\Psi' = 0$ iar în domeniul II, $\Psi' = \pi$, căci mărimea schimbă de semn (cînd x variază de-a lungul acestui drum, faza lui $U-E$ şi a diferenţei $x-a$ suferă o creştere cu π). Observăm că în (6.23) apar

$$p^{1/2} = \xi^{-1/4} = \eta^{-1/4}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\Psi'}{4}} \quad \text{şi} \quad p = \xi^{1/2} = \eta^{1/2}\,\mathrm{e}^{i\Psi'/2} \tag{6.25}$$

aşa că în domeniul II, unde $\Psi' = \pi$, mărimile constituiente devin

$$p^{-1/2} = \xi^{-1/4} = \eta^{-1/4}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \text{şi} \quad p = \xi^{1/2} = \eta^{1/2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}\,. \tag{6.26}$$

Deci (6.23) devine

$$(6.27)\qquad \Psi=\Psi_{II}=\left(\frac{\mathcal{C}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\eta^{-1/4}\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_a^x \eta^{1/2}e^{-i\frac{\pi}{2}}\,dx\right)=$$

$$=\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\eta^{-1/4}\exp\ -\frac{i}{\hbar}\int_a^x \eta^{1/2}\,dx.$$

Să revenim acum la funcția de variabilă reală, deci să luăm numai partea reală a rezultatului (6.27) în care revenim la mărimea p:

$$(6.28)\qquad \Psi_{II}=\left(\frac{\mathcal{C}}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{p}}\,e^{-i\left[\frac{1}{\hbar}\int_a^x p\,dx+\frac{\pi}{4}\right]}=\frac{\mathcal{C}}{2}\frac{1}{\sqrt{p}}\,e^{-i\mathcal{E}}=\alpha e^{-i\beta}=$$

$$=\alpha\,[\cos(-\beta)+i\sin(-\beta)]=\alpha\,[\cos\beta-i\sin\beta].$$

Partea reală va fi

$$(6.29)\qquad \mathrm{Re}\ \frac{\mathcal{C}}{2}\ \frac{1}{\sqrt{p}}\,e^{-i\left(\frac{1}{\hbar}\int_a^x p\,dx+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\mathcal{C}}{2}\ \frac{1}{\sqrt{p}}\cos\left[\frac{1}{\hbar}\int_a^x p\,dx+\frac{\pi}{4}\right].$$

Dacă schimbăm între ele limitele de integrare (pentru a avea și la stînga o ordonare a valorilor lui x) semnul argumentului lui (6.29) se va schimba; și cum

$$(6.30)\qquad \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)=\sin\left(-\alpha+\frac{\pi}{4}\right),$$

funcția de undă pentru domeniul $x < a$ poate fi prezentată și prin sinus, sub forma

$$(6.31)\qquad \boxed{\Psi=\Psi_1=\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{p}}\cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_a^x p\,dx+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{p}}\sin\left(\frac{1}{\hbar}\int_x^a p\,dx+\frac{\pi}{4}\right)x<a}\,.$$

Dacă în locul situației redată în figura 7 domeniul $U < E$ ar fi fost situat la dreapta punctului de întoarcere (notat acum cu $x = b$), în loc de (6.31) se va obține:

$$(6.32)\qquad \Psi_I=\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{p}}\cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_x^b p\,dx+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{p}}\sin\left(\frac{1}{\hbar}\int_b^x p\,dx+\frac{\pi}{4}\right).$$

Astfel domeniului $x > a$ îi corespunde funcția Ψ_I (6.23) iar aceasta devine în intervalul $x < a$ Ψ_{II} (6.31). H. Kramers (1926) a arătat că aceste soluții sînt într-adevăr formele aproximative pe care le ia soluția exactă a ecuației lui Schrödinger la dreapta și la stînga punctului de întoarcere.

În natură, deosebit de remarcabile sînt situațiile cînd o microparticulă este obligată *să oscileze într-o anumită groapă de potențial* (*de pildă în atom*) *executînd o mișcare finită, într-un domeniu mărginit de două* *puncte de întoarcere*. Clasic ea va oscila în acest domeniu $b \leqslant x \leqslant a$ mărginit, iar cvasiclasic se poate stabili o condiție de cuantificare a energiei care regăsește în esență rezultatele teoriei cvasiclasice a lui Bohr-Somerfeld [20]. Și astfel, în sensul evoluției ideilor în fizică, se justifică principial succesele repurtate de teoria cvasicuantică la vremea ei. De asemenea remarcabil este și cazul cînd peretele potențial este unilateral dar foarte mare (cînd este infinit de mare, la dreapta $\Psi = 0$, pentru $x > a$ iar pentru $x < a$ este valabilă funcția de undă cvasiclasică) :

$$\Psi = \frac{C}{\sqrt{p}} \sin \frac{1}{\hbar} \int_a^x p \mathrm{d}x ; \; x < a ; \; \Psi = 0 \; x > a. \tag{6.32'}$$

Să urmărim oscilația cvasimicroparticulei închisă în groapa de potențial cu punctele de întoarcere $x = a$ și $x = b$. Clasic particula ar oscila în acest domeniu, mișcarea periodică avînd perioada egală cu durata mișcării de la b la punctul a și înapoi:

$$T_{\mathrm{clas}} = 2 \int_b^a \mathrm{d}t = 2 \int_b^a \frac{\mathrm{d}x}{v} = 2m \int_b^a \frac{\mathrm{d}x}{p}, \tag{6.33}$$

v fiind viteza particulei (fig. 8).

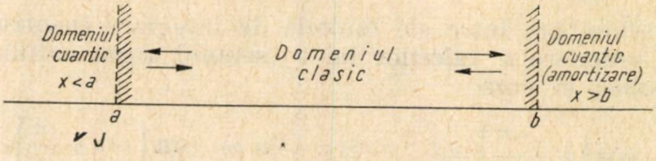


Fig. 8

Cuantic vom folosi condiția (6.32) pentru dreapta punctului b, deci

$$\Psi = \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{p}} \sin \left(\frac{1}{\hbar} \int_b^x p \mathrm{d}x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{p}} \sin \varphi_1 \tag{6.34}$$

iar pentru domeniul din stînga punctului $x = a$, obținem din (6.31) aceeași funcție sub forma

$$\Psi = \frac{\mathcal{C}'}{\sqrt{p}} \sin \left(\frac{1}{\hbar} \int_x^a p \mathrm{d}x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{p}} \sin \varphi_2. \tag{6.35}$$

Aceste două expresii trebuie să descrie mișcarea în întregime, deci cele două expresii trebuie să coincidă în tot domeniul: suma fazelor lor (care este un număr întreg constant) va trebui să fie multiplu de π

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1}{\hbar} \int_b^x p \mathrm{d}x + \frac{1}{\hbar} \int_x^a p \mathrm{d}x + 2 \frac{\pi}{4} = \tag{6.36}$$

$$= \frac{1}{\hbar} \int_b^a p \mathrm{d}x + \frac{\pi}{2} = k\pi \equiv (n + 1) \pi.$$

De aici

$$\boxed{2\int_b^a p\mathrm{d}x \equiv \oint p\mathrm{d}x = 2\pi\hbar\,(n+1/2) = 2\pi\hbar n + 2\pi\frac{\hbar}{2}} \tag{6.37}$$

integrala fiind extinsă la perioada completă a mişcării clasice a particulei. *Această condiţie determină stările staţionare ale cvasimicroparticulei.* Se remarcă îndată că (6.37) nu este altceva decît binecunoscuta *regulă de cuantificare a lui Bohr şi Somerfeld din vechea teorie cuantică* (teoria cuantelor aplicată la atom). Desigur mai apare un factor suplimentar neglijat în teoria lui Bohr şi care în esenţă redă *energia de nul, specific cuantică.* Existenţa lui în formulă provine din ecuaţia cuantică pe care am aproximat-o, ţinînd astfel seama (aproximativ) de dualitate (deci de nedeterminare), care condiţionează în esenţă energia de zero $\frac{h\nu_0}{2}$. În teoria lui Bohr se apela la noţiunile de traiectorie şi la cuantă nu însă şi la dualitate.

Numărul n întreg descrie stările staţionare. El poate fi considerat chiar numărul de ordine al stării, căci el este egal cu numărul de zerouri al funcţiei de undă. Într-adevăr, faza funcţiei din (6.34) creşte de la valoarea φ_1 pe care o are în $x = b$ pînă la valoarea φ_2 din $x = a$. Din (6.36) putem compara φ_1 cu φ_2 şi se observă că diferenţa de fază (care este afectată de numărul cuantic n) creşte de la $\pi/4$ în punctul $x = b$ pînă la valoarea $(n + 3/4)\pi$ în $x = a$. Aşa că sinusul se anulează în acest interval de n ori. În afara intervalului $b \leqslant x \leqslant a$, funcţia de undă se amortizează monoton, întrucît nu are zerouri.

Aproximaţia clasică, deci şi regula de cuantificare (6.37), se aplică numai la valori n foarte mari (spectrul cvasicontinuu). Dar este interesant de observat că pot exista cazuri cînd expresia exactă a nivelelor energiei în funcţie de numărul cuantic n, $E(n)$ obţinută din soluţionarea ecuaţiei lui Schrödinger exactă, îşi păstrează întocmai aspectul şi la numere n foarte mari. În acest caz regula de cuantificare (6.37) deşi aplicabilă de fapt la n mari, dă expresia exactă pentru funcţia $E(n)$. Aceste cazuri sînt remarcabile ; anume : nivelele de energie în cîmp coulombian şi cele ale oscilatorului armonic

$$E_{\text{coul.}}(n) = -\frac{m(Ze^2)^2}{2\hbar^2}\cdot\frac{1}{n^2}\,;\quad E_{\text{oscil}} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega. \tag{6.38}$$

Or, aceste cazuri au fost studiate încă în teoria cuantică premergătoare mecanicii cuantice consecvente.

Funcţia de undă a mişcării cvasiclasice (6.23, 6.31) mai conţine o constantă $\mathcal{C}$ care poate fi determinată din condiţia de normare

$$\int|\Psi^2|\,\mathrm{d}x=1\,;\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathcal{C}^2}{p}\left[\sin\left(\frac{1}{\hbar}\int p\mathrm{d}x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2\mathrm{d}x\simeq \tag{6.39}$$

$$\simeq\frac{\mathcal{C}^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{p(x)}\simeq\frac{\mathcal{C}^2}{2}\int_b^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2m(E-U(x))}}=1.$$

De fapt integrarea se poate face numai în intervalul $b \leqslant x \leqslant a$, deoarece în exterior $\Psi(x)$ se amortizează exponențial. În (6.34) argumentul lui sinus este o funcție cu rapidă variație, așa că putem *înlocui* aproximativ patratul sinusului prin valoarea sa medie $\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1/2$. Se poate astfel calcula constanta C; o vom exprima prin comparație cu frecvența mișcării periodice clasice (căci integrala care apare are clasic înțelesul din (6.33)):

$$\text{(6.40)} \quad \int |\Psi^2|\, \mathrm{d}x \simeq \frac{\mathcal{C}^2}{2} \int_b^a \frac{\mathrm{d}x}{p(x)} = \frac{\mathcal{C}^2}{2}\, \frac{T}{2m} = \frac{\pi \mathcal{C}^2}{\omega . 2m} = 1\,; \; \mathcal{C} = \sqrt{\frac{2\,m\,\omega}{\pi}}$$

$$\text{(6.41)} \quad \Psi \cong \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{p}} \sin \frac{1}{\hbar} \int_b^x p\, \mathrm{d}x + \frac{\pi}{4} \equiv \sqrt{\frac{2m\omega}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{mv}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_b^x p \mathrm{d}x + \frac{\pi}{4}\right) \equiv$$

$$\equiv \sqrt{\frac{2\omega}{\pi v}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_b^x p \mathrm{d}x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Aceasta este funcția cvasiclasică gata normată; frecvența $\omega = \frac{2\pi}{T}$ pe care am introdus-o, $\omega = \pi 2 \nu$, este de fapt diferită pentru diferitele nivele de energie (așa cum arată și ultima relație din (6.39).

Comportarea cvasiclasică a microparticulei ne arată că numărul stărilor cuantice posibile poate fi „numărat" prin n, conform condiției (6.37). Această numărare a stărilor cuantice posibile se exprimă intuitiv în spațiul fazelor, spațiu în care condiția (6.37) are un sens fizic simplu, utilizat de altfel la începuturile mecanicii cuantice vechi. Integrala $\oint p \mathrm{d}x$ este egală cu suprafața cuprinsă de curba din planul p și x, deci din spațiul fazelor (pentru o singură particulă el s-a redus la un plan). Această suprafață s-o împărțim în celule de arie $\mathcal{A} = 2\pi\hbar = h$; condiția (6.38) ne arată că se obțin n celule $\left(\text{abstracție de termenul de nul } \mathcal{A}_0 = \frac{2\pi\hbar}{2}\right)$. Acest număr cuantic ne arată că fiecărei stări cuantice îi corespunde o celulă din spațiul fazelor de arie $\mathcal{A}$ (spațiul celular /„fibrat" fig. 9). Numărul de stări raportat la elementul de volum $\mathrm{d}\mathcal{V} = \mathrm{d}p . \mathrm{d}x$ din spațiul fazelor este

$$\text{(6.42)} \qquad \mathrm{d}\mathcal{V} = \mathrm{d}\mathcal{N}\mathcal{A}\,; \; \mathrm{d}\mathcal{N} = \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}x'}{\mathcal{A}} = \frac{\Delta p \Delta x}{2\pi\hbar} = \Delta N$$

și cum $\hbar \neq 0$, aria acestor celule nu poate fi făcută oricît de mică, așa că vom nota mărimile prin Δ. Exprimat prin lungimi de undă asociată $k = \frac{p}{\hbar} = \frac{2\pi}{\lambda}$, acest număr ΔN se scrie fără $\hbar$:

$$\text{(6.43)} \qquad \boxed{\Delta N = \frac{\Delta p \Delta x}{2\pi\hbar} = \frac{\Delta k \Delta x}{2\pi}\,.}$$

Acest rezultat redă o proprietate ondulatorie, care poate fi înţeleasă şi clasic. ΔN indică numărul de ,,oscilaţii'' (de fapt de stări de mişcare), intervalul ΔK_x referindu-se la numărul de lungimi de undă asociate care se pot afla într-un element de volum din spaţiul fazelor $\Delta\mathcal{V}$.

Acest element de volum, în virtutea relaţiilor de nedeterminare, nu poate fi făcut oricît de mic (el nu este infinitezimal, ci finit $\Delta\mathcal{V}$). ΔN

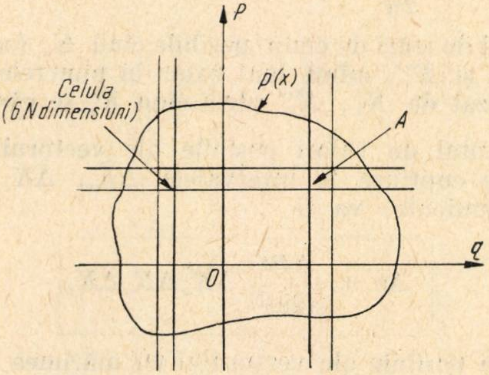


Fig. 9

arată astfel numărul oscilaţiilor proprii staţionare ale unui cîmp de unde (asociate), el descrie deci ponderea statistică.

Acest rezultat care a fost stabilit pe cale semiclasică, ţine de absolutizarea aspectului ondulatoriu al cvasimicroparticulei căci el se obţine în mod direct dacă se calculează numărul oscilaţiilor de orice natură care se pot stabili într-o cavitate (radiaţia liberă). Într-adevăr, considerînd volumul unui paralelipiped de laturi $\Delta x = A$, $\Delta y = B$, $\Delta z = C$, în această incintă se stabilesc acele unde staţionare care vor avea lungimile $\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x}$; $\lambda_y = \frac{2\pi}{k_y}$; $\lambda_z = \frac{2\pi}{k_z}$ în aşa fel încît să se cuprindă exact (de n_x, n_y, n_z, ori) în dimensiunile incintei

$$\lambda_x n_x = \Delta x = A \,; \quad \lambda_y n_y = \Delta y = B \,; \quad \lambda_z n_z = \Delta z = C \tag{6.44}$$

sau

$$K_x = \frac{2\pi\, n_x}{A} \,; \; K_y = \frac{2\pi}{B} n_y \,; \;\; K_z = \frac{2\pi}{C} n_z \,. \tag{6.45}$$

Aşadar în mediu (în solid de pildă ; sau în incinta radiind termic) se stabileşte o diversitate de unde descrisă de trei numere întregi, pozitive şi negative. Numărul de stări de oscilaţie se poate calcula cu uşurinţă. Să considerăm mai întîi două oscilaţii vecine K_x' şi K_x'' pentru care n_x' şi n_x'' diferă cu unu ; ele delimitează intervalul ΔK_x . Aceste valori vecine vor fi apropiate între ele dacă A este destul de mare :

$$\Delta K_x^0 = K_x'' - K_x' \neq 0 \,; \;\; \Delta n_x^0 = n_x'' - n_x' = 1 \tag{6.46}$$

$$\Delta K_x^0 = \frac{2\pi}{A} n_x'' - \frac{2\pi}{A} n_x' = \frac{2\pi}{A} \Delta n_x^0 = \frac{2\pi}{A} \cdot 1 \cdot \tag{6.47}$$

Să considerăm acum două oscilaţii K'_x, K''_x nevecine dar tot apropiate $n''_x - n'_x \neq 1$, ele delimitează intervalul ΔK_x

$$\Delta K_x = K''_x - K'_x = \frac{2\pi}{A}(n''_x - n'_x)\frac{2\pi}{A}\Delta n_x \tag{6.48}$$

$$\Delta n_x = \frac{A}{2\pi}\Delta K_x \tag{6.49}$$

Δn arată numărul de stări de cîmp posibile cînd K_x (oarecare) ia valorile cuprinse între K'_x şi K''_x, adică mai exact în punctele discrete cuprinse în intervalul precizat de K'_x, K''_x (deci cînd K_x se găseşte în intervalul ΔK_x). Numărul total de valori posibile ale vectorului $\vec{K}$, ale cărui componente să fie cuprinse în intervalele ΔK_y, ΔK_z (oscilaţiile fiind considerate independente) va fi

$$\boxed{\Delta n = \frac{\Delta BC}{(2\pi)^3}\Delta K_x \Delta K_y \Delta K_z}\,. \tag{6.50}$$

Numărul de valori posibile ale vectorului cu mărimea absolută cuprinsă în ΔK şi direcţia în elementul de unghi spaţial $\Delta\Omega$ va fi

$$\Delta n = \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3}K^2\Delta K\Delta\Omega \tag{6.51}$$

iar dacă nu ne interesează direcţiile, ci numai mărimile absolute, atunci, integrînd după $d\Omega$, găsim

$$\Delta n = \frac{\mathcal{V}}{2\pi^2}K^2\Delta K \tag{6.52}$$

sau exprimînd în funcţie de frecvenţe, $\lambda = cT = \frac{c}{\nu}$; $K = 2\pi\nu/c$; $dk = \frac{2\pi d\nu}{c}$, se obţine astfel binecunoscutul rezultat ondulatoriu [21], [22]

$$dn = \frac{4\pi\mathcal{V}}{c}\nu^2 d\nu. \tag{6.53}$$

Aşadar d*n* *ne arată numărul oscilaţiilor proprii unui cîmp şi reflectă caracterul ondulatoriu al aproximaţiei cvasiclasice operate.* Să comparăm cuantificarea aproximativă cu cea riguroasă provenind direct din ecuaţia lui Schrödinger. Pentru a ne da seama de distribuţia nivelelor în spectrul energetic, să considerăm distanţa $\Delta E = E = E_{n+1} - E_n$ dintre două nivele vecine care diferă cu o unitate a numărului n. Diferenţa ΔE este mică la n mari faţă de valoarea energiei unui nivel aşa că, potrivit condiţiei (6.37), putem să formăm diferenţa

$$\oint p_2\,dx - \oint p_1\,dx = 2\pi\hbar(n+1+1/2) - 2\pi\hbar(n+1/2) = 2\pi\hbar \tag{6.54}$$

$$\oint (p_2 - p_1)\,dx = \oint \Delta p\,dx = 2\pi\hbar. \tag{6.55}$$

Ea este egală cu

$$\oint \Delta p \,\mathrm{d}x \simeq \oint \frac{\partial p}{\partial E}\Delta E \,\mathrm{d}x \simeq \Delta E \oint \frac{\partial p}{\partial E}\,\mathrm{d}x = 2\pi\hbar \tag{6.56}$$

şi cum $\frac{\partial E}{\partial p}$ este chiar viteza, observăm că vom obţine

$$\oint \frac{\partial p}{\partial E}\,\mathrm{d}x = \oint \frac{\mathrm{d}x}{V} = T, \tag{6.57}$$

T fiind perioada clasică a mişcării (6.33). Aşa că distanţa dintre nivelele vecine este

$$\boxed{\Delta E = \frac{2\pi\hbar}{T} = \hbar\omega = h\nu} \tag{6.58}$$

egală cu $\hbar\omega$. Pentru un şir întreg de nivele vecine (deci pentru care diferenţele dintre numerele n sînt mici faţă de valorile acestor numere) frecvenţele ω_n pot fi foarte apropiate (deşi chiar cvasiclasic nu sînt echidistante). Astfel *în fiecare regiune nu prea mare a părţii cvasiclasice a spectrului, nivelele sînt situate, cu destul de bună aproximaţie, echidistant, la intervale egale cu* $\hbar\omega$. Această constatare este firească, întrucît în vechea teorie cuantică cu care urmărim a surprinde conexiuni condescendente, frecvenţele tranziţiilor erau multipli ai frecvenţei clasice (vezi mai departe cap. VII).

Să examinăm şi aspectul pe care-l iau *valorile medii* ale mărimilor cuantice, *calculate în aproximaţia cvasiclasică.* O valoare medie $\overline{L}$ într-o anumită stare Ψ_m *trebuie în esenţă să treacă la limită în chiar valoarea clasică a acestei mărimi, dacă starea însăşi dă la limită mişcarea clasică (pe o traiectorie binedeterminată).* Acest lucru se realizează numai în cazul unui pachet cu energii foarte apropiate. Funcţia de undă în general va fi

$$\Psi = \sum_n a_n \Psi_n \tag{6.59}$$

iar în cazul menţionat, coeficienţii a_n diferă sensibil de zero numai în intervalul de valori Δn, $1 \ll \Delta n \ll n$ (n este presupus mare = cvasiclasicitate) valoarea medie este întotdeauna egală cu

$$\overline{L} = \int \Psi^* \hat{L} \Psi \,\mathrm{d}x = \sum_n \sum_m a_m^* a_n L_{mn}\, \mathrm{e}^{i\omega_{mn}t} \tag{6.60}$$

iar în condiţiile noastre, vom înlocui sumarea în raport cu n şi m prin sumarea în raport cu $s = m - n$, s indicînd tocmai nivelele apropiate, a căror distanţă o vom lua ca în (6.58)

$$E_m - E_n = \omega_{mn}\cdot\hbar;\ \Delta E = E_m - E_n = \omega_{mn}\hbar \simeq (m-n)\,\omega\hbar = s\,\omega\hbar \tag{6.61}$$

$$\overline{L} = \sum_n \sum_s a_{n+s}^* a_n L_{n+s,n}\, \mathrm{e}^{i\omega st}. \tag{6.62}$$

Elementele de matrice L_{nm} calculate cvasiclasic descresc rapid o dată cu creşterea diferenţei $s = m - n$ şi sînt funcţii lent variabile de n (pentru un $m - n$ dat). Aşa că vom aproxima

$$\overline{L} = \sum_n \sum_s a_n^* a_n L_s \mathrm{e}^{i\omega st} = \sum_n | a_n |^2 \sum_s L_s \mathrm{e}^{i\omega st}; \tag{6.63}$$

$$L_s \equiv L^{\overline{n}}_{\overline{n}+s} \tag{6.63'}$$

$\overline{n}$ fiind o valoare medie a lui n în intervalul Δn, unde funcţiile de undă sînt sensibil nenule (dar cum $\sum_n | a |^2 = 1$, valoarea medie va fi

$$\overline{L} = \sum_s L_s \mathrm{e}^{i\omega st} \equiv \sum_s (L_{\overline{n}+s,\overline{n}}) \cdot \mathrm{e}^{i\omega st}. \tag{6.64}$$

Am obţinut astfel dezvoltarea acestei medii după seria Fourier. Întrucît $\overline{L}$ trebuie să coincidă la limită cu mărimea clasică $L(t)$, am ajuns la un rezultat interesant; anume: *elementele de matrice* L_{mn} *trec la limită în componentele* L_{m-n} *nenule ale dezvoltării clasice* Fourier. Analog stau lucrurile şi pentru elementele de matrice corespunzătoare tranziţiilor spectrului continuu; în acest caz funcţiile de undă cvasiclasice pentru stările staţionare sînt normate la funcţia δ, de energie $\delta(\varepsilon - \varepsilon')$ (împărţită cu $\hbar$; echivalentă lui (6.58)). *Pentru spectrul continuu elementele de matrice trec în componentele dezvoltării lui L în integrală* Fourier:

$$\boxed{\overline{L} = \sum\nolimits_s L_s \mathrm{e}^{i\omega_s t}; \quad \overline{L} = \int L(\omega)\, \mathrm{e}^{i\omega t}\, \mathrm{d}\omega} \,. \tag{6.65}$$

Pentru sistemele cu mai multe grade de libertate, consideraţiile făcute se pot generaliza. Anume, să considerăm sisteme care efectuează o mişcare finită pentru care problema mecanică clasică permite separarea variabilelor (mişcare cvasiperiodică), încît problema se reduce la o problemă de tip unidimensional, pentru care subzistă condiţiile de cuantificare

$$\oint p_j\, \mathrm{d}q_j = 2\pi\hbar(n_j + \gamma_j),\ j = 1, 2, 3 \ldots f. \tag{6.66}$$

Integrala se ia în raport cu perioada variaţiei coordonatei generalizate q_j iar γ_j (analog cu (6.37) este un număr de ordinul unităţii care depinde de condiţiile la limită puse în raport cu fiecare grad de libertate al mişcării. Astfel în cazul mişcării centrale, unde se poate face separarea variabilelor şi coordonatele au anumite restricţii geometrice, rezolvarea ecuaţiei de undă în condiţii de cvasiclasicitate ne obţine trei condiţii de cuantificare:

$$\boxed{\begin{aligned} &\oint p_r\, \mathrm{d}r = 2\pi\hbar[(n - l - 1) + 1/2] \equiv 2\pi\hbar\,(n_r + 1/2); \\ &\oint p_\theta\, \mathrm{d}\theta = 2\pi\hbar(l - m + 1/2); \quad \oint p_\varphi\, \mathrm{d}\varphi = 2\pi\hbar\, m \end{aligned}} \tag{6.67}$$

(n_r = numărul cuantic al părţii radiale, l = nr. cuantic al părţii unghiulare).

Acestea sînt chiar *condiţiile de cuantificare spaţială ale lui A. Sommerfeld.* (Ultima redă cuantificarea momentului cinetic, căci p_φ este un moment cinetic).

În cazul unei mişcări generale multidimensionale oarecare (nu cvasiperiodice), nu mai există condiţii de tipul (6.66) şi nici numere n_j. Numărul de stări de oscilaţie ale cîmpului, în volumul dat al spaţiului fazelor $\Delta N = \frac{\mathrm{d}\mathcal{V}}{A^f}$, rămîne caracteristica cea mai concludentă a sistemului cu grade de libertate. Noţiunea de *celulă din spaţiul* fazelor fiind esenţial cuantică, ea rămîne aplicabilă pe mai departe, elementului de volum din spaţiul fazelor revenindu-i un număr de

$$\boxed{\Delta N = \frac{\Delta q_1, \Delta q_2 \ldots \Delta q_f \cdot \Delta p_1\, \Delta p_2 + \ldots\, \Delta p_f}{(2\pi\hbar)^f} = \frac{\Delta q^f \cdot \Delta p^f}{h^f}} \tag{6.68}$$

stări cuantice. În felul acesta am făcut o corespondenţă cu teoria semicuantică a lui Bohr, cu statistica semicuantică (care nu foloseşte toate caracterele microparticulelor) şi în general am cercetat trăsăturile generale ale mişcării sistemelor în aproximaţia cvasiclasică, care prezintă adesea aplicaţii practice. Să examinăm (mărginindu-ne la consideraţii generale şi la aspecte de ordin fizic), cîteva aplicaţii importante, care pot fi tratate în aproximaţia cvasiclasică [5].

1. *Cuantificarea energiei.* Vom considera o microparticulă care se află în mişcare în cîmpul $U(\vec{r})$, care este de aşa natură încît condiţia (6.10—6.12) de cvasiclasicitate este îndeplinită în tot spaţiul. Numărul stărilor cuantice posibile este egal cu volumul din spaţiul fazelor corespunzător intervalului impulsurilor $0 \leqslant p \leqslant p_{\max}$ şi al coordonatelor ($\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \mathrm{d}V$).

Acest volum este egal cu raportul dintre volumul elementar $\mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}V$ faţă de volumul celulei în care este împărţit acest spaţiu al fazelor în mecanica cuantică

$$\mathrm{d}\mathcal{N} = \frac{4\pi/3 \cdot p_{\max}^3\, \mathrm{d}V}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{6.69}$$

Impulsul este determinat (în mişcarea clasică) dacă se cunoaşte poziţia microparticulei

$$E = \frac{p^2}{2m} + U(\vec{r}) \leqslant 0\,; \quad p = \sqrt{2m(E-U)}\,; \quad p_{\max} = \sqrt{-2m\, U(\vec{r})}\,, \tag{6.70}$$

aşa că numărul total de stări al spectrului discret este

$$\mathrm{d}\mathcal{N} = \frac{\sqrt{2}}{3\pi 2}\, \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} \cdot \int (-U)^{3/2} \cdot \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z. \tag{6.71}$$

Integrala extinsă pe regiunea $U < 0$ diverge dacă U descreşte spre înfinit ca $r^{-s}, (s < 2)$, fapt care a fost stabilit riguros şi în mecanica cuantică. Prin urmare *numărul nivelelor este infinit.* În particular şi pentru cîmpul central (considerat mereu cvasiclasic), numărul stărilor energetice este infinit de mare iar această infinitate are un ordin şi mai ridicat datorită degenerescenţei faţă de direcţiile momentului cinetic (care se conservă). Acest spor de stări este datorat în esenţă energiei centrifugale, $M^2/2\,m\,r^2$, care se adaugă energiei potenţiale $U(r)$ în aşa fel încît energia microparticulei este descrisă de potenţialul eficace $U_{ef} = U(r) + M^2/2\,mr^2$. Numărul de nivele cu o valoare dată a momentului M, este egal cu numărul de stări energetice nedegenerate ale microparticulei aflate în mişcare în cîmpul U_{eficace}, impulsul p_r (la r dat şi la $E \leqslant 0$) variind între 0 şi $p_{r\max} = \sqrt{-2m\,U_{\text{efic}}}$. Numărul de nivele este prin urmare egal cu

$$(6.72) \qquad \mathrm{d}\mathcal{N} = \int \frac{\mathrm{d}r\,\mathrm{d}p_r}{2\pi\hbar} = \frac{\sqrt{2m}}{2\pi\hbar}\int\sqrt{-U-\frac{M^2}{2mr^2}}\,\mathrm{d}r.$$

Şi în aproximaţia cvasiclasică acest număr trebuie să reflecte cuantificarea momentului cinetic $M = l(l+1)\frac{h}{2\pi} \simeq l\frac{h}{2\pi}$; $\frac{\mathcal{M}}{\hbar} = l$, adică în esenţă sumarea după numărul cuantic l. În aproximaţia cvasiclasică sumarea discretă este înlocuită prin integrarea după $\frac{\mathrm{d}M}{\hbar} = \mathrm{d}l$, ($l$ continuu). Se obţine

$$(6.73) \qquad \mathcal{N} = \int \mathrm{d}\mathcal{N}_l = \frac{m}{4\hbar_2}\int(-U)\,r\,\mathrm{d}r.$$

2. *Mişcarea în cîmp central.* Vom considera cîmpul $U(r)$ cvasiclasic. Ecuaţia de mişcare permite o separare a soluţiei într-o parte radială şi una unghiulară; dependenţa de φ este în mod simplu exponenţială (unghiul φ fiind determinat de numărul cuantic m), aşa că ea nu necesită o aproximare, iar dependenţa de unghiul polar θ este cvasiclasică dacă numărul cuantic l este suficient de mare. Funcţia unghiulară de θ este determinată în esenţă de polinomul lui Legendre $\mathcal{P}_l(\cos\theta)$ (proporţional cu un factor constant) care satisface ecuaţia funcţiilor sferice [3]:

$$(6.74) \qquad \frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}\Theta_{lm}}{\mathrm{d}\theta}\right) - \frac{\mathrm{m}^2}{\sin^2\theta}\,\Theta_{lm} + l(l+1)\,\Theta_{lm} = 0$$

sau la $m = 0$,

$$(6.75) \qquad \frac{\mathrm{d}^2\mathcal{P}_l}{\mathrm{d}\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\,\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}_l}{\mathrm{d}\theta} + l(l+1)\,\mathcal{P}_l = 0.$$

Prin substituţia de mai jos, aceasta se transformă într-o ecuaţie pentru $\varkappa(\theta)$, care este perfect analoagă celei unidimensionale a lui Schrödinger

$$\mathcal{P}_l(\cos\theta) = \frac{\varkappa(\theta)}{\sqrt{\sin\theta}} \tag{6.76}$$

$$\varkappa'' + \left[(l+1/2)^2 + \frac{1}{4\sin^2\theta}\right]\varkappa = 0\,;\quad \lambda' = \left[(l+1/2)^2 + \frac{1}{4\sin^2\theta}\right]^{-1/2} \tag{6.77}$$

$$\Psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}[E-U]\,\Psi = 0\,;\quad \lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(E-U)}}\,;\quad \Psi'' + \lambda^{-2}\Psi = 0. \tag{6.78}$$

Rolul lungimii de undă asociate îl are factorul din paranteză (λ'). Problema poate fi tratată cvasiclasic numai pentru anumite domenii ale mişcării. Condiţia principială $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} \ll 1$, devine aici

$$\frac{\mathrm{d}\lambda'}{\mathrm{d}x} \ll 1\,;\quad \theta\, l \gg 1\,;\quad (\pi-\theta)\, l \gg 1,$$

prin urmare la l mari, aceste restricţii se îndeplinesc aproape în întregul interval de unghiuri θ, cu excepţia zonelor foarte aproape de zero sau de π. În aceste condiţii, în (6.77) poate fi neglijat al doilea termen în comparaţie cu primul (din paranteza dreaptă) şi ecuaţia care redă aproximativ mişcarea devine :

$$\varkappa'' + \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 \varkappa = 0. \tag{6.79}$$

Se observă că momentul cinetic apare nu în combinaţia $l(l+1)$, ci în combinaţia $(l+1/2)^2$. Ecuaţia (6.77) este deci apropiată de tipul ecuaţiei vibratorului şi admite soluţia

$$\varkappa = \sqrt{\sin\theta}\;\mathcal{P}_l(\cos\theta) \approx \mathcal{A}\sin\left[(l+1/2)\,\theta + \alpha\right]. \tag{6.80}$$

Amplitudinea $\mathcal{A}$ şi diferenţa de fază α sînt constante care trebuie încă determinate. Determinarea lor este simplă, întrucît observăm că pentru $\theta \ll 1$ (deci ctg $\theta \simeq 1/\theta$), ecuaţia generatoare a funcţiilor sferice ia o formă simplă, care admite soluţii binecunoscute şi anume funcţia lui Bessel de ordinul zero (6.81) :

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{P}_l}{\mathrm{d}\theta^2} + \frac{1}{\theta}\,\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}_l}{\mathrm{d}\theta} + (l+1/2)^2\,\mathcal{P}_l \approx 0 \tag{6.81}$$

$$\mathcal{P}_l(\cos\theta) \approx J_0\left[(l+1/2)\,\theta\right],\quad \theta \ll 1. \tag{6.82}$$

Factorul constant din structura funcţiei Bessel, trebuie să ia valoarea unu întrucît la $\theta = 0$ polinomul special $\mathcal{P}_l = 1$ este şi el unu. Dacă condiția $\theta \ll 1$ este valabilă la toate unghiurile $1/l \ll \theta \ll 1$ și deci în particular și pentru unghiurile domeniului care ne interesează aici $\theta \gg 1/l$, atunci formula (6.80) trebuie să coincidă cu (6.82) care este valabilă pentru $\theta \ll 1$. Această racordare fixează pe α deîndată ce vom folosi pentru funcția Bessel din (6.82) expresia ei asimptotică (pentru argumente $(l + 1/2)\,\theta$ mari) :

$$\mathcal{P}_l \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi l}}\,\frac{\sin[(l + 1/2)\,\theta + \pi/4}{\sqrt{\theta}} \tag{6.83}$$

încît comparînd cu (6.80) am determinat pe A și pe α, care iau respectiv valorile

$$A = \sqrt{\frac{2}{\pi l}}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}\,. \tag{6.84}$$

Funcția de undă gata normată se va obține efectuînd ca și în cazul strict cuantic integrala de normare

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y^*_{l'm'}\, Y_{lm} \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi = \delta_{ll'}\,\delta_{mm'} \tag{6.85}$$

ceea ce duce la apariția factorului (aici $m = 0$; Y devine $\theta_{l,0}(\theta)$)

$$i^l \sqrt{\frac{(2l + 1)}{2}} \simeq i^l \sqrt{l} \tag{6.86) -- (6.87}$$

încît soluția aproximativă este

$$\Theta_{l0}(\theta) \simeq i^l \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin[(l + 1/2)\,\theta + \pi/4]}{\sqrt{\sin\theta}}\,. \tag{6.88}$$

Paritatea funcției de undă nu este violată prin aproximarea cvasiclasică, întrucît înlocuirea $l(l + 1) \to (l + 1/2)^2$ conduce la expresia (6.88) care se înmulțește cu $(-1)^l$ cînd θ se înlocuiește cu unghiul rotit $\pi - \theta$ și aceasta este tocmai paritatea funcției sferice $\mathcal{P}_l(\cos\theta)$, așa cum și trebuia.

Partea radială a funcției de undă se poate și ea aproxima în mod corespunzător. Soluția radială $\varkappa(r) = r\,R(r)$, satisface, după cum se știe, ecuația lui Schrödinger pentru o mișcare unidimensională

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}r^2} + \left[\frac{2m}{\hbar}(E - U) - \frac{l(l + 1)}{r^2}\right]\varkappa = 0\,; \quad U_l(-r) = U(r) + \frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{l(l + 1)}{r^2}\,. \tag{6.89}$$

Formal, (ca de altfel și fizic), se vede că energia potențială eficace cuprinde cîmpul central plus energia potențială fictivă de rotație (centrifugală). Aproximația cvasiclasică va lucra dacă acest cîmp eficace $U_l = U_r +$

$+ U_{\text{centr.}}$, se va supune condiţiei (6.12) care priveşte astfel şi starea de rotaţie (energia centrifugală).

Dacă energia centrifugală lipseşte (starea s; $l = 0$) şi desigur dacă $U(r)$ satisface mereu condiţia de clasicitate (6.10), atunci funcţia radială va fi cvasiclasică în întreg spaţiul. Cînd $r = 0$, $\varkappa \equiv r \cdot R$ va fi de asemenea zero şi de aceea funcţia cvasiclasică radială $\varkappa(r)$ se va determina conform cu (6.32)

$$\Psi = \frac{c}{\sqrt{p}} \sin \frac{1}{\hbar} \int_a^x p \, \mathrm{d}x (x < a) ; \; \Psi \to \varkappa(r) ; \; a = 0 ; \; x = r \tag{6.90}$$

$$\Psi = 0 \quad (x > a) \tag{6.91}$$

Dacă $l \neq 0$, atunci condiţia de cvasiclasicitate $\frac{m\hbar}{p^3} \leqslant 1$ trebuie să fie satisfăcută şi de energia centrifugală nu numai de cîmpul propriu-zis. În domeniile cu r nu prea mari, unde energia centrifugală este de acelaşi ordin ca şi energia totală, lungimea de undă fiind

$$\boxed{\bar{\lambda} = \frac{\hbar}{p} \sim \frac{\hbar}{\frac{\mathcal{M}}{r}} \sim \frac{\hbar}{\frac{l\hbar}{r}} = r/l ; \; \frac{\mathrm{d}\bar{\lambda}}{\mathrm{d}r} \leqslant 1 \to l \geqslant 1} \tag{6.92}$$

am obţinut condiţia de aproximare (radială) privind numărului cuantic l, număr care trebuie să fie (la fel ca şi în cazul unghiular) *suficient de mare.* Altminteri, din raţiuni impuse de forţa centrifugală, mişcarea la r mari nu poate fi considerată cvasiclasică.

Determinarea efectivă a funcţiei de undă radială se poate efectua apelînd la formulele mişcării unidimensionale în care l va fi mare. În acord cu aproximarea deja făcută, îl vom înlocui pe $l(l + 1)$ cu $(l + 1/2)^2$, deci potenţialul eficace cvasiclasic devine

$$U_l(r) \simeq U_{\text{cvasicl.}} = U(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{(l + 1/2)^2}{r^2} \cdot \tag{6.93}$$

În felul acesta faza funcţiei cvasiclasice $\varkappa(r)$ va fi corect determinată. În particular dacă $U(r) = 0$ (deci pentru mişcarea liberă), (6.31) (în care $p = \sqrt{2m(E - U_l)}$, cu $U = U_l$ din (6.93)) conduce pentru r mari la o funcţie radială cu faza $kr = \pi l/2$ la fel ca şi în cazul riguros cuantic. (Acesta este cazul undelor sferice : stări de energie şi moment determinate, a căror funcţie de undă se defineşte scriind unda armonică a mişcării în coordonate sferice).

3. Comportarea microparticulei în vecinătatea originei. Se ştie că această comportare în imediata vecinătate a centrului de forţă (atom) ridică dificultăţi insolubile în fizica clasică. Într-o tratare semicuantică vom presupune un cîmp central p care pentru $r \to 0$ tinde spre infinit ca $\pm \frac{Q}{r^s}$; $s > 2$. Condiția de cvasiclasicitate pentru r mici înseamnă

$$(6.94)\qquad \lambdabar \sim \frac{\hbar}{\sqrt{m\,|U|}} \sim \frac{\hbar\, r^{s/2}}{\sqrt{m\,Q}};\ \frac{\mathrm{d}\lambdabar}{\mathrm{d}r} \sim \frac{\hbar}{\sqrt{m\,Q}} \cdot r\left(\frac{s}{2} - 1\right) \ll 1.$$

În cazul cînd cîmpul este atractiv, $U_l \to -\infty$, $r \to 0$, domeniul din vecinătatea originei este accesibil clasic, așa că funcția de undă radială (din 6.31) se va reduce la primul factor, deci va fi :

$$(6.94')\quad \varkappa = \Psi \simeq \frac{c}{\sqrt{p}} \sin\left(\frac{1}{\hbar}\int_x^a \mathrm{p}\,\mathrm{d}x + \frac{\pi}{4}\right) \simeq \frac{1}{\sqrt{p}} \simeq p^{-1/2} \simeq U^{-1/4} \simeq r^{s/4}$$

$$(6.95)\qquad R = \varkappa(r) \cdot \frac{1}{r} \sim r\left(\frac{s}{4} - 1\right) = r^{\alpha};\ \alpha = \left(\frac{s}{4} - 1\right).$$

Dacă cîmpul U este repulsiv, domeniul cu r mici este indescriptibil clasic, încît funcția de undă la $r \to 0$ tinde exponențial spre zero. Neglijînd factorul dinaintea exponențialei din (6.96), funcția de undă trebuie evaluată prin

(6.97)

$$\Psi = \frac{c}{\sqrt{p}} \exp - \frac{1}{\hbar}\left|\int_{r_0}^{r} p\,\mathrm{d}r\right| \simeq \exp\left(\frac{-1}{\hbar}\int_{r_0}^{r} p\,\mathrm{d}r\right) \simeq \exp\left[\frac{-2\sqrt{2\,m\,Q}}{(s-2)\,\hbar} \cdot r^{\left(\frac{s}{2}-1\right)}\right].$$

4. *Mișcarea cvasiclasică în atomul hidrogenoid.* Să examinăm condițiile în care cvasiclasicizarea dă o imagine corectă mișcării în cîmpul coulombian $U = \pm \frac{Q}{r}$. Din toată aria mișcării, domeniul cel mai important este cel al distanțelor la care energia potențială este egală (ca valoare) cu energia E. Acest domeniu de distanțe este prin urmare $|U| \sim |E|$; $r = \frac{\pm Q}{E}$.

Condiția de cvasiclasicitate în această regiune înseamnă

$$(6.98)\qquad \lambdabar \sim \frac{\hbar}{\sqrt{2m\,|E|}};\ \frac{\mathrm{d}\lambdabar}{\mathrm{d}r} \ll 1 \to |E| \ll \frac{mQ^2}{\hbar^2}$$

ceea ce arată *că valoarea absolută a energiei trebuie să fie mică în comparație cu energia particulei pe prima orbită a lui* Bohr ($Q = Z\,\mathrm{e}^2$) sau exprimînd energia prin viteza $U \sim \sqrt{|E|\,m}$ condiția (6.98) devine

$$(6.99)\qquad \frac{Q}{\hbar v} \gg 1 \text{ (cvasiclasic)};\ \frac{Q}{\hbar v} \ll 1 \text{ (perturbații).}$$

Fizic, condiția de clasicitate este utilizabilă la energii mici ale particulei, așa fel ca să se realizeze totuși inegalitatea tare (6.12). Condiția (6.99) apare şi în teoria perturbaţiilor, anume în cazul cîmpului coulombian: se arată că, la energii mari ale particulelor, cîmpul coulombian perturbă puţin starea de mişcare încît $U = Q/r$, care acţionează în tot spaţiul, este o perturbaţie. Prin urmare condiţia (6.99) este inversă a celeia din teoria strict cuantică a perturbaţiilor, ceea ce este uşor de înţeles întrucît am analizat cazul $E = T + U \simeq U$, deci cînd energiile cinetice sînt mici.

Pentru distanţe mari sau foarte mici, prevalează energia cinetică, respectiv cea potenţială. La distanţe mari, condiţia de clasicitate $\frac{d\bar{\lambda}}{dx} \ll 1$ înseamnă:

$$\left|\frac{d\bar{\lambda}}{dx}\right| = \frac{m\hbar}{p^3}\left|\frac{dU}{dx}\right| \ll 1\,; \quad \mathcal{F} = \frac{Q}{r^2} = -\frac{dU}{dr}. \tag{6.100}$$

În domeniul distanţelor mici $|U(r)| \gg E$, funcţiile de undă cvasiclasice pentru cîmpul repulsiv se amortizează exponenţial. Pentru un cîmp atractiv şi pentru l mici este posibilă pătrunderea particulei în domeniul $|U| \gg E$. Condiţia generală de clasicvasiclasicitate (6.100)

$$F = -\frac{Q}{r^2}, \quad p \simeq \sqrt{2m|U|} \sim \sqrt{\frac{mQ}{r}} \tag{6.101}$$

ne indică domeniul de aplicabilitate al aproximaţiei

$$r \gg \hbar^2/mQ. \tag{6.102}$$

Se vede că el este limitat de raza primei orbite a lui Bohr, *aproximaţia cvasiclasică este bună la distanţe mari în comparaţie cu prima orbită a atomului semicuantificat.*

5. *Trecerea prin bariere de potenţial. În mecanica clasică o barieră de potenţial* ca cea reprezentată în figura 10 *nu este transparentă pentru particulă, contrar concluziilor mecanicii cuantice.* Vom considera că potenţialul $U(x)$ satisface condiţiile de cvasiclasicitate, ceea ce înseamnă că λ variază lent cu coordonata x, *deci bariera trebuie să fie largă.* Coeficientul de transmisie, calculat riguros în mecanica cuantică, scade puternic cu grosimea barierei, astfel că, în aproximaţia cvasiclasică, acest coeficient trebuie să fie foarte mic. Nu vom efectua calculul coeficientului

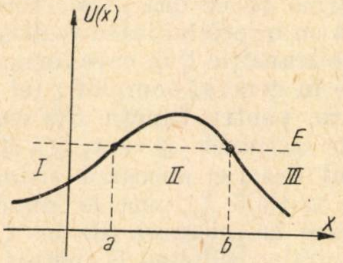


Fig. 10

de transparență, care descrie densitatea fluxului din unda incidentă (care se calculează ridicînd la pătrat funcția de undă de la marginea domeniului III). Funcția de undă în regiunea II se stabilește prin considerații cvasiclasice [5]. În esență se construiesc, pe baza celor spuse mai înainte, funcțiile Ψ la dreapta și la stînga celor două puncte de întoarcere a și b, observînd că la dreapta lui b funcția de undă are forma unei unde progresive, iar în $x < b$ va crește spre interiorul domeniului (termenul exponențial din structura funcției de undă cvasiclasică se neglijează în comparație cu cel crescător). Prin comparație cu ecuația exactă se pot construi astfel funcțiile cvasiclasice pentru $x > b$ și $x > b$.

Pentru domeniul I, vom recurge la (6.31), pentru $x < a$, descompunînd cosinusul în doi termeni care descriu particula incidentă și cea refractată de barieră, iar pentru $x > a$ vom folosi (6.21). Se obține astfel pentru densitatea fluxului în regiunea III (densitatea fluxului incident pe barieră fiind luat egal cu unu prin normarea corespunzătoare a funcțiilor de undă), rezultatul :

$$\mathcal{D} = \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\left|\int_a^b p\, \mathrm{d}x\right|\right). \tag{6.103}$$

(Cu normarea amintită $\mathcal{D}$ este chiar coeficientul de transmisie.) Formula este aplicabilă numai cînd argumentul exponențialei este mare, astfel încît însuși $\mathcal{D}$ este mic. Dacă bariera nu este cvasiclasică (are porțiuni bruște), factorul exponențial din (6.103) rămîne același, dar mai apare un termen înaintea exponențialei. Probabilitatea tranziției se va determina evaluînd funcția de undă exactă în domeniul necvasiclasic și apoi aproximînd-o pe aceasta în interiorul barierei. Dar microparticula poate suferi și o *reflexie pe barieră deși ea are energie care întrece înălțimea barierei. Nici acest proces nu poate avea loc în mecanica clasică.* În cazul cvasiclasic probabilitatea va fi exponențial de mică și se poate construi funcția de undă în sensul celor analizate înainte. Particula care se reflectă își schimbă sensul, în punctul X, care este soluția ecuației $U(x) = E$. Această ecuație admite *soluții complexe* $x = \zeta$, așa cum era de așteptat. Ecuațiile cvasiclasice ale mișcării ar urma să ne dea „traiectoria tranziției”, care este complexă în concordanță cu imposibilitatea realizării clasice a procesului. În particular, punctul de tranziție ζ în care formal se realizează trecerea dintr-o stare în alta este în general complex ; (el se determină din ecuațiile clasice de conservare, pentru funcția $\mathcal{S}$(a energiei)). Mișcarea sistemului va fi descrisă de acțiunea $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1(\zeta_1, \zeta_0) + \mathcal{S}_2(\zeta_0, \zeta_2)$ compusă din doi termeni : primul descrie mișcarea sistemului în prima stare, pornind de la poziția inițială ζ_1 pînă la punctul de tranziție ζ_0 și apoi în a doua referitoare la mișcarea de la ζ_0 la o stare finală ζ_2. Probabilitatea se va determina ridicînd la pătrat funcția de undă cvasiclasică, construită la dreapta și la stînga lui ζ_0 adică (la fel ca și în (6.103) va cuprinde la exponent factorul $2/\hbar$ înmulțind cele două acțiuni pur imaginare $\mathcal{S}_1(\zeta_1, \zeta_0) + \mathcal{S}_2(\zeta_0, \zeta_2)$. După cum vedem, funcția de undă cvasiclasică se construiește pentru deplasarea în dreapta (unda transmisă) și pentru deplasarea din stînga de barieră (unda incidentă și reflectată) iar, racordul celor două funcții se face trecînd în domeniul complex, și urmărind variația funcției pe un drum convenabil din semiplanul superior, care înconjoară punctul de întoarcere ζ_0 la o suficientă distanță.

6. *Tranzițiile cuantice.* Probabilitatea tranzițiilor cuantice se exprimă prin intermediul *elementelor de matrice.* În aproximația cvasiclasică acestea trebuie calculate corespunzător, ceea ce ridică mari dificultăți. În cazul cînd energiile stărilor care interesează sînt destul de îndepărtate, elementele de matrice nu se reduc pur și simplu la componentele Fourier. Rămîn astfel de evaluat mărimile

$$f_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1 \dot{f} \Psi_2 \, \mathrm{d}x \tag{6.104}$$

Ψ_1 și Ψ_2 fiind funcțiile proprii corespunzătoare valorilor E_1 și E_2 ale energiei ($E_2 > E_1$). Calcularea lui f_{12} prin simpla înlocuire a expresiilor asimptotice pentru funcțiile de undă nu duce la rezultate corecte, căci această mărime trebuie să fie exponențial de mică, în timp ce funcția de integrat nu este ea însăși mică, așa încît chiar o variație mică a funcției de integrat poate schimba ordinul de mărime al integralei. Se poate face o evaluare bună a elementelor de matrice (L. Landau 1932) transpunînd problema în complex, considerînd pe x drept variabilă complexă $x \to \zeta$ și integrînd pe un contur care nu trece prin punctele $x = a_1$ și $x = a_2$ de pe axa reală în vecinătatea cărora aproximația cvasiclasică nu este adecvată. Punctul a corespunde intersecției curbei $U(x)$ cu energia E, deci cu nivelul E_1, respectiv E_2. Pe drumul de integrare se pot folosi pentru $\Psi_{1,2}$ expresiile asimptotice din semiplanul superior (drumul de urmat se alege pe cît posibil ca să scadă efectul factorului exponențial).

Un caz cvasiclasic îl oferă *perturbațiile adiabatice, care, în virtutea caracterului lor lent variabil în timp, pot fi descrise în același mod ca și perturbațiile spațiale lent variabile cu coordonata.* Teoria cuantică a tranzițiilor arată că *la limita unei perturbații oricît de lent variabile în timp, probabilitatea tranziției tinde și ea spre zero.* În acest caz adiabatic, hamiltoniana sistemului este o funcție lent variabilă de timp, care are limite determinate inițial și final ($t = \pm \infty$), iar funcțiile proprii $\Psi_n(q, t)$, ca și energiile $E_n(t)$ care se obțin soluționînd ecuația lui Schrödinger depind tot adiabatic de timp ca de un parametru. Sistemul astfel perturbat trece din starea (Ψ_1; E_1), la $t - \infty$, în starea (Ψ_2; E_2) la $t = +\infty$, cu o probabilitate W_{12}.

Să examinăm tranziția în limitele aproximației cvasiclasice. Întrucît perturbația variază lent cu timpul, *durata procesului va fi mare și de aceea variația acțiunii în acest timp va fi și ea mare. Întreg procesul are un caracter cvasiclasic cu deosebirea că aici variația acțiunii are un caracter temporal iar nu spațial.* Variația acțiunii este dată de

$$\mathrm{d}S = -E\,\mathrm{d}t + p\,\mathrm{d}x\,; \quad S = -\int E(t)\,\mathrm{d}t + S_0(x) \tag{6.105}$$

(integrala $-\int E(t)\,\mathrm{d}t$ este mare). Procesul va fi descris de o funcție cvasiclasică $\Psi = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar} S}$ în raport cu timpul, în loc de o funcție cvasiclasică în raport cu coordonata. La $t \to -\infty$ funcția de undă asimptotică este $\Psi_1 \simeq \Psi_1(q)\, \mathrm{e}^{\frac{-iE_1 t}{\hbar}}$ iar la $t \to +\infty$ ea va deveni $C_2\, \Psi_2\, \mathrm{e}^{\frac{-iE_2 t}{\hbar}}$; dependența de timp este aceeași (o undă staționară la capătul procesului). Din această corespondență asimptotică funcțiile Ψ_2 și C_2 trebuie determinate, iar $C^2 = W_{12}$ este tocmai probabilitatea căutată. În acest caz acțiunea $S = -\int_{-\infty}^{+\infty} E(t)\,\mathrm{d}t$ este perfect analogul acțiunii spațiale $\mathcal{S}_0 = \pm \int p(x)\,\mathrm{d}x$; aceasta din urmă avea un sens de acțiune mecanică pentru cazul clasic $p = \sqrt{2m(E-U)}$ real, iar în general se prezenta ca o mărime complexă, care avea două semne în fața radicalului, deci prezenta puncte de ramificație complexe.

Să examinăm acum acțiunea $\mathcal{S} = -\int E(t)\,\mathrm{d}t$, temporală. Valoarea ei va fi reală dacă sistemul se „mișcă" adiabatic și energia reală $E(t)$ depinde într-un mod parametric de t, mod indicat de caracterul însuși al procesului clasic. Dar sistemul fiind cuantic, el va realiza energiile E_1 și E_2 bine *determinate, care nu pot fi egale la un același moment real t*. Clasic existența unui moment de tranziție t_0 ar însemna că la acel moment energia a trecut (continuu, parametric), în energia E_2

$$\boxed{E_1(t_0) = E_2(t_0).} \tag{6.106}$$

Dar procesul adiabatic durează îndelungat și nivelele E_1 și E_2 bine determinate nu pot fi atinse în același moment, ceea ce reflectă caracterul neclasic al tranziției și formal atrage după sine faptul că ecuația (6.106) nu are rădăcini reale t_0; dar ea poate fi satisfăcută de rădăcini complexe $\tau_0 = t_0 + it_0'$. Or se poate arăta că energia E depinzînd de un timp complex τ are pentru $\tau = \tau_0$ un punct de ramificație, fiind deci perfect analoagă cu acțiunea $p\mathrm{d}x$.

Să examinăm soluțiile ecuației riguroase ale lui Schrödinger pentru cazul cînd parametrul t (conceput acum ca o variabilă complexă) conduce pentru anumite valori τ_0, la „energii" proprii egale. Operatorul hamiltonian $\hat{H}(t)$ depinzînd de „timpul" complex" τ, coincide cu transpusul său $\hat{H} = \tilde{\hat{H}}'$; $\left(\int \hat{A}\hat{H}\hat{B}\mathrm{d}q = \int \hat{B}\hat{H}\hat{A}\mathrm{d}q\right)$ dar din pricina energiei „potențiale" dependente de timp pentru care $U(\tau) \neq U(\tau^*)$, acest operator nu mai este hermitic $\hat{H} \neq \tilde{\hat{H}}^*$; $\left(\int \hat{A}\hat{H}A^*\mathrm{d}q \neq \int A^*\hat{H}\hat{A}\mathrm{d}q\right)$. Valorile sale proprii nu vor mai fi reale, $E(\tau)$ va fi o mărime complexă, iar $E(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ o acțiune complexă.

Să vedem care sînt funcțiile proprii ale ecuației lui Schrödinger complexe $\hat{H}(\tau)\Psi = E(\tau)\Psi(\tau)$, pentru valorile proprii $E(\tau)$. Vom căuta funcția proprie Ψ corespunzătoare lui E, sub forma unei combinații liniare

$$\Psi(\tau, x) = a_1(\tau)\,\varphi_1 + a_2(\tau)\,\varphi_2(x) \tag{6.107}$$

coeficienții complecși $a(\tau)$ înmulțesc părțile spațiale φ_1 și φ_2 care nu mai au astfel singularități pentru $\tau = \tau_0$. Vom determina coeficienții a_1 și a_2

impunînd combinaţiilor φ_1 şi φ_2 nişte relaţii formale de simetrie care pot fi realizate prin alegerea corespunzătoare a coeficienţilor complecşi. Aceste relaţii de lucru ne vor permite a stabili uşor forma coeficienţilor

$$\int \varphi_1^2 \, \mathrm{d}x = \int \varphi_2^2 \, \mathrm{d}x = 0 \, ; \int \varphi_1 \varphi_2 \, \mathrm{d}x = 1. \tag{6.108}$$

Substituind soluţia căutată (6.107) în ecuaţia lui Schrödinger vom determina coeficienţii înmulţind-o la stînga o dată cu φ_1 şi altă dată cu φ_2 şi integrînd în raport cu coordonatele $\mathrm{d}x$, adică utilizînd condiţiile formale de „antiortonormalitate"). Vor apare combinaţii de forma

$$H_{jk}(t) = \int \varphi_j \hat{H} \, \varphi_k \, \mathrm{d}x \, ; \, (j, \, k = 1{,}2)$$

(ele sînt simetrice $H_{12} = H_{21}$, datorită hamiltonianului). Se ajunge la sistemul liniar

$$\begin{aligned} H_{11}a_1 + H_{12}a_2 &= Ea_2 \\ H_{12}a_1 + H_{22}a_2 &= Ea_2 \end{aligned} \tag{6.109}$$

$$\Delta = 0 \, ; \, (H_{12} - E)^2 = H_{11}H_{22}. \tag{6.110}$$

Acest sistem trebuie să dea valori a_1 şi a_2 nenule, aşa că Δ, determinantul său, trebuie să fie nul ceea ce indică valorile proprii ale energiei (complexe):

$$E(\tau) = H_{12} \pm \sqrt{H_{11}(\tau) \cdot H_{12}(\tau)}. \tag{6.111}$$

Numai aceste energii pot exista în sistem. Se vede că ele sînt diferite în general; două valori complexe E_1 şi E_2 după cum semnul radicalului este plus sau minus. Cu această condiţie, din sistemul (6.109) se obţine raportul amplitudinilor complexe a_1 şi a_2 (temporale)

$$\frac{a_2}{a_1} = \pm \sqrt{\frac{H_{11}}{H_{22}}}. \tag{6.112}$$

Cele două valori proprii complexe ale energiei coincid pentru un „moment" $\tau = \tau_0$ complex, dacă unul din numerele complexe H_{11} sau H_{22} care depind şi ele de τ (prin intermediul hamiltonianului complex) se anulează. Să presupunem că această situaţie se întîmplă cu H_{11}. În acest caz valorile coincid

$$E = H_{12}(\tau_0) \, ; \, E_1(\tau_0) = E_2(\tau_0). \tag{6.113}$$

Cît priveşte comportarea energiei E în vecinătatea punctului τ_0, anularea mărimii H_{11}, în punctul (regulat) τ_0, se face în general proporţional cu $\tau - \tau_0$, astfel că anularea lui E se va face proporţional cu radical din $\sqrt{\tau - \tau_0}$, aşa cum indică (6.111). Prin urmare, $E(\tau)$ are la $\tau = \tau_0$ un punct de ramificaţie. În acest caz şi $a_2 \sim \sqrt{\tau - \tau_0}$, după cum indică (6.112), astfel că, în punctul τ_0, avem numai o singură funcţie proprie şi ea coincide cu $a_1(\tau_0) \cdot \varphi_1(x)$.

Astfel tranziţia adiabatică poate fi tratată cvasiclasic în perfectă analogie cu o tranziţie de tip spaţial, (o reflexie pe o barieră de potenţial); funcţia cvasiclasică $\Psi = e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}(t)}$, se va construi cu ajutorul acţiunii complexe $\mathcal{S} = -\int E(\tau)\, d\tau$ care are puncte de ramificaţie în momentele $\tau = \tau_0$ cînd energia se schimbă şi ,,are loc saltul''. De aceea pentru calculul cu funcţia de undă cvasiclasică se trece în domeniul complex, parcurgîndu-se planul variabilei τ de la valori negative mari la valori pozitive mari, analog cum s-a procedat în planul variabilei $\mathcal{E} = X$ alegîndu-se conture pe care se păstrează condiţia de cvasiclasicitate

Aproximaţia cvasiclasică prezintă un interes practic, evident, dar şi unul principial, pentru că anumite sisteme (sau porţiuni ale mişcării) pot fi tratate în această imagine simplificată. Aşa bunăoară se poate studia statistica sistemelor în aproximaţie cvasicuantică, mărginindu-se mai ales la *cuantificarea energiei* şi la considerarea *identităţii microparticulelor*, fără a calcula ecuaţiile inextricabile pentru funcţia de undă a unui colectiv cu un mare număr de constituienţi [23], [24], sau problema ciocnirilor.

VII. LEGĂTURA DINTRE MECANICA CUANTICĂ ŞI TEORIA CLASICĂ A RADIAŢIEI

Să *examinăm corespondenţele care există între teoria clasică a radiaţiei (bazată pe mecanică newtoniană şi pe electrodinamica maxwelliană) şi teoria cuantică corespunzătoare.* Această corespondenţă duce la elucidarea raporturilor profunde care există între reprezentarea ,,mişcării clasice'' şi cea cuantică, deoarece în problema radiaţiei sînt angajate deopotrivă *aspectele mecanice şi electrodinamice ale microobiectelor* (sistemelor). Ne vom referi aici desigur la teoria nerelativistă a radiaţiei, care lasă neschimbate caracteristicile cîmpului electromagnetic descris prin ecuaţiile lui Maxwell, deci sub forma unor scalari, nu a unor operatori (cîmp exterior necuantificat). În felul acesta aspectele electromagnetice propriu-zise ale particulei şi microparticulei, rămîn, putem zice, aceleaşi. Teoria cuantică poate calcula probabilitatea tranziţiilor cauzate de cîmpul electromagnetic, *interacţia cîmp-microparticulă fiind în esenţă aceeaşi ca şi* în teoria fenomenologică a radiaţiei a lui Einstein, contactul realizîndu-se pe baza *legilor de conservare a energiei şi impulsului (aceste mărimi sînt însă interpretate cuantic : energiile sînt discrete, impulsurile sînt legate de unda asociată şi atît energiile cît şi impulsurile sînt supuse relaţiilor respective de nedeterminare).* Corespondenţa cu teoria clasică este deosebit de interesantă, deoarece, precum se ştie, aceasta n-a putut explica spectrele radiaţiei ducînd la rezultate contradictorii şi la *impasuri* răsunătoare care au fost depăşite de teoria cuantelor şi mai ales de mecanica cuantică (*catastrofa ultravioletă, căderea pe nucleu, caracteristicile spectrelor, convergenţa liniilor spectrale). Or electrodinamica s-a construit mai întîi ca o disciplină macroscopică, aşa că inaplicarea ei la scară atomistă putea pune sub semnul întrebării întreaga teorie maxwelliană,* limitîndu-i în orice caz valabilitatea. Rezolvarea antinomiilor ridicate în mod special de natura radiaţiei, a dus, precum se ştie, la descoperirea dualităţii luminii şi, în etapa cuantică nerelativistă a fizicii, *la modificarea reprezentării aspectului mecanic al mişcării* (*iar nu al celui electromagnetic*). În etapa relativistă, cîmpul electromagnetic a fost şi el supus unei consecvente cuantificări (electrodinamica cuantică). Corespondenţa cu domeniul clasic cu atît mai importantă cu cît aici s-a enunţat un adevărat principiu de corespondenţă, care nu era scutit de anumite *contradicţii şi limitări.* El reflectă tocmai raporturile dintre imaginile din ce în ce mai cuprinzătoare asupra adevăratei mişcări : care s-au obţinut progresiv în mecanica clasică, în cea semicuantică-semiclasică şi în mecanica cuantică. *Acest principiu optic de corespondenţă, pe lîngă utilizarea sa practică, se încadrează în constatarea plină de implicaţii filozofice, că mecanica cuantică regăseşte* (*şi fundamentează*) *rezultatele valabile, concordante cu experienţa, ale mecanicii clasice* (*şi semiclasice*), *pornind însă de la imaginea sa despre mişcare, imagine nouă, şi profund diferită de cea a primei intuiţii.*

În teoria clasică a radiaţiei se consideră un sistem de sarcini în mişcare oarecare. În cel mai simplu caz mişcarea unei singure sarcini poate fi o oscilaţie armonică, sistemul fiind atunci redus la un dipol de moment

$$(7.1)\qquad \vec{\mathcal{D}} = e\vec{r} = e\vec{r}_0 \cos\omega_0 t = \vec{\mathcal{D}}_0 \cos\omega_0 t = \vec{\mathcal{D}}_0 \cos 2\pi\nu_0 t$$

(ν_0 = *frecvenţa proprie a dipolului* ; *frecvenţă de natură mecanică*). Cîmpul electromagnetic al unui dipol oscilant poate fi calculat cu ajutorul ecuaţiilor lui Maxwell. La distanţe mari (în zona numită a undelor) se obţine *un cîmp electric* (*egal cu cel magnetic*), *proporţional cu acceleraţia, ceea ce exprimă principiul de inerţie în privinţa radiaţiei.* $\ddot{\mathcal{D}} = -\omega_0^2\mathcal{D}_0 \cos\omega_0 t = 0$, atrage după sine $\vec{\mathcal{E}} = 0$, de unde concluzia că, *mişcîndu-se uniform, o sarcină nu emite* energie. *Cîmpul se propagă, fapt descris în mod intuitiv de argumentul retardat al acceleraţiei dipolare. Undele sînt transversale, sferice, şi* au o caracteristică unghiulară bine definită (emisie nulă pe direcţia oscilaţiei, maximă pe direcţia perpendiculară) :

$$(7.2)\qquad \boxed{|\vec{\mathcal{E}}| = |\vec{\mathcal{H}}| = \frac{1}{c^2}\,\frac{1}{R}\,\ddot{\vec{\mathcal{D}}}(t-R/c)\sin\theta}\,.$$

Fluxul de energie care trece prin punctul dat (local şi instantaneu) este egal cu vectorul lui Poynting

$$(7.3)\quad \Phi = |\vec{Y}| = \frac{c}{4\pi}|\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}| = \frac{c}{4\pi}\mathcal{E}\cdot\mathcal{H}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\ddot{\mathcal{D}}^2(t-R/c)}{4\pi c^3}\,\frac{1}{R^2}\sin^2\theta.$$

Se vede că acest flux are o distribuţie neuniformă pe direcţii şi scade invers proporţional cu pătratul razei. Să integrăm acum pe suprafaţa sferei $d\sigma = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ şi vom obţine energia totală radiată (*intensitatea*) la un moment dat. Să evaluăm apoi şi media pe o perioadă, obţinînd energia emisă într-o secundă de o particulă oscilînd armonic şi avînd momentul $\vec{\mathcal{D}}$

$$(7.4)\qquad \mathcal{J} = \frac{\ddot{\mathcal{D}}^2}{4\pi c^3}\cdot\frac{1}{R_2}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\cdot R^2 = \frac{2\ddot{\mathcal{D}}^2}{3c^3},$$

$$(7.5)\qquad \bar{\mathcal{J}} \equiv \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3c^3}\,\overline{\ddot{\mathcal{D}}} = \frac{2\omega_0^4}{3c^3}\,\overline{\mathcal{D}_0^2\cos^2\omega_0 t} = \frac{\omega_0^4}{3c^3}\,\mathcal{D}_0^2.$$

Dacă mişcarea nu este o simplă oscilaţie armonică, ci o mişcare mai complicată, dar tot periodică (de perioadă $T_0 = 2\pi/\omega_0$), coordonata particulei o vom dezvolta-o în serie Fourier:

$$(7.6)\qquad \begin{aligned} x(t) &= \sum_{k'=k=-\infty}^{+} x_k \mathrm{e}^{i\omega_k t} \equiv \sum_{-\infty}^{+\infty} x_k \mathrm{e}^{ik\omega_0} = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x_k|\,\mathrm{e}^{i\varphi_k t}\,\mathrm{e}^{i\omega_k t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} |X_k|\,\mathrm{e}^{i(\omega_k t+\varphi_k)} = \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} 2|x_k|\,\mathrm{e}^{i(\omega_k t+\varphi)} = \sum_{k=1}^{\infty} 2|x_k|\cos(\omega_k t+\varphi_k)\,; \end{aligned}$$

$$(K' = \pm 1, \pm 2, \ldots;\ K = 1,2\ldots)$$

Momentul dipolar al particulei animată de o astfel de mişcare va fi şi el caracterizat de o suprapunere de dipoli oscilanţi $\mathcal{D}^k$ clasici

$$(7.7)\qquad \begin{aligned} \mathcal{D}(t) &= \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_k \mathrm{e}^{i\omega_k t} = \sum_{k=1}^{\infty} 2|\mathcal{D}_k|\cos(\omega_k t+\varphi_k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\,|\mathrm{e}x_k|\cos(\omega_k t+\varphi_k) \equiv \\ &\equiv \sum_{1}^{\infty} 2|\mathcal{D}_k|\cos(\omega_k t+\varphi_k) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{D}^k_{\mathrm{clasic}}(t)\,;\quad \mathcal{D}^k_{\mathrm{clasic}} = 2|\mathcal{D}_k|\cos(\omega_k t+\varphi_k). \end{aligned}$$

Energia instantanee (şi apoi cea medie) radiată de un astfel de dipol oarecare $\mathcal{D}^k_{\mathrm{cl}} = 2\,|\mathrm{e}x_k|\cos(\omega_k t+\varphi_k)$ în unghiul solid $\mathrm{d}\Omega$ va fi

$$(7.8)\qquad \Phi_k R^2\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{c^3}\,\frac{1}{R^2}\,(\ddot{\mathcal{D}}^{(k)}_{\mathrm{clas}})^2\sin^2\Theta\,R^2\,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{c^3}\,\omega^4(\mathcal{D}^{(k)}_{\mathrm{clas}})^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\Omega$$

$$(7.9)\qquad \bar{\Phi}_k R^2\mathrm{d}\Omega \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{c^3}\,\overline{(\mathcal{D}^{(k)}_{\mathrm{clas}})^2}\sin^2\Theta\,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{c^3}\,\omega_k^4\,\overline{(\mathcal{D}^{2(k)}_{\mathrm{clas}})}\sin^2\mathrm{d}\Omega.$$

Iar radiaţia totală medie (de frecvenţă oarecare ω_k din spectrul clasic posibil) va fi

$$(7.10)\qquad \begin{aligned} \left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right) &\equiv \int \bar{\Phi}_k R^2\mathrm{d}\Omega = \int \frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{c^3}\,\omega_k^4\,\overline{(\mathcal{D}^{2(k)}_{\mathrm{clas}})}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3c^3}\,\omega_k^4\,\overline{(\mathcal{D}^{(k)}_{\mathrm{clas}})^2} = \\ &= \frac{2}{3c^3}\,\omega_k^4\,\overline{(2|\mathcal{D}_k|\cos(\omega_k t+\varphi_k))^2} = \frac{2}{3c^3}\,\omega_k^4\,|\mathcal{D}_k|^2\,\frac{1}{2} = \frac{4\omega_k^4}{3c^3}\,|\mathcal{D}_k|^2 = \frac{\omega^4}{3c^3}\,|2\mathcal{D}_k|^2. \end{aligned}$$

Această formulă este de fapt tot (7.5), exprimată însă prin coeficienţii Fourier ai momentului dipolar. Existenţa factorului 2 care precizează componenţa Fourier $\mathcal{D}^{(k)}_{\mathrm{cl}} = 2(\mathcal{D}_k)\cos\omega_k t = 2|x_k|\cos(\omega_k t+\varphi_k)$ exprimă în esenţă faptul că regimul cel mai general de oscilaţii constă dintr-o dublă serie de oscilaţii liniare, în cele două direcţii ale axei. Rezultatul (7.10) va fi comparat cu cel stabilit de teoria cuantică bazat şi el, în esenţă, pe principiul suprapunerii stărilor de mişcare.

Concluziile teoriei clasice a emisiei microscopice (formulate încă de H.A. Lorentz) sînt astfel concentrate în formulele

$$\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{1}{4\pi c^3}\,\omega_k^4\cdot(\mathcal{D}_{\mathrm{cl}}^{(k)})^2\cdot\sin^2\theta\cdot\mathrm{d}\Omega = \frac{\omega^4}{2\pi c^3}\,|\mathcal{D}_k|^2\sin\theta\mathrm{d}\Omega \tag{7.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{2\omega_k^4}{3c^3}(\overline{\mathcal{D}_{\mathrm{cl}}^k})^2 = \frac{4\omega_k^4}{3c^3}\,|\mathcal{D}^k|^2 = \frac{\omega^4}{3c^3}\,|2\mathcal{D}_k|^2 = \frac{\omega^4}{3c^3}\,|\delta_k|^2 \tag{7.12}$$

$$\mathcal{D}_{\mathrm{cl}}^k = 2\,|\mathcal{D}_k|\cos(\omega_k t+\varphi_k) = \delta_k\cos(\omega_k t+\varphi_k) \tag{7.13)–(7.14}$$

$$k = 1,2,3,4,\ldots,+\infty.$$

Emisia dipolară este numai o primă aproximaţie a radiaţiei pe care o poate genera un sistem de sarcini. Cîmpul generat poate fi descris în cazul general printr-o dezvoltare în serie, *primul termen fiind cel dipolar, iar ceilalţi fiind multipolii radiaţiei* [26]. Ultima relaţie indică originea mecanică a frecvenţelor $\nu_k = \dfrac{\omega_k}{2\pi}$ din spectrul optic şi deci natura şi aspectul „*cuantificării clasice*": *redusă la o simplă echidistanţă.*

Teoria cuantică a radiaţiei calculează în esenţă probabilitatea de tranziţie dintr-o stare în alta sistemului perturbat de cîmpul electromagnetic necuantificat. Calculul tranziţiei este în esenţă o problemă de mecanică, întrucît asupra cîmpului electromagnetic (asupra interacţiei), nu se fac ipoteze noi, acesta fiind dat pur şi simplu ca un scalar (iar nu ca un operator), iar energia lui de esenţă clasică, va fi inclusă în ecuaţia lui Schrödinger ca un simplu multiplicator al funcţiei de undă. În felul *acesta teoria cuantică nerelativistă poate descrie emisia şi absorbţia luminii de către sisteme, întrucît prin emisie forţată şi prin absorbţie, sistemul execută o tranziţie a cărei probabilitate poate fi calculată.* În mod esenţial tranziţia se referă la energie, de aceea ecuaţia de undă se studiază în reprezentarea energetică (funcţiile $\Psi(x, t)$ fiind ele staţionare, adică proprii operatorului $\hat{H}$). Pentru spectrul discret, tranziţia se referă la trecerea de pe un nivel E_m pe altul E_n, emiţînd sau absorbind o cuantă de energie $\omega_{mn} = \dfrac{E_m - E_n}{h}$, deci o frecvenţă optică. Mecanismul interacţiei se bazează în esenţă pe legile de conservare ale energiei şi ale impulsului aplicate la radiaţie (teoria fenomenologică) şi ceea ce izbuteşte mecanica cuantică este calculul pentru diferite sisteme a coeficienţilor lui Einstein, coeficienţi introduşi, iniţial, fenomenologici şi care descriu emisia forţată şi absorbţia.

Emisia spontană a sistemului (atom) *este de neînţeles în mecanica cuantică, întrucît dacă sistemul se află într-o stare excitată, dar de energie determinată şi nu intervin acţiuni din afară, acesta va rămîne în starea dată la infinit* (*stările sînt staţionare, energia bine determinată şi rămîne ca atare căci ea este o integrală a mişcării* (*2.44*)). Această neputinţă a mecanicii cuantice este *de natură electrodinamică* (*deci relativistă*) *şi situaţia se prezintă analog* *şi în mecanica clasică.* În definitiv interacţia cîmp-microparticulă nu este un fenomen pur mecanic, căci aceasta în cursul mişcării crează o radiaţie care reacţionează asupra sa însăşi. Şi în mecanica clasică problema era pusă în aceiaşi termeni : o particulă care are energia E va păstra această energie indefinit ; or în realitate existenţa reacţiunii proprii frînează treptat particula şi o opreşte. Reacţiunea poate fi calculată clasic, considerînd cîmpul produs de electronul încărcat care se mişcă pe traiectoria stabilă.

Electrodinamica cuantică nerelativistă descrie prin urmare procesele cu ajutorul legii de mişcare schrödingeriene

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\hat{H}^{0}(x)\,\Psi+\hat{W}(x,t)\Psi, \tag{7.15}$$

în care perturbaţia $\hat{W}$ indică prezenţa cîmpului (energia cîmpului) şi ca atare o vom dezvolta în integrală Fourier (spectru continuu al perturbaţiei principiul clasic al suprapunerilor) :

$$W(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}W(x,\omega)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{7.16}$$

$$W(x,\omega)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}W(x,t)\,\mathrm{e}^{+i\omega t}\,\mathrm{d}t. \tag{7.17}$$

Probabilitatea tranziţiei se obţine din rezolvarea ecuaţiei (7.15) $\Psi=\sum C_k(t)\Psi(x)\mathrm{e}^{-iEk/t}$ fiind funcţiile proprii ale lui $\hat{H}$, iar rezultatul obţinut se exprimă, în esenţă, prin elementul de matrice al perturbaţiei

$$W_{m\,n}\equiv\int\Psi_m^*(x)\;\hat{W}(x,t)\,\Psi_n(x)\,\mathrm{d}x \tag{7.18}$$

Cum perturbaţia am descris-o prin (7.16), elementul de matrice devine

$$\begin{aligned}W_{m\,n}(t)&=\int\Psi_m^*(x)\;\hat{W}(x,t)\;\Psi_n(x)\,\mathrm{d}x=\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_m^*(xW(x,\omega)\cdot\Psi_n(x)\,\mathrm{d}x\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-i\omega t}W_{m\,n}(\omega)\,\mathrm{d}\omega\end{aligned} \tag{7.19}$$

$$W_{m\,n}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}W_{m\,n}(t)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,\mathrm{d}t, \tag{7.20}$$

$W_{m\,n}(\omega)$ fiind elementul de matrice al componentei Fourier de pulsaţie ω. Teoria radiaţiei [3], [6] arată că probabilitatea tranziţiei $E_n\to E_m$ este proporţională cu pătratul elementului de matrice corespunzător

$$\boxed{\mathcal{P}_{m\to n}\equiv\mathcal{P}_{m\,n}=\frac{4\pi^2}{\hbar^2}\,|\,W_{m\,n}(\omega_{m\,n})\,|^2=\frac{4\pi^2}{\hbar^2}\left|W_{m\,n}\left(\frac{E_m-E_n}{h}\right)\right|^2}\,. \tag{7.21}$$

Acest rezultat esenţial arată caracterul de *rezonanţă* al tranziţiei căci

$$\boxed{\mathcal{P}_{m\,n} \neq 0 \text{ numai cînd } \omega = \omega_{m\,n}} \tag{7.22}$$

deci *tranziţia nu se realizează decît dacă spectrul perturbaţiei conţine frecvenţa* $\omega = \omega_{m\,n}$. *Sistemul cuantic se comportă ca un ansamblu de oscilatori avînd frecvenţele proprii egale cu frecvenţele Bohr* $\omega_{m\,n} = \frac{E_m - E_n}{h}$ *şi perturbaţia exterioară excită numai acei oscilatori a căror frecvenţă există în spectrul ei* (principiul spectroscopic empiric : ,,nu se emite decît ce se absoarbe''). Situaţia este similară şi pentru oscilatorii clasici, dar frecvenţele acestora diferă de cele admise de teoria cuantică (vezi mai departe).

Tranziţiile pot avea loc şi în spectrul continuu, de pildă pentru microparticulele care se ciocnesc şi care au impulsul (p_x, p_y, p_z). Energia va fi o funcţie de $E(p)$ şi de asemenea şi de $\Psi_p(x)$. Pentru probabilitatea de tranziţie de pe nivelul E_n în intervalul continuu E_p, $E_p + \mathrm{d}E_p$, în unitatea de timp, mecanica cuantică obţinea rezultatul remarcabil [3], [6] :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{(p)\,n}(\mathrm{d}p) &= 2\,|W_{(p)\,n}|^2 \cdot \frac{\sin\left\{\dfrac{(E(p)-E_n-h\omega)t)}{h}\right\}}{E(p)-E_n-h\,\omega}\,\mathrm{d}p \simeq \\ &\simeq \frac{2\pi}{\hbar}\,|W_{p.\,n}|^2\,\delta\,[E(p)-E_n-h\omega]\mathrm{d}p \end{aligned} \tag{7.23}$$

$$E(p)-E_n \equiv \hbar\omega\,;\; W_{pn}(t) \equiv \int \Psi^*_{(p)}(x)\,W(x,t)\,\Psi_n(x)\,\mathrm{d}x \tag{7.24)–(7.25}$$

ultima aproximaţie se referă la durate t mari (termenul cu sinus diferă de funcţia δ numai prin π). Iar pentru tranziţia între două stări continue $(p_0 \to p,\; p+\mathrm{d}p)$ se obţine

$$\mathcal{P}_{p_0}(p)\mathrm{d}p = \frac{2\pi}{\hbar}\,|W_{p,p_0}|^2\,\delta[E_{(p)} - E_{(p_0)} - \hbar\omega]\,\mathrm{d}p \tag{7.26}$$

$$W_{p,p_0}(t) \equiv \int \Psi^*_p(x)\,\hat{W}(x,t)\,\Psi_{p_0}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7.27}$$

Procesul are mereu un caracter de rezonanţă deoarece probabilităţile sînt nenule numai pentru tranziţiile în care frecvenţele exterioare sînt egale cu cele (,,interioare''), ale lui Bohr

$$\mathrm{h}\omega = E_{(p)} - E_n \equiv \mathrm{h}\omega_{(p),n} \tag{7.28}$$

$$h\omega = E_{(p)} - E_{p_0} \equiv \mathrm{h}\omega_{(p)\,(p_0)} \tag{7.29}$$

Prezenţa funcţiei δ *arată că în vecinătatea rezonanţei probabilităţile sînt egale cu zero* ; de fapt ele sînt numai aproximativ egale cu zero, căci la durate foarte mici este valabilă prima expresie din (7.23), deci nu chiar funcţia $\delta(E - E')$ (*procese virtuale* ; *nedeterminarea cuantică a energiei pe* *intervale foarte mici de timp* : $\Delta E \Delta t \gg \hbar$). Rezonanţa este foarte ascuţită, aşa că densităţile probabilităţilor calculate în aceste puncte devin infinite. După cum se vede, [$\mathcal{P}\alpha \rightarrow \beta$], în toate cazurile, se exprimă prin elementele de matrice ale perturbaţiei.

Dacă cîmpul electric incident $\vec{\mathcal{E}}(t)$ are o fază care nu variază în cuprinsul sistemului (atom, nucleu), elementele de matrice necesare ale perturbaţiei vor fi exprimate prin momentul electric dipolar $\vec{\mathcal{D}} = e\vec{r}$:

$$W(\vec{r}, t) = -e\mathcal{V} = +e(\vec{\mathcal{E}}\vec{r}) \equiv -\vec{\mathcal{E}}\vec{\mathcal{D}} = -\mathcal{E}(t)\cdot(\vec{1^0}\vec{\mathcal{D}}) \tag{7.30}$$

$$\begin{aligned} W_{mn}(t) &= \int \Psi_m^* \hat{W}(r, t) \Psi_n \,\mathrm{d}\mathcal{V} = -\mathcal{E}(t) \int \Psi_m^* (\vec{1^0}\vec{\mathcal{D}}) \Psi_n \,\mathrm{d}\mathcal{V} = \\ &= -\mathcal{E}(t)(\vec{1^0}\cdot\vec{\mathcal{D}}_{mn}) = -\mathcal{E}(t)\vec{\mathcal{D}}_{mn}\cos\Theta_{mn}. \end{aligned} \tag{7.31}$$

Dacă are loc o variaţie a fazei cîmpului, elementele de matrice care condiţionează probabilitatea $m \rightarrow n$ nu mai reprezintă un moment electric dipolar independent de radiaţie, întrucît el depinde de vectorul de undă al radiaţiei $\vec{K}$

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{D}}_{mn}^{(\vec{k})} &= \frac{\hbar e}{m^0} \frac{1}{\omega_{mn}} \int \Psi_m^* e^{-i\vec{k}\vec{r}} \nabla \Psi_n \,\mathrm{d}\mathcal{V} = \\ &= \frac{\hbar e}{m^0} \frac{1}{\omega_{mn}} \int \Psi_m^{0*} \nabla \Psi_n^* \,\mathrm{d}\mathcal{V} + \frac{i\hbar e}{m_0} \frac{1}{\omega_{mn}} \int \Psi_m^{0*} (\vec{k}\vec{r}) \Psi_{n*}^0 \,\mathrm{d}\mathcal{V} + \ldots = \\ &= \vec{\mathcal{D}}_{mn}^{(1)} + \vec{\mathcal{D}}_{mn}^{(2)} + \ldots \end{aligned} \tag{7.32}$$

Studiind termenii generaţi de dezvoltarea în serie a lui $e^{-i\vec{k}\vec{r}}$ după puterile lui $kr = \frac{2\pi r}{\lambda}$, se obţine ca prim termen cel dipolar (radiaţia de dipol), iar ca termen de ordinul doi radiaţia cvadrupolară

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{D}}_{mn}^{(1)}(\vec{k}) &= \vec{\mathcal{D}}_{mn} = e\vec{r}_{mn}\,;\ \vec{\mathcal{D}}_{mn}^{(2)}(\vec{k}) = -i\frac{e}{z}\{(\vec{k}\vec{r})\vec{r}\}_{mn} + \\ &+ [\vec{\nu}\,\mathfrak{K}_{mn}] = -i\vec{k}Q_{mn} + \vec{\nu}\,\mathfrak{K}_{mn} \end{aligned} \tag{7.33}$$

($\vec{\nu}$ = versorul propagării ; $\vec{\mathfrak{K}} \sim \vec{\mathcal{M}}$ = momentul magnetic ; $\vec{\mathcal{M}}$ = momentul mecanic) primul termen fiind *tensorul radiaţiei de cvadrupol electric* Q_{mn} iar al doilea *radiaţia dipolară magnetică;* ambele redate în teoria cuantică prin elemente de matrice $\left(\mathfrak{K}_{mn} = -\frac{e}{2mc}(\vec{\mathcal{M}}_{mn}),\ \text{la atom}\right)$.

Energia medie radiată într-o secundă în elementul de unghi solid $\mathrm{d}\Omega$, de către un microsistem se poate calcula după teoria cuantică, şi se obţine[3]

$$\boxed{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\omega_{mn}^4}{2\pi c^3}\,|\vec{\mathcal{D}}_{mn}|^2 \sin^2\Theta_{mn}\,\mathrm{d}\Omega} \cdot \tag{7.34}$$

Pentru radiaţia totală, integrăm după toate unghiurile

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{4\omega_{mn}^4}{3c^3}|\vec{\mathcal{D}}_{mn}|^2}. \tag{7.35}$$

Aceste rezultate pot fi comparate imediat cu cele clasice (7.11) (7.12, 7.13, 7.14). Distribuţia unghiulară ($\sim \sin^2\theta$) cît şi energia totală emisă într-o secundă coincid cu aceleaşi mărimi calculate pentru oscilatorul clasic de frecvenţă proprie ω_k,

$$\omega_{mm} \equiv \frac{E_m - E}{h} = \omega_k \equiv \omega_0. \tag{7.36}$$

Momentul electric mediu clasic corespunzător este

$$2\,|\vec{\mathcal{D}}_{mn}|^2 = \overline{|\vec{\mathcal{D}}_\varphi|^2} = 2\,|\mathcal{D}_k|^2 \tag{7.37}$$

deci ele corespund

$$\boxed{\mathcal{D}_{mn}^{(\text{cuantic})} \to \mathcal{D}_k^{(\text{clasic})}}. \tag{7.38}$$

Coincidenţa este deplină şi în privinţa polarizaţiei luminii. Polarizarea acesteia a fost indicată prin versorul $\vec{1}^\circ$ care formează cu direcţia momentului electric $\vec{\mathcal{D}}_{mn}$ unghiul Θ_{mn}. Cum oscilaţia este transversală, avem de fapt două direcţii independente $(\vec{1}_1^0, \vec{1}_2^0)$, una $\vec{1}_1$ perpendiculară faţă de rază şi conţinută în planul razei şi al vectorului $\vec{\mathcal{D}}_{mn}$, iar alta perpendiculară pe acest plan. În primul caz figura ne arată că $\Theta_{mn} = \frac{\pi}{2} - \Theta'_{mn}$, Θ'_{mn} fiind unghiul dintre vectorul $\vec{\mathcal{D}}_{mn}$ şi direcţia razei, iar (7.21), cu (7.31) conduce la o probabilitate nenulă ($\cos^2\Theta_{mn} = \sin^2\Theta'_{mn}$). Dimpotrivă, pentru a doua stare de polarizare $\left(\Theta_{mn} = \frac{\pi}{2} \text{ şi } \cos\Theta_{mn} = 0\right)$, arată că probabilitatea corespunzătoare este nulă

$$\mathcal{P}_{mn}^{(\alpha)} \sim |\vec{1}_\alpha^0 \vec{\mathcal{D}}_{mn}|^2 = \mathcal{D}_{mn}^2 \cos^2\Theta_{mn} \begin{array}{l} \nearrow \mathcal{D}_{mn}^2 \cos^2\Theta'_{mn}. \\ \searrow 0 \end{array} \alpha = 1, 2. \tag{7.39}$$

(În (7.34) şi pe mai departe omitem accentul şi scriem Θ_{mn}) (fig. 11).

Or pentru oscilatorul clasic (înfăţişat şi el pe figură), cîmpul $\vec{\mathcal{E}}$ este întotdeauna situat în planul meridian şi anume în lungul cercului meridian iar nu perpendicular pe $\vec{\mathcal{D}}$, căci pentru această poziţie (realizată la poli) emisia dipolară este zero

$$\vec{\mathcal{E}} \sim \ddot{p}\,(t - t')\,.\sin\Theta. \tag{7.40}$$

Polarizarea clasică este deci de tipul 1_1 pentru care cuantic $\mathcal{P}_{mn} \neq 0$; $(\vec{1}_1^0 \parallel \vec{\mathcal{E}})$. Compararea rezultatelor esențiale ale teoriei radiației clasice și cuantice (7.34), (7.35) cu (7.11), (7.12) ne arată că elementul de matrice $\mathcal{D}_{mn}$ se pune în completă analogie cu componentele Fourier, $\mathcal{D}_k$ redînd în formă cît se poate de generală trecerea de la clasic la cuantic, de la mărime la operator. După cele remarcate în capitolul (VI), acest

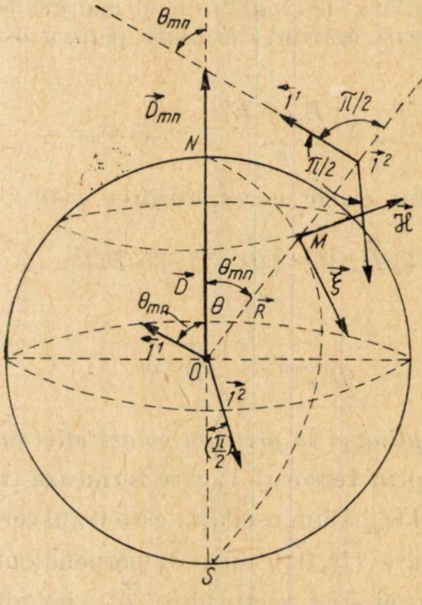


Fig. 11

lucru este firesc, ca rezultat al aproximărilor cvasiclasice. Să examinăm acum sensul fizic al acestei corespondențe *clasic-cuantic*, în cazul radiației.

Clasic momentul electric $\vec{\mathcal{D}}$ care condiționează radiația (dipolară) este alcătuit dintr-un șir unidimensional de *dipoli oscilînd armonic*:

$$\mathcal{D}_1 e^{i\omega_1 t},\ \mathcal{D}_2 e^{i\omega_2 t}, \ldots\ \mathcal{D}_n e^{i\omega_n t} \equiv (\mathcal{D}_k(t)), \ldots \tag{7.41}$$

În reprezentarea Fourier vom presupune că am inclus în $\mathcal{D}$ factorii temporali

$$\vec{\mathcal{D}}_k\,(t) = \vec{\mathcal{D}}_k\,(0)\, e^{i\omega k t} = (\mathcal{D}_k\, e^{i\omega k t}). = \mathcal{D}_k\,(t)). \tag{7.42}$$

Frecvențele posibile alcătuiesc un șir echidistant.

$$\omega_1 = \omega_0\,;\ \omega_2 = 2\omega_0\,;\ \omega_3 = 3\omega_0 \ldots\ \omega_n = n\omega_0, \ldots \tag{7.43}$$

ω_0 fiind frecvența fundamentală iar $\omega_k = k\omega_0$ armonicele sistemului.

Cuantic, radiația este de asemenea emisă de un ansamblu de dipoli care oscilează. Momentele electrice sînt variabile așa că vom considera acum pe $\vec{\mathcal{D}}_{mn}$ dependente de timp, deci vom atribui dependența de timp operatorilor (elementelor de matrice) iar nu funcțiilor de undă. Vom trece astfel de la reprezentarea Schrödinger folosită pînă acum la reprezentarea Heisenberg!. Momentele dipolare nu depind în mod explicit de timp, aşa că stările de radiaţie fiind staţionare, elementele de matrice vor avea $\frac{\partial \mathcal{D}_{mn}}{\partial t} = 0$. Variaţia în timp a acestor elemente în lungul mişcării va fi descrisă de elementele de matrice ale parantezelor Poisson (din (1.10) înmulţind la stînga cu Ψ^* şi la dreapta cu Ψ şi integrînd (aici $\hat{L} \equiv \hat{\mathcal{D}}$):

$$\left(\frac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{D}}}{\mathrm{d}t}\right)_{mn} = \frac{\partial \mathcal{D}_{mn}}{\partial t} + [\hat{H}, \hat{\mathcal{D}}_{mn}] \equiv 0 + \tag{7.44}$$

$$+ \frac{1}{i\hbar} [\hat{\mathcal{D}} \hat{H} - \hat{H} \hat{\mathcal{D}}]_{mn} = \frac{1}{i\hbar} \sum_k (\mathcal{D}_{mk} H_{km} - H_{mk} \mathcal{D}_{kn})$$

Cum energia este constantă, $\hat{H}$ nu depinde de timp, aşa că în reprezentarea energetică $H_{kn} = E_k \delta_k^n$; $H_{mk} = E_m \delta_m^k$, încît obţinem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathcal{D}_{mn} \equiv \left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{D}}{\mathrm{d}t}\right)_{mn} = \frac{1}{i\hbar} (E_n - E_m) D_{mn} \equiv i\, \omega_{mn}\, e x_{mn} \tag{7.45}$$

pentru operatorul coordonată x_{mn} care intervine în $\vec{\mathcal{D}} = e\vec{X}$. Avem o legătură dintre elementele de matrice ale vitezei şi cele ale coordonatei care este absolut aceeaşi ca şi la vibratorul de frecvenţă $\omega_k = \omega_{mn}$

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{mn} = i\omega_{mn} \cdot x_{mn}} \tag{7.46}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathrm{e}^{i\omega_k t}) = i\omega\, x_k} \tag{7.47}$$

Elementul de matrice, în reprezentarea Heisenberg, se construieşte cu ajutorul funcţiilor de undă ale stărilor staţionare luate la timpul t, şi atunci D_{mn} va conţine timpul

$$\mathcal{D}_{mn}(t) \equiv \int \Psi_m^*(x, t) \cdot \hat{\dot{\mathcal{D}}} \Psi_n(x, t) \mathrm{d}x = \int \Psi_m^*(x) \mathrm{e}^{+i\frac{E_m t}{\hbar}} \mathcal{D} \Psi_n \mathrm{e}^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} \mathrm{d}x = \tag{7.48}$$

$$= \int \Psi_m^* \mathcal{D} \Psi_n \mathrm{e}^{\frac{i(E_m - E_n)t}{\hbar}} = \mathcal{D}_{mn} \mathrm{e}^{i\omega_{mn} \cdot t}$$

Derivînd faţă de timp ($\mathcal{D}_{mn}$ nu-l conţine explicit), obţinem

$$\left(\frac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{D}}}{\mathrm{d}t}\right)_{mn} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{D}_{mn}}{\mathrm{d}t} = i\omega_{mn} \mathcal{D}_{mn}(t). \tag{7.49}$$

Rezultatul este perfect analog lui (7.45), numai că aici dependenţa este inclusă în operator (semnul · arată înmulţirea)

Radiaţia dipolară constă din ansamblul de dipoli $\hat{\mathcal{D}}_{mn}(t)$ (la fel ca ca şi în cazul clasic) pe care-l putem reprezenta printr-o matrice

$$\vec{\mathcal{D}}_{mn}(t) = \mathcal{D}_{mn}(0)\, e^{i\omega_{mn}t} = (\vec{\mathcal{D}}_{mn}\, e^{i\omega_{mn}t})\,;\ \vec{\mathcal{D}}(t) = \tag{7.50}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{D}}_{11}\, \vec{\mathcal{D}}_{12}\, e^{i\omega_{12}t} \ldots \vec{\mathcal{D}}_{1n}\, e^{i\omega_{1n}t} \ldots \\ \vec{\mathcal{D}}_{21}\, e^{i\omega_{21}t}\, \mathcal{D}_{22} \ldots \vec{\mathcal{D}}_{2n}\, e^{i\omega_{2n}t} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \vec{\mathcal{D}}_{m1}\, e^{i\omega_{m1}t}\, \vec{\mathcal{D}}_{m2}\, e^{i\omega_{m2}t}\, \vec{\mathcal{D}}_{mn}\, e^{i\omega_{mn}t} \ldots \end{pmatrix}$$

Frecvenţele emise de aceşti oscilatori formează spectrul sistemului, şi el dispune de o varietate mult mai bogată ca şi în cazul clasic. Frecvenţele posibile le fixează şi nivelele şi alcătuiesc matricea :

$$\omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{h}\,;\ \omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \ldots & \omega_{1n} & \ldots \\ \omega_{21} & 0 & \ldots & \omega_{2n} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{m1} & \omega_{m2} & \ldots & \omega_{mn} & \end{pmatrix} \tag{7.51}$$

elementele diagonale sînt nule căci $\omega_{mn} = 0$, deci ele se referă la acelaşi nivel. Dipolul $\vec{\mathcal{D}}_{mn}(t)$ este în acest caz staţionar, $\vec{\mathcal{D}}_{mn}$, şi reprezintă momentul electric mediu (al atomului) în starea respectivă. Gama de radiaţii posibile este descrisă de elementele nediagonale ale matricei frecvenţelor. Frecvenţa atomilor se exprimă ca diferenţe ale unor termeni $\frac{E_m}{h}$, ceea ce fundamentează astfel teoretic *principiul de combinaţie empiric al lui* Ritz. *Imaginea despre varietatea de frecvenţe emisibile nu coincide în cazul clasic cu cea corectă cuantică,* căci după cum arată confruntarea tabloului (7.51) cu (7.43), se emit mult mai multe linii deci multiplele frecvenţei fundamentale. *Mişcarea cuantică îmbogăţeşte calitativ spectrul.*

Să examinăm acum corespondenţa dintre *mecanica cuantică şi teoria semicuantică a* lui Bohr (aproximaţia cvasiclasică). Se ştie că această teorie *nu putea calcula intensităţile radiaţiei, ci numai frecvenţele* ω_{mn} pe baza regulei de cuantificare (6.32). N. Bohr *a emis ipoteza că amplitudinile oscilatorilor clasici* $\vec{\mathcal{D}}_k$ *determină intensităţile (cît şi polarizaţia) radiaţiei şi pentru sistemele cuantice. Acesta este principiul de corespondenţă optic (în formularea lui cea veche), care ţine de etapa cuantelor şi se bazează pe faptul că pentru numere cuantice mari, n, rezultatele teoriei elaborate de* Bohr *şi* Somerfeld *coincid cu cele pur clasice.* În mod esenţial, la n mari frecvenţele cuantice de emisie, calculate pe baza celor două postulate de cuantificare ale lui Bohr, deci independente de frecvenţa de rotaţie pe orbita staţionară, coincid cu frecvenţele de rotaţie (deci clasice). (Întrucît frecvenţele optice clasice coincid cu cele de rotaţie).

Frecvenţele de rotaţie în atomul lui Bohr *sînt prescrise de cuantificarea momentului cinetic.*

$$p_\varphi \equiv m_0\, a^2\omega = m_0\, a^2\omega = 2\pi\, m_0\, a^2\, \nu_{\text{rot}} = n\,\frac{h}{2\pi} \equiv n\hbar,\ a^2\nu_{\text{rot}} = \frac{nh}{4\pi^2\, m} \tag{7.52}$$

aşa că dacă pentru amplitudinea a luăm raza Bohr, se obţin frecvenţele de rotaţie

$$\nu_{\text{rot}} = \frac{n\,h}{4\pi^2 m_0} \cdot \frac{1}{a_n^2} = \frac{4\pi^2 m_0 Z^2 e^4}{n^3 h^3} \equiv \frac{2RcZ^2}{n^3} \cdot (\text{s}^{-1}) \tag{7.53}$$

ultima formă conţine şi constanta spectroscopică a lui Rydberg, $R = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3 c}$ pe care am pus-o în evidenţă. *Frecvenţele optice se determină cu totul diferit, şi anume din relaţia care determină nivelele posibile* (*adică din formula termenilor spectrali*)

$$\nu_{\text{optic}} = RcZ^2\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)(\text{s}^{-1}). \tag{7.54}$$

Expresiile sînt complet diferite, dar la $n \gg 1$ şi pentru tranziţii vecine se obţin rezultate comparabile ($m - n = 1$; $m = n + 1 \simeq n$).

$$\boxed{\nu_{\text{optic}} = \nu_{\text{rot}}\,; \quad n = \text{mari}.} \,. \tag{7.55}$$

Esenţa fizică a acestei corespondenţe la numere cuantice mari rezidă în faptul primordial al cuantificării acţiunii. Clasic, aşa cum am văzut, frecvenţa unei mişcări este direct legată de integrala de acţiune

$$\begin{aligned} \nu_{\text{clos}} = \nu_{\text{rot}} &= \frac{1}{T} = \frac{1}{\oint \mathrm{d}t} = \frac{1}{\oint \frac{\mathrm{d}x}{v}} = \frac{1}{\oint \frac{m}{p}\,\mathrm{d}x} = \\ &= \frac{1}{\oint \frac{m}{\sqrt{2m(E-U)}}\,\mathrm{d}X} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\mathcal{S}} \end{aligned} \tag{7.56}$$

$$\mathcal{S} = \oint p\,\mathrm{d}x = \oint \sqrt{2m(E-U)}\,; \quad \boxed{\nu_{\text{clos}} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\mathcal{S}}} \tag{7.57)–(7.58}$$

deci $\nu_{\text{clos}} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\mathcal{S}_{\text{clos}}}$. Pe cînd cuantic, această acţiune este un multiplu de h

$$\mathcal{S} = \oint p\,\mathrm{d}q = n\,h, \tag{7.59}$$

iar frecvenţa este egală cu

$$\nu_{\text{cuant.}} = \nu_{\text{optic.}} = \frac{E_n - E_m}{h} = \frac{\Delta E}{h}. \tag{7.60}$$

Pentru două nivele vecine $n - m = 1$, acţiunea saltă cu $h = \hbar\, 2\pi$, aşa că frecvenţa optică (cuantică) devine:

$$\boxed{\nu_{\text{cuant.}} = \nu_{\text{optic}} = \left(\frac{\Delta E}{\Delta \mathcal{S}}\right)_{\text{cuant.}}} \tag{7.61}$$

În ambele cazuri frecvența este egală cu raportul dintre creșterea energiei și cea a acțiunii, dar clasic, creșterile sînt oricît de mici, pe cînd cuantic ele sînt discrete, caracterul discret fiind mai puțin accentuat la n mari.

Pentru a determina intensităţile emisiei în teoria lui Bohr, era necesar deci a se calcula amplitudinile clasice $\vec{D}_n^{(k)}$, *referitoare la o orbită n*, deci a dezvolta vectorul de poziţie al particulei $\vec{r}_n(t)$, în serie Fourier. *Dar cuantic tranziția constă dintr-un salt între orbita n și orbita m, și atunci amplitudinile oscilatorilor clasici se pot referi la orbita inițială n, sau la cea finală m.* Care din ele trebuie considerată ca fiind imaginea dipolului clasic care oscilează? Această *ambiguitate nu poate fi ridicată prin nici un argument fizic* în vechea teorie semicuantică. Totuşi în domeniul numerelor n mari $n \gg 1$ şi la tranziţii care se fac cu variaţii mici ale numărului cuantic $|n-m| = |s| \ll n$, *orbitele sînt foarte confundate*, formează un şir aproape continuu (*aproape clasic*), încît componentele clasice ale lui $\vec{D}_k$ diferă prea puţin de la orbita n la orbita m ($\vec{D}_n^k \simeq \vec{D}_m^k$) şi este practic indiferent care dintre cele două mişcări se dezvoltă în serie Fourier. În acest caz $\vec{D}^k_{(m\simeq n)}$ determină și amplitudinea, conform cu fizica clasică (7.13), iar cuantificarea precizează stările rezonante (deci matricea (7.51)). *Rezultatul nu poate fi aplicat însă la numere cuantice n mici, și nici la variații mari ale numerelor n.* Vechea formulare a principiului corespondenţei şi gradul său de valabilitate pot fi justificate în lumina aproximaţiei cvasiclasice.

Cuantic, intensitatea radiaţiei emise (absorbite) era descrisă de oscilatorii clasici cu momentele $\vec{D}_{mn}\, e^{i\omega_{mn} t}$, dar pentru aproximarea cvasiclasică, conform cu (6.64), la numere cuantice m şi n mari şi pentru $|s| = |m-n| \ll m$, elementele de matrice devin aproximativ egale cu componentele clasice Fourier :

$$\vec{\mathcal{D}}^{(k)}_{m\,n}(t) = \vec{\mathcal{D}}^{(k)}_{m,\,n-s} \simeq \vec{\mathcal{D}}^{(k)} = e x_k(t) = -\, e x_k(0)\, e^{ik\,\omega_0 t} \tag{7.62}$$

In felul acesta vechea formulare a principiului de corespondență își găsește justificare, esența ei rezidînd în aproximația cvasiclasică : în timp ce corespondența între teoria clasică și cea cuantică se traduce prin trecerea de la mărimi scalare $\mathcal{D}$ la operatori, $\hat{\mathcal{D}}$, deci de la dipolii $\vec{\mathcal{D}}^{(k)}$ la elementele de matrice $\vec{\mathcal{D}}_{mn}$, ceea ce le înzestrează numărul de posibilităţi de excitaţie şi de absorbţie cu noi frecvenţe clasic inexistente, dar pe care experienţa le pune în evidenţă cu atîta claritate.

Primită la redacţie la 28 aprilie 1967

Institutul politehnic Braşov

BEZIEHUNGEN ZWISCHEN QUANTENMECHANIK UND KLASSISCHER PHYSIK

Es werden die mathematischen und physikalischen Aspekte der wichtigsten Bewegungsdarstellungen in der Quantenmechanik in ihrer Beziehung zur klassischen Physik aufgezeigt. Es werden die Beziehungen der allgemeinen Formeln und der Bewegungsgesetze sowohl zur Newtonschen als auch zur analytischen Mechanik geprüft, so wie die Beziehungen zwischen Quantenmechanik und geometrischer Optik, Wellenoptik und klassischer Strahlungstheorie. Ferner folgen die Beziehungen zur quasiklassischen Quantentheorie der Materie und die Darstellung der Beziehungen zur relativistischen Quantenmechanik der Felder.

BIBLIOGRAFIE

1. I. V. Kuznetov *Prinţip sootvestsvia v sovremennoi fizike i egofilosofskoe znacenie.* Gostehizdat, Moscova, 1948.
2. I. Placinteanu, *Mecanica analitică şi vectorială.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1960.
3. D. I. Blohintev, *Bazele mecanicii cuantice.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1954.
4. L. Landau-E-Lifsits, *Teoria cîmpului.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1962.
5. L. Landau-E-Lifsits, *Mecanica cuantică.* Ed. tehnică, Bucureşti 1965.
6. W. Heitler, *Teoria cuantică a radiaţiei* (Ediţia rusă) GITTI Moscova, 1940.
7. M. A. Lavrentiev—L. A. Liusternic *Curs de calcul variaţional.* Ed. Tehnică, Bucureşti, 1955.
8. M. Meyer, *Cîmpuri cuantice şi particole elementare.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1959.
9. M. Mesiah, *Mecanique cuantique.* Ed. Dunot, Paris, 1964.
10. H. Bethe, *Mecanica cuantică a sistemelor celor mai simple.* (Ediţia rusă), GNTI, 1935.
11. L. De Broglie, *Introducere în mecanica ondulatorie.* (Ediţia rusă), GNTI, Kiev, 1934.
12. A. I. Ahiezer V. Beresteţki, *Electrodinamica cuantică.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1958.
13. G. Landsberg, *Optica.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1958.
14. M. Born, *Optik.* Ed. Springer, Berlin, 1934.
15. V. Vîlcovici ST. Bălan, V, Voinea, *Mecanica teoretică.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1956.
16. H. Bethe, A. Hoffman-Schweber *Mezons and fields.* Ed. Evanston. N. Y., 1959.
17. V. A. Fock, *Naciala kvantovoi mehanik.* KUBUCI, 1932.
18. R. Courant, D. Hilbert, *Metodele fizicei matematice.* (Ediţia rusă). GTTI, 1935.
19. J. Neumann, *Mathematische Grundlagen der Qantenmechanik.*
20. A. Somerfeld, *Atombau und Spectrallinien.*
21. M. Plank *Teoria radiaţiei termice.* (Ediţia rusă). GNTI, Moscova, 1935.
22. H. A. Lorentz, *Teoria radiaţiei,* (Ediţia rusă) Gostehizdat, 1941.
23. M. A. Leontovici, *Staticeskaia fizika.* Gostehizdat, 1944.
24. Münster, *Prinzipien der statistischen Mechanik*-Handb. der Phys. Springer. Verlag, III/2 (1959)
25. I. Tamm, *Bazele teoriei electricităţii.* Ed. Tehnică, Bucureşti, 1957.
26. V. Novacu, *Introducerea în electrodinamică.* Ed. Academiei, Bucureşti, 1955.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

F 762

TOM. 20, Nr. 10
1968

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

INDEX ALFABETIC

	Nr.	Pag.
APOSTOL, CONSTANTIN : Teoria spectrală și calculul funcțional	5	635
APOSTOL, C. și GÎNDAC, F. : Proprietăți algebrice ale rădăcinilor operatorilor spectrali	8	1115
BALÁZS, M.: Asupra metodei coardei pentru rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare	2	129
BALÁZS, M și BÎRSAN, F. : Asupra metodei hiperbolelor tangente aplicată la rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare	6	789
BALÁZS, M. și GOLDNER, G. : Despre rezovlarea ecuațiilor operaționale neliniare prin metoda parabolelor tangente	6	801
BALÁZS, M. și JANKÓ, B. : Asupra rezolvării ecuațiilor operaționale neliniare prin metoda hiperbolelor tangente	6	809
BALÁZS, M. și vezi GOLDNER, G. : Asupra metodei coardei și a unei modificări a ei pentru rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare	7	981
BARBU, V. : Ecuații funcționale neliniare în spații Banach și probleme la limită	2	137
BEJU, IULIAN : Asupra ecuațiilor teoriei elasticității în coordonate oarecare	4	457
BÎRSAN, F. și vezi BALÁZS, M. : Asupra metodei hiperbolelor tangente aplicată la rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare	6	789
BRANTSCH, KARIN și PASCU, DORINA : Asupra mersului la întîmplare restrîns	8	1119
BUCUR, FLORICA : Asupra valuărilor semiinelelor de transformări interioare	2	165
CĂZĂNESCU, VIRGIL, EMIL : Despre categoria cvasimașinilor	5	669
CEANGĂ, EMIL și vezi DRĂGAN, PETRE : Cercetări privind instruirea automatelor în vederea clasificării	3	321
CHIRICĂ, L. M. : Contribuție la studiul categoriilor de automate	7	957
CÎRNU, MIRCEA : Transformarea Laplace a funcțiilor distribuționale și ultradistribuționale	7	949
COHN, H. : Asupra fluctuației sumelor de variabile aleatoare dependente	2	169
COROIAN, I. și vezi JANKÓ, B. : Metoda Newton-Kantorovici pentru ecuații operaționale neliniare depinzînd de un parametru	10	1489
COȚIU, A. : Asupra unor formule de cvadratură care se obțin din procedee de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale	6	819
CRAIOVEANU, MIRCEA : Grupuri Lie-Banach de transformări ce lasă invariant un obiect geometric	6	833

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 10, P. 1595–1599, BUCUREȘTI, 1968

Nr. Pag.

CRAIU, MARIANA și ROȘCULEȚ, MARCEL, N. : Cercetări asupra seriilor trigonometrice.VII.Calculul coeficienților seriei Fourier asociată unei funcții neintegrabile de singularități algebrico-logaritmice oarecare 2 173

CRAIU, MARIANA și ROȘCULEȚ, MARCEL, N. : Ecuația $\frac{\partial u^{2m}}{\partial x_1^{2m}} + \frac{\partial u^{2m}}{\partial x_2^{2m}} + \ldots + \frac{\partial u^{2m}}{\partial x_n^{2m}} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ iterată 9 1293

CRĂCIUN, CONSTANTIN, V. : Δ — dominare și dominare condiționată în gramatica algebrică 5 683

CRISTESCU, ROMULUS : Operatori liniari mărginiți pe spații liniare reticulate topologice 9 1313

CUCUREZEANU, ION : O generalizare a teoremei lui Clement 6 841

CUCUREZEANU, ION : Imposibilitatea rezolvării ecuației diofantice $1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (m-n)^n = m^n$, unde $m, n > 1$ 8 1125

DELEANU, ARISTIDE : Asupra unei teoreme privind sistemele Postnikov . . . 3 315

DINU, LIVIU : Asupra mișcării Couette magnetice cu perete permeabil 8 1131

DOBRE, A. și vezi FIRESCU, D. și MUJA, A. : Un model de așteptare pentru o problemă de aprovizionare 8 1147

DRAGOMIRESCU, MIHAI : Asupra sensitivității în programarea liniară . . . 7 965

DRĂGAN, IRINEL : Un algoritm lexicografic pentru rezolvarea programelor polinomiale în variabile binare 8 1135

DRĂGAN, PETRE și CEANGĂ, EMIL : Cercetări privind instruirea automatelor în vederea clasificării 3 321

ENE, HORIA, I. : Asupra mișcării fluidelor compresibile în prezența unui corp poros omogen 9 1317

FABIAN, Cs., RUDEANU, S., și WEISZ, Gh. : Rezolvarea problemelor de programare pseudobooleană liniară cu ajutorul unui calculator electronic 10 1447

FIRESCU, D., MUJA, A. și DOBRE, A. : Un model de așteptare pentru o problemă de aprovizionare 8 1147

FIRESCU, D. și TĂUTU, P. : Modele stohastice de cinetica populațiilor 10 1463

FORNVALD, F. și vezi JANKÓ, B. și GAIDICI, A. : Asupra metodei lui Newton aplicată la rezolvarea ecuațiilor funcționale neliniare 8 1169

FRĂȚILĂ, ELENA : O metodă statistică pentru calculul lungimii unui arc de curbă plană 8 1153

GABRIEL, VIORICA și SERDÜLT, ILDIKO : Generalizarea metodei lui Schulz pentru calculul inversei unei matrici 7 969

GAIDICI, A. și vezi JANKÓ, B. și FORNVALD, F. : Asupra metodei lui Newton aplicată la rezolvarea ecuațiilor funcționale neliniare 8 1169

GAȘPAR, DUMITRU : O proprietate de comutativitate a pseudorezolvantei . . 2 189

GHEORGHIȚĂ, Șt. I. : Asupra mișcărilor liniare în mediile poroase neomogene 4 469

GÎNDAC, F. și vezi APOSTOL, C. : Proprietăți algebrice ale rădăcinilor operatorilor spectrali 8 1115

GODINI, GLICERIA : Despre modulele de convexitate uniformă slabă 3 335

GOLDNER, G. și vezi BALÁZS, M. : Despre rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare prin metoda parabolelor tangente 6 801

GOLDNER, G. și BALÁZS, M. : Asupra metodei coardei și a unei modificări a ei pentru rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare 7 981

	Nr.	Pag.
GUIAŞU, SILVIU : Modelul informaţional al teoriei învăţării	4	481
HIRIŞ, VIOREL : Operatori realizaţi de automate finite	4	497
HOMENTCOVSCHI, DOREL : Asupra mişcării unui fluid compresibil perfect conductor în jurul unui profil subţire cu grosime	2	191
ISTRĂŢESCU, IOANA şi vezi ISTRĂŢESCU, VASILE : Operatori normaloizi	4	503
ISTRĂŢESCU, VASILE şi ISTRĂŢESCU, IOANA : Operatori normaloizi	4	503
ISTRĂŢESCU, VASILE : Operatori hyponormali (III)	8	1159
JANKŐ, B şi vezi BALÁZS, M. : Asupra rezolvării ecuaţiilor operaţionale neliniare prin metoda hiperbolelor tangente	6	809
JANKŐ, B., FORNVALD, F., GAIDICI, A. : Asupra metodei lui Newton aplicată la rezolvarea ecuaţiilor funcţionale neliniare	8	1169
JANKŐ, B. şi COROIAN, I. : Metoda Newton-Kantorovici pentru ecuaţii operaţionle neliniare depinzînd de un parametru	10	1489
LEMENY, A.. D. : Schiţă pentru o teorie aritmetică a sensului şi valorii	6	845
LUPU, MIRCEA : Asupra unei probleme din teoria mişcării plane staţionare a apelor arteziene	4	511
MARCOV, N. : Mişcarea fluidelor vîscoase electroconductoare în jurul profilelor subţiri (I).	2	199
MARCOV, N. : Mişcarea fluidelor vîscoase în jurul unor profile subţiri (II)	2	213
MARUSCEAC, I. şi NADIU, GH. : O interpretare a algoritmilor cu schema-graf în legătură cu maşinile turing şi algoritmii de tip Cerneavschi	7	991
MATEI, I. : Clasificarea grupurilor lui Lie reale neintegrabile cu cinci parametri	2	223
MATEI, I. : Asupra subgrupurilor grupului centroafin în trei variabile	10	1497
MAZILU, PETRIŞOR : Asupra determinării funcţiei de reprezentare conformă în cîteva cazuri particulare	4	519
MAZILU, PETRIŞOR : Metodă de rezolvare a unei probleme plane a elasticităţii. Domenii multiplu conexe	4	525
MĂRGĂRITESCU, EUGEN : Asupra unui criteriu pentru verificarea ipotezei nule din analiza dispersională	4	545
MĂRGĂRITESCU, EUGEN : Asupra interacţiunilor în analiza dispersională bifactorială	9	1323
MIHAI, ALEXANDRU : Conexiuni meromorfe	6	859
MIRON, RADU : Derivata Lie a obiectelor geometrice	8	1175
MOISIL, Gr. C. : Logica clasică a propoziţiilor de tip superior	2	237
MUJA, A. şi vezi FIRESCU, D. şi DOBRE, A. : Un model de aşteptare pentru o problemă de aprovizionare	8	1147
MUNTEAN, ION : Sinteza automatelor finite cu număr minim de stări	1	3
MURGULESCU, ELENA : Asupra unei probleme a lui H. Villat	10	1501
NADIU, GH. şi vezi MARUSCEAC, I. : O interpretare a algoritmilor cu schema-graf în legătură cu maşinile turing şi algoritmii de tip Cerneavschi	7	991
NÉMETI, L. : O metodă pentru determinarea tuturor circuitelor dintr-un graf	9	1333
NICOLAU, ALEXANDRU : Probleme la limită Riemann şi Hilbert cu singularităţi date şi cu date raţionale pe contur	1	15
OBĂDEANU, V. : Extinderea relaţiei de conjugare pe varietăţile neolonome	1	25
OPRESCU, EUGENIA : Conexiuni invariante pe un spaţiu Riemannian V_3 cu metrica nedefinită	5	697
PASCALI, DAN şi POP, DOINA : Funcţii analitice generalizate pe algebre Banach	3	341

Nr. Pag.

PASCALI, DAN : Asupra funcţiilor analitice generalizate vectoriale 7 1013
PASCU, DORINA şi vezi BRANTSCH, KARIN : Asupra mersului la întîmplare restrîns 8 1119
PETRILĂ, TITUS : Un algoritm pentru determinarea liniilor de curent în mişcarea plană în jurul unor profile simetrice 7 1019
PETRILĂ, TITUS : Asupra devierii unui jet de fluid ideal printr-un obstacol simetric 7 1025
POP, DOINA şi vezi PASCALI, DAN : Funcţii analitice generalizate pe algebre Banach 3 341
POP, IOAN : Mişcarea hidromagnetică nestaţionară cu sucţiune deasupra unui perete 8 1183
POPESCU, I. L. : Asupra unor corecţii de compresibilitate în dinamica gazelor [1] 4 551
POPOVICI, IULIAN : Asupra scufundării naturale a unei clase de spaţii lenticulare 5 723
RAISCHI, CONSTANTIN : Relaţia de dominare şi analiza algebrică contextuală 1 31
ROSINGER, ELEMÉR : Spaţii pseudotopologice. Scufundarea distribuţiilor D'_n în algebre 4 553
ROŞCA, RADU : Asupra transformărilor normale infinitezimale şi de dilataţie superficială nulă în spaţiul eliptic 1 43
ROŞCULEŢ, MARCEL, N. : Funcţii relativ convexe 1 55
ROŞCULEŢ, MARCEL, N. şi vezi CRAIU, MARIANA : Cercetări asupra seriilor trigonometrice. VII. Calculul coeficienţilor seriei Fourier asociată unei funcţii neintegrabile de singularităţi algebrico-logaritmice oarecare 2 173
ROŞCULEŢ, MARCEL, N. : Cercetări asupra invarianţilor integrali 5 731
ROŞCULEŢ, MARCEL, N. şi vezi CRAIU, MARIANA : Ecuaţia $\frac{\partial u^{2m}}{\partial x_1^{2m}} + \frac{\partial u^{2m}}{\partial x_2^{2m}} + \dots + \frac{\partial u^{2m}}{\partial x_n^{2m}} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ iterată 9 1293
RUDEANU, S. şi vezi FABIAN, Cs., WEISZ, Gh. : Rezolvarea problemelor de programare pseudobooleană liniară cu ajutorul unui calculator electronic 10 1447
RUS, IOAN, A. : Asupra unicităţii soluţiei problemei lui Dirichlet relativ la sisteme tari eliptice de ordinul al doilea 9 1337
SERDÜLT, ILDIKO şi vezi GABRIEL, VIORICA : Generalizarea metodei lui Schulz pentru calculul inversei unei matrici 7 969
SOFONEA, LIVIU : Reprezentări corespondente în mecanica cuantică şi în fizica clasică 10 1513
STRĂTILĂ, ŞERBAN : Elemente de analiză armonică (III). Mulţimi finite în analiza armonică 3 347
STRĂTILĂ, ŞERBAN : Elemente de analiză armonică (IV) 6 867
STROESCU, ELENA : Ecuaţia lui Pfaff în sensul teoriei distribuţiilor (I) 8 1189
SUCIU, ION : Contribuţii la teoria spectrală a reprezentărilor operatoriale ale algebrelor de funcţii 9 1359
SZÖCS, HUBA : O metodă de transformare a proceselor structural-omogene în ansambluri statistice 2 259
SZÖCS, HUBA : Determinarea unor mărimi statistice caracteristice în cazul proceselor stohastice diferite 9 1409
ŞABAC, ION, GH. : O metodă de aproximare în studiul mişcării fluidelor per-

Nr. Pag.

fecte compresibile 3 427
ŞABAC, ION, GH. : Asupra aproximării mişcării subsonice cu circulaţie a unui fluid compresibil în jurul unui obstacol circular 3 439
ŞABAC, MIHAI : Asupra structurii idealelor maximale ale unei algebre de funcţii mărginite 8 1203
ŞABAC, MIHAI : Asupra structurii operatorilor liniari şi continui definiţi pe D' cu valori în D', ce invariază subspaţiul liniar al distribuţiilor definite de funcţii local integrabile 8 1193
ŞANDRU, PETRU : Metode topologice în studiul schemelor cu contacte m-poziţionale 6 927
ŞCHIOP, ALEXANDRU : Aplicaţii ale teoriei operatorilor monotoni 9 1353
ŞERB, IOAN : Asupra unei proprietăţi a polinoamelor 7 1031
TĂUTU, P. şi vezi FIRESCU, D. : Modele stohastice de cinetica populaţiilor . . 10 1463
TELEMAN, NICOLAE : Clasificarea spaţiilor riemanniene V_4 omogene de tip relativist 1 67
TEODORESCU, ION, D. : Asupra spaţiilor A_2 cu conexiune afină 5 751
THEILER, GEORGE : Asupra lanţurilor cu legături complete neomogene . . . 4 583
THEILER, GEORGE : Asupra lanţurilor ergodice de ordin infinit 4 587
THEILER, GEORGE : Lanţuri cu legături complete ergodice de tip $O—M$ cu distanţă Fortet — problema restului 7 1037
TIŢĂ, NICOLAE, I. : Asupra operatorilor A — complet continui 7 1041
TOMESCU, IOAN : Asupra sintezei funcţiilor booleene cu ajutorul reţelelor disjunctive 2 267
TOMESCU, IOAN : Asupra problemei sintezei automatelor secvenţiale de tipul Mealy 5 763
TRANDAFIR, RODICA : Familii de curbe măsurabile din planul proiectiv . . . 2 283
TRANDAFIR, RODICA : Probleme de geometrie integrală ale reţelelor dintr-un spaţiu riemannian V_2 cu curbură constantă 4 599
TUDOR, C. : Asupra unei algebre de convoluţie 6 933
ŢEVY, IONEL : Teoreme de existenţă a funcţiilor implicite 4 605
URSIANU, EMILIANA : Asupra verificării ipotezei egalităţii mediilor cu ajutorul contrastelor 9 1417
VASILESCU, F. H. : O relativizare a cvasinilpotenţei pe algebre Banach 6 939
VĂDUVA, I. : Contribuţii la teoria estimaţiilor statistice ale densităţilor de repartiţie şi aplicaţii 8 1207
VOICULESCU PLEŞI, GEORGETA, I. : Metoda aproximativă I. Imai — E. Lamla — C. Iacob aplicată la studiul mişcării compresibile subsonice în jurul unor profile 4 613
VRĂNCEANU, G. G. : Asupra grupului de mişcare a spaţiului octavelor. . . . 8 1277
WEISZ, GH. şi vezi FABIAN, Cs., RUDEANU, S. : Rezolvarea problemelor de programare pseudo-booleană liniară cu ajutorul unui calculator electronic 10 1447
ZIDĂROIU, CORNELIU : Asupra problemei expansiunii optimale a unei întreprinderi 5 771
ZIDĂROIU, CORNELIU : Dezvoltarea optimală cu capacităţi de producţie minimale prestabilite 9 1429
ZSIDÓ, LÁSZLÓ : Speranţe condiţionate şi teorema lui Sinai 7 1045

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date din text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale. Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase gratuit. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor. Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

1968 DEC 13

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, A. DELEANU, M. JURCHESCU, **Topologie, Categorii, Suprafeţe riemanniene**, 1967, 394 p., 21,50 lei.

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.

I. COLOJOARĂ, **Elemente de teorie spectrală**, 1968, 311 p., 19,50 lei.

ROMULUS CRISTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.

I. CUCULESCU, **Procese Markov şi funcţii excesive**, 1968, 356 p., 19 lei.

N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.

ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, **Metode matematice în hidrogazodinamica subterană**, 1966, 582 p., 31 lei.

AL. GHIKA, **Analiza funcţională**, 1967, 594 p., 31 lei.

ALEXANDRU GHIKA, **Opera matematică**, 1968, 955 p., 50 lei.

S. GUIAŞU şi R. THEODORESCU, **Teoria matematică a informaţiei**, 1966, 227 p., 8,25 lei.

S. GUIAŞU, **Aplicaţii ale teoriei informaţiei. (Sisteme dinamice-Sisteme cibernetice)**, 1968, 350 p., 17 lei.

A. HALANAY, D. WEXLER, **Teoria calitativă a sistemelor cu impulsuri**, 1968, 313 p., 13 lei.

M. IOSIFESCU şi P. TĂUTU, **Procese stohastice şi aplicaţii în biologie şi medicină**, 1968, 345 p., 22 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, vol. II, 1966, 669 p., 38 lei.

S. STOILOV, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

IVAN SINGER, **Cea mai bună aproximare în spaţii vectoriale normate prin elemente din subspaţii vectoriale**, 1967, 386 p., 23 lei.

MARIUS I. STOKA, **Geometrie integrală**, 1967, 240 p., 9,75 lei.

SIMION SANIELEVICI, **Opera matematică**, 1968, 298 p., 15,50 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 20, NR. 10, P. 1445–1600, BUCUREŞTI, 1968

I. P. „Informaţia" – c. 5752

43831 **Lei 12.—**